Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές του ακόλουθου μαθήματος:

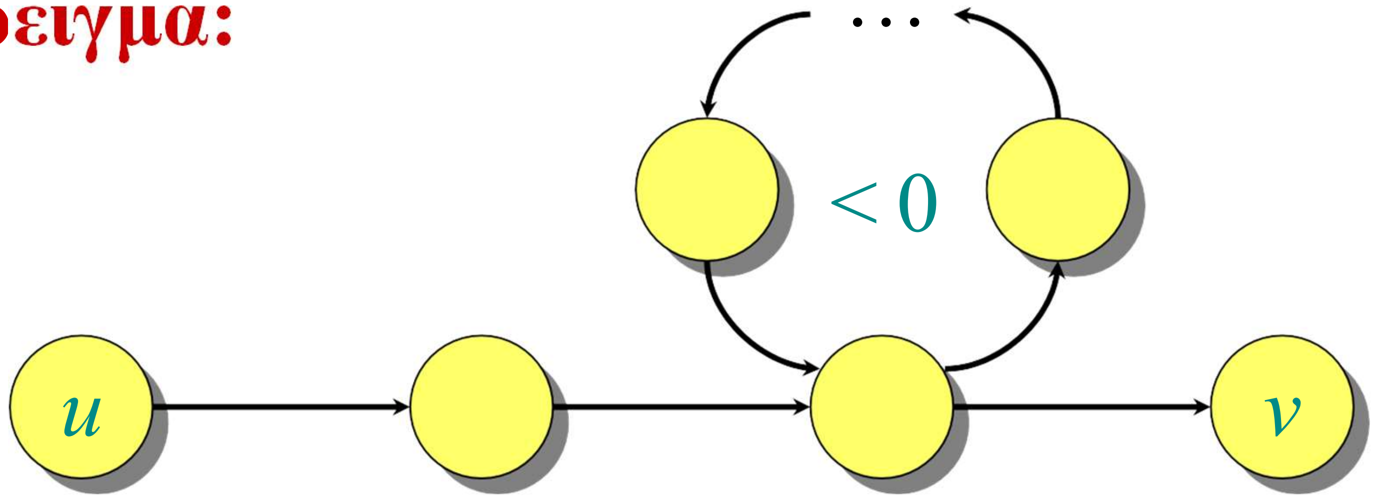
Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/

Κύκλοι Αρνητικού Βάρους

Υπενθύμιση: Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει ένα κύκλο αρνητικού βάρους τότε κάποια συντομότερα μονοπάτια δεν υπάρχουν.

Παράδειγμα:



Αλγόριθμος Bellman-Ford: Βρίσκει όλα τα συντομότερα μονοπάτια από μία κοινή ***αφετηρία*** $s \in V$ σε όλους τους κόμβους $v \in V$ ή προσδιορίζει ότι ένα κύκλος αρνητικού βάρους υπάρχει.

Αλγόριθμος Bellman-Ford

$d[s] \leftarrow 0$
for each $v \in V - \{s\}$
    do $d[v] \leftarrow \infty$

αρχικοποίηση

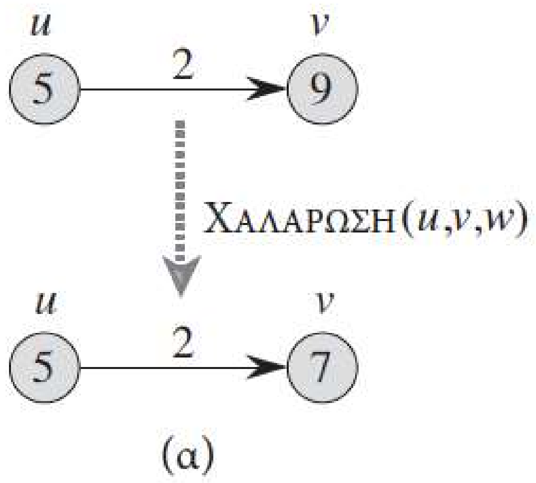
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$
    do for each edge $(u, v) \in E$
        do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
            then $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

Βήμα χαλάρωσης

for each edge $(u, v) \in E$
    do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
        then report that a negative-weight cycle exists

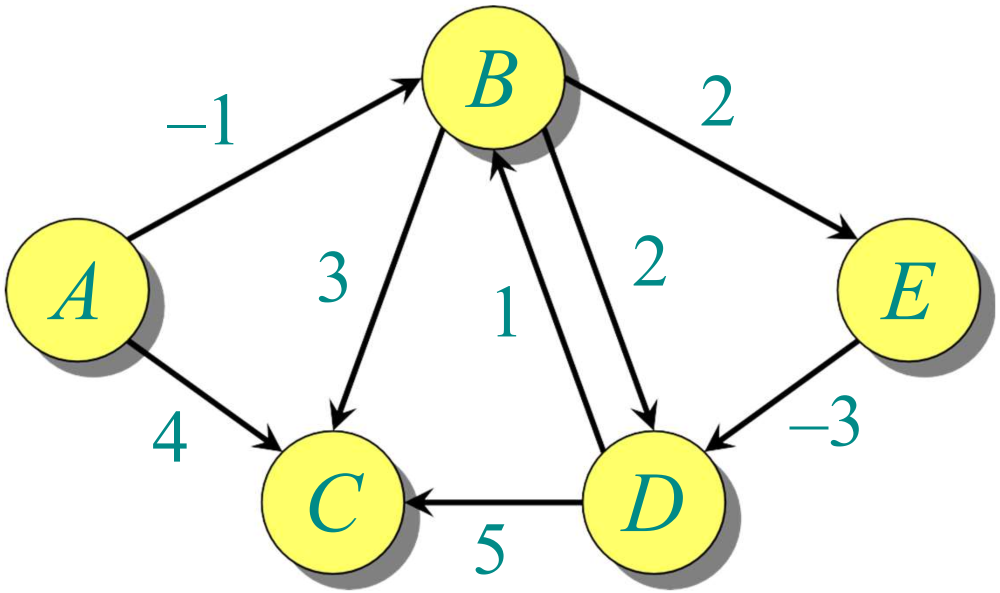
Στο τέλος, $d[v] = \delta(s, v)$, αν δεν υπάρχουν αρνητικού βάρους κύκλοι. Χρόνος $= O(VE)$.

Χαλάρωση ακμής

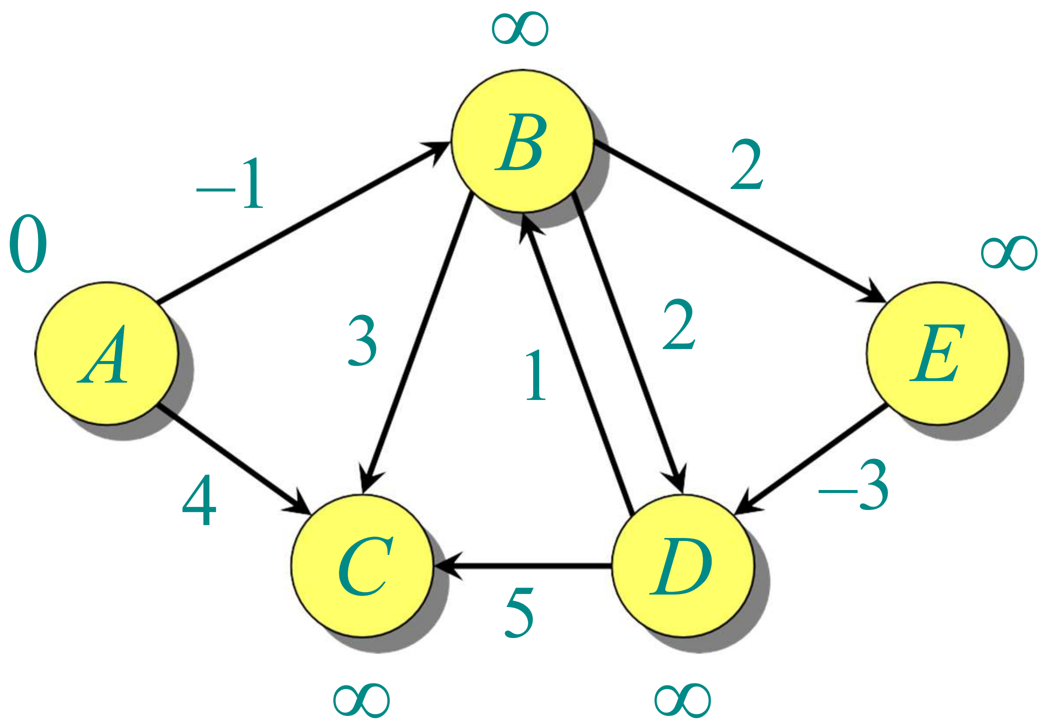


Σχήμα 24.3 Χαλάρωση μιας ακμής (u, v) με βάρος $w(u, v) = 2$. Εντός κάθε κόμβου αναγράφεται η αντίστοιχη εκτίμηση συντομότατης διαδρομής. **(α)** Δεδομένου ότι πριν από τη χαλάρωση έχουμε $v.d > u.d + w(u, v)$ η τιμή της $v.d$ μειώνεται. **(β)** Στην περίπτωση αυτή, πριν από την πράξη της χαλάρωσης έχουμε $v.d \leq u.d + w(u, v)$, και επομένως η χαλάρωση αφήνει την $v.d$ αμετάβλητη.

Παράδειγμα

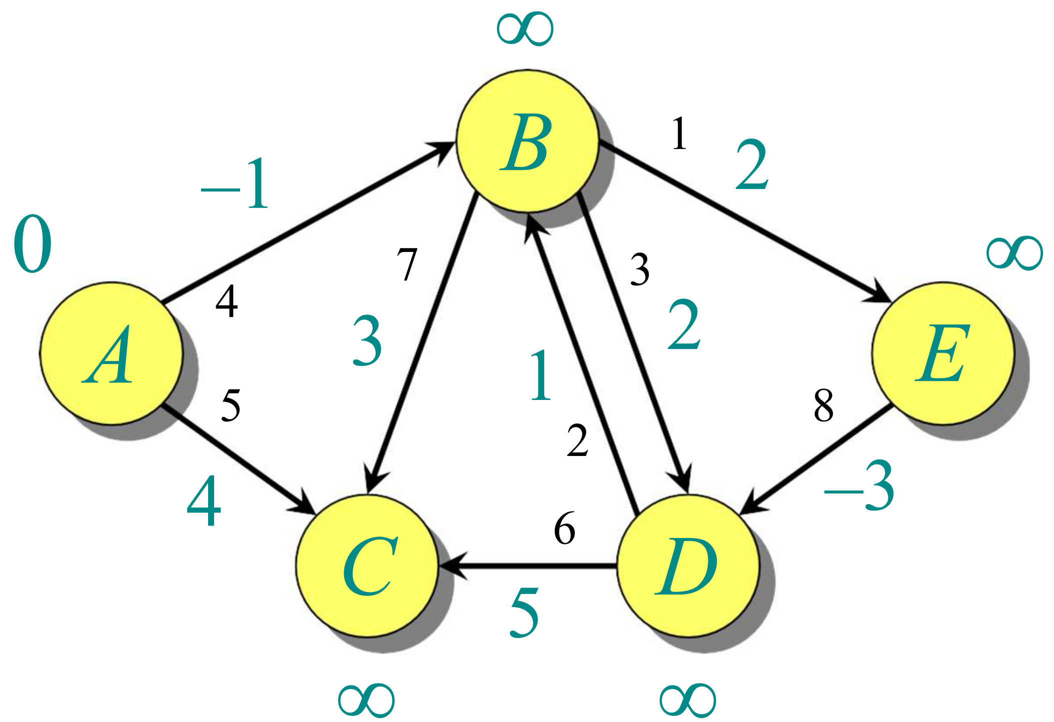


Παράδειγμα



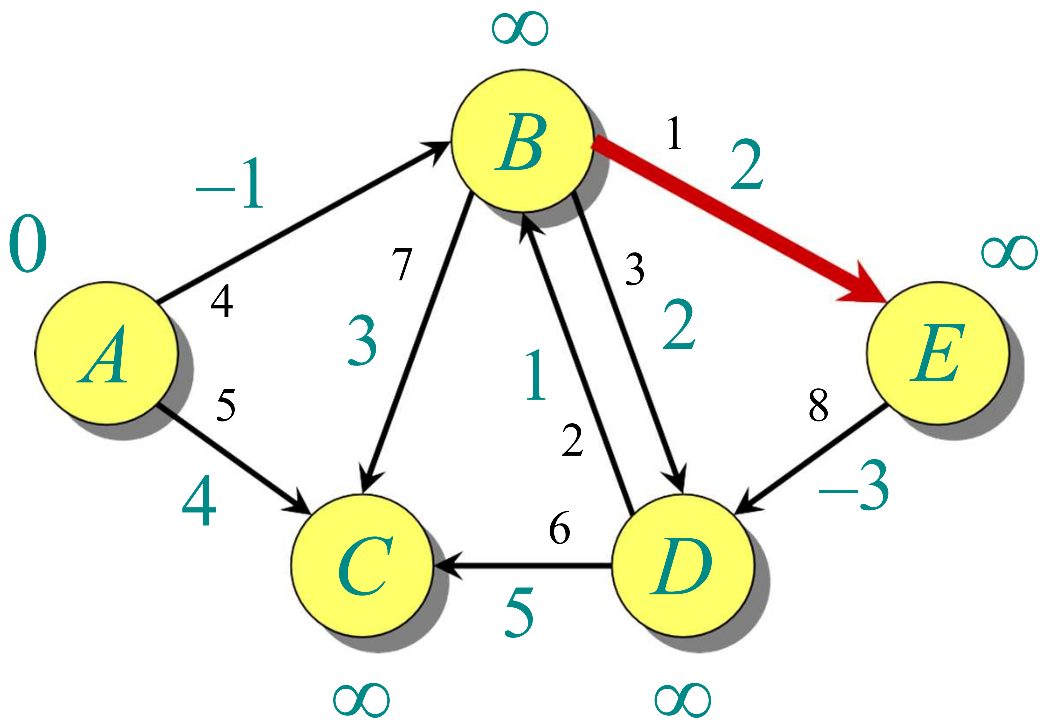
Αρχικοποίηση.

Παράδειγμα

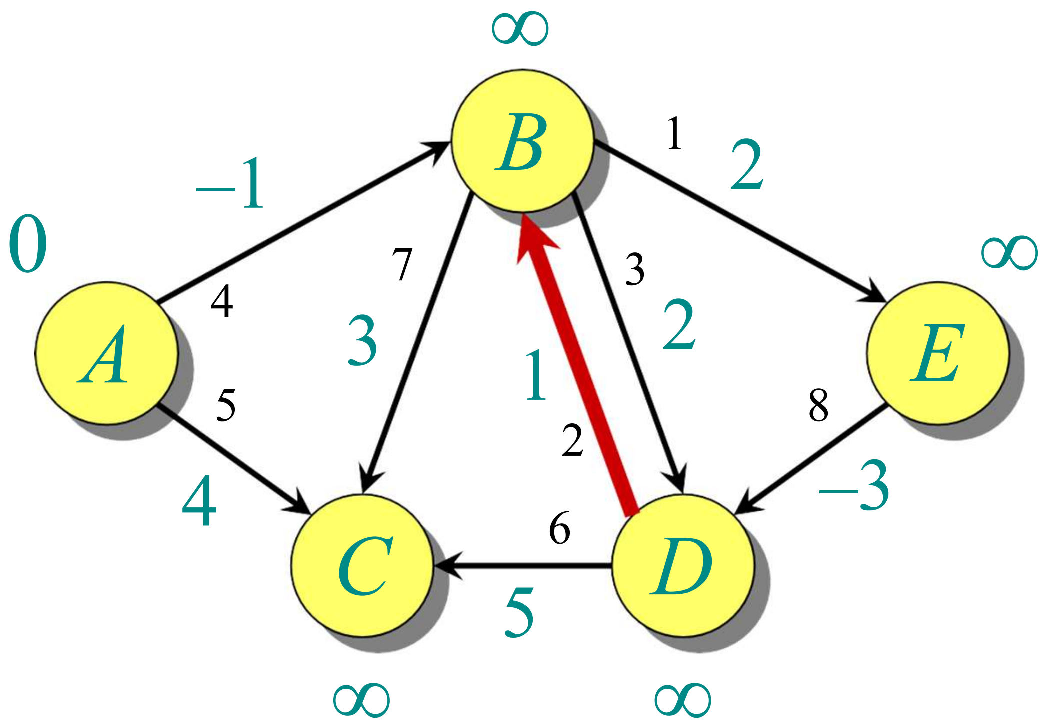


Σειρά των χαλαρώσεων ακμών.

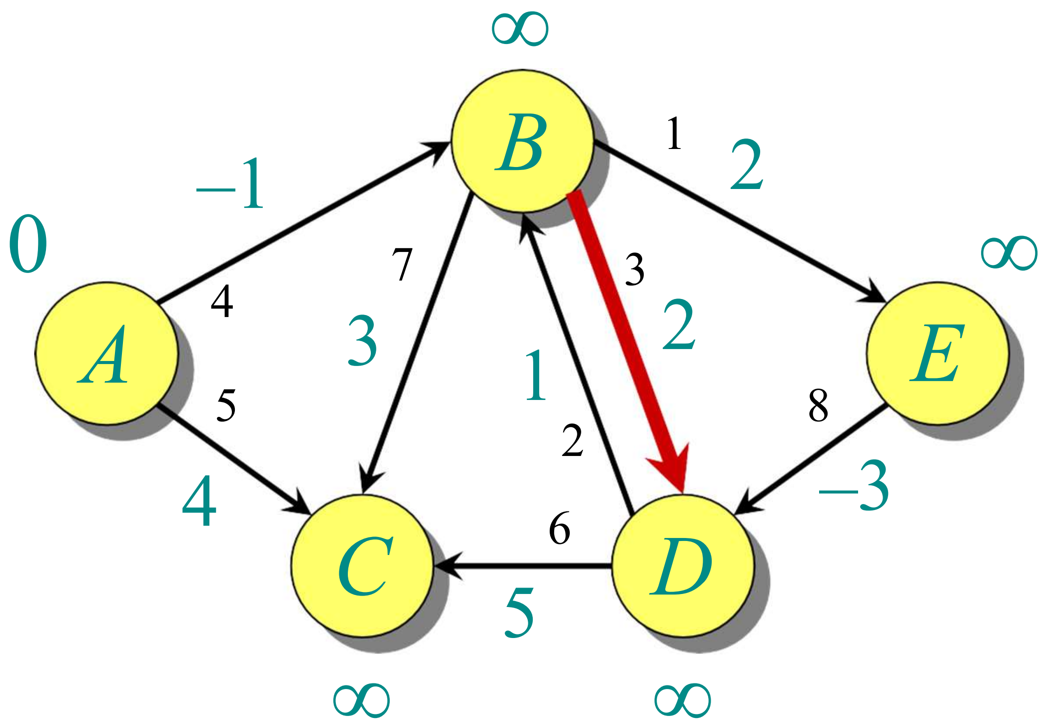
Παράδειγμα



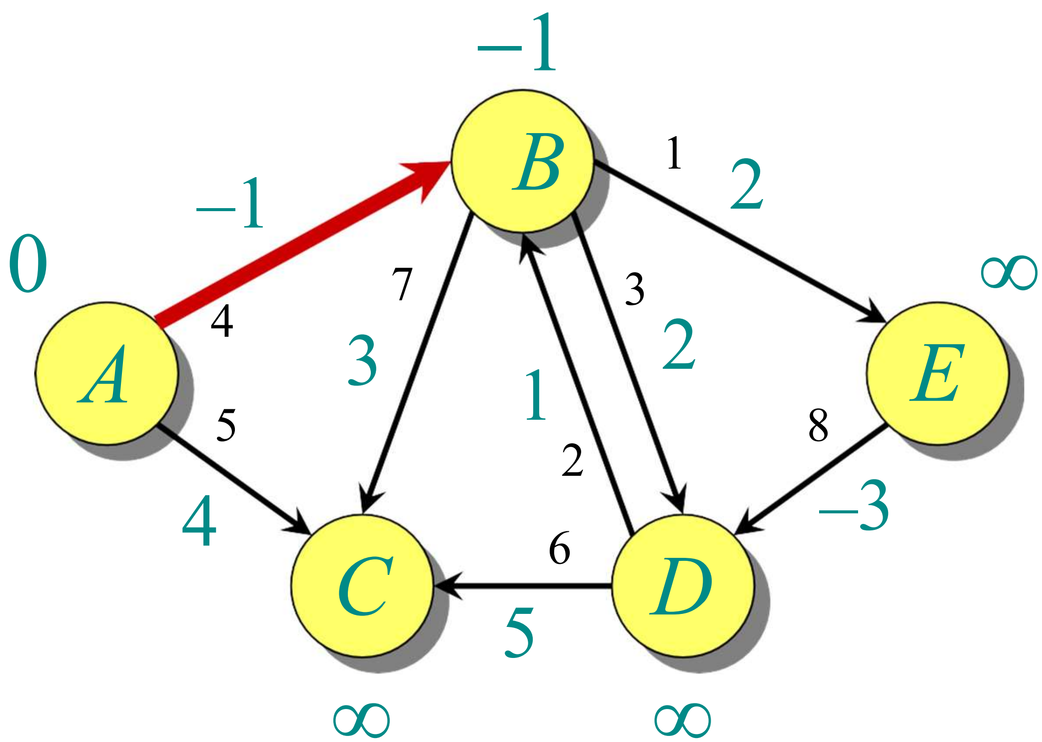
Παράδειγμα



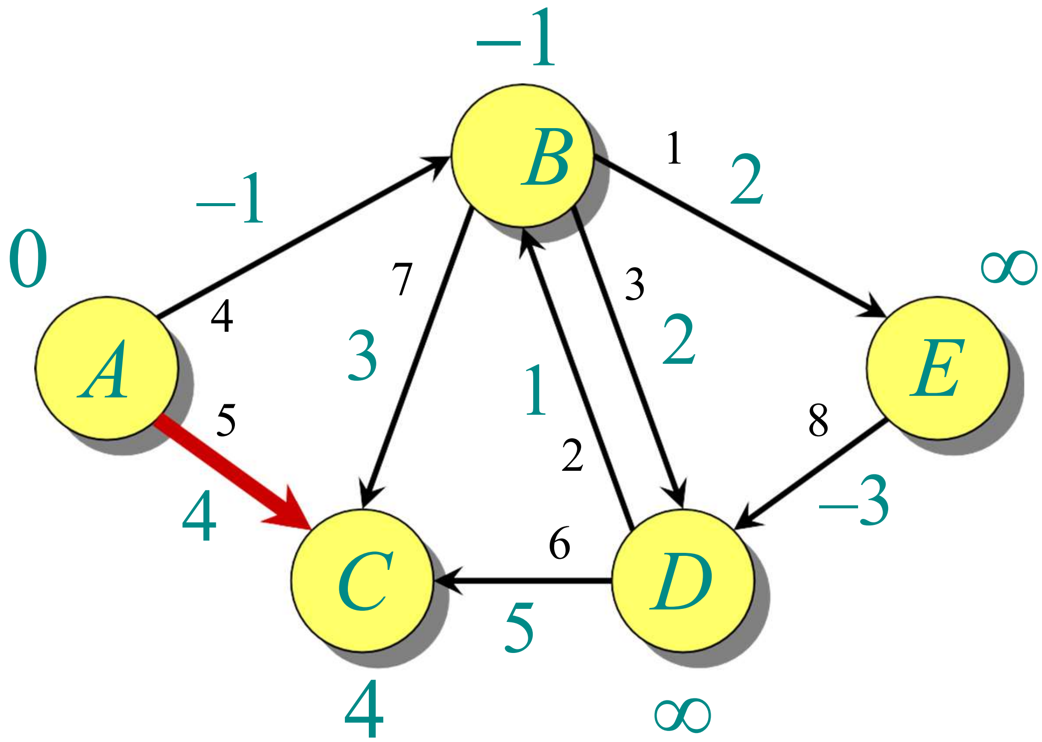
Παράδειγμα



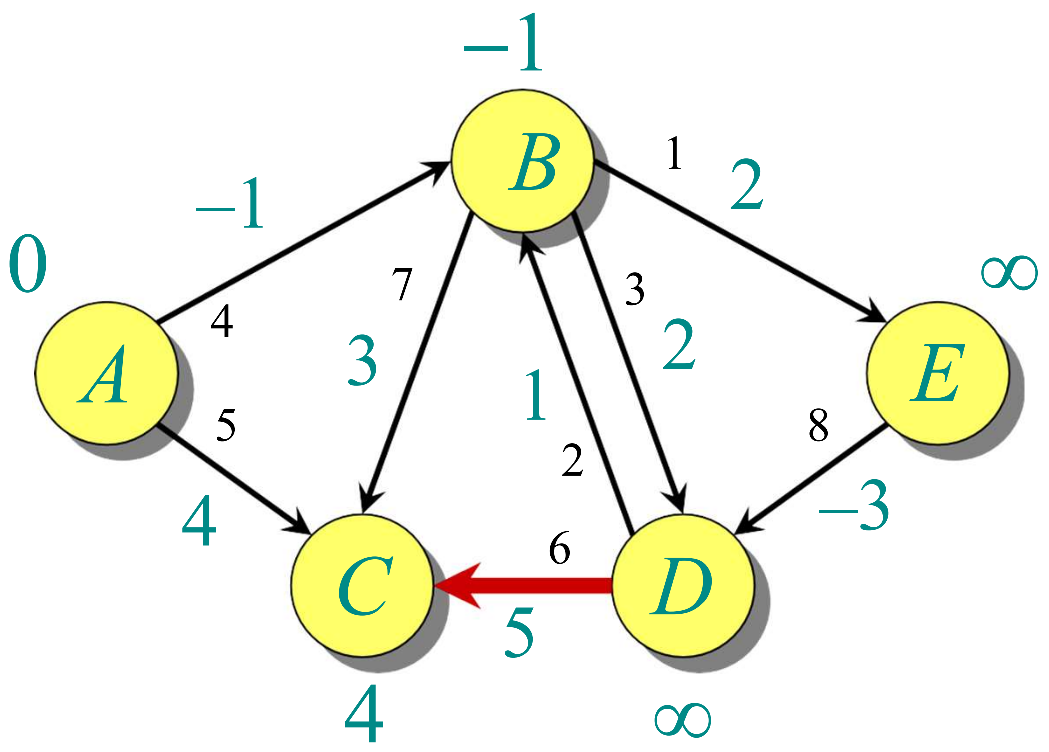
Παράδειγμα



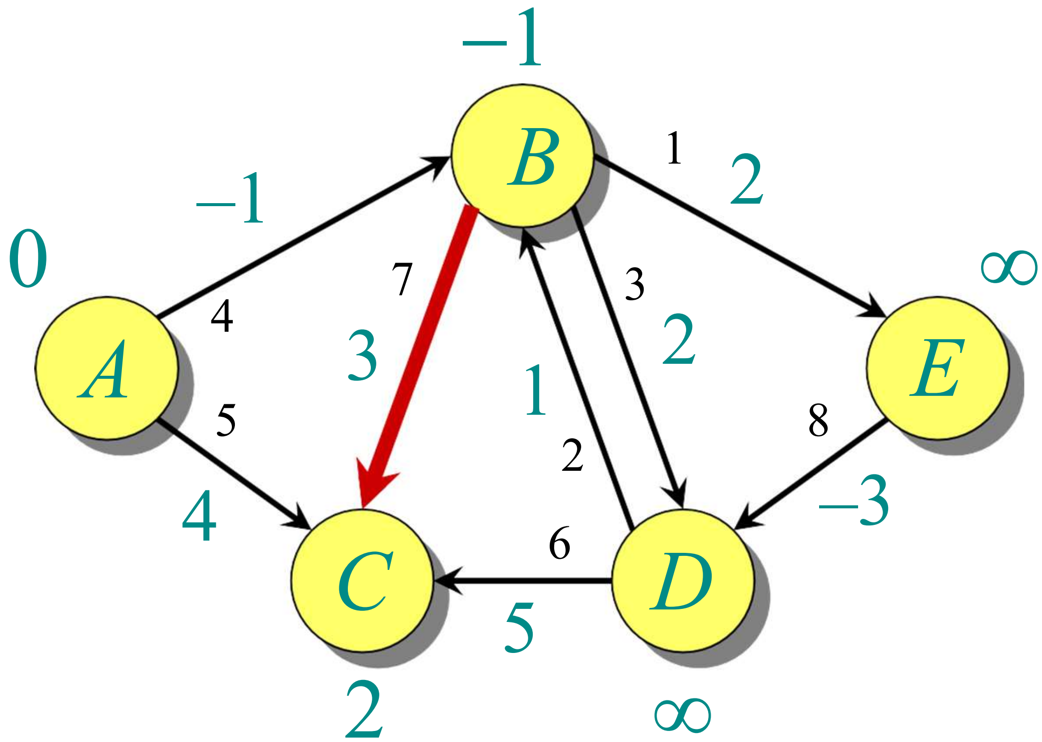
Παράδειγμα



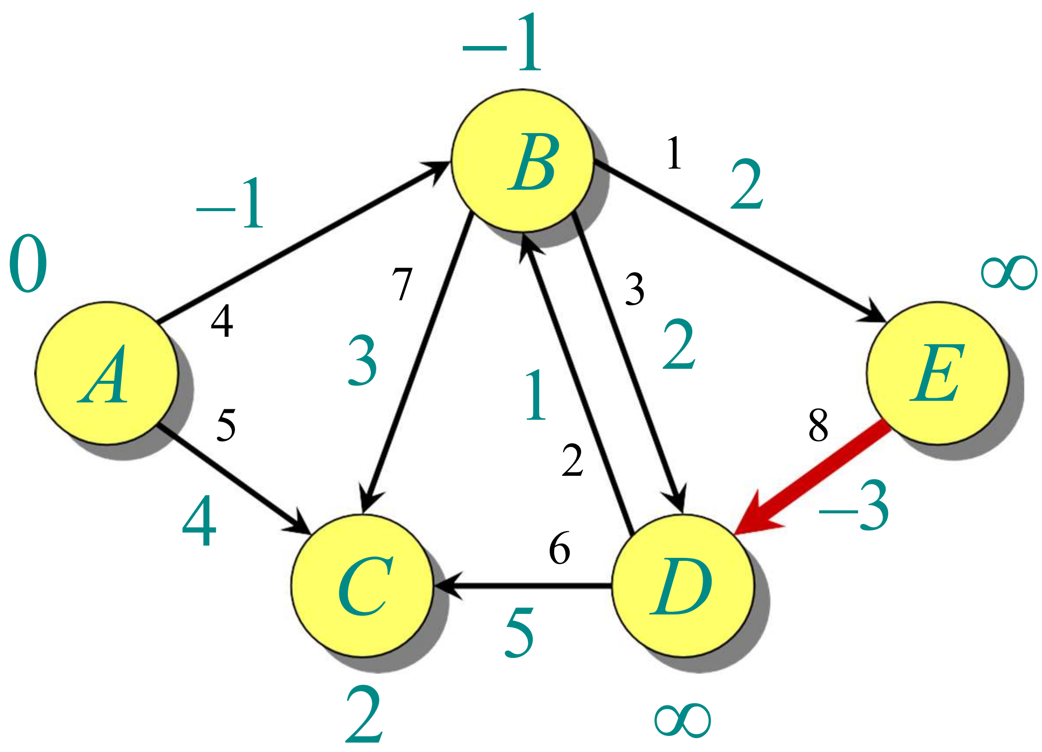
Παράδειγμα



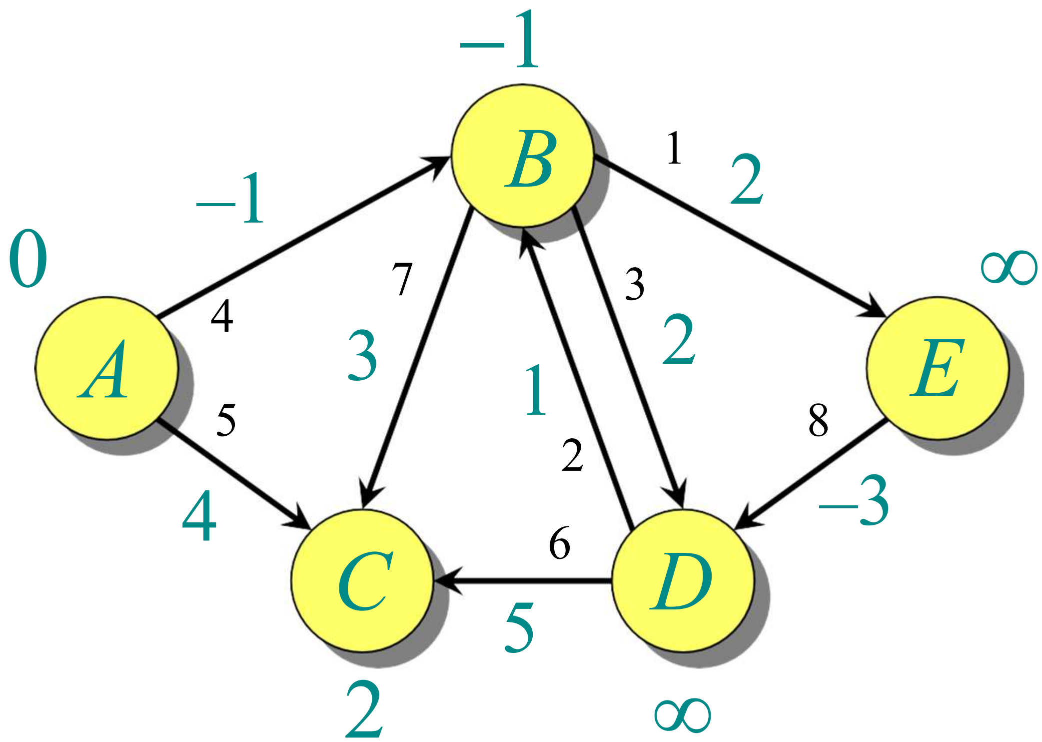
Παράδειγμα



Παράδειγμα

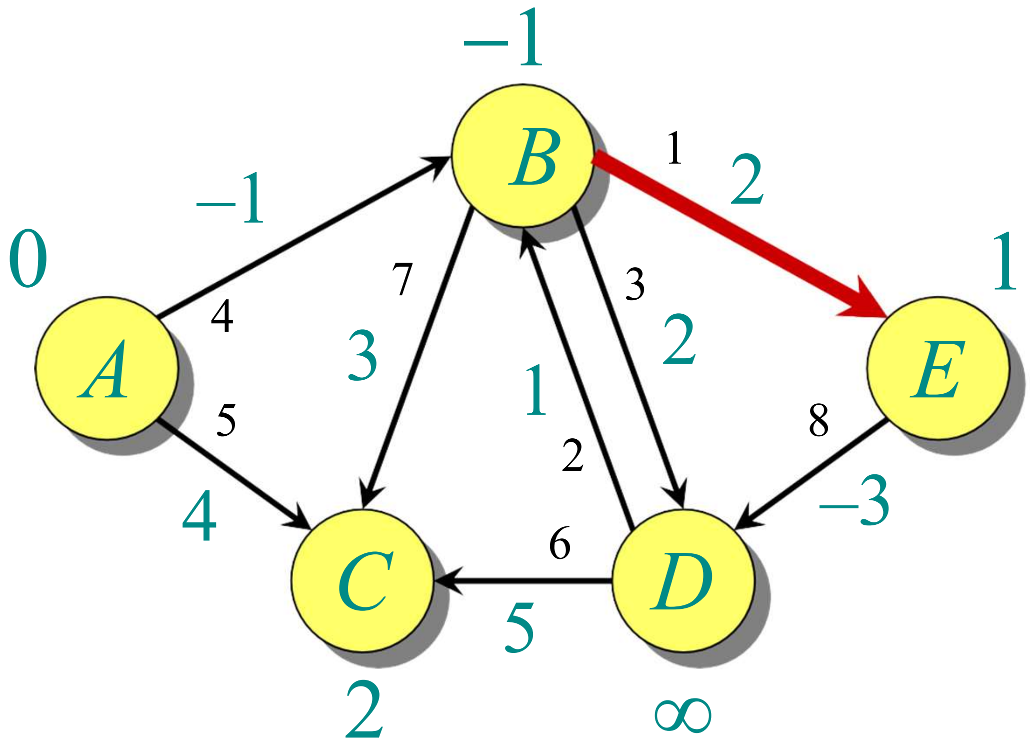


Παράδειγμα

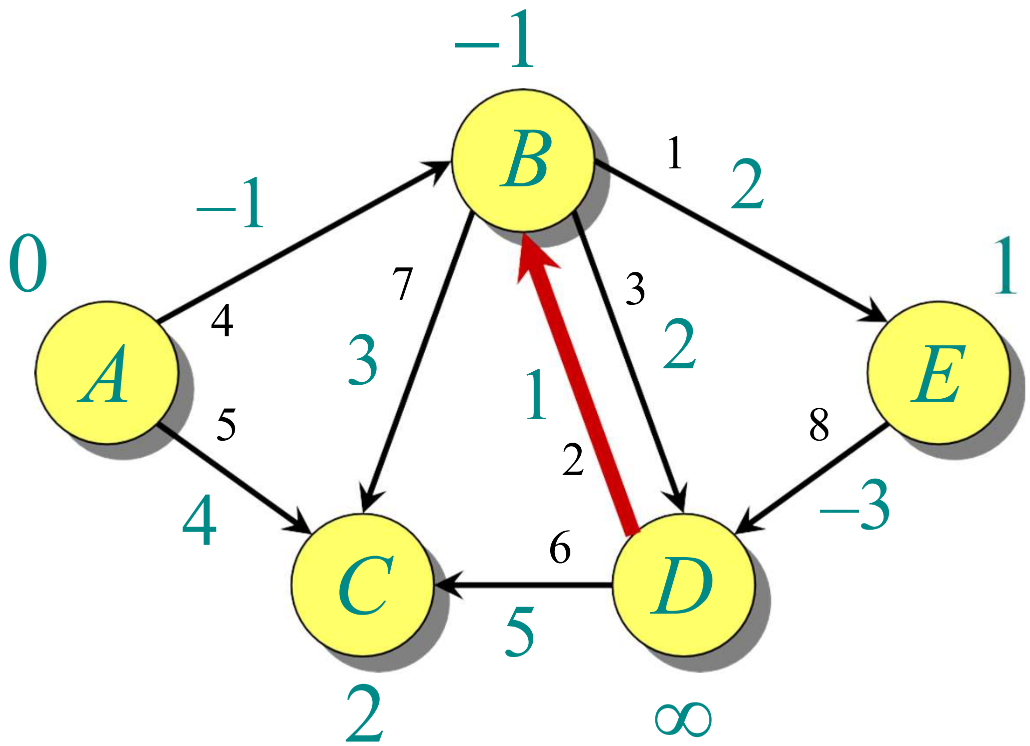


Τέλος του πρώτου περάσματος.

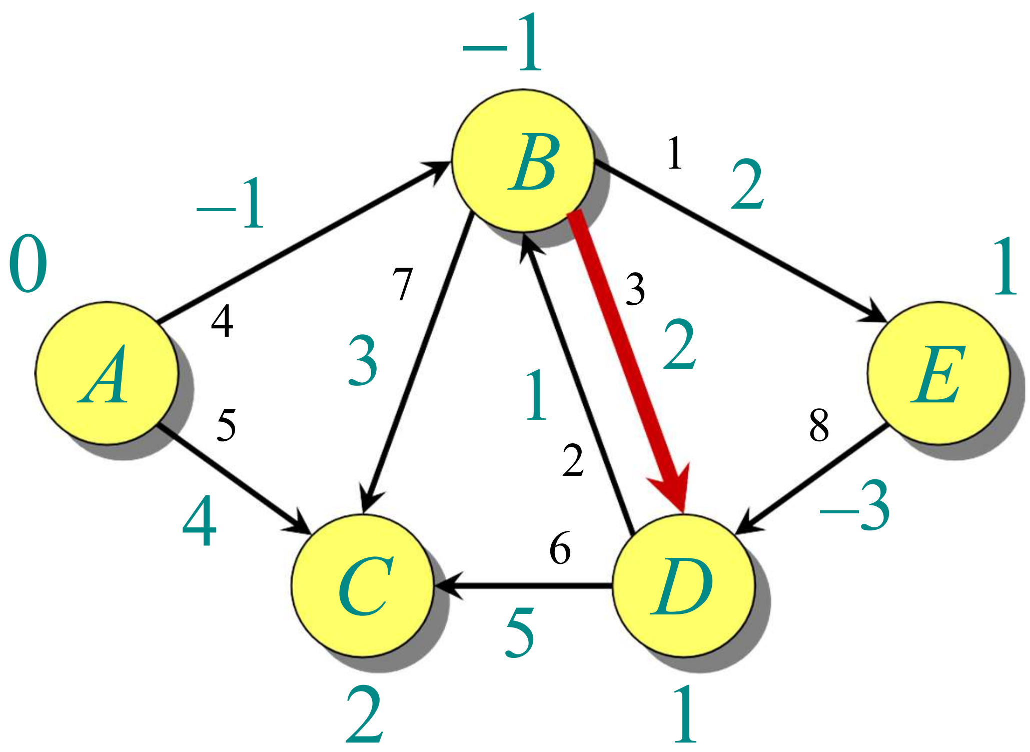
Παράδειγμα



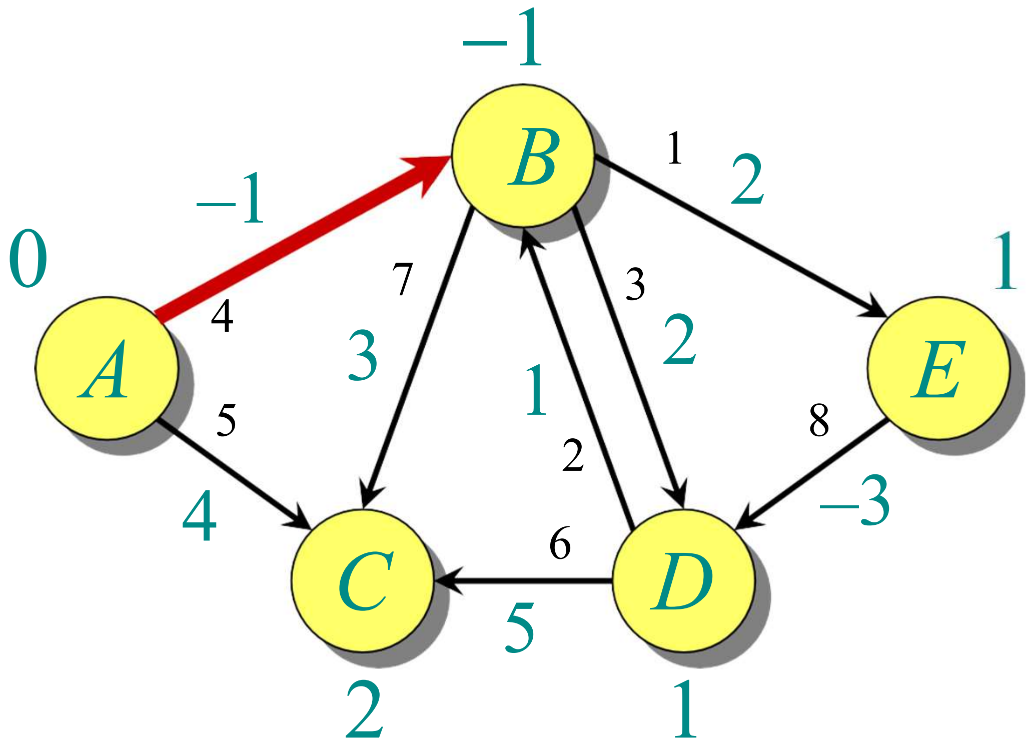
Παράδειγμα



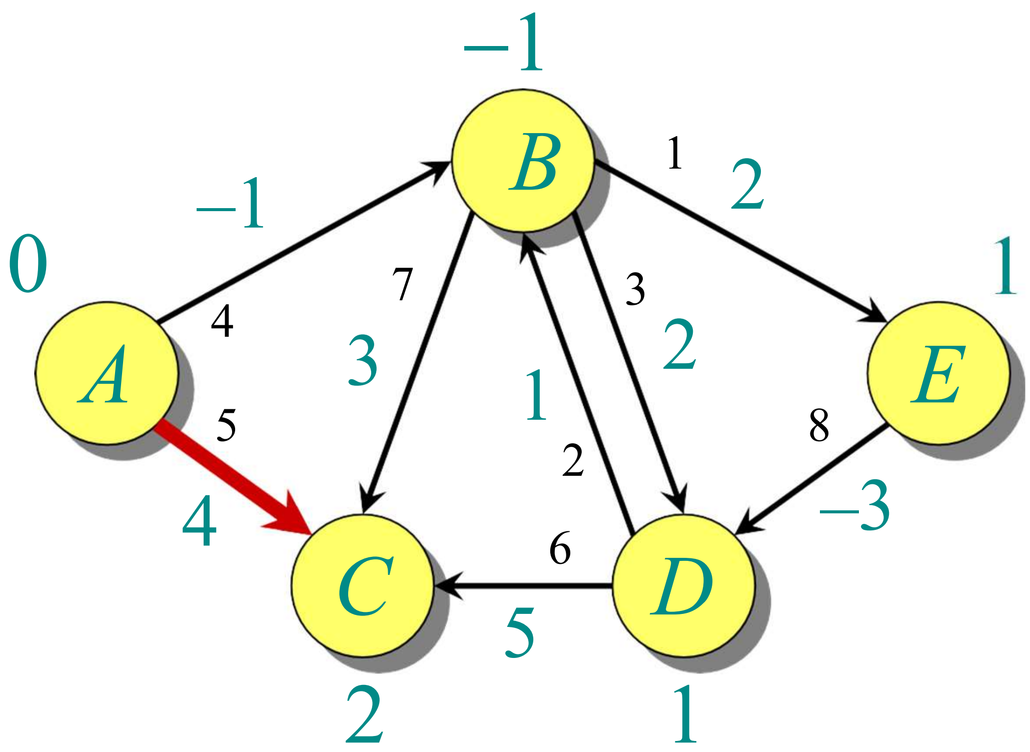
Παράδειγμα



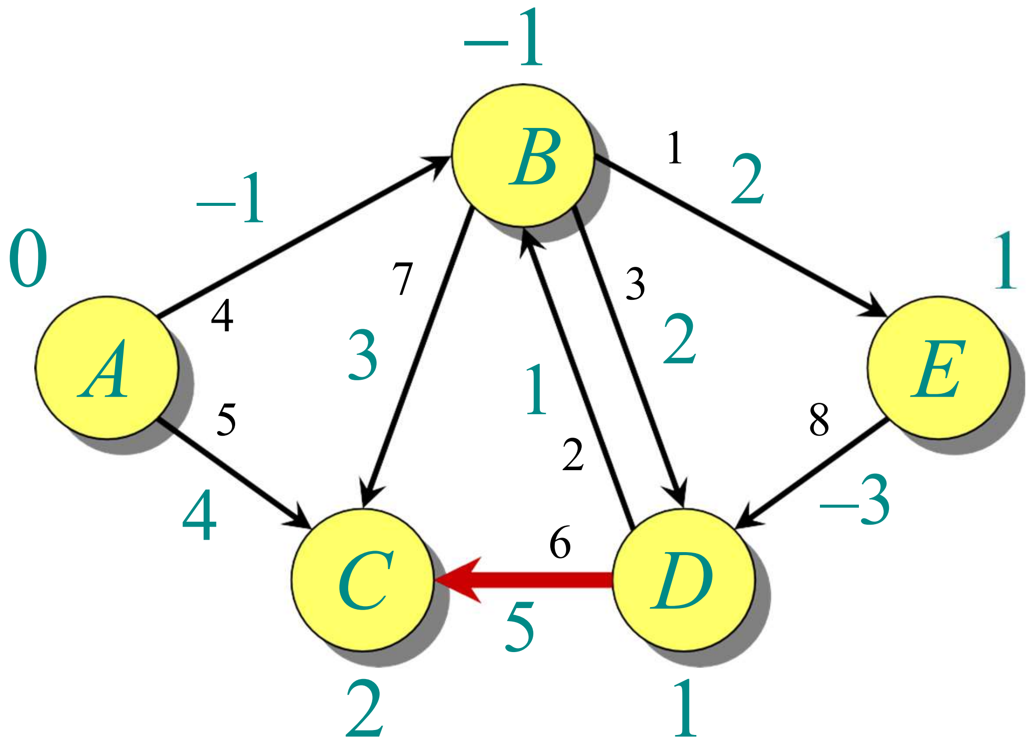
Παράδειγμα



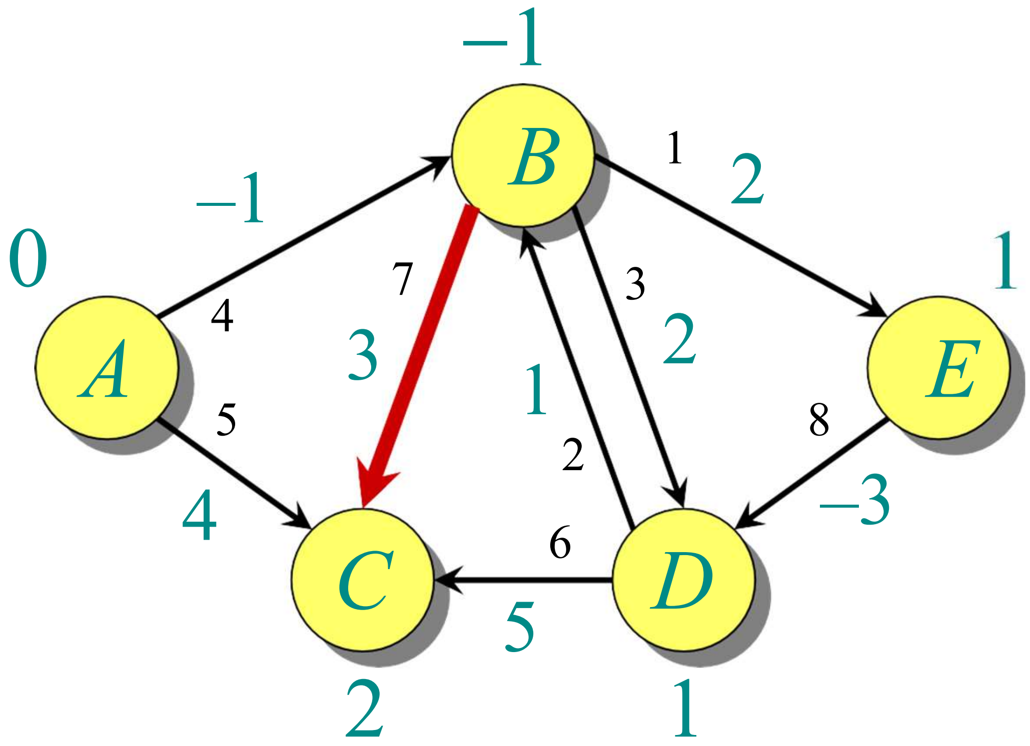
Παράδειγμα



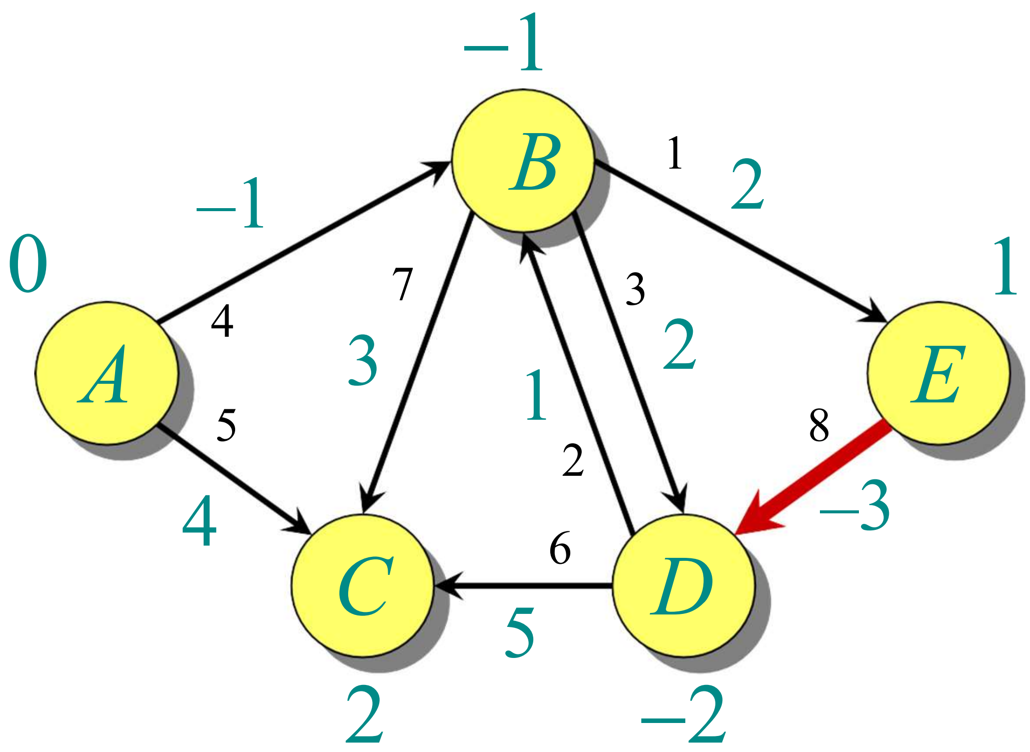
Παράδειγμα



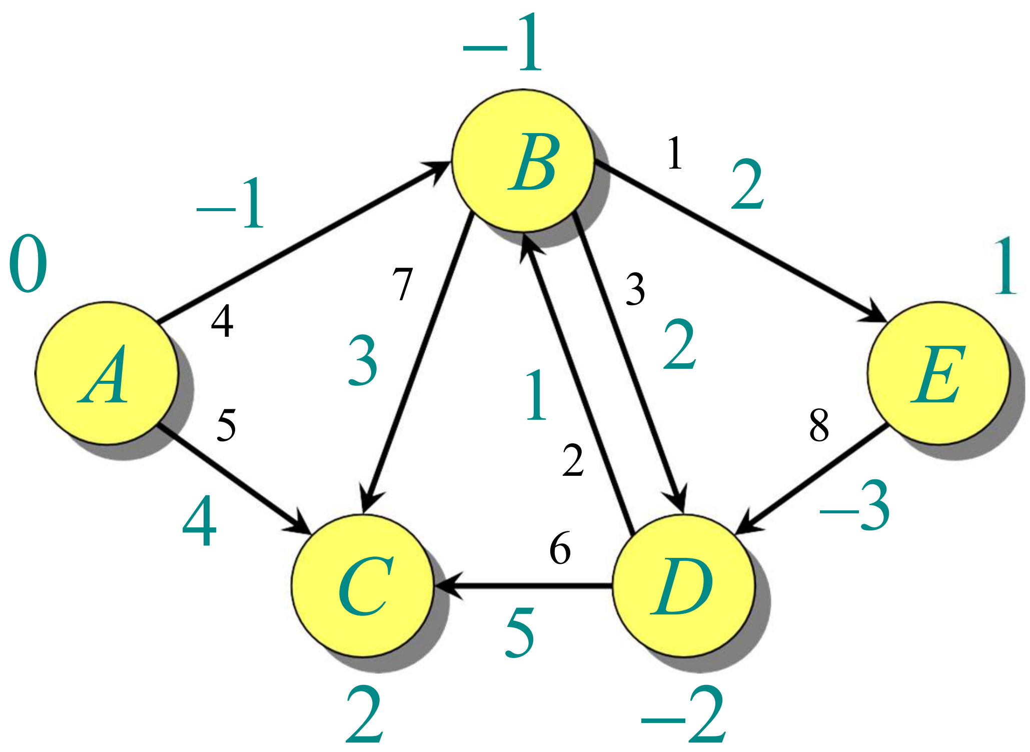
Παράδειγμα



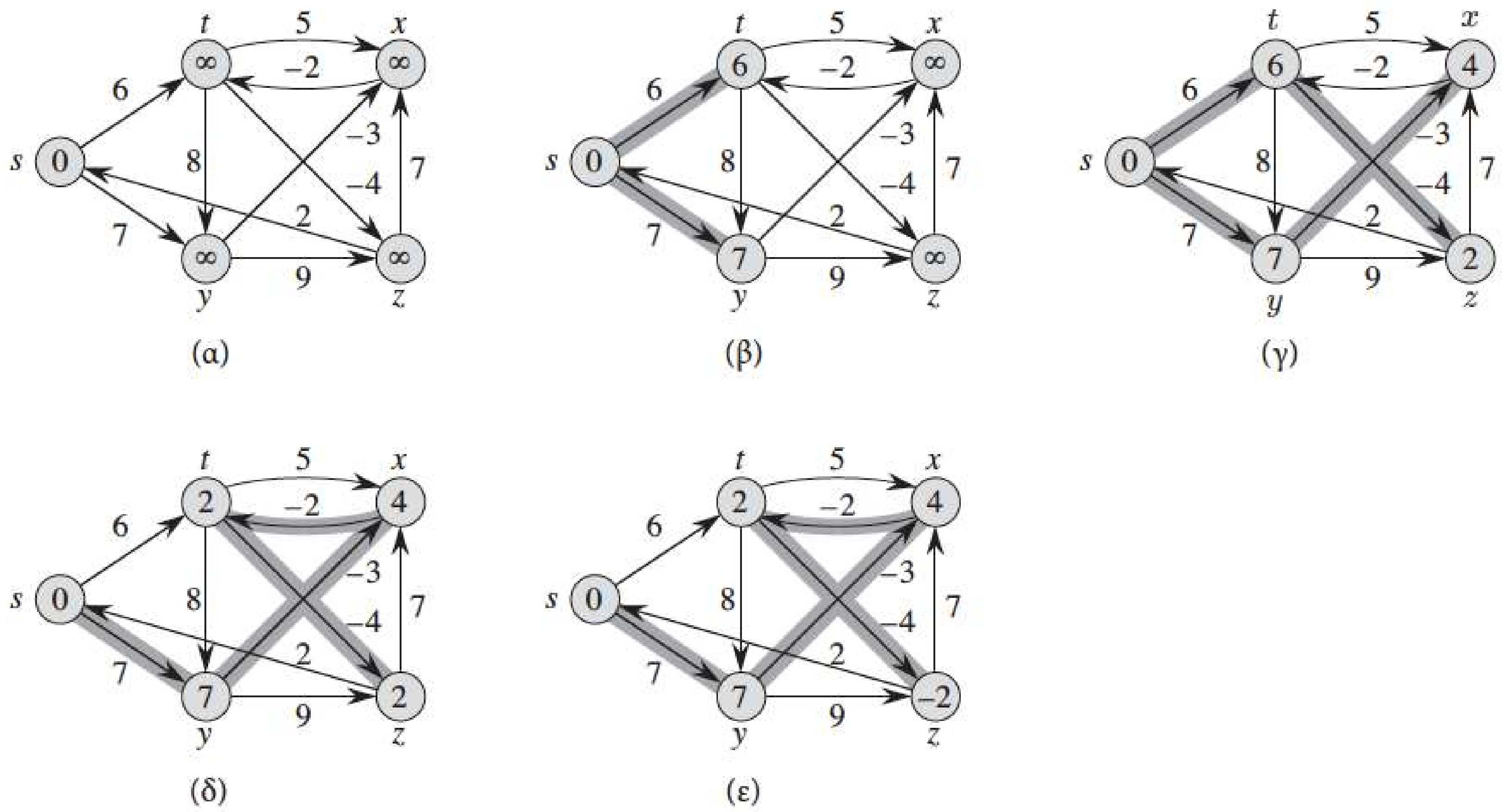
Παράδειγμα



Παράδειγμα



Τέλος του περάσματος 2
(και 3 και 4).



Σχήμα 24.4 Η λειτουργία του αλγορίθμου των Bellman-Ford. Ο αφετηριακός κόμβος είναι ο s. Εντός των κόμβων αναγράφονται οι τιμές των αντίστοιχων πεδίων d, ενώ οι σκιασμένες ακμές υποδεικνύουν τιμές του πεδίου προκατόχου: εάν η ακμή (u, v) είναι σκιασμένη, τότε $v.\pi = u$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η σειρά με την οποία εκτελούνται οι πράξεις χαλάρωσης στις ακμές είναι $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$. (α) Η κατάσταση του γραφήματος αμέσως πριν από την πρώτη διέλευση των ακμών. (β)–(ε) Η κατάσταση του γραφήματος μετά από κάθε διαδοχική διέλευση των ακμών. Οι τιμές των πεδίων d και π στο σχήμα (ε) είναι οι τελικές. Στο παράδειγμα αυτό, ο αλγόριθμος των Bellman-Ford επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ.

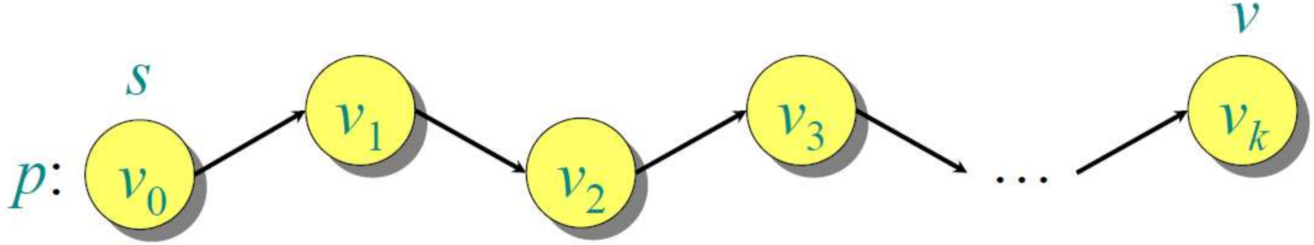
Ορθότητα

Θεώρημα. Αν $G = (V, E)$ δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους, τότε μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου Bellman-Ford, $d[v] = \delta(s, v)$ για όλα τα $v \in V$.

Ορθότητα

Θεώρημα. Αν $G = (V, E)$ δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους, τότε μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου Bellman-Ford, $d[v] = \delta(s, v)$ για όλα τα $v \in V$.

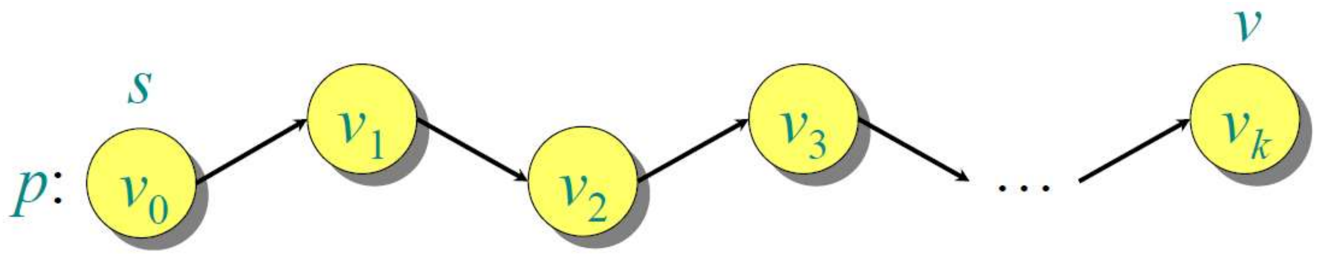
Απόδειξη. Έστω $v \in V$ μία οποιαδήποτε κορυφή, και θεωρήστε ένα συντομότερο μονοπάτι p από τη s στη v με το ελάχιστο πλήθος ακμών.



Αφού p είναι ένα συντομότερο μονοπάτι, έχουμε

$$\delta(s, v_i) = \delta(s, v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i) .$$

Ορθότητα (Συν.)



Αρχικά, $d[v_0] = 0 = \delta(s, v_0)$, και η $d[v_0]$ είναι αναλλοίωτη από επακόλουθες χαλαρώσεις (λόγω του ότι $d[v] \geq \delta(s, v)$).

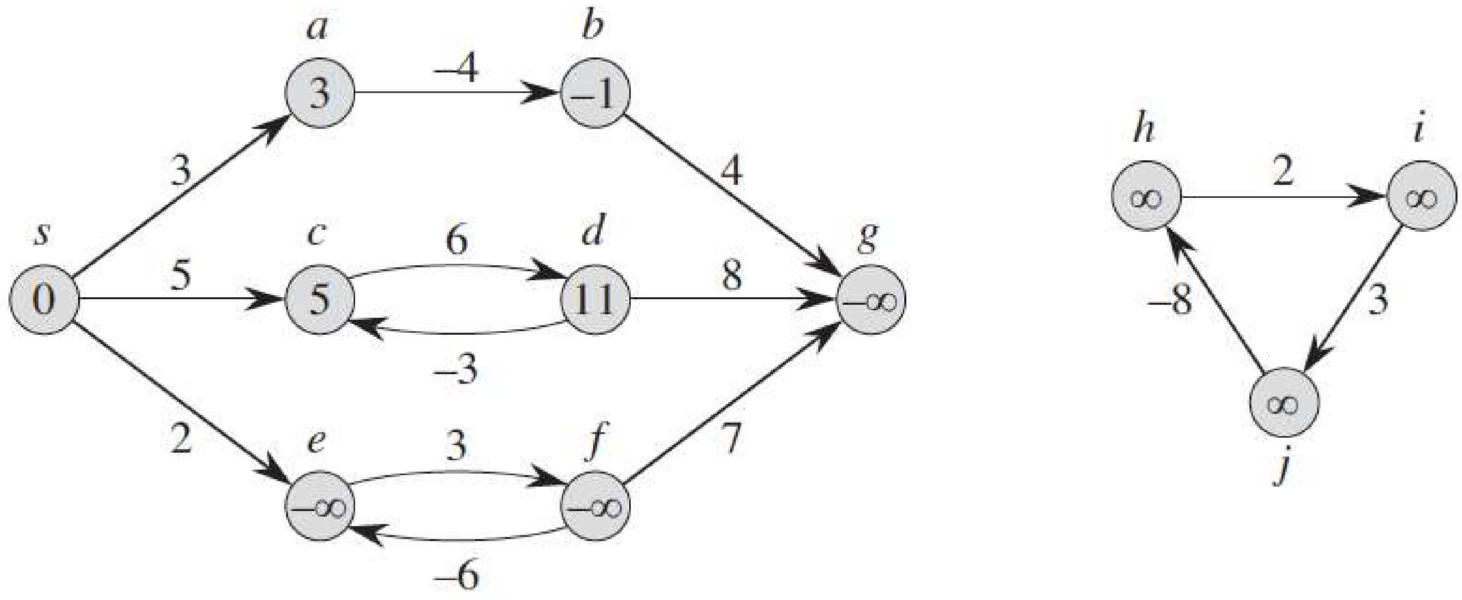
- Μετά το πέρασμα 1 με τη σάρωση όλων των ακμών, έχουμε $d[v_1] = \delta(s, v_1)$.
- Μετά το πέρασμα 2 με τη σάρωση όλων των ακμών, έχουμε $d[v_2] = \delta(s, v_2)$.

……

- Μετά από k περάσματα με τη σάρωση όλων των ακμών, έχουμε $d[v_k] = \delta(s, v_k)$.
- Αφού το G δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους, το p είναι απλό. Το μακρύτερο απλό μονοπάτι έχει $\leq |V| - 1$ ακμές.

Ανίχνευση κύκλου αρνητικού βάρους

Πόρισμα. Αν μία τιμή $d[v]$ αποτύχει να συγκλίνει μετά από $|V| - 1$ περάσματα, υπάρχει ένας κύκλος αρνητικού βάρους στο G προσπελάσιμος από τη s.



Σχήμα 24.1 Κατευθυντό γράφημα με αρνητικά βάρη ακμών. Εντός του κάθε κόμβου αναγράφεται το αντίστοιχο βάρος συντομότατης διαδρομής από τον αφετηριακό κόμβο s. Επειδή οι κόμβοι e και f σχηματίζουν έναν κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον s, τα βάρη συντομότατης διαδρομής για αυτούς είναι $-\infty$. Επειδή ο κόμβος g είναι προσπελάσιμος από έναν κόμβο με βάρος συντομότατης διαδρομής $-\infty$, το βάρος συντομότατης διαδρομής του g είναι επίσης $-\infty$. Οι κόμβοι h, i, και j δεν είναι προσπελάσιμοι από τον s, και επομένως τα βάρη συντομότατης διαδρομής για αυτούς είναι ∞, παρ' όλο που ανήκουν σε έναν κύκλο αρνητικού βάρους.