Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Λογική Σχεδίαση Ψηφιακών Συστημάτων

Βελτιστοποίηση Λογικών Συναρτήσεων

Μιχάλης Ψαράκης

Ελαχιστοποίηση - Βελτιστοποίηση

- Κάθε λογική συνάρτηση που πρόκειται να υλοποιηθεί με πύλες πρέπει να ελαχιστοποιηθεί
  - Δηλαδή να εκφραστεί σε μια αλγεβρική μορφή που
    - Να περιέχει όσον το δυνατόν λιγότερους όρους αθροίσματος
    - Κάθε όρος να αποτελείται από τις λιγότερες δυνατές μεταβλητές
- Γιατί;
  - Διότι με την ελαχιστοποίηση, τα λογικά κυκλώματα που παράγονται είναι:
    - Μικρότερα
    - Φθηνότερα
    - Ταχύτερα
    - Καταναλώνουν λιγότερη ενέργεια

Ελαχιστοποίηση με τη Μέθοδο Χάρτη

- Μέθοδος του Χάρτη
  - ή μέθοδος του Χάρτη Karnaugh (Καρνώ)
  - ή Χάρτης-K (K-map)
- Η συνάρτηση παριστάνεται σε ένα χάρτη που είναι ισοδύναμος με τον πίνακα αληθείας
  - Η διάταξη των ελαχιστόρων στο χάρτη διευκολύνει την αλγεβρική απλοποίηση της συνάρτησης
  - Η μέθοδος αυτή μπορεί να αυτοματοποιηθεί
    - Όλα τα προγράμματα αυτόματης σύνθεσης υλικού χρησιμοποιούν τη μέθοδο αυτή για την απλοποίηση/ ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων

Χάρτης των Δύο Μεταβλητών

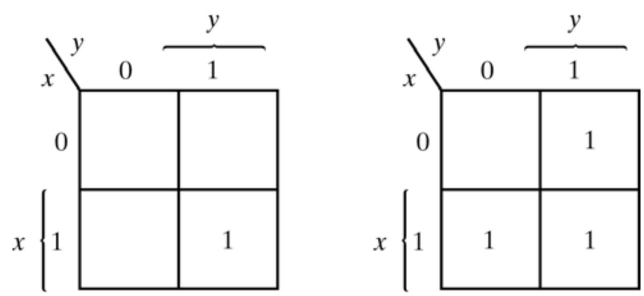
- Χάρτης Karnaugh συνάρτησης δύο μεταβλητών x και y
  - Κάθε γραμμή και στήλη αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη τιμή κάποιας μεταβλητής
  - Οι θέσεις των 4 ελαχιστόρων (2^2) φαίνονται στο σχήμα

m_0	m_1
m_2	m_3

$x \backslash y$	0	1 (y)
0	$x'y'$	$x'y$
(x) 1	xy'	xy

Παράσταση συναρτήσεων στο Χάρτη

- Οι δύο συναρτήσεις που φαίνονται παρακάτω αποτελούνται από έναν και τρεις ελαχιστόρους αντίστοιχα
  - Σημειώνουμε έναν «άσσο» (1) στα τετράγωνα που αντιστοιχούν στους ελαχιστόρους που η συνάρτηση είναι ίση με 1
  - Αριστερά είναι η συνάρτηση AND και δεξιά η συνάρτηση OR

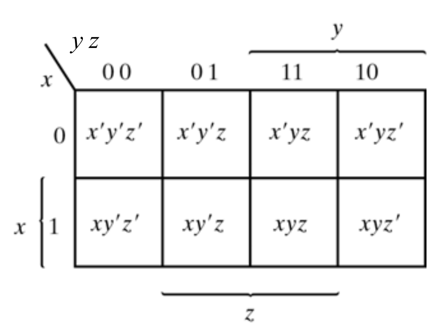


(a) xy (b) $x + y$

Χάρτης των Τριών Μεταβλητών

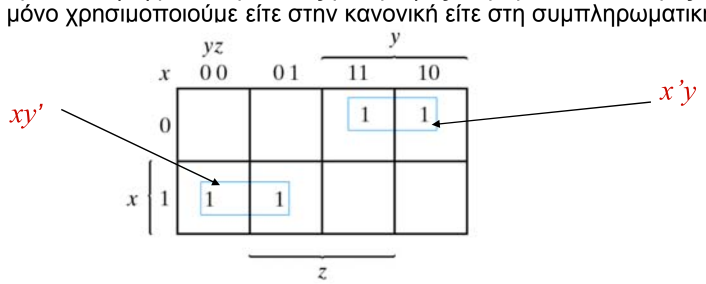
- Μία μεταβλητή αντιστοιχεί στις γραμμές και δύο μεταβλητές στις στήλες.
  - Η αρίθμηση των γραμμών και στηλών είναι με βάση τον κώδικα Gray
  - Οι θέσεις των 8 ελαχιστόρων (2^3) φαίνονται στο σχήμα

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6



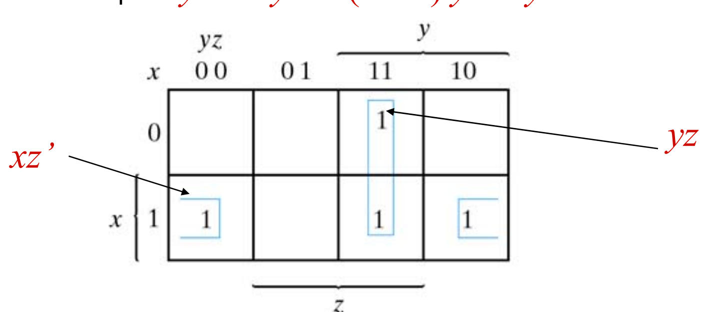
Παράδειγμα με συνάρτηση 3 μεταβλητών

- Συνάρτηση : $F(x,y,z) = \Sigma(2,3,4,5) = x'y + xy'$
- Στόχος της μεθόδου είναι:
  - να γίνουν οι λιγότερες σε πλήθος και μεγαλύτερες σε μέγεθος (πλήθος τετραγώνων) ομαδοποιήσεις γειτονικών τετραγώνων
  - Γειτονικά είναι τα τετράγωνα μόνο κατακόρυφα και οριζόντια, αλλά όχι διαγώνια
  - Για να βρούμε σε ποιον όρο (γινόμενο μεταβλητών) αντιστοιχεί μια ομαδοποίηση βλέπουμε ποιες μεταβλητές παραμένουν σταθερές και αυτές μόνο χρησιμοποιούμε είτε στην κανονική είτε στη συμπληρωματική μορφή



Άλλο ένα παράδειγμα 3 μεταβλητών

- Συνάρτηση : $F(x,y,z) = \Sigma(3,4,6,7) = yz + xz'$
- Γειτονικά τετράγωνα ορίζονται και στα άκρα του χάρτη
- Αλγεβρικό ισοδύναμο:
  - Το «κάθετο» ζεύγος τετραγώνων αποτελείται από τους ελαχιστόρους m_3 και m_7, δηλαδή m_3+m_7 και
  - είναι ίσο με $x'yz + xyz = (x'+x)\,yz = yz$



Παράδειγμα με 4-άδα γειτονικών

- Συνάρτηση : $F(x,y,z) = \Sigma(0,2,4,5,6) = z' + xy'$
- Τετράδα γειτονικών τετραγώνων στις τέσσερις γωνίες
- Γενικά οι «ομάδες» γειτονικών τετραγώνων μπορούν να αποτελούνται από 2, 4, 8, 16, ... τετράγωνα
  - Δηλαδή τις δυνάμεις του 2, γιατί μόνο έτσι απλοποιούνται μεταβλητές
- Η τετράδα των γωνιακών είναι ο όρος z'
  - Μόνο η z μένει σταθερή (και ίση με 0)
- Το ζεύγος που απομένει είναι ο όρος xy'

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1		1

Πόσες μεταβλητές «εξαλείφονται»;

- Όταν σχηματίζεται 2-άδα γειτονικών τετραγώνων τότε φεύγει μία μεταβλητή
  - Αλγεβρικά σαν το: $xy'zw + xyzw = xzw$
- Όταν σχηματίζεται 4-άδα γειτονικών τετραγώνων τότε φεύγουν δύο μεταβλητές
  - Αλγεβρικά σαν το: $xyzw + xyzw' + xyz'w + xyz'w' = xy$
- Όταν σχηματίζεται 8-άδα γειτονικών τετραγώνων τότε φεύγουν τρεις μεταβλητές
  - Αλγεβρικά σαν το: $x'y'z'w + x'y'zw + x'yz'w + x'yzw + xy'z'w + xy'zw + xyz'w + xyzw = w$
- **Άρα** – όσο μεγαλύτερες ομάδες κάνουμε τόσο λιγότερες μεταβλητές μας μένουν

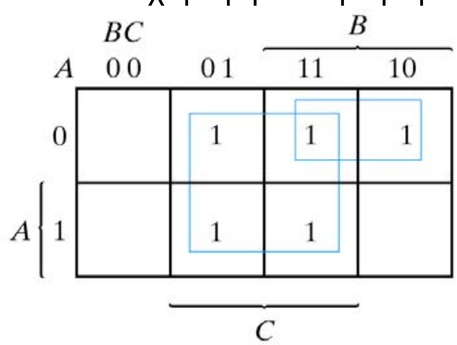
Πότε σταματάμε;

- Όταν «καλύψουμε» όλους τους άσσους (ελαχιστόρους) του χάρτη
  - Αν ξεχάσουμε έστω κι έναν ελαχιστόρο η συνάρτηση δεν θα σχεδιαστεί σωστά
- Ένας ελαχιστόρος μπορεί να συμμετέχει σε όσες ομάδες θέλουμε για να βοηθήσει να «μεγαλώσουν» οι ομάδες
  - Αυτό δεν επιδρά στην τελική συνάρτηση

Άλλο ένα παράδειγμα

- Δίδεται η συνάρτηση : $F(A,B,C)=A'C + A'B + AB'C + BC$
- Να εκφραστεί σαν άθροισμα ελαχιστόρων και να ελαχιστοποιηθεί
- Είναι $F(A,B,C) = \Sigma(1,2,3,5,7)$
- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του χάρτη η συνάρτηση απλοποιείται στην

$F=C+A'B$



Χάρτης τεσσάρων μεταβλητών

- Κώδικας Gray και στις γραμμές και στις στήλες
- Δεκαέξι θέσεις για τους ελαχιστόρους

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$wx \backslash yz$	00	01	11 (y)	10 (y)
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01 (x)	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11 (w, x)	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10 (w)	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

z: στήλες 01, 11

Παράδειγμα με 4 μεταβλητές

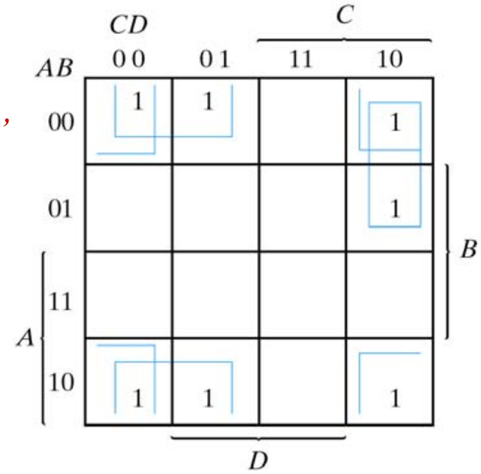
- Συνάρτηση: $F(w,x,y,z) = \Sigma(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$
- Σχηματίζεται μια 8άδα και δύο 4άδες
- $F = y'+w'z'+xz'$

$wx \backslash yz$	00	01	11 (y)	10 (y)
00	1	1		1
01 (x)	1	1		1
11 (w, x)	1	1		1
10 (w)	1	1		

z: στήλες 01, 11

Κι άλλο παράδειγμα με 4 μεταβλητές

- Να απλοποιηθεί η συνάρτηση :
  $F(A,B,C,D) = A'B'C'+B'CD'+A'BCD'+AB'C'$
- Σχηματίζονται δύο 4άδες και μια 2άδα
- $F = B'D' + B'C' + A'CD'$

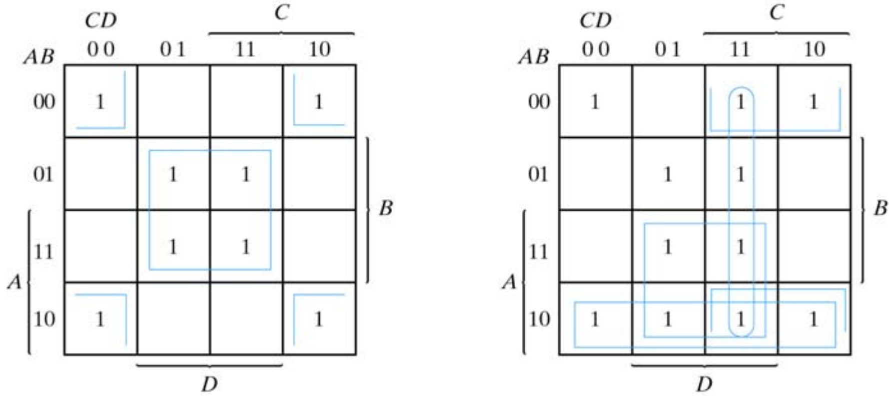


Πρωτεύοντες όροι – Prime implicants

- Όρος – Implicant
  - Ένα γινόμενο μεταβλητών που όταν είναι ίσο με 1 τότε και η συνάρτηση είναι ίση με 1
- Πρωτεύων όρος – Prime implicant
  - Ένας όρος που δεν μπορεί να «μεγαλώσει» άλλο
    - Δηλαδή αντιστοιχεί σε μια «μέγιστη» ομάδα στο χάρτη Karnaugh
- Θεμελιώδης ή Ουσιώδης πρωτεύων όρος – Essential prime implicant
  - Ένας πρωτεύων όρος που περιέχει έναν τουλάχιστον ελαχιστόρο που κανένας άλλος πρωτεύων όρος δεν περιέχει
  - **Άρα** – είναι απαραίτητος (γι' αυτό λέγεται θεμελιώδης) για να σχηματιστεί η συνάρτηση

Παράδειγμα με πρωτεύοντες όρους

- Συνάρτηση
  $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)$

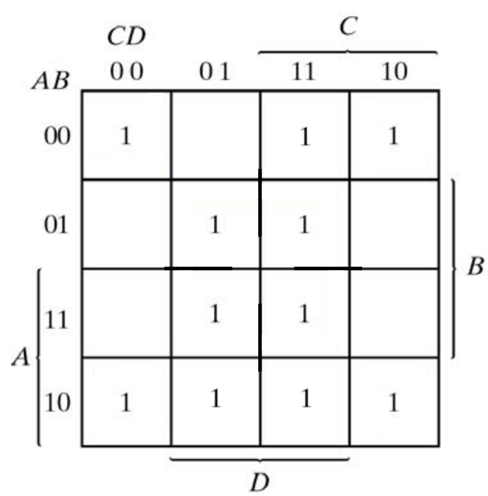


(a) Essential prime implicants BD and B′D′

(b) Prime implicants CD, B′C AD, and AB′

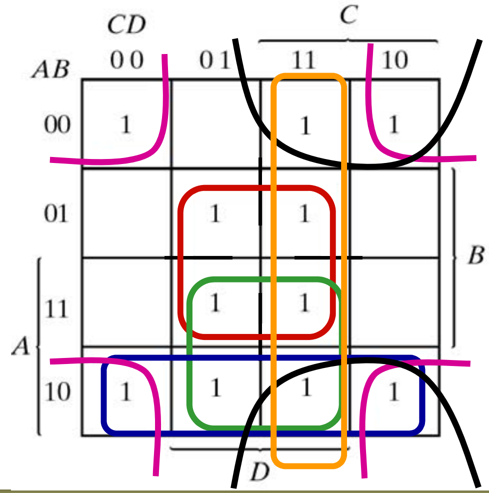
...ας το δούμε καλύτερα (1)

- Βήμα 1 : τοποθετούμε και τους 11 ελαχιστόρους



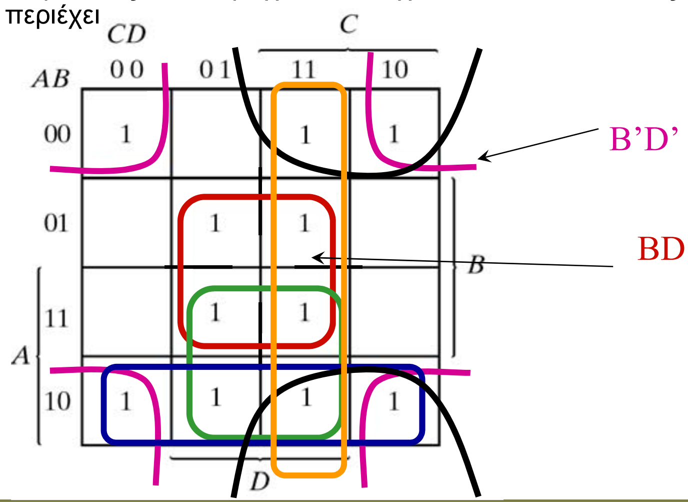
...ας το δούμε καλύτερα (2)

- Βήμα 2 : σημειώνουμε **όλες** τις μέγιστες ομαδοποιήσεις
  - Δηλαδή **όλους** τους πρωτεύοντες όρους



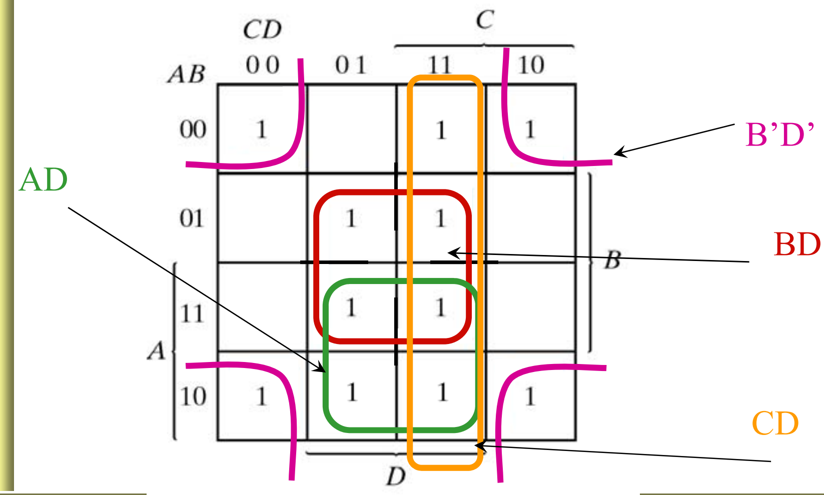
...ας το δούμε καλύτερα (3)

- Βήμα 3 : κρατούμε **οπωσδήποτε** τους ουσιώδεις όρους
  - Δηλαδή αυτούς που περιέχουν τουλάχιστον ένα 1 που κανείς άλλος δεν περιέχει



…ας το δούμε καλύτερα (4)

- Βήμα 4 : τελειώνουμε συμπληρώνοντας τη συνάρτηση με τους λιγότερους δυνατούς μη-θεμελιώδεις όρους για να καλυφθούν και οι υπόλοιποι άσσοι

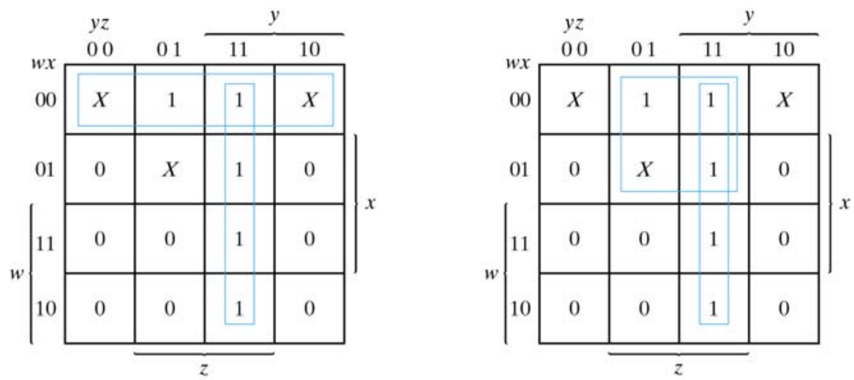


Αδιάφορες τιμές/όροι

- Σε κάποιους συνδυασμούς των εισόδων (μεταβλητών) μπορεί να μην είναι καθορισμένη η τιμή της συνάρτησης
  - Αδιάφορες τιμές/όροι
  - Don't cares
- Προσοχή:
  - Δεν είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιούνται σε ομαδοποιήσεις
  - Πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο εάν πρόκειται να μεγαλώσουν κάποιες ομαδοποιήσεις
  - Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όσες φορές θέλουμε έναν αδιάφορο όρο
    - Όταν χρησιμοποιούμε έναν αδιάφορο όρο είναι σαν να του δίνουμε τιμή 1
    - Όσοι δεν χρησιμοποιούνται είναι σαν να έχουν τιμή 0

Παράδειγμα με αδιάφορους όρους

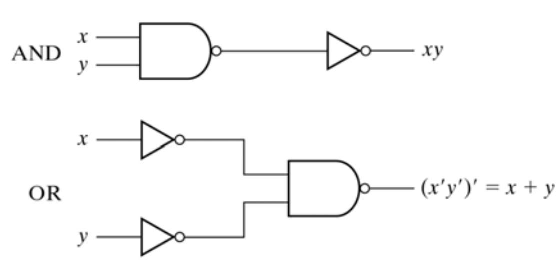
- Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $F(w,x,y,z)=\Sigma(1,3,7,11,15)$ με ελαχιστόρους αδιάφορης τιμής $d(w,x,y,z)=\Sigma(0,2,5)$
- Δύο λύσεις: προκύπτει διαφορετική συνάρτηση



(a) $F = yz + w'x'$ (a) $F = yz + w'z$

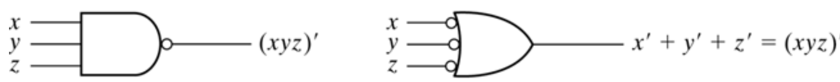
Υλοποίηση με πύλες NAND (ΌΧΙ-ΚΑΙ)

- Οι πύλες NAND και NOR ονομάζονται οικουμενικές (universal)
  - Διότι κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί με αποκλειστική χρήση πυλών NAND
  - Επίσης κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί με αποκλειστική χρήση πυλών NOR
- Λογικές πράξεις με πύλες NAND (ΌΧΙ-ΚΑΙ)



Σύμβολα πύλης NAND

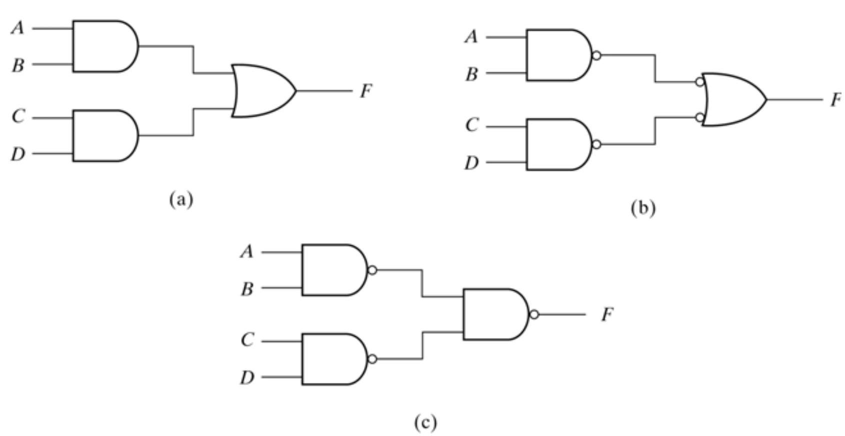
- Δύο διαφορετικά σύμβολα για τη πύλη NAND
  - ΚΑΙ-αντιστροφή
  - Αντιστροφή-Ή
- Είναι ισοδύναμα λόγω του θεωρήματος DeMorgan



(a) AND–invert (b) Invert–OR

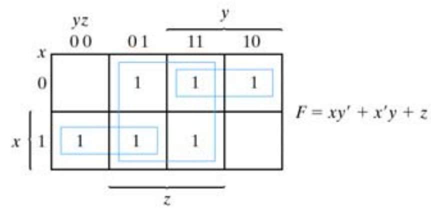
Υλοποίηση δύο επιπέδων NAND-NAND

- Τρεις ισοδύναμοι τρόποι υλοποίηση της συνάρτησης $F=AB+CD$

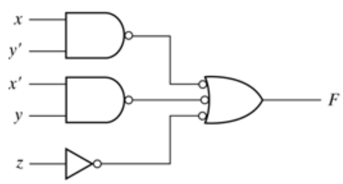


Παράδειγμα με NAND

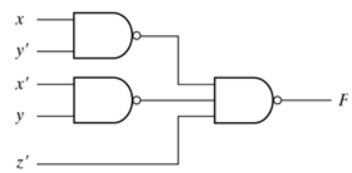
- Να υλοποιηθεί η συνάρτηση $F(x,y,z) = \Sigma(1,2,3,4,5,7)$ αποκλειστικά με πύλες NAND



(a)



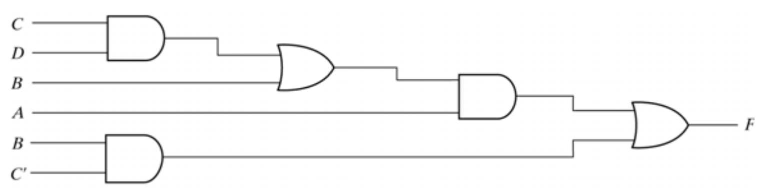
(b)



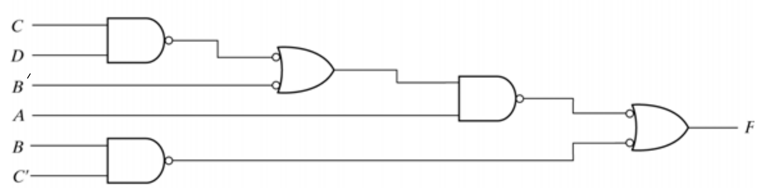
(c)

Υλοποιήσεις NAND πολλών επιπέδων

- Υλοποίηση της $F = A(CD+B)+BC'$



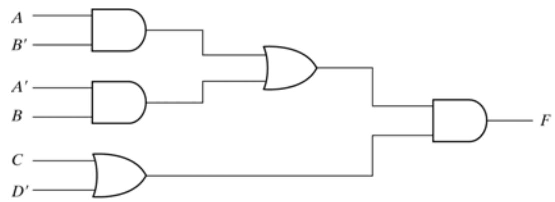
(a) AND-OR gates



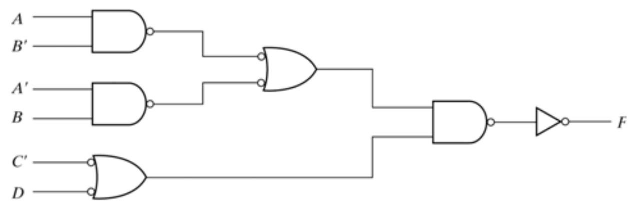
(a) NAND gates

Άλλο ένα παράδειγμα με NAND

- Υλοποίηση της $F = (AB'+A'B)(C+D')$



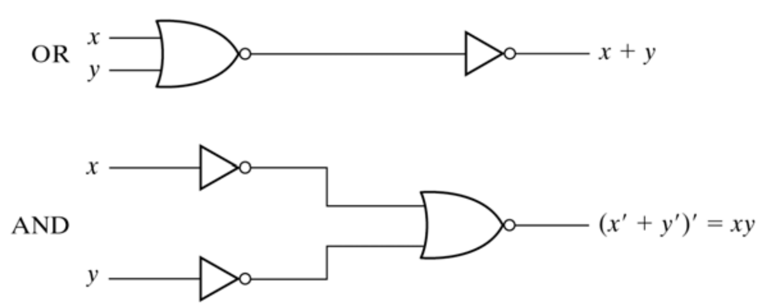
(a) AND-OR gates



(b) NAND gates

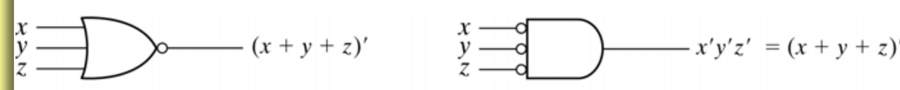
Υλοποίηση με NOR (ΟΥΤΕ)

- Λογικές λειτουργίες με πύλες NOR



Σύμβολα πύλης NOR

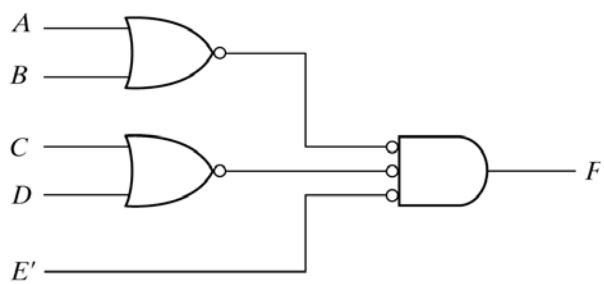
- Δύο διαφορετικά σύμβολα για τη πύλη NOR
  - Ή-αντιστροφή
  - Αντιστροφή-ΚΑΙ
- Είναι ισοδύναμα λόγω του θεωρήματος DeMorgan



(a) OR–invert (a) Invert–AND

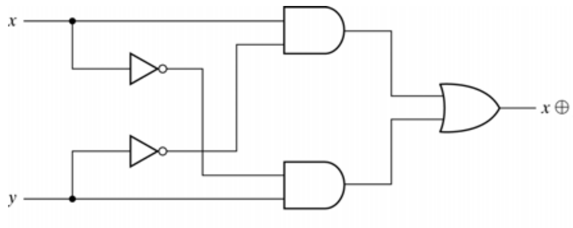
Υλοποίηση με NOR

- Υλοποίηση της $F = (A+B)(C+D)E$

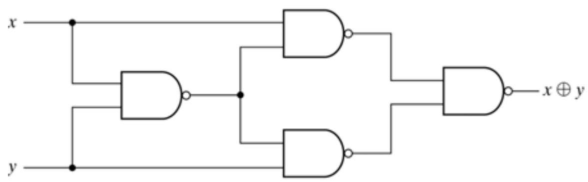


Αποκλειστικό Ή – Exclusive OR (XOR)

- Δύο υλοποιήσεις της συνάρτησης αποκλειστικού Ή



(a) With AND-OR-NOT gates



(b) With NAND gates

Χάρτης για συνάρτηση XOR 3-μεταβλητών

A \ BC	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

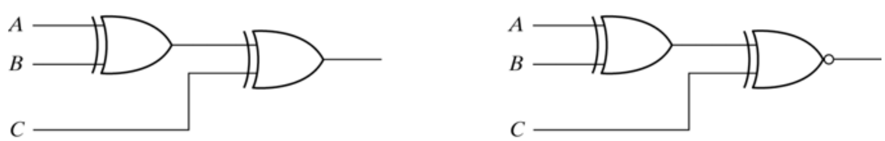
(a) Odd function
$F = A \oplus B \oplus C$

A \ BC	00	01	11	10
0	1		1	
1		1		1

(a) Even function
$F = (A \oplus B \oplus C)'$

Λογικό διάγραμμα περιττής και άρτιας συνάρτησης

- Περιττή και άρτια συνάρτηση 3 μεταβλητών



(a) 3-input odd function (b) 3-input even function

Χάρτες XOR 4 μεταβλητών

- Περιττή και άρτια συνάρτηση 4 μεταβλητών

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

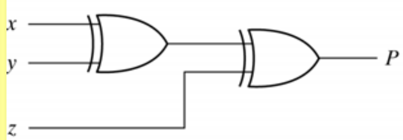
(a) Odd function
$F = A \oplus B \oplus C \oplus D$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	
01		1		1
11	1		1	
10		1		1

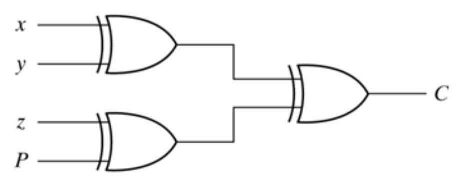
(b) Even function
$F = (A \oplus B \oplus C \oplus D)'$

Γεννήτρια και ελεγκτής ισοτιμίας

- Γεννήτρια ισοτιμίας (parity generator)
  - Των 3 bit
  - Άρτια ισοτιμία
- Ελεγκτής ισοτιμίας (parity checker)
  - Των 4 bit
  - Άρτια ισοτιμία



(a) 3-bit even parity generator



(a) 4-bit even parity checker