11.4.3.1.1 Ακολουθία Prüfer

Όπως αναφέραμε παραπάνω, μια κλασική μέθοδος απόδειξης του Τύπου του Cayley αξιοποιεί την λεγόμενη ακολουθία (ή κώδικα) Prüfer.

Σχήμα 11.78: Heinz Prüfer (1896-1934).

Η κεντρική ιδέα της μεθόδου αυτής είναι ο προσδιορισμός μιας αμφιμονοσήμαντης (1-1 και επί) απεικόνισης μεταξύ:

1. των στοιχείων του συνόλου όλων των διαφορετικών επιγραφημένων δένδρων με n κορυφές και
2. των στοιχείων ενός άλλου συνόλου P, του οποίου γνωρίζουμε (ή μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε) τον πληθάριθμο.

Καθώς επιθυμούμε να αποδείξουμε ότι το πλήθος $|T_n|$ των διαφορετικών επιγραφημένων δένδρων με n κορυφές είναι n^{n-2}, είναι φυσικό να θεωρήσουμε το σύνολο P όλων των διατεταγμένων ακολουθιών

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}), \quad \text{όπου } a_i = 1, 2, \ldots, n .$$

Αυτό συμβαίνει, διότι

$$|P| = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n-2 \text{ φορές}} = n^{n-2},$$

αφού καθένας από τους αριθμούς a_i μπορεί να λάβει n το πλήθος διαφορετικές τιμές.

Επομένως, αρκεί να προσδιορίσουμε έναν τρόπο ώστε να αντιστοιχίσουμε αμφιμονοσήμαντα κάθε επιγραφημένο δένδρο n κορυφών σε μια μοναδική ακολουθία του συνόλου P. Τότε, θα έχουμε αποδείξει ότι

$$|T_n| = |P| = n^{n-2} .$$

Ο Γερμανός μαθηματικός Heinz Prüfer (1896-1934) έκανε ακριβώς αυτό στην εργασία του [245]. Προσδιόρισε μια διαδικασία μέσω της οποίας:

1. από κάθε επιγραφημένο δένδρο με n κορυφές λαμβάνουμε μια μοναδική ακολουθία $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, με $a_i = 1, 2, \ldots, n$.

2. και από κάθε ακολουθία $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, με $a_i = 1, 2, \ldots, n$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοναδικό επιγραφημένο δένδρο με n κορυφές.

Με άλλα λόγια, μέσω της διαδικασίας που όρισε ο Prüfer, από διαφορετικά επιγραφημένα δένδρα με n κορυφές λαμβάνουμε διαφορετικές ακολουθίες $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ και από διαφορετικές ακολουθίες $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ λαμβάνουμε διαφορετικά επιγραφημένα δένδρα με n κορυφές, παράγοντας λοιπόν την ζητούμενη αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση.

Η διαδικασία/αλγόριθμος που προσδιόρισε ο Prüfer παρουσιάζεται παρακάτω:

► Μέθοδος προσδιορισμού της ακολουθίας Prüfer που αντιστοιχεί σε δοθέν επιγραφημένο δένδρο

Έστω T ένα επιγραφημένο δένδρο με n κορυφές, οι οποίες έχουν τις επιγραφές $1, 2, \ldots, n$.

Βήμα 1.
Για $i = 1$, θέτουμε $T_1 := T$.

Βήμα 2.
Προσδιορίζουμε το **φύλλο** m του δένδρου T_i με την μικρότερη επιγραφή. Στην θέση i της ακολουθίας Prüfer (δηλαδή για τον αριθμό a_i) θέτουμε την τιμή της επιγραφής της **γειτονικής κορυφής** του φύλλου m.

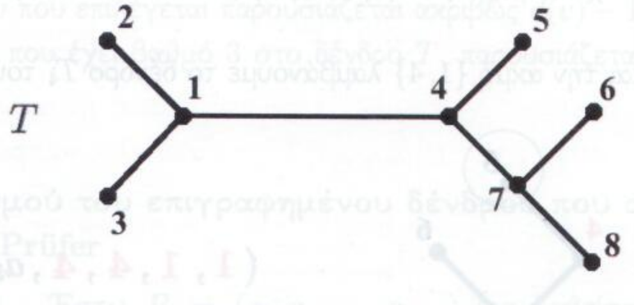
Βήμα 3.
Αφαιρούμε την κορυφή m από το δένδρο T_i, καθώς και την μοναδική ακμή της οποίας αυτή αποτελεί άκρο, λαμβάνοντας έτσι το επιγραφημένο δένδρο T_{i+1}.

Βήμα 4.
Αν το δένδρο T_{i+1} έχει μόνο δύο κορυφές (δηλαδή είναι ισόμορφο του K_2), τότε σταματάμε εδώ. Αλλιώς επιστρέφουμε στο Βήμα 2 και θέτουμε όπου i το $i + 1$.

Σημείωση. Καθώς προσδιορίζουμε τιμές a_i έως ότου λάβουμε ένα δένδρο με μόνο δύο κορυφές, είναι φανερό ότι η ακολουθία Prüfer ενός επιγραφημένου δένδρου με n κορυφές, θα έχει ακριβώς $n-2$ όρους.

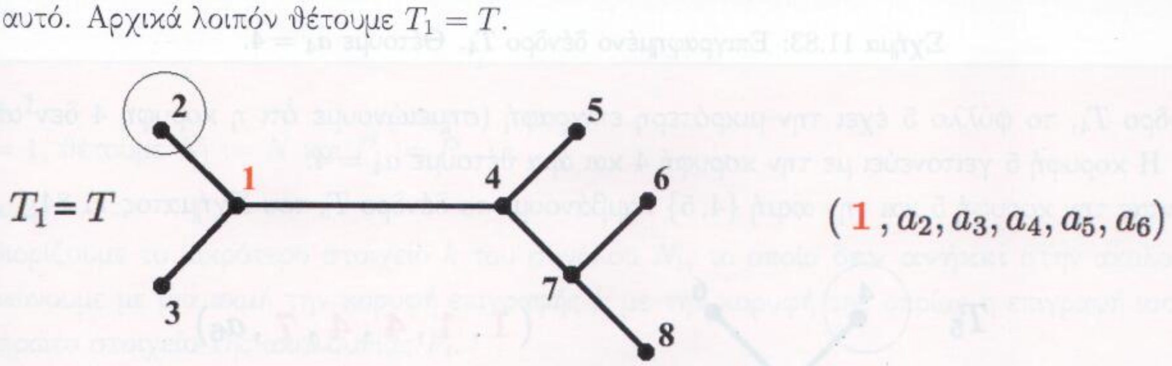
ΕΦΑΡΜΟΓΗ (Ι)

Για παράδειγμα, θεωρούμε το επιγραφημένο δένδρο T του Σχήματος 11.79.



Σχήμα 11.79: Επιγραφημένο δένδρο T.

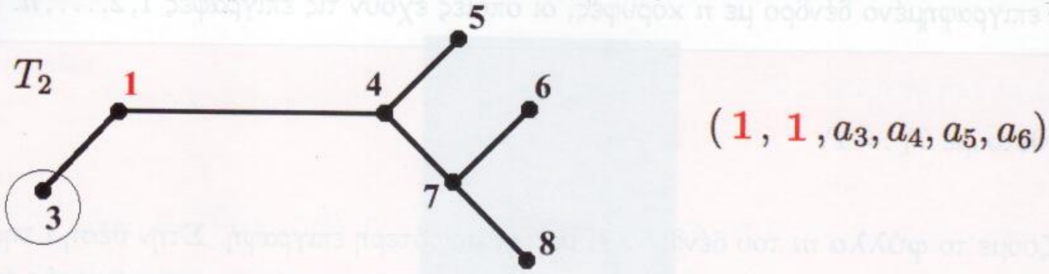
Θέλουμε να προσδιορίσουμε την μοναδική ακολουθία Prüfer $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ που αντιστοιχεί στο δένδρο αυτό. Αρχικά λοιπόν θέτουμε $T_1 = T$.



Σχήμα 11.80: Επιγραφημένο δένδρο T_1. Θέτουμε $a_1 = 1$.

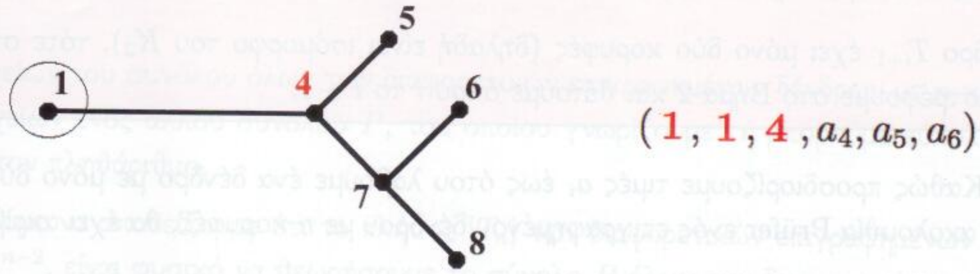
Στο δένδρο T_1, το φύλλο 2 έχει την μικρότερη επιγραφή. Πρέπει να προσέξουμε πως αν και η κορυφή 1 έχει μικρότερη επιγραφή, αυτή δεν αποτελεί φύλλο και συνεπώς δεν την επιλέγουμε. Η κορυφή 2

γειτονεύει με την κορυφή 1 και άρα θέτουμε $a_1 = 1$.
Αφαιρώντας την κορυφή 2 και την ακμή $\{1, 2\}$ λαμβάνουμε το δένδρο T_2 του Σχήματος 11.81.



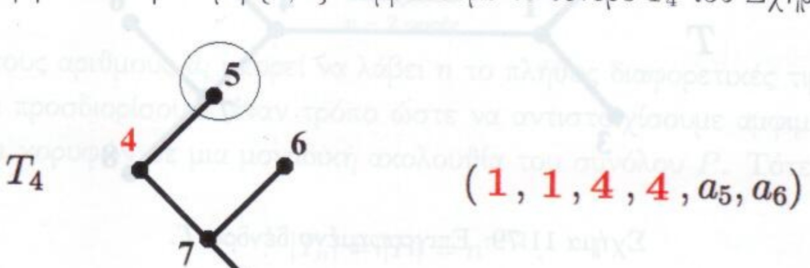
Σχήμα 11.81: Επιγραφημένο δένδρο T_2. Θέτουμε $a_2 = 1$.

Στο δένδρο T_2, το φύλλο 3 έχει την μικρότερη επιγραφή (υπενθυμίζουμε πως η κορυφή 1 δεν αποτελεί φύλλο). Η κορυφή 3 γειτονεύει με την κορυφή 1 και άρα θέτουμε $a_2 = 1$.
Αφαιρώντας την κορυφή 3 και την ακμή $\{1, 3\}$ λαμβάνουμε το δένδρο T_3 του Σχήματος 11.82.



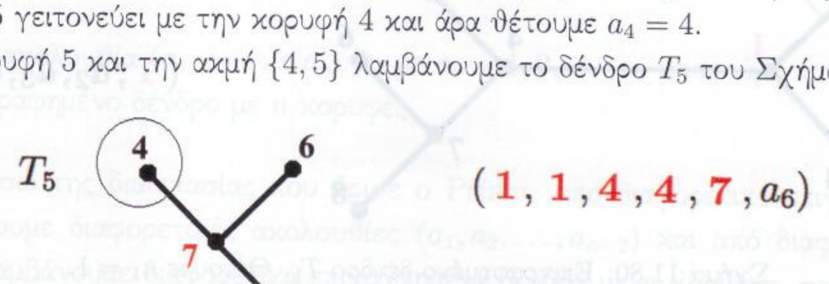
Σχήμα 11.82: Επιγραφημένο δένδρο T_3. Θέτουμε $a_3 = 4$.

Στο δένδρο T_3, το φύλλο 1 έχει την μικρότερη επιγραφή και γειτονεύει με την κορυφή 4. Συνεπώς, θέτουμε $a_3 = 4$.
Αφαιρώντας την κορυφή 1 και την ακμή $\{1, 4\}$ λαμβάνουμε το δένδρο T_4 του Σχήματος 11.83.



Σχήμα 11.83: Επιγραφημένο δένδρο T_4. Θέτουμε $a_4 = 4$.

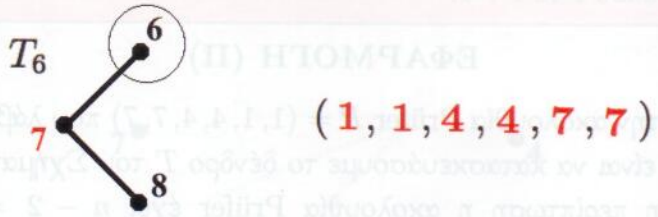
Στο δένδρο T_4, το φύλλο 5 έχει την μικρότερη επιγραφή (σημειώνουμε ότι η κορυφή 4 δεν αποτελεί φύλλο). Η κορυφή 5 γειτονεύει με την κορυφή 4 και άρα θέτουμε $a_4 = 4$.
Αφαιρώντας την κορυφή 5 και την ακμή $\{4, 5\}$ λαμβάνουμε το δένδρο T_5 του Σχήματος 11.84.



Σχήμα 11.84: Επιγραφημένο δένδρο T_5. Θέτουμε $a_5 = 7$.

Στο δένδρο T_5, το φύλλο 4 έχει την μικρότερη επιγραφή και γειτονεύει με την κορυφή 7. Συνεπώς, θέτουμε $a_5 = 7$.

Αφαιρώντας την κορυφή 4 και την ακμή $\{4,7\}$ προκύπτει το δένδρο T_6 του Σχήματος 11.85.



Σχήμα 11.85: Επιγραφημένο δένδρο T_6. Θέτουμε $a_6 = 7$.

Στο δένδρο T_6, το φύλλο 6 έχει την μικρότερη επιγραφή και γειτονεύει με την κορυφή 7. Άρα, θέτουμε $a_6 = 7$.

Αφαιρώντας την κορυφή 6 και την ακμή $\{6,7\}$ λαμβάνουμε το δένδρο T_7, που έχει δύο μόνο κορυφές και συνεπώς σταματάει η διαδικασία.

Σχήμα 11.86: Επιγραφημένο δένδρο T_7, το οποίο είναι ισόμορφο του K_2.

Άρα η μοναδική ακολουθία Prüfer που αντιστοιχεί στο επιγραφημένο δένδρο T είναι η $(1,1,4,4,7,7)$.

Παρατήρηση. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι μέσω της παραπάνω διαδικασίας, κανένα φύλλο του δένδρου T δεν παρουσιάζεται στην ακολουθία Prüfer (αφού πάντα επιλέγουμε τον γείτονα των φύλλων), ενώ κάθε κορυφή v που επιλέγεται παρουσιάζεται ακριβώς $d(v) - 1$ φορές.

Για παράδειγμα, η κορυφή 4 που έχει βαθμό 3 στο δένδρο T, παρουσιάζεται 2 φορές στην ακολουθία Prüfer του δένδρου αυτού.

▶ Μέθοδος προσδιορισμού του επιγραφημένου δένδρου που αντιστοιχεί σε δοθείσα ακολουθία Prüfer

Θέτουμε $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Έστω $P = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ μια δοθείσα ακολουθία Prüfer, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \in N$.

Θεωρούμε/ζωγραφίζουμε n το πλήθος κορυφές με τις επιγραφές $1, 2, \ldots, n$, χωρίς καμιά ακμή μεταξύ τους.

Βήμα 1.
Για $i = 1$, θέτουμε $N_1 := N$ και $P_1 := P$.

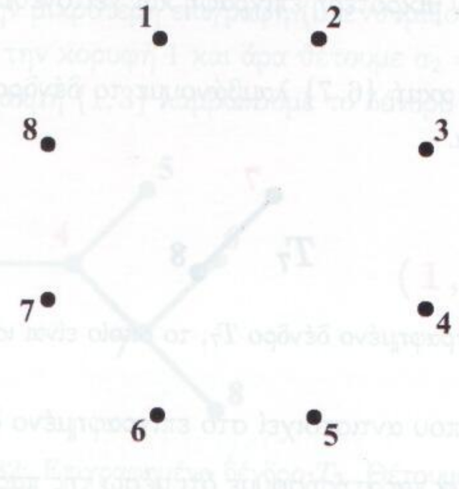
Βήμα 2.
Προσδιορίζουμε το μικρότερο στοιχείο k του συνόλου N_i, το οποίο **δεν ανήκει** στην ακολουθία P_i. Ενώνουμε με μια ακμή την κορυφή επιγραφής k με την κορυφή της οποίας η επιγραφή ισούται με το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας P_i.

Βήμα 3.
Αφαιρούμε το στοιχείο k από το σύνολο N_i, καθώς και το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας P_i. Λαμβάνουμε έτσι ένα νέο σύνολο N_{i+1} και μια νέα ακολουθία P_{i+1}.

Βήμα 4.
Αν η ακολουθία P_{i+1} δεν περιλαμβάνει πλέον κανένα στοιχείο, τότε ενώνουμε με μια ακμή τις κορυφές των οποίων οι επιγραφές αντιστοιχούν στα (δύο) στοιχεία του συνόλου N_{i+1}, αλλιώς επιστρέφουμε στο Βήμα 2 και θέτουμε όπου i το $i+1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΙΙ)

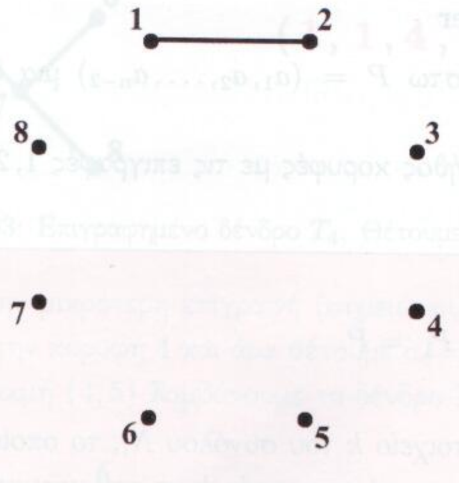
Για παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία Prüfer $P = (1, 1, 4, 4, 7, 7)$ που λάβαμε στην παραπάνω Εφαρμογή (Ι) και ο σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε το δένδρο T του Σχήματος 11.79.
Καθώς στην συγκεκριμένη περίπτωση η ακολουθία Prüfer έχει $n - 2 = 6$ στοιχεία, έπεται ότι το δένδρο που επιθυμούμε να κατασκευάσουμε έχει $n = 8$ κορυφές, με επιγραφές από το σύνολο $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, τις οποίες και ζωγραφίζουμε.



Αρχικά λοιπόν θέτουμε

$$N_1 := N = \{1, ②, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \text{και} \quad P_1 := P = (1, 1, 4, 4, 7, 7) .$$

Το μικρότερο στοιχείο του συνόλου N_1 που δεν παρουσιάζεται στην ακολουθία P_1 είναι το 2. Έτσι, ενώνουμε με μια ακμή την κορυφή 2 με την κορυφή 1, που αποτελεί το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας P_1.



Αφαιρώντας το στοιχείο 2 από το σύνολο N_1 και το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας P_1 λαμβάνουμε:

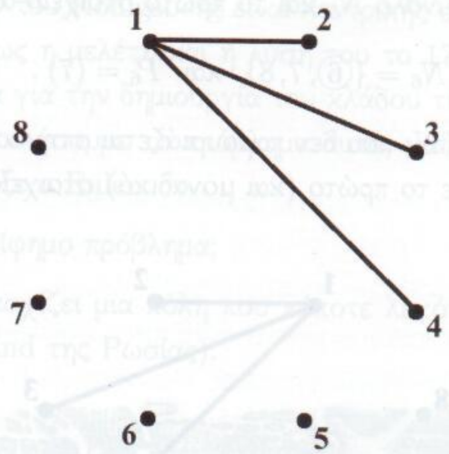
$$N_2 = \{1, ③, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \text{και} \quad P_2 = (1, 4, 4, 7, 7) .$$

Το μικρότερο στοιχείο του συνόλου N_2 που δεν παρουσιάζεται στην ακολουθία P_2 είναι το 3. Έτσι, ενώνουμε με μια ακμή την κορυφή 3 με το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας P_2, δηλαδή την κορυφή 1.

Αφαιρώντας το στοιχείο 3 από το σύνολο N_2 και το πρώτο στοιχείο από την ακολουθία P_2, λαμβάνουμε:

$$N_3 = \{①, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ και } P_3 = (4, 4, 7, 7)\,.$$

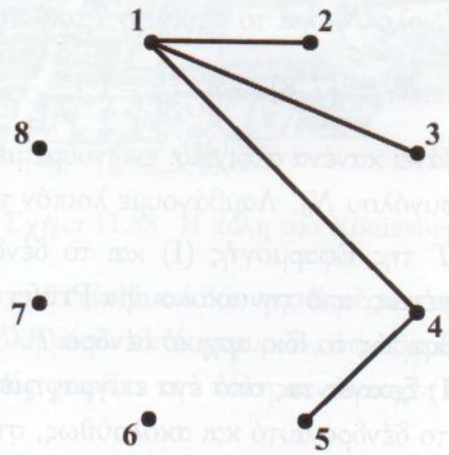
Το μικρότερο στοιχείο του συνόλου N_3 που δεν παρουσιάζεται στην ακολουθία P_3 είναι το 1. Ενώνουμε λοιπόν με μια ακμή την κορυφή 1 με το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας P_3, δηλαδή την κορυφή 4.



Αφαιρώντας το στοιχείο 1 από το σύνολο N_3 και το πρώτο στοιχείο από την ακολουθία P_3, έχουμε:

$$N_4 = \{4, ⑤, 6, 7, 8\} \text{ και } P_4 = (4, 7, 7)\,.$$

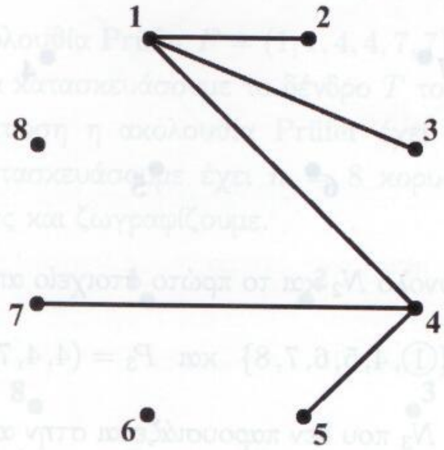
Το μικρότερο στοιχείο του συνόλου N_4 που δεν παρουσιάζεται στην ακολουθία P_4 είναι το 5. Άρα, ενώνουμε με μια ακμή την κορυφή 5 με το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας P_4, δηλαδή την κορυφή 4.



Αφαιρώντας το στοιχείο 5 από το σύνολο N_4 και το πρώτο στοιχείο από την ακολουθία P_4, λαμβάνουμε:

$$N_5 = \{4, 6, 7, 8\} \quad \text{και} \quad P_5 = (7, 7)\,.$$

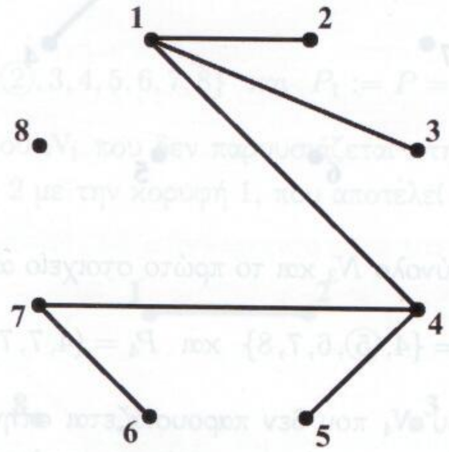
Το μικρότερο στοιχείο του συνόλου N_5 που δεν παρουσιάζεται στην ακολουθία P_5 είναι το 4. Ενώνουμε λοιπόν με μια ακμή την κορυφή 4 και την κορυφή 7, που αποτελεί το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας P_5.



Αφαιρώντας το στοιχείο 4 από το σύνολο N_5 και το πρώτο στοιχείο από την ακολουθία P_5, έχουμε:

$$N_6 = \{6, 7, 8\} \quad \text{και} \quad P_6 = (7)\,.$$

Το μικρότερο στοιχείο του συνόλου N_6 που δεν παρουσιάζεται στην ακολουθία P_6 είναι το 6. Ενώνουμε λοιπόν με μια ακμή την κορυφή 6 με το πρώτο (και μοναδικό) στοιχείο της ακολουθίας P_6, την κορυφή 7.



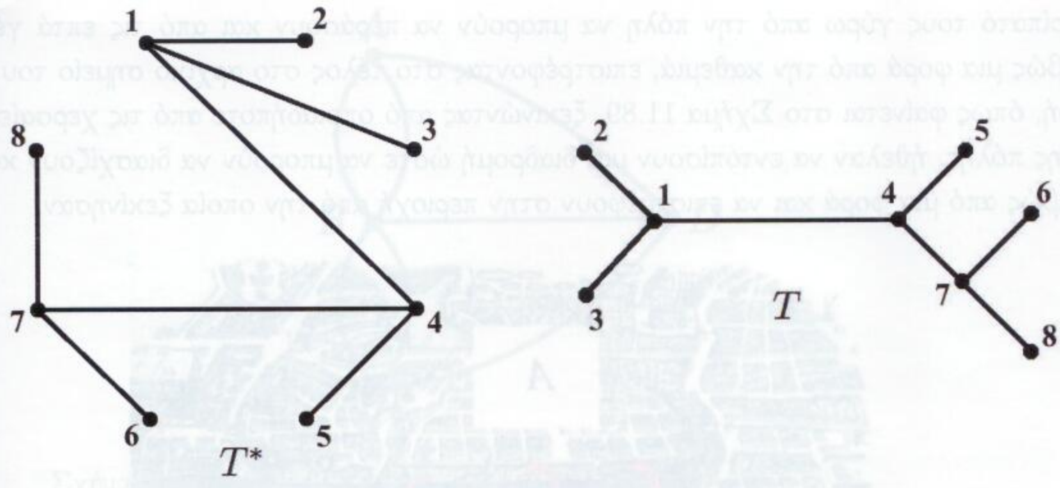
Αφαιρώντας το στοιχείο 6 από το σύνολο N_6 και το στοιχείο 7 από την ακολουθία P_6, έπεται ότι:

$$N_7 = \{7, 8\} \quad \text{και} \quad P_7 = (\,)\,.$$

Καθώς η ακολουθία P_7 δεν περιλαμβάνει κανένα στοιχείο, ενώνουμε με μια ακμή τις κορυφές 7 και 8 που αντιστοιχούν στα δύο στοιχεία του συνόλου N_6. Λαμβάνουμε λοιπόν το δένδρο T^* του Σχήματος 11.87.

Παρατηρούμε όμως ότι το δένδρο T της Εφαρμογής (I) και το δένδρο T^* που κατασκευάσαμε στην Εφαρμογή (II) **ταυτίζονται**! Επομένως, από την ακολουθία Prüfer $(1, 1, 4, 4, 7, 7)$ που προέκυψε από την Εφαρμογή (I) κατασκευάσαμε ακριβώς το ίδιο αρχικό δένδρο T.

Συμπερασματικά, στην Εφαρμογή (I) ξεκινώντας από ένα επιγραφημένο δένδρο T λάβαμε μια μοναδική ακολουθία Prüfer που αντιστοιχεί στο δένδρο αυτό και ακολούθως, στην Εφαρμογή (II) ξεκινώντας από μια ακολουθία Prüfer λάβαμε ένα μοναδικό επιγραφημένο δένδρο που αντιστοιχεί στην ακολουθία αυτή.



Σχήμα 11.87: Το επιγραφημένο δένδρο T^* που προέκυψε από την ακολουθία Prüfer $P = (1, 1, 4, 4, 7, 7)$ και το επιγραφημένο δένδρο T από το οποίο προέκυψε η ακολουθία Prüfer P.

11.5 Γραφήματα Euler και το Πρόβλημα των Επτά Γεφυρών του Königsberg

Το Πρόβλημα των Επτά Γεφυρών του Königsberg είναι κεντρικής σημασίας για τον κλάδο της Θεωρίας Γραφημάτων, καθώς θεωρείται πως η μελέτη και η λύση του το 1736 από τον Leonhard Euler (1707-1783) (βλ. [91]) έβαλε τα θεμέλια για την δημιουργία του κλάδου της Θεωρίας Γραφημάτων.

Στην παρούσα Ενότητα θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα αυτό, καθώς και την πλήρη/γενική λύση του μέσω του θεωρήματος που απέδειξε ο Euler.

Ποιό είναι λοιπόν αυτό το περίφημο πρόβλημα;

Ο ποταμός Pregel (Pregolya) διασχίζει μια πόλη που κάποτε λεγόταν Königsberg και ήταν μέρος της Πρωσίας (το σημερινό Kaliningrand της Ρωσίας).

Σχήμα 11.88: Η πόλη του Königsberg.

Από τον ποταμό Pregel σχηματίζονται επίσης και δύο νησιά μέσα στην πόλη, τα οποία συνδέονταν μεταξύ τους, αλλά και με την υπόλοιπη πόλη μέσω επτά γεφυρών, όπως φαίνεται στον χάρτη 11.88. Στο Σχήμα 11.89 έχουμε τονίσει πώς ο ποταμός χωρίζει την πόλη σε περιοχές και που ακριβώς βρίσκονταν οι επτά γέφυρες.

Τον 18ο αιώνα, οι κάτοικοι του Königsberg προσπαθούσαν για χρόνια να βρουν μια διαδρομή, ώστε