ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{x+3}+3y_{x+2}-9y_{x+1}+5y_x=0,\ y_0=8,\ y_1=3,\ y_2=70$

(β) $y_{x+3}-3y_{x+2}+y_{x+1}-3y_x=0,\ y_0=-1,\ y_1=-6,\ y_2=-19$

ΛΥΣΗ

(α) Η δοσμένη γραμμική ομογενής εξίσωση έχει αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5=0$. Εξάλλου με τη βοήθεια του σχήματος του Horner ευρίσκουμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως είναι $\lambda_1=\lambda_2=1$ και $\lambda_3=-5$. Αρα η γενική λύση θα είναι

$$y_x=c_1+c_2x+c_3(-5)^x$$

Τότε όμως με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} c_1+c_3=8 \\ c_1+c_2-5c_3=3 \\ c_1+2c_2+25c_3=70 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1=6 \\ c_2=7 \\ c_3=2 \end{array}\right\}.$$

Αρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$y_x=6+7x+2(-5)^x$$

(β) Η δοσμένη γραμμική ομογενής εξίσωση έχει αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3-3\lambda^2+\lambda-3=0$. Εξάλλου με τη βοήθεια του σχήματος του Horner ευρίσκουμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως είναι: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=i$ και $\lambda_3=-i$.

Επειδή $\lambda_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ προκύπτει ότι η γενική λύση θα είναι:

$$y_x = c_1 3^x + c_2 \cos\frac{\pi x}{2} + c_3 \sin\frac{\pi x}{2}$$

Τότε όμως με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} c_1 + c_2 = -1 \\ 3c_1 + c_3 = -6 \\ 9c_1 - c_2 = -19 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Αρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$y_x = -2 \cdot 3^x + \cos\frac{\pi x}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+5} + y_{x+4} - y_{x+1} - y_x = 0,$$

$$y_0 = 7,\ y_1 = 2,\ y_2 = 3,\ y_3 = -6,\ y_4 = 7$$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη γραμμική ομογενής εξίσωση έχει αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^5 + \lambda^4 - \lambda - 1 = 0$.

Επειδή, $\lambda^5 + \lambda^4 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 1)$ προκύπτει ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως είναι:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = i \ \text{ και } \ \lambda_5 = -i$$

Αρα η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι

$$y_x = c_1 + c_2(-1)^x + c_3 x(-1)^x + c_4 \cos\frac{\pi}{2}x + c_5 \sin\frac{\pi}{2}x$$

Τότε όμως με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 + c_4 = 7 \\ c_1 - c_2 - c_3 + c_5 = 2 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 - c_4 = 3 \\ c_1 - c_2 - 3c_3 - c_5 = -6 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + c_4 = 7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 2 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 1 \\ c_4 = 3 \\ c_5 = 3 \end{array}\right\}$$

Αρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$y_x = 2 + 2(-1)^x + x(-1)^x + 3\cos\frac{\pi}{2}x + 3\sin\frac{\pi}{2}x$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+5} + 4y_{x+4} + 3y_{x+3} + 2y_{x+2} + 20y_{x+1} + 24y_x = 0$$

$$y_0 = 2,\ y_1 = -12,\ y_2 = 58,\ y_3 = -228,\ y_4 = 716.$$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη γραμμική ομογενής εξίσωση έχει αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^5 + 4\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + 20\lambda + 24 = 0$.
Επειδή, $\lambda^5 + 4\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + 20\lambda + 24 = (\lambda+2)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 3)$ προκύπτει ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως είναι:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2,\ \lambda_4=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

και

$$\lambda_5=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Αρα η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι,

$$y_x=(c_1+c_2x+c_3x^2)\cdot(-2)^x+\left(c_4\cos\frac{\pi}{4}x+c_5\sin\frac{\pi}{4}x\right)(\sqrt{2})^x$$

Τότε όμως με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} c_1+c_4=2 \\ (c_1+c_2+c_3)(-2)+c_4+c_5=-12 \\ (c_1+2c_2+4c_3)4+2c_5=58 \\ (c_1+3c_2+9c_3)(-8)+(-c_4+c_5)\cdot 2=-228 \\ (c_1+4c_2+16c_3)16-4c_4=716 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1=1 \\ c_2=3 \\ c_3=2 \\ c_4=1 \\ c_5=-1 \end{array}\right\}$$

Αρα η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι:

$$y_x=(1+3x+2x^2)(-2)^x+\left(\cos\frac{\pi}{4}x-\sin\frac{\pi}{4}x\right)2^{\frac{x}{2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να ευρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_n) όταν:

$\alpha_0=0$, $\alpha_1=\frac{1}{6}$ και $\alpha_n=\frac{5\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}}{6}$, για κάθε $n\in N^*$ με $n\geq 2$.

ΛΥΣΗ

Από τον αναγωγικό τύπο της ακολουθίας (α_n) προκύπτει η γραμμική ομογενής εξίσωση:

$$6\alpha_n - 5\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

η οποία έχει αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση: $6\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Αρα η γενική λύση της (1) είναι:

$$\alpha_n = c_1\frac{1}{2^n} + c_2\frac{1}{3^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Τότε όμως με τη βοήθεια των δοσμένων αρχικών συνθηκών και της σχέσεως (2) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\frac{1}{2} + c_2\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{Bmatrix}$$

Οπότε ο n-οστός όρος της (α_n) δίδεται από τον τύπο:

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$$

Αρα θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να ευρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_n) όταν: $\alpha_0=8$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=\frac{25}{4}$, και $\alpha_n=2\alpha_{n-1}-\frac{5}{4}\alpha_{n-2}+\frac{1}{4}\alpha_{n-3}$ για κάθε $n\in N^*$, με $n\geq 3$.

ΛΥΣΗ

Από τον αναγωγικό τύπο της ακολουθίας (α_n) προκύπτει η γραμμική ομογενής εξίσωση:

$$4\alpha_n-8\alpha_{n-1}+5\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

η οποία έχει αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$4\lambda^3-8\lambda^2+5\lambda-1=0$$

με ρίζες $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2}$.

Αρα η γενική λύση της (1) είναι

$$\alpha_n=c_1+(c_2+c_3 n)\frac{1}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Τότε όμως με τη βοήθεια των δοσμένων αρχικών συνθηκών και της σχέσεως (2) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} c_1+c_2=8 \\ c_1+\dfrac{c_2+c_3}{2}=7 \\ c_1+\dfrac{c_2+2c_3}{4}=\dfrac{25}{4} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1=5 \\ c_2=3 \\ c_3=1 \end{Bmatrix}$$

Οπότε ο n-οστός όρος της (α_n) δίδεται από τον τύπο:

$$\alpha_n = 5 + \frac{n+3}{2^n}$$

Αν τεθεί $\beta_n = \frac{n+3}{2^n}$, τότε επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n+4}{2^{n+1}}}{\frac{n+3}{2^n}}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

και σύμφωνα με το 2ο κριτήριο σύγκλισης του δευτέρου κεφαλαίου του πρώτου τόμου, προκύπτει ότι η ακολουθία (β_n) είναι μηδενική και επομένως θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ενα ζευγάρι από κουνέλια τοποθετείται σε ένα κλουβί στην αρχή του έτους. Κάθε μήνα του θηλυκό του ζευγαριού γεννάει δύο κουνέλια διαφορετικού γένους. Αρχίζοντας από το δεύτερο μήνα της γέννησής τους κάθε καινούριο ζευγάρι επίσης γεννάει ένα ζευγάρι κουνελιών κάθε μήνα.
Να ευρεθεί ο αριθμός των ζευγαριών που θα υπάρχουν στο κλουβί στην αρχή του n μήνα, όπου $n \in N^*$.

ΛΥΣΗ

Κατά τη διάρκεια του πρώτου μήνα το αρχικό ζευγάρι θα γεννήσει ένα καινούριο ζευγάρι, έτσι στην αρχή του δεύτερου μήνα θα υπάρχουν δυο ζευγάρια κουνελιών στο κλουβί.

Κατά τη διάρκεια του δευτέρου μήνα μόνο το αρχικό ζευγάρι θα γεννήσει ένα καινούριο ζευγάρι κουνελιών, έτσι στην αρχή του τρίτου μήνα θα υπάρχουν τρία ζευγάρια κουνελιών.

Κατά τη διάρκεια του τρίτου μήνα τόσο το αρχικό ζευγάρι όσο και το ζευγάρι που γεννήθηκε τον πρώτο μήνα θα γεννήσουν από ένα ζευγάρι κουνελιών, έτσι ώστε στην αρχή του τέταρτου μήνα θα υπάρχουν 2+3=5 ζευγάρια κουνελιών.

Αν α_n είναι ο ζητούμενος αριθμός των ζευγαριών που ευρίσκονται στο κλουβί στην αρχή του n μήνα, τότε όπως υπολογίστηκε είναι:

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha_3=3$$

Παρατηρούμε ότι στην αρχή του n μήνα θα υπάρχουν όλα τα ζευγάρια που υπήρχαν στον κλουβί στην αρχή του $n-1$ μήνα (ο αριθμός των οποίων είναι ίσος με α_{n-1}) και όλα τα ζευγάρια των κουνελιών που γεννήθηκαν κατά τη διάρκεια του $n-1$ μήνα. Αλλά επειδή κατά τη διάρκεια του $n-1$ μπορούν να γεννήσουν μόνο αυτά που υπήρχαν στην αρχή του $n-2$ μήνα προκύπτει ότι κατά τη διάρκεια του $n-1$ μήνα γεννήθηκαν ακριβώς α_{n-2} καινούρια ζευγάρια.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\alpha_n=\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}$$

για κάθε $n\in N^*$ με $n\geq 3$.

Αρα προκύπτει η γραμμική ομογενής εξίσωση:

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}=0$$

της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2-\lambda-1=0$ δίδει ρίζες: $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ετσι θα είναι,

$$\alpha_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Τέλος επειδή $\alpha_1=1$ και $\alpha_2=2$ προκύπτει το σύστημα:

$$\left.\begin{cases} c_1\,\dfrac{1+\sqrt5}{2}+c_2\,\dfrac{1-\sqrt5}{2}=1 \\[2ex] c_1\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^2+c_2\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^2=1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2\sqrt5} \\[2ex] c_2=-\dfrac{1-\sqrt5}{2\sqrt5} \end{cases}$$

οπότε ο ζητούμενος αριθμός θα είναι:

$$\alpha_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}$$

Παρατήρηση

Η ακολουθία (α_n) της προηγούμενης ασκήσεως ονομάζεται ακολουθία του Fibonacci και έχει πολλές εφαρμογές σε προβλήματα της Συνδυαστικής.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να ευρεθεί ο αριθμός των λέξεων μήκους n που μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας τρία γράμματα α, β, γ έτσι ώστε να μην περιέχουν δυο διαδοχικά α.

ΛΥΣΗ

Εστω E_n το σύνολο των λέξεων μήκους n που κατασκευάζονται από τα γράμματα α, β, γ έτσι ώστε κάθε λέξη του E_n να μην περιέχει δυο διαδοχικά α, και $\alpha_n=|E_n|$, για κάθε $n\in N^*$.

Προφανώς επειδή $E_1=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ και $E_2=\{\alpha\beta,\beta\alpha,\alpha\gamma,\gamma\alpha,\beta\gamma,\gamma\beta,\beta\beta,\gamma\gamma\}$ προκύπτει ότι $\alpha_1=3$ και $\alpha_2=8$.

Για $n\geq 3$, ορίζονται τα υποσύνολα A_n, B_n, Γ_n του E_n που έχουν σαν πρώτο στοιχείο τους τα α, β, γ αντίστοιχα.

Επειδή $A_n \cap B_n \cap \Gamma_n = \varnothing$ και $A_n \cup B_n \cup \Gamma_n = E_n$ έπεται ότι:

$$\alpha_n = |E_n| = |A_n| + |B_n| + |\Gamma_n| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Επειδή η απεικόνιση $f: E_{n-1} \to B_n$, που απεικονίζει κάθε λέξη $x = x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ του E_{n-1} στη λέξη $f(x) = \beta x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ του B_n είναι αμφιμονοσήμαντη προκύπτει ότι $|B_n| = |E_{n-1}|$.
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $|\Gamma_n| = |E_{n-1}|$ και επομένως είναι:

$$|B_n| = |\Gamma_n| = \alpha_{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

Αν T_n (αντίστοιχα Σ_n) είναι το σύνολο των όλων των λέξεων του A_n που έχουν σαν δεύτερο γράμμα τους το β (αντίστοιχα το γ) θα είναι:

$$T_n \cap \Sigma_n = \varnothing \quad \text{και} \quad A_n = T_n \cup \Sigma_n$$

οπότε,

$$|T_n| + |\Sigma_n| = |A_n| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Επιπλέον επειδή η απεικόνιση $g: E_{n-2} \to T_n$ που απεικονίζει κάθε λέξη $x = x_1 x_2 \dots x_{n-2}$ του E_{n-2} στη λέξη $g(x) = \alpha \beta x_1 \dots x_{n-2}$ του T_n είναι αμφιμονοσήμαντη προκύπτει ότι $|T_n| = |E_{n-2}|$.
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $|\Sigma_n| = |E_{n-2}|$ και επομένως είναι

$$|T_n| + |\Sigma_n| = 2\alpha_{n-2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει η γραμμική ομογενής εξίσωση:

$$\alpha_n - 2\alpha_{n-1} - 2\alpha_{n-2} = 0$$

Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$ της παραπάνω εξισώσεως έχει ρίζες $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}$ και $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$ προκύπτει ότι:

$$\alpha_n = c_1(1+\sqrt{3})^n + c_2(1-\sqrt{3})^n$$

Τέλος με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} c_1\ (1+\sqrt{3})+c_2\ (1-\sqrt{3})=3 \\ c_2\ (1+\sqrt{3})^2+c_2\ (1-\sqrt{3})^2=8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \\ c_2=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{array}\right\}$$

και επομένως ο ζητούμενος αριθμός των λέξεων είναι

$$\alpha_n=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$$

για κάθε $n\in N^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{x+2}+2y_{x+1}-8y_x = 3^x,\ y_0=\dfrac{15}{7},\ y_1=\dfrac{73}{7}$

(β) $y_{x+2}-3y_{x+1}-10y_x=2\cdot 5^x,\ y_0=3,\ y_1=\dfrac{9}{7}$

(γ) $y_{x+2}-4y_{x+1}+4y_x=2^{x+2},\ y_0=3,\ y_1=3$

ΛΥΣΗ

(α) Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως είναι: $\lambda^2+2\lambda-8=0$, με ρίζες $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=-4$ έπεται ότι η γενική λύση της αντιστοίχου ομογενούς είναι:

$$y_x^0=c_1 2^x+c_2(-4)^x$$

Προκειμένου να ευρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως τίθεται $\Psi_x=c3^x$.
Τότε από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι:

$$c3^{x+2}+2c3^{x+1}-8c3^{x}=3^{x} \Leftrightarrow 9c+6c-8c=1$$

$$\Leftrightarrow c=\frac{1}{7}$$

Επομένως $\Psi_x=\frac{1}{7}\cdot 3^x$ και η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι:

$$\begin{aligned} y_x &= y_x^0+\Psi_x \\ &= c_1 2^x+c_2(-4)^x+\frac{1}{7}3^x \end{aligned}$$

Τέλος με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} c_1+c_2+\frac{1}{7}=\frac{15}{7} \\ 2c_1-4c_2+\frac{3}{7}=\frac{33}{7} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} c_1=3 \\ c_2=-1 \end{aligned}\right\}$$

Αρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$y_x=3\cdot 2^x-(-4)^x+\frac{1}{7}\cdot 3^x$$

(β) Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως είναι: $\lambda^2-3\lambda-10=0$, με ρίζες $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-2$ έπεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_x^0=c_1 5^x+c_2(-2)^x$$

Προκειμένου να ευρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως τίθεται $\Psi_x=c\cdot x5^x$.
Τότε από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι:

$$c(x+2)5^{x+2}-3c(x+1)5^{x+1}-10cx5^x=2\cdot 5^x \Leftrightarrow$$

$$25c(x+2)-15c(x+1)-10cx=2 \Leftrightarrow$$

$$c=\frac{2}{35}$$

Επομένως $\Psi_x=\dfrac{2}{35}x5^x$ και η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι:

$$y_x=y_x^0+\Psi_x$$

$$=c_1 5^x+c_2(-2)^x+\frac{2}{35}x5^x$$

Τέλος με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} c_1+c_2=3 \\ 5c_1-2c_2+\dfrac{2}{35}\cdot 5=\dfrac{9}{7} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1=1 \\ c_2=2 \end{array}\right\}$$

Αρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$y_x=5^x+2(-2)^x+\frac{2}{35}x5^x$$

(γ) Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως είναι: $\lambda^2-4\lambda+4=0$ με διπλή ρίζα την $\lambda=2$, έπεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_x^0=c_1 2^x+c_2 x2^x$$

Προκειμένου να ευρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως τίθεται $\Psi_x=cx^2 2^x$.
Τότε από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι:

$$c(x+2)^2 2^{x+2} - 4c(x+1)^2 2^{x+1} + 4cx^2 2^x = 2^{x+2} \leftrightarrow$$

$$4c(x^2+4x+4) - 8c(x^2+2x+1) + 4cx^2 = 4 \leftrightarrow$$

$$c = \frac{1}{2}$$

Επομένως $\Psi_x = x^2 2^{x-1}$ και η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι:

$$y_x = y_x^0 + \Psi_x$$

$$= c_1 2^x + c_2 x 2^x + x^2 2^{x-1}$$

Τέλος με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} 2c_1 = 3 \\ 2c_1 + 2c_2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \end{array}\right\}$$

Αρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$y_x = 3 \cdot 2^x - x \cdot 2^{x+1} + x^2 2^{x-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+2} + 2y_{x+1} - 8y_x = 5x^2 + 2x + 1, \quad y_0 = 2, \quad y_1 = -2$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως είναι: $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$, με ρίζες $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -4$, έπεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2(-4)^x$$

Προκειμένου να ευρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως τίθεται $\Psi_x = x^k Q(x)$, όπου $Q(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (δηλαδή του ίδιου βαθμού με το πολυώνυμο του δευτέρου μέλους της δοσμένης εξισώσεως) και k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση x^k δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Εύκολα ελέγχεται ότι εδώ $k=0$ οπότε η ζητούμενη μερική λύση θα είναι της μορφής $\Psi_x = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
Κατόπιν τούτου από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\alpha(x+2)^2 + \beta(x+2) + \gamma + 2[\alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma] - 8(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) =$$

$$= 5x^2 + 2x + 1 \quad \leftrightarrow$$

$$\alpha x^2 + 4\alpha x + 4\alpha + \beta x + 2\beta + \gamma + 2\alpha x^2 + 4\alpha x + 2\alpha + 2\beta x + 2\beta + 2\gamma -$$

$$-8\alpha x^2 - 8\beta x - 8\gamma = 5x^2 + 2x + 1 \quad \leftrightarrow$$

$$-5\alpha x^2 + (8\alpha - 5\beta)x + (6\alpha + 4\beta - 5\gamma) = 5x^2 + 2x + 1$$

Τότε όμως προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} -5\alpha &= 5 \\ 8\alpha - 5\beta &= 2 \\ 6\alpha + 4\beta - 5\gamma &= 1 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= -1 \\ \beta &= -2 \\ \gamma &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Αρα, $\Psi_x = -(x^2+2x+3)$ και η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι:

$$y_x = c_1 2^x + c_2(-4)^x - (x^2+2x+3)$$

Τέλος με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} c_1+c_2-3=2 \\ 2c_1-4c_2-6=-2 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1=4 \\ c_2=1 \end{Bmatrix}$$

Αρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$y_x = 2^{x+2} + (-4)^x + (x^2+2x+3)$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να λυθεί η εξίσωση:

$$2y_{x+2} - 3y_{x+1} + y_x = 3x^2+5x-10, \quad y_0=5,\ y_1=2$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως είναι: $2\lambda^2-3\lambda+1=0$, με ρίζες $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=\frac{1}{2}$, έπεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_x^0 = c_1 + c_2\frac{1}{2^x}$$

Προκειμένου να ευρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως τίθεται $\Psi_x = x^k Q(x)$, όπου $Q(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση x^k δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Εύκολα ελέγχεται ότι εδώ $k=1$ οπότε η ζητουμένη μερική λύση θα είναι της μορφής $\Psi_x = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$.
Κατόπιν τούτου από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$2\alpha(x+2)^3+2\beta(x+2)^2+2\gamma(x+2)-3\alpha(x+1)^3-3\beta(x+1)^2-3\gamma(x+1)+$$

$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x = 3x^2+5x-10$$

$$2\alpha x^3+12\alpha x^2+24\alpha x+16\alpha+2\beta x^2+8\beta x+8\beta+2\gamma x+4\gamma-$$

$$3\alpha x^3-9\alpha x^2-9\alpha x-3\alpha-3\beta x^2-6\beta x-3\beta-3\gamma x-3\gamma+\alpha x^3+$$

$$\beta x^2+\gamma x = 3x^2+5x-10$$

$$(12\alpha+2\beta-9\alpha-3\beta+\beta)x^2+(24\alpha+8\beta+2\gamma-9\alpha-6\beta-3\gamma+\gamma)x$$

$$+16\alpha+8\beta+4\gamma-3\alpha-3\beta-3\gamma) = 3x^2+5x-10$$

$$3\alpha x^2+(15\alpha+2\beta)x+(13\alpha+5\beta+\gamma) = 3x^2+5x-10$$

Τότε όμως προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} 3\alpha=3 \\ 15\alpha+2\beta=5 \\ 13\alpha+5\beta+\gamma=-10 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha=1 \\ \beta=-5 \\ \gamma=2 \end{Bmatrix}$$

Αρα, $\Psi_x = x^3-5x^2+2x$ και η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι:

$$y_x = c_1+c_2\cdot\frac{1}{2^x}+x^3-5x^2+2x$$

Τέλος με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} c_1+c_2=5 \\ c_1+\dfrac{c_2}{2}+1-5+2=2 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1=3 \\ c_2=2 \end{Bmatrix}$$

Αρα η ζητουμένη λύση είναι:

$$y_x = 3 + \frac{1}{2^{x-1}} + x^3 - 5x^2 + 2x$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+3} - 7y_{x+2} + 16y_{x+1} - 12y_x = 2^{x+3} + 3^{x+1}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως είναι: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$, με ρίζες $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 3$, έπεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 x 2^x + c_3 3^x$$

Προκειμένου να ευρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς τίθεται $\Psi_x = cx^2 2^x + kx3^x$, οπότε με τη βοήθεια της δοσμένης εξισώσεως προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$c(x+3)^2 2^{x+3} + k(x+3)3^{x+3} - 7c(x+2)^2 2^{x+2} - 7k(x+2)3^{x+2} +$$

$$16c(x+1)^2 2^{x+1} + 16k(x+1)3^{x+1} - 12cx^2 2^x - 12kx3^x = 2^{x+3} + 3^{x+1}$$

$$[8cx^2 + 48cx + 72c - 28cx^2 - 112cx - 112c + 32cx^2 + 64cx + 32c - 12cx^2]2^x +$$

$$[27kx + 81k - 63kx - 126k + 48kx + 48k - 12kx]3^x = 2^{x+3} + 3^{x+1}$$

$$-8c2^x + 3k3^x = 2^{x+3} + 3^{x+1}$$

Οπότε θα είναι,

$$\begin{Bmatrix} -8c=8 \\ 3k=3 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} c=-1 \\ k=1 \end{Bmatrix}$$

Αρα, $\Psi_x=-x^2 2^x+x3^x$ και η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι:

$$y_x=c_1 2^x+c_2 x2^x+c_3 3^x-x^2 2^x+x3^x$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+2}-6y_{x+1}+8y_x = 3x^2+x+4\cdot 2^x-2\cdot 3^x$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως είναι: $\lambda^2-6\lambda+8=0$, με ρίζες $\lambda_1=2$ και $\lambda_1=4$, έπεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_x^0=c_1 2^x+c_2 4^x$$

Προκειμένου να ευρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως τίθεται $\Psi_x=\alpha x^2+\beta x+\gamma+cx2^x+k3^x$, οπότε με τη βοήθεια της δοσμένης εξισώσεως προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\alpha(x+2)^2+\beta(x+2)+\gamma+c(x+2)2^{x+2}+k3^{x+2}-6\alpha(x+1)^2-6\beta(x+1)-$$

$$6\gamma-6c(x+1)2^{x+1}-6k3^{x+1}+8\alpha x^2+8\beta x+8\gamma+8cx2^x+8k3^x=$$

$$3x^2+x+4\cdot 2^x-2\cdot 3^x$$

$$3\alpha x^2+(3\beta-8\alpha)x+(-2\alpha-4\beta+3\gamma)-4c2^x-k3^x=$$

$$3x^2+x+4\cdot 2^x-2\cdot 3^x$$

Οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} 3\alpha=3 \\ 3\beta-8\alpha=1 \\ -2\alpha-4\beta+3\gamma=0 \\ -4c=4 \\ -k=-2 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=3 \\ \gamma=\dfrac{14}{3} \\ c=-1 \\ k=2 \end{array}\right\}$$

Αρα $\Psi_x=x^2+x+\dfrac{14}{3}-x2^x+2\cdot 3^x$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+4}-16y_x=-30x+8+2^{x+6}+13\cdot 3^x$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως είναι: $\lambda^4-16=0$, με ρίζες $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=2i$ και $\lambda_3=-2i$ έπεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2(-2)^x + c_3 2^x \cos\frac{\pi}{2}x + c_4 2^x \sin\frac{\pi}{2}x$$

Προκειμένου να ευρεθεί μια μερική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως τίθεται $\Psi_x = (\alpha x + \beta) + cx2^x + k3^x$, οπότε με τη βοήθεια της δοσμένης εξισώσεως προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$[\alpha(x+4) + \beta] + c(x+4)2^{x+4} + k3^{x+4} - 16(\alpha x + \beta) - 16cx2^x - 16k3^x =$$

$$-30x + 8 + 2^{x+6} + 13\cdot 3^x$$

$$-15\alpha x + (4\alpha - 15\beta) + 64c2^x + 65k3^x = -30x + 8 + 2^{x+6} + 13\cdot 3^x$$

Τότε όμως προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} -15\alpha = -30 \\ 4\alpha - 15\beta = 8 \\ 64c = 64 \\ 65k = 13 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ c = 1 \\ k = \dfrac{1}{5} \end{matrix}\right\}$$

Αρα, $\Psi_x = 2x + x2^x + \frac{1}{5}\cdot 3^x$ και η γενική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι:

$$y_x = c_1 2^x + c_2(-2)^x + c_3 2^x \cos\frac{\pi}{2}x + c_4 2^x \sin\frac{\pi}{2}x + 2x + x2^x + \frac{1}{5}\cdot 3^x$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{x+2}+3y_{x+1}-10y_x=0,\ y_0=7,\ y_1=-14$

(β) $y_{x+2}-8y_{x+1}+16y_x=0,\ y_0=5,\ y_1=12$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $2y_{x+2}+3y_{x+1}-2y_x=0,\ y_0=0,\ y_1=-3$

(β) $4y_{x+2}-4y_{x+1}+1=0,\ y_0=-2,\ y_1=0$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{x+3}-2y_{x+1}-\sqrt{3}y_x=0,\ y_0=-2,\ y_1=3,\ y_2=4-3\sqrt{3}$

(β) $y_{x+3}-2y_{x+2}-5y_{x+1}+6y_x=0,\ y_0=-12,\ y_1=2,\ y_2=22$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{x+2}+y_{x+1}+y_x=5,\ y_0=0,\ y_1=1$

(β) $y_{x+3}-y_{x+2}-8y_{x+1}+12y_x=0,\ y_0=5,\ y_1=-8,\ y_2=-2$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{x+3}-3y_{x+2}+3y_{x+1}-y_x=0,\ y_0=4,\ y_1=2,\ y_2=0$

(β) $y_{x+3}-y_{x+2}+4y_{x+1}-4y_x=0,\ y_0=2,\ y_1=3,\ y_2=-3$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+4}-3y_{x+2}+14y_{x+1}-12y_x=0,$$

$$y_0=9,\ y_1=3+2\sqrt{3},\ y_2=21+4\sqrt{3},\ y_3=-63$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+4}-2y_{x+3}-11y_{x+2}+12y_{x+1}+36y_x=0$$

$$y_0=1,\ y_1=1,\ y_2=7,\ y_3=-137$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+2}-y_{x+1}+y_x=0,\ y_0=1,\ y_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+5}-7y_{x+4}+17y_{x+3}-19y_{x+2}+16y_{x+1}-12y_x=0,$$

$$y_0=0,\ y_1=-2,\ y_2=-13,\ y_3=-55,\ y_4=-179$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+6}-2y_{x+5}+3y_{x+4}-4y_{x+3}+3y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x=0$$

$$y_0=-3,\ y_1=1,\ y_2=-3,\ y_3=-1,\ y_4=13,\ y_5=17$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να ευρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_n) όταν:

$$\alpha_0=4,\ \alpha_1=5,\ \alpha_2=6,\ \text{και}\ \ \alpha_n=\frac{29\alpha_{n-1}-23\alpha_{n-2}+6\alpha_{n-3}}{12}$$

για κάθε $n\in N^*$, με $n\geq 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να ευρεθεί ο αριθμός των λέξεων μήκους n που μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας δυο γράμματα α, β έτσι ώστε αυτές να μην περιέχουν δύο διαδοχικά α.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{x+2}-4y_x=12(-2)^x,\ y_0=4,\ y_1=-4$

(β) $y_{x+2}+y_x=5\cdot 2^x,\ y_0=2,\ y_1=1$

(γ) $y_{x+2}-2y_{x+1}-3y_x=8(-1)^x,\ y_0=7,\ y_1=-3$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{x+2}+4y_{x+1}+4y_x=(-2)^{x+4},\ y_0=1,\ y_1=3$

(β) $y_{x+2}-3y_{x+1}-10y_x=7\cdot 5^{x+1},\ y_0=8,\ y_1=3$

(γ) $y_{x+2}-2\sqrt{2}y_{x+1}+4y_x=\sqrt{2}2^{x+2},\ y_0=\sqrt{2},\ y_1=\sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+2}+y_{x+1}-2y_x = 18x+12(-2)^x+10\cdot 3^x$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+4}-y_x = 8(2x-1)+16(-1)^x+15\cdot 2^x$$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+2}-8y_{x+1}+16y_x=18x,\ y_0=\frac{2}{3},\ y_1=\frac{26}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+2}+4y_{x+1}-12y_x=6x^2-19x+10,\ y_0=1,\ y_1=-1$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+2}+3y_{x+1}-4y_x = 20x+19,\ y_0=2,\ y_1=4$$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+3}-2y_{x+2}+y_{x+1}-2y_x = 8\cdot 2^x+7\cdot 5^x$$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y_{x+3}-11y_{x+2}+39y_{x+1}-45y_x = 10\cdot 3^x+8\cdot 5^x$$