14.3.15

Διακριτά Μαθηματικά Φροντιστήριο 1ο

Γράφημα δεσμών $G=(V,E)$ V σύνολο κόμβων/κορυφών
E σύνολο δεσμών

$d(v)$: ο βαθμός της κορυφής v.

Πρόταση (Λήμμα χειραψίας).

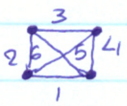
Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος **ισούται** με το διπλάσιο του αριθμού των δεσμών του.
Αν $G=(V,E)$ τότε

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$$

Άσκηση 1

α) Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του K_n.

K_4



Παρατηρούμε ότι στο K_n ο βαθμός κάθε κόμβου είναι $n-1$.
Έστω E το σύνολο των δεσμών του K_n.
Ισχύει ότι

$$2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V} (n-1) = n\cdot(n-1)$$

Άρα,

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Άλλος τρόπος: Ο αριθμός των δεσμών του K_n ισούται με τον αριθμό των ζευγών των κορυφών του, δηλαδή με $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

β) Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του $G=(V,E)$ όπου $|V|=n$ και ο βαθμός κάθε κορυφής είναι d. (Το G λέγεται d-κανονικό).

Ισχύει ότι

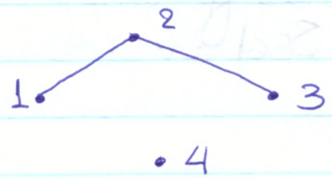
$$2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V} d = nd \Rightarrow |E| = \frac{nd}{2}$$

γ) Αν $G=(V,E)$ με $|V|=n$ και $|E|=k$ τότε να βρείτε τον αριθμό των δεσμών του G^c (συμπλήρωμα του G).

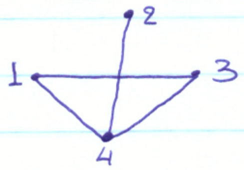
Ορισμός $G^c=(V',E')$ όπου $V'=V$
Για κάθε $x,y \in V$ ισχύει ότι

$$\{x,y\} \in E \iff \{x,y\} \notin E'$$
$$\{x,y\} \notin E \iff \{x,y\} \in E$$

G



G^c



Ισχύει ότι

$$|E'| = \binom{n}{2} - k.$$

δ) Ένα γράφημα G ονομάζεται αυτοσυμπληρωματικό αν $G \simeq G^c$. Έστω $G=(V,E)$ με $|V|=n$. Να δειχθεί ότι αν G είναι αυτοσυμπληρωματικό τότε $n \equiv 0 \bmod 4$ ή $n \equiv 1 \bmod 4$.

Έστω $|E|=k$. Αφού $G \simeq G^c$ πρέπει

$$k = \binom{n}{2} - k \iff$$
$$2k = \frac{n(n-1)}{2} \iff$$
$$4k = n(n-1)$$

Άρα,

$$n(n-1) \equiv 0 \bmod 4$$

οπότε

$$n \equiv 0 \bmod 4 \quad \text{ή} \quad n-1 \equiv 0 \bmod 4$$

δηλαδή

$$n \equiv 0 \bmod 4 \quad \text{ή} \quad n \equiv 1 \bmod 4$$

Παράδειγμα αυτοσυμπληρωματικού γραφήματος.

$G =$  $G^c =$ 

Παρατήρηση

Για κάθε ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος ισχύει ότι:

α) Το άθροισμα όλων των βαθμών της είναι άρτιος.

β) Ο μέγιστος δυνατός βαθμός σε ένα γράφημα με n κορυφές είναι $n-1$.

γ) Σε ένα γράφημα με n κορυφές δεν γίνεται να υπάρχουν μαζί οι βαθμοί $n-1$ και 0.

Άσκηση

Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.

α) $(3,3,3,3,3,3,3)$

Δεν υπάρχει, διότι το άθροισμα των βαθμών της είναι περιττός.

β) $(7,4,4,3,3,2,1)$

Δεν υπάρχει, διότι σε ένα γράφημα 7 κορυφών ο μέγιστος δυνατός βαθμός είναι 6.

γ) $(7,4,4,3,3,3,2,0)$

Δεν υπάρχ. , διότι αφού μία κορυφή έχει βαθμό 7 συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος. Άρα, δεν μπορεί να υπάρχει κορυφή βαθμού 0.

δ) $(0,0,0,0)$

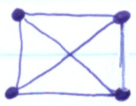
Ναι υπάρχει και είναι : :

ε) (1,1,1,1,1,1)

στ) (2,2,2,2,2,2)

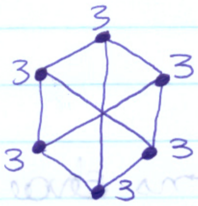
ή

ζ) (3,3,3,3)

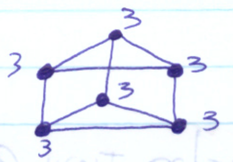


K_4

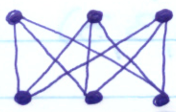
η) (3,3,3,3,3,3)



ή



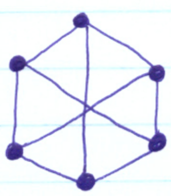
ή



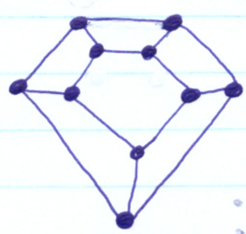
$K_{3,3}$

θ) (5,3,3,2,2,1)

ι) (3,3,3,3,3,3,3,3,3,3)



ή



ή

Γράφημα Peterson

Έστω $G=(V,E)$ και $G'=(V',E')$

Τα G, G' ονομάζονται ισόμορφα $G \simeq G'$ ανν:
υπάρχει απεικόνιση $f: V \to V'$ 1-1 και επί και
για κάθε $x, y \in V$ με $\{x,y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$.

$\boxed{1}$ Για να δείξουμε ότι $G \simeq G'$ πρέπει να βρούμε μια f με την παραπάνω ιδιότητα.

$\boxed{2}$ Για να δείξουμε ότι $G \not\simeq G'$ πρέπει να βρούμε μια ιδιότητα που έχει το G και δεν έχει το G' (ενώ θα έπρεπε να την έχει το G' αν ήταν ισόμορφο).

Αν $G \simeq G'$ τότε

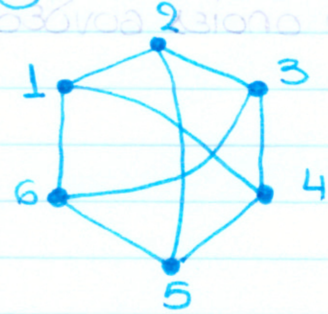
a) έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών.

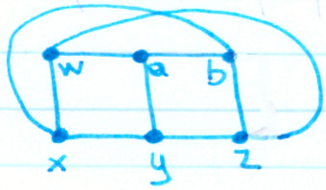
β) Αν H υπογράφημα του G, τότε H υπογράφημα του G'.

Άσκηση

Να εξετασθεί αν τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων είναι ισόμορφα.

a)

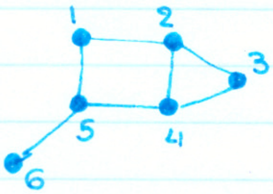


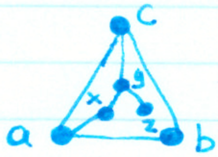


$1 \xrightarrow{f} x$
$2 \to y$
$3 \to a$
$4 \to b$
$5 \to z$
$6 \to w$

Η f είναι ισομορφισμός.

β)

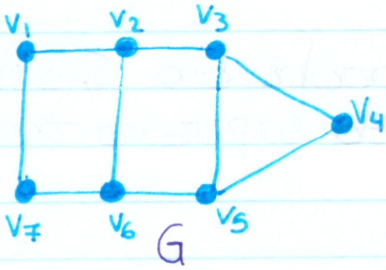


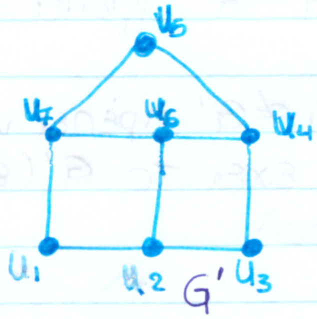


$1 \xrightarrow{f} x$
$2 \longrightarrow a$
$3 \longrightarrow b$
$4 \longrightarrow c$
$5 \longrightarrow y$
$6 \longrightarrow z$

Η f είναι ισομορφισμός
Άρα είναι ισόμορφη.

β)





3, 3, 3, 3, 2, 2, 2   3, 3, 3, 3, 2, 2, 2

- υπάρχει μια κορυφή στο G' βαθμού 3, η οποία συνδέεται με 3 κορυφές βαθμού 3, ενώ στο G όχι.
Άρα, $G \ncong G'$.

- στο G υπάρχουν 2 κορυφές βαθμού 2, οι οποίες συνδέονται, ενώ στο G' όχι.