No. Date 9.5.15

Διακριτά Μαθηματικά

Γεννήτριες συναρτήσεις

Για κάθε ακολουθία $f(n)$ η συνάρτηση

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n$$

ονομάζεται (συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n)$.

- Η γεννήτρια συνάρτηση $f^*(x)$ είναι μοναδική για κάθε ακολουθία $f(n)$, δηλαδή

$$f^*(x) = g^*(x) \Longleftrightarrow f(n) = g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Το ανάπτυγμα της $f^*(x)$ σε δυναμοσειρά του x έχει την ιδιότητα ότι ο συντελεστής του x^n είναι το $f(n)$.

- Συνήθως ο συντελεστής του x^n στη $f^*(x)$ συμβολίζεται με $[x^n]f^*(x)$.

Βασικές Ιδιότητες

1. $(af(n))^*(x) = af^*(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} af(n) x^n = a \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = af^*(x)$$

2. $(f_1(n) + f_2(n))^*(x) = f_1^*(x) + f_2^*(x)$

3. $f_1(n)$, $f_2(n)$ συνέλιξη $g(n) = f_1(n) \circledast f_2(n) = \sum_{k=0}^{n} f_1(k) \cdot f_2(n-k)$

No. Date

$$g^*(x) = f_1^*(x) f_2^*(x)$$

Βασικές γεννήτριες συναρτήσεις

1. $$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n, \quad |x| \le \left|\frac{1}{a}\right|$$

2. $$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \quad a \neq -1$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n)$ όπου $f(0)=1$, $f(1)=0$ και

$$f(n) = 2f(n-2) - 3f(n-1) \quad \text{για } n \ge 2.$$

και στη συνέχεια να βρεθεί ο συντελεστής του x^n.

Λύση

Θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση $f^*(x)$ της ακολουθίας $f(n)$.

Ισχύει ότι

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = f(0)x^0 + f(1)x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n.$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(2f(n-2) - 3f(n-1)\right) x^n =$$

$$= 1 + 2\sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^n - 3\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^n =$$

$$= 1 + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^{n-2} - 3x \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^{n-1} =$$

$$= 1 + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n - 3x \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n =$$

No. Date

$$= 1 + 2x^2 f^*(x) - 3x\left(f^*(x) - f(0)x^0\right) =$$

$$= 1 + 2x^2 f^*(x) - 3x\left(f^*(x) - 1\right)$$

Άρα

$$f^*(x) = 1 + 2x^2 f^*(x) - 3x\left(f^*(x) - 1\right)$$

Επομένως,

$$\boxed{f^*(x) = \frac{1+3x}{1+3x-2x^2}}$$ Ρητή γεννήτρια συνάρτηση

Για να βρούμε τον συντελεστή του x^n θα κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Υπενθύμιση:

$ax^2 + bx + c = 0$ ρίζες: p_1, p_2

$a(x-p_1)(x-p_2)$

Ooo.

$1 + 3x - 2x^2$ $\Delta = 9 + 4 \cdot 2 = 17$.

$$p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{-4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$p_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \qquad p_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$$

$$p_1 p_2 = -1/2$$
$$p_1 + p_2 = 3/2$$

$$\frac{1+3x}{1+3x-2x^2} = \frac{1+3x}{-2(x-p_1)(x-p_2)} = \frac{1+3x}{-2(p_1-x)(p_2-x)} =$$

$$= \frac{1+3x}{-2p_1p_2\left(1-\frac{x}{p_1}\right)\left(1-\frac{x}{p_2}\right)} = \frac{1+3x}{\left(1-\frac{x}{p_1}\right)\left(1-\frac{x}{p_2}\right)}$$

No. Date

$$\frac{1+3x}{\left(1-\frac{x}{p_1}\right)\left(1-\frac{x}{p_2}\right)} = \frac{A}{1-\frac{x}{p_1}} + \frac{B}{1-\frac{x}{p_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+3x = A\left(1-\frac{x}{p_2}\right) + B\left(1-\frac{x}{p_1}\right)$$

$\boxed{\text{Για } x=p_1:}$ $1+3p_1 = A\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right) \Rightarrow A = \frac{1+3p_1}{\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)} = \frac{p_2(1+3p_1)}{p_2-p_1}$

$\boxed{\text{Για } x=p_2:}$ $1+3p_2 = B\left(1-\frac{p_2}{p_1}\right) \Rightarrow B = \frac{1+3p_2}{1-\frac{p_2}{p_1}} = \frac{p_1(1+3p_2)}{p_1-p_2}$

Επομένως,

$$f^*(x) = \frac{A}{1-\frac{x}{p_1}} + \frac{B}{1-\frac{x}{p_2}} =$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{p_1}\right)^n + B\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{p_2}\right)^n =$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_1}\right)^n x^n + B\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_2}\right)^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{p_1^n} + \frac{B}{p_2^n}\right)x^n$$

Άρα $f(n) = \frac{A}{p_1^n} + \frac{B}{p_2^n} =$

$$= A\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)^{-n} + B\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)^{-n}.$$

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών $f(n)$, $g(n)$ όπου $f(0)=g(0)=1$ και για $n\geq 1$ ισχύουν οι σχέσεις

$$f(n) = f(n-1) + 2g(n-1)$$
$$g(n) = 3f(n-1) - 4g(n-1)$$

Λύση:

No. Date

Θεωρούμε τις γεννήτριες συναρτήσεις $f^*(x)$, $g^*(x)$.
Ισχύει ότι

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, x^n = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) x^n =$$

ξεχωρίζω τον πρώτο όρο γιατί η $f(n)$ ισχύει για $n \geq 1$.

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n-1) + 2g(n-1)\right) x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)\, x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} g(n-1) x^n =$$

$$= 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) x^n + 2x\sum_{n=1}^{\infty} g(n-1) x^{n-1} =$$

$$= 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} g(n) x^n$$

Επομένως,

$$f^*(x) = 1 + x f^*(x) + 2x g^*(x) \iff$$

$$\boxed{(1-x) f^*(x) - 2x g^*(x) = 1 \quad (1)}$$

Αντίστοιχα, ισχύει ότι

$$g^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) x^n = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n) x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(3f(n-1) - 4g(n-1)\right) x^n =$$

$$= 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)\, x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} g(n-1) x^n =$$

$$= 1 + 3x\sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) x^{n-1} - 4x\sum_{n=1}^{\infty} g(n-1) x^{n-1} =$$

$$= 1 + 3x\sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n - 4x\sum_{n=0}^{\infty} g(n) x^n$$

Επομένως,

$$g^*(x) = 1 + 3x f^*(x) - 4x g^*(x) \iff$$

$$\boxed{-3x f^*(x) + (1+4x) g^*(x) = 1} \quad (2)$$

$$g^*(x)\left(-6x^2 + (1-x)(1+4x)\right) = 3x + (1-x)$$

$$\boxed{g^*(x) = \frac{1+2x}{1+3x-10x^2}}$$

$$f^*(x)\left((1-x)(1+4x) - 6x^2\right) = 1+4x+2x$$

$$\boxed{f^*(x) = \frac{1+6x}{1+3x-10x^2}}$$

Επειδή

$$1+3x-10x^2 = (1+5x)(1-2x)$$

έχουμε ότι

$$f^*(x) = \frac{1+6x}{(1+5x)(1-2x)}$$

και

$$g^*(x) = \frac{1+2x}{(1+5x)(1-2x)}$$

Θα κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1+6x}{(1+5x)(1-2x)} = \frac{A}{1+5x} + \frac{B}{1-2x} \Rightarrow$$

$$1+6x = A(1-2x) + B(1+5x)$$

$\boxed{\text{Για } x=\frac{1}{2}}$ $\quad 1+6\frac{1}{2} = B\left(1+\frac{5}{2}\right)$

$$4 = \frac{7}{2}B$$

$$B = 8/7$$

$\boxed{\text{Για } x=-\frac{1}{5}}$ $\quad 1-\frac{6}{5} = A\left(1+\frac{2}{5}\right)$

$$-\frac{1}{5} = \frac{7}{5}A$$

$$A = -1/7$$

Άρα,

$$f^*(x) = -\frac{1}{7}\frac{1}{1+5x} + \frac{8}{7}\frac{1}{1-2x} =$$

$$= -\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-5)^n x^n + \frac{8}{7}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}(-5)^n + \frac{8}{7}2^n\right)x^n$$

Τέλος, $\boxed{f(n) = -\frac{1}{7}(-5)^n + \frac{8}{7}2^n}$

Αντίστοιχα βρίσκω τη $g(n)$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n)$, όπου $f(n)$ είναι ο αριθμός των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς, τα οποία δεν περιέχουν φύλλα σε ύψος 1.

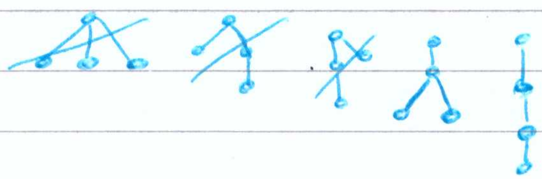
Λύση

Παραδείγματα

$n=0$ $f(0)=1$

$n=1$  $f(1)=0$

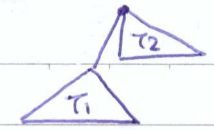
$n=2$  $f(2)=1$.

$n=3$  $f(3)=2$

Κάθε διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς έχει μία από τις δύο μορφές.

Για $n=0$

Για $n \geq 1$



όπου T_1, T_2 είναι διατεταγμένα δένδρα και αν το T_1 έχει k δεσμούς, τότε το T_2 έχει $n-1-k$ δεσμούς, $k=0,\dots,n-1$.

Είναι γνωστό ότι ο αριθμός των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς ισούται με C_n (n-οστός αριθμός Catalan).

Έστω A_n το σύνολο των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς

$$|A_n| = C_n$$

$T_1 \in A_k$

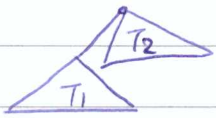
$T_2 \in A_{n-1-k}$

Έστω B_n το σύνολο των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς τα οποία δεν περιέχουν φύλλα σε ύψος 1.

Για $n=0$:

$B_0 = \{\bullet\}$

Για $n \geq 1$:



$T_1 \neq \bullet$

T_1 δεν έχει άλλο περιορισμό

T_2 δεν πρέπει να έχει φύλλα σε ύψος 1

Έστω ότι το T_1 έχει k δεσμούς, τότε το T_2 θα έχει $n-1-k$ δεσμούς.

Το $T_1 \in A_k$, $k \geq 1$ (διότι δεν έχει περιορισμούς) $T_2 \in B_{n-k-1}$.

$$|B_n| = \sum_{k=1}^{n-1} |A_k|\,|B_{n-k-1}| \quad (1),\ n \geq 1$$

Θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση $B^*(x)$ της ακολουθίας $|B_n|$. $B^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |B_n| x^n = B_0 + \sum_{n=1} |B_n| x^n =$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} |A_k||B_{n-1-k}| x^n =$$

$$\boxed{\begin{array}{c} k \le n-1 \Leftrightarrow \\ n \ge k+1 \end{array}}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} |A_k||B_{n-1-k}| x^n =$$

$$= 1 + x \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \sum_{n=k+1}^{\infty} |B_{n-1-k}| x^{n-1} =$$

$$= 1 + x \sum_{k=1}^{\infty} x^k |A_k| \sum_{n=k+1}^{\infty} |B_{n-1-k}| x^{n-1-k} =$$

$$= 1 + x \left(\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| x^k - |A_0| \right) \sum_{n=0}^{\infty} |B_n| x^n =$$

$$= 1 + x \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k - 1 \right) B^*(x) =$$

$$= 1 + x \left(C^*(x) - 1 \right) B^*(x)$$

Άρα,

$$B^*(x) = 1 + x\left(C^*(x) - 1\right) B^*(x) \Leftrightarrow$$

$$B^*(x) = \frac{1}{1 - x(C^*(x) - 1)}$$

- Υπάρχουν γεννήτριες συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι ρητή συνάρτηση του x ή υπάρχουν γεννήτριες συναρτήσεις με παρανομαστή βαθμού ≥5. (οπότε δεν μπορώ να βρω τις ρίζες τους).

π.χ.

$$f^*(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = C(x)$$

$$g^*(x) = \frac{1+x}{1+x+x^7}$$

$$h^*(x) = 1 + x^2 h^*(x) + (h^*(x))^{10}$$

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα Αντιστροφής του Lagrange

Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange

Αν $f^*(x) = 1 + x H(f^*(x))$
όπου $H(\lambda)$ είναι δυναμοσειρά του λ τότε για $n \geq 1$

$$n f(n) = [\lambda^{n-1}] (H(1+\lambda))^n$$

δηλαδή $n f(n)$ ισούται με το συντελεστή του λ^{n-1} στο ανάπτυγμα της δυναμοσειράς $(H(1+\lambda))^n$

Παρατήρηση:

Το Θ.Α. του Lagrange συσχετίζει τους συντελεστές της $f^*(x)$ με τους συντελεστές της $(H(1+\lambda))^n$.

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι συντελεστές του x^n στις επόμενες γεννήτριες:

a) $f^*(x) = \frac{1}{1-3x}$

$$f^*(x)\,(1-3x) = 1 \iff f^*(x) = 1 + 3x f^*(x) =$$
$$= 1 + x\,(3 f^*(x))$$

Έστω $f^*(x) = 1 + x H(f^*(x))$ όπου $H(\lambda) = 3\lambda$

Άρα από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange ισχύει ότι

$n \geq 1 \quad n f(n) = [\lambda^{n-1}] (H(1+\lambda))^n = [\lambda^{n-1}] (3(1+\lambda))^n =$

$$= [\lambda^{n-1}]\, 3^n (1+\lambda)^n =$$

$= [\lambda^{n-1}] 3^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^k = [\lambda^{n-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\binom{n}{k} 3^n\right) \lambda^k$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Άρα ο συντελεστής του λ^{n-1} προκύπτει θέτοντας $k=n-1$ στην έκφραση $\binom{n}{k}3^n$.

Άρα,

$$n f(n) = \binom{n}{n-1} 3^n$$

$$n f(n) = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} 3^n$$

$$\boxed{f(n) = 3^n}$$

β) $f^*(x) = 1 + x(f^*(x))^3$

Είναι

$$f^*(x) = 1 + x\left((f^*(x))^3\right)$$

οπότε

$$f^*(x) = 1 + x H(f^*(x)) \text{ όπου } H(\lambda) = \lambda^3$$

Από το Θ.Α.L ισχύει ότι

$$n f(n) = [\lambda^{n-1}] \, (H(1+\lambda))^n =$$

$$= [\lambda^{n-1}] \, ((1+\lambda)^3)^n =$$

$$= [\lambda^{n-1}] \, (1+\lambda)^{3n} =$$

$$= [\lambda^{n-1}] \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \lambda^k$$

Άρα ο συντελεστής του λ^{n-1} προκύπτει θέτοντας $k=n-1$ στην έκφραση $\binom{3n}{k}$

Άρα,

$$n f(n) = \binom{3n}{n-1} \Rightarrow f(n) = \frac{1}{n}\binom{3n}{n-1} \quad n \geq 1$$

γ) $f^*(x) = 1 + 3x(f^*(x))^5$

$$f^*(x) = 1 + x(3(f^*(x))^5) = 1 + xH(f^*(x)) \text{ όπου } H(\lambda)=3\lambda^5$$

Από το Θ.Α. του Lagrange για $n \geq 1$

$$nf(n) = [\lambda^{n-1}](H(1+\lambda))^n = [\lambda^{n-1}](3(1+\lambda)^5)^n =$$
$$= [\lambda^{n-1}]\, 3^n(1+\lambda)^{5n} = [\lambda^{n-1}] \sum_{k=0}^{5n} \binom{5n}{k} 3^n \lambda^k$$

Άρα, ο συντελεστής του λ^{n-1} προκύπτει θέτωντας $k=n-1$ στην έκφραση

Άρα

$$nf(n) = 3^n \binom{5n}{n-1}$$

$$\boxed{f(n) = \frac{3^n}{n}\binom{5n}{n-1} \quad n \geq 1}$$

δ) $f^*(x) = 1 + xf^*(x) + x(f^*(x))^2$

$$f^*(x) = 1 + x(f^*(x) + (f^*(x))^2)$$

Άρα,

$$f^*(x) = 1 + xH(f^*(x)) \text{ όπου } H(\lambda)=\lambda+\lambda^2$$

Από το Θ.Α.L για $n \geq 1$

$$nf(n) = [\lambda^{n-1}](H(1+\lambda))^n = [\lambda^{n-1}]((\lambda+1)+(\lambda+1)^2)^n =$$

$$= [\lambda^{n-1}] \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda+1)^k ((\lambda+1)^2)^{n-k} =$$

$$= [\lambda^{n-1}] \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda+1)^{2n-k} =$$

$$= [\lambda^{n-1}] \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{p=0}^{2n-k} \binom{2n-k}{p} \lambda^p =$$

$$= [\lambda^{n-1}] \sum_{p=0}^{2n} \sum_{k=0}^{\min\{2n-p,n\}} \binom{n}{k}\binom{2n-k}{p}\lambda^p$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p \le 2n-k \Leftrightarrow \\ k \le 2n-p \end{array}}$$
$k \le n$

Άρα ο συντελεστής του λ^{n-1} προκύπτει θέτοντας $p=n-1$ στην έκφραση

$$\sum_{k=0}^{\min\{2n-p,n\}} \binom{n}{k}\binom{2n-k}{p}$$

$$n f(n) = \sum_{k=0}^{\min\{2n-p,n\}} \binom{n}{k}\binom{2n-k}{n-1}$$

$$n f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n-k}{n-1}$$

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n-k}{n-1}$$

ε) $f^*(x) = 1 + x^2 (f^*(x))^2$

$$f^*(x) = 1 + x\left(x\,(f^*(x))^2\right) = 1 + x H(f^*(x))$$

όπου $H(\lambda) = x\lambda^2$

Από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}](H(1+\lambda))^n x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}](H(1+\lambda))^n x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}](x(1+\lambda))^n x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{2n} x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\lambda^k x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} x^{2n}$$

$$f(2n+1) = 0$$

$$f(2n) = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}$$