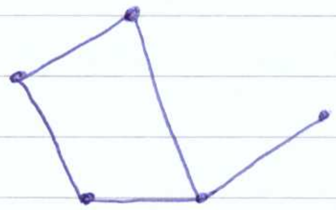
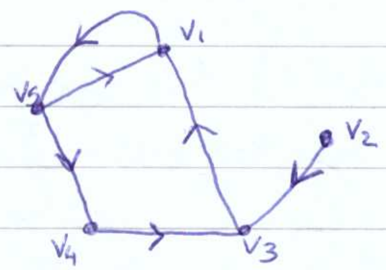
No. Date 22.4.15

Γραφήματα τόξων (σελ. 38-43)





γράφημα δεσμών

$G = (X, E)$

σύνολο κορυφών ← X, E → σύνολο δεσμών

γράφημα τόξων.

$G = (X, U)$

σύνολο κορυφών → X, U ← σύνολο τόξων.

Δεσμοί: δισύνολα $\{u, v\}$ δεν έχουν διάταξη

Τόξα: διατεταγμένα ζεύγη (u, v) υπάρχει διάταξη

u: αρχή του τόξου

v: πέρας τόξου

$G = (X, U)$

$X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$U = \{(v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_4), (v_5, v_1), (v_1, v_5)\}$

Τα τόξα (u, v) και (v, u) είναι διαφορετικά.

Βαθμός εισόδου $d^-(v) = \#$ τόξων με πέρας την v

$d^+(v) = \#$ τόξων με αρχή την v.

Βαθμός $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$

Μήτρα γραφήματος τόξων

$G=(X,U)$ γραφήματα τόξων

Η μήτρα M του γραφήματος G έχει διαστάσεις $|X|\times|X|$ και ορίζεται ως εξής:

$$M=[m_{ij}] \quad \text{όπου} \quad m_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{αν } (x_i,x_j)\in U \\ 0 & \text{αν } (x_i,x_j)\notin U \end{cases}$$

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Γενικά, η M δεν είναι συμμετρική όπως στα γραφήματα δεσμών.

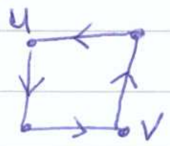
Συνεκτικότητα στα γραφήματα τόξων

Εδώ στα γραφήματα τόξων διακρίνουμε την συνεκτικότητα ως προς το αν ακολουθεί ή όχι την φορά των τόξων.

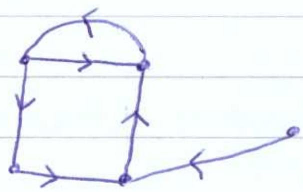
Γραφήματα δεσμών: Διακρίνονται σε συνεκτικά και μη συνεκτικά.

Γραφήματα τόξων: Διακρίνονται σε
- ισχυρά συνεκτικά ①
- μονομερώς συνεκτικά ②
- ασθενώς συνεκτικά ③
- μη συνεκτικά ④

① Για κάθε ζεύγος κορυφών u,v υπάρχουν μονοπάτια που ακολουθούν την φορά των τόξων με αρχή το u και τέλος το v και με αρχή το v και τέλος το u.



② Για κάθε ζεύγος κορυφών u, v υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που ακολουθεί τη φορά των τόξων με αρχή και τέλος αυτές τις κορυφές.



μονομερώς συνεκτικό αλλά δεν είναι ισχυρά συνεκτικό.

③ Συνεκτικό αν "ξεχάσουμε" τη φορά των τόξων.

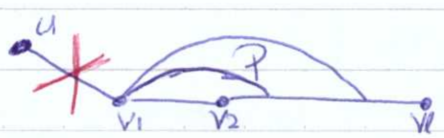
④ Μη συνεκτικό αν "ξεχάσουμε" τη φορά των τόξων.

Άσκηση 1

α) Έστω G ένα γράφημα δεσμών, στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών του ισούται με . Να δειχθεί ότι υπάρχει μονοπάτι μήκους κ στο G.

Λύση

Έστω P ένα μονοπάτι μέγιστου μήκους στο G και έστω $P = v_1 v_2 \cdots v_l$.
Τότε τα άκρα του v_1, v_l συνδέονται μόνο με κορυφές του P.



Άρα, το v_1 συνδέεται με τουλάχιστον k κορυφές στο P.
Δηλαδή, το P περιέχει τουλάχιστον $1+k$ κορυφές, δηλαδή έχει μήκος $\geq k$.

Άσκηση 2

Έστω G γράφημα δεσμών στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός είναι ≥ 2. Να δειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.

Λύση

Έστω P μονοπάτι μέγιστου μήκους στο G. και έστω
$P = v_1 v_2 \cdots v_l$
Τότε τα άκρα του συνδέονται μόνο με κορυφές του P

Η v_1 συνδέεται με τη v_2 και με τουλάχιστον άλλη μία κορυφή του P, την v_j.

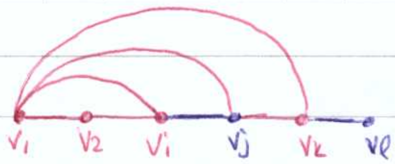
Τότε υπάρχει ο κύκλος $v_1 \cdot v_2 \cdots v_j v_1$.

Άσκηση 3

Έστω G γράφημα δεσμών στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός είναι ≥ 4. Να δειχθεί ότι το G περιέχει 2 ξένους κύκλους ως προς τους δεσμούς.

Λύση

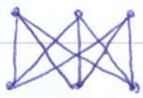
Έστω $P = v_1 v_2 \cdots v_l$ μονοπάτι μέγιστου μήκους στο G.
Τότε τα άκρα του P συνδέονται μόνο με κορυφές του P.

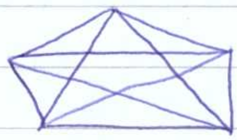


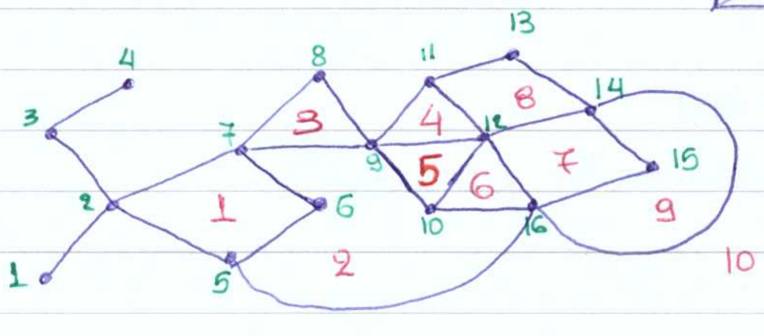
Έστω ότι η v_1 συνδέεται με τις v_2, v_i, v_j, v_k (με τη σειρά που εμφανίζονται στο P).
Τότε οι κύκλοι $v_1, v_2 \cdots v_i v_1$ και $v_j \cdots v_k v_1 v_j$ είναι ξένοι.

Ορισμός: Ένα γράφημα δεσμών ονομάζεται επίπεδο αν μπορεί να σχεδιασθεί στο επίπεδο έτσι ώστε να μην τέμνονται οι δεσμοί του.

Παραδείγματα: Τα δένδρα είναι επίπεδα
K_4 είναι επίπεδο 

 δεν είναι επίπεδο

K_5 δεν είναι επίπεδο 



Θεώρημα Euler

Σε κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα ισχύει ότι

$$K+E=A+2$$

K: #κορυφών E: #εδρών $16+10=A+2 \Leftrightarrow A=24$

A: # άκρων/δεσμών

No. Date

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τον αριθμό των εδρών E.

Για $E=1$ έχουμε ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλου δηλαδή ένα δένδρο.
Στα δένδρα γνωρίζουμε ότι $K=A+1$, άρα $K+\frac{E}{1}=A+2$
άρα, ο τύπος ισχύει για $E=1$.

Έστω ότι ισχύει για $E<m$, $m\geq 2$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $E=m$.

Αφού το γράφημα έχει m έδρες ≥ 2 και είναι συνεκτικό. Θα περιέχει κύκλο
Θα έχει τουλάχιστον ένα δεσμό, τον $\{u,v\}$. που ανήκει στον κύκλο
Αν αφαιρέσουμε από τον δεσμό
Το γράφημα που προκύπτει θα είναι επίπεδο, θα είναι συνεκτικό και θα έχει $E-1<m$ έδρες, $A-1$ δεσμούς, K κορυφές
Άρα, γι' αυτό θα ισχύει η υπόθεση της επαγωγής.

$$K+(E-1)=(A-1)+2$$

Άρα

$$K+E=A+2$$

Άρα η πρόταση ισχύει για κάθε E.