26.3.15

Διακριτά Μαθηματικά

Γνωρίζουμε ότι για να πολλαπλασιάσουμε 2 μήτρες A, B με διαστάσεις $m \times n$ και $n \times p$ αντίστοιχα απαιτούνται

$m \cdot n \cdot p$ πολλαπλασιασμοί

και το αποτέλεσμα είναι μία μήτρα $C = AB$ με διαστάσεις **$m \times p$**.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για να βρούμε το γινόμενο

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

όπου A_1 έχει διαστάσεις 10×2
A_2 " " 2×7
A_3 " " 7×3

Γνωρίζουμε ότι ο πολλαπλασιασμός μητρών δεν είναι αντιμεταθετική πράξη αλλά είναι **προσεταιριστική** (δηλαδή "επιτρέπεται να βάλω τις παρενθέσεις όπως θέλω").

1ος τρόπος

$$\underbrace{(A_1 A_2)}_{}^{B} \cdot A_3$$

$10 \times 2 \cdot 2 \times 7$

Για το $A_1 \cdot A_2$ χρειαζόμαστε $10 \cdot 2 \cdot 7 = 140$ πολλαπλασιασμοί.

$$B \cdot A_3$$

$10 \times 7 \quad 7 \times 3$

Για το $B \cdot A_3$ χρειαζόμαστε $10 \cdot 7 \cdot 3 = 210$ πολλαπλασιασμοί

Συνολικά, χρειαζόμαστε $140 + 210 = 350$ πολλαπλασιασμοί

2ος τρόπος

$$\underset{2\times 7\ \ 7\times 3}{A_1(\overset{C}{\overset{\shortparallel}{A_2 A_3}})}$$

Για το A_2A_3 χρειάζομαι $2\cdot 7\cdot 3=42$ πολ/σμοί

Για το $\underset{10\times 2\ \ 2\times 3}{A_1\cdot C}$ χρειάζομαι $10\cdot 2\cdot 3=60$ πολ/σμοί

Συνολικά, χρειάζομαι $42+60=102$ πολ/σμοί.

Ερώτημα

Αν έχουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο

$$\underset{k_1\times k_2\ \ k_2\times k_3\ \ \ \ k_n\times k_{n+1}}{A_1\times A_2\times \dots \times A_n}$$

Ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος για να κάνουμε τους πολ/σμους;
Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα;

Τρόποι υπολογισμού του γινομένου $A_1A_2\dots A_n$		
$n=1$	A_1	1 τρόπος
$n=2$	A_1A_2	1 τρόπος
$n=3$	$((A_1A_2)A_3)$ $(A_1(A_2A_3))$	2 τρόποι
$n=4$	$((A_1A_2)A_3)A_4$ $(A_1A_2)(A_3A_4)$ $(A_1(A_2A_3))A_4$ $A_1((A_2A_3)A_4)$ $A_1(A_2(A_3A_4))$	5 τρόποι

No. Date

$n=5$

$(((A_1A_2)A_3)A_4)A_5$ $(A_1A_2)((A_3A_4)A_5)$
$((A_1A_2)(A_3A_4))A_5$ $(A_1(A_2A_3))(A_4A_5)$ 14
$((A_1(A_2A_3))A_4)A_5$ $A_1(((A_2A_3)A_4)A_5)$ τρόποι
$(A_1(A_2(A_3A_4)))A_5$ $A_1((A_2A_3)(A_4A_5))$
$((A_1A_2)A_3)(A_4A_5)$ $A_1((A_2(A_3A_4))A_5)$
$(A_1A_2)(A_3(A_4A_5))$ $A_1(A_2((A_3A_4)A_5))$
$(A_1((A_2A_3)A_4))A_5$ $A_1(A_2(A_3(A_4A_5)))$

Έστω a_n ο αριθμός των τρόπων υπολογισμού του γινομένου $\underbrace{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n+1}}_{n+1 \text{ όρους}}$

Απο τα παραδείγματα, γνωρίζουμε ότι
$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=14$, $(a_0=1)$

Βασική Ιδέα: Θα υπάρχει ένας τελευταίος πολλ/σμος μεταξύ των γινομένων $A_1A_2\cdots A_j$ και $A_{j+1}A_{j+2}\cdots A_{n+1}$, για κάποιο $j\in\{1,2,\ldots,n\}$

Πρόταση

Ο αριθμός a_n ικανοποιεί την αναγωγική σχέση
$n\geq 1$ $a_n=\sum_{j=0}^{n-1} a_j\cdot a_{n-1-j}$, $a_0=1$. (Τύπος του Segner)

Απόδειξη

Στον υπολογισμό του γινομένου
$A_1A_2\cdots A_n$
Θα υπάρχει ένας τελευταίος πολλ/σμός μεταξύ των γινομένων

$A_1A_2\cdots A_j$ και $A_{j+1}A_{j+2}\cdots A_{n+1}$

οπου $j\in\{1,2,\ldots,n\}$

Σε κάθε ένα απο τα γινόμενα $A_1 A_2 \cdots A_j$ και $A_{j+1} A_{j+2} \cdots A_{n+1}$ οι πόλλεμοι γίνονται ανεξάρτητα από το άλλο γινόμενο.
Το γινόμενο $A_1 A_2 \cdots A_j$ έχει j όρους, άρα υπάρχουν a_{j-1} τρόποι υπολογισμού του.
Το γινόμενο $A_{j+1} A_{j+2} \cdots A_{n+1}$ έχει $\underbrace{(n+1-(j+1)+1)}_{n-j+1}$ όρους, άρα

υπάρχουν a_{n-j} τρόποι υπολογισμού του.
Άρα, για τον υπολογισμό και των 2 γινομένων υπάρχουν $a_{j-1} \cdot a_{n-j}$ τρόποι για κάποιο συγκεκριμένο $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Τελικά, για όλες τις δυνατές τιμές του j θα είναι

$$a_n = \underbrace{a_0 a_{n-1}}_{j=1} + \underbrace{a_1 a_{n-2}}_{j=2} + \underbrace{a_2 a_{n-3}}_{j=3} + \ldots + \underbrace{a_{n-1} a_0}_{j=n} = \sum_{j=1}^{n} a \, a_{n-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot a_{n-j-1}$$

Η ακολουθία a_n ονομάζεται ακολουθία των αριθμών Catalan και συμβολίζεται με C_n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430

$$C_5 = \sum_{j=0}^{4} C_j \cdot C_{5-1-j} = C_0 C_4 + C_1 C_3 + C_2 C_2 + C_3 C_1 + C_4 \cdot C_0 =$$
$$= 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 28 + 10 + 4 = 42$$

Αποδεικνύεται ότι $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

$$C_5 = \frac{1}{5+1} \binom{10}{5} = \frac{1}{6} \frac{\cancel{10} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{2} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{5} \cancel{4} \cancel{3} \cancel{2} \cancel{1}} = 3\,2\,7 = 42$$

Πρόβλημα

Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν παρενθέσεις σε ένα γινόμενο απο n όρους έτσι ώστε κάθε ζεύγος παρεν-

Θέλουμε να περιέχει τουλάχιστον 2 όρους;

$n=2$ $(x_1 x_2)$ 1 τρόπος

$n=3$ $((x_1 x_2) x_3)$ 2 τρόποι

$(x_1 (x_2 x_3))$

$(x_1 x_2 x_3)$

$n=4$ $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ $((x_1 x_2) x_3 x_4)$ $(x_1 (x_2 x_3) x_4)$

$(x_1 x_2 (x_3 x_4))$ $((x_1 x_2 x_3) x_4)$ $(x_1 (x_2 x_3 x_4))$

$(((x_1 x_2) x_3) x_4)$ $(x_1 (x_2 x_3)) x_4$ $((x_1 x_2)(x_3 x_4))$

$(x_1 ((x_2 x_3) x_4)$ $(x_1 (x_2 (x_3 x_4)))$ 11 τρόποι.

$n=5$ 45 τρόποι

$n=6$ 197 τρόποι Αριθμοί Schröder

$n=7$ 903 τρόποι

$n=8$ 4279 τρόποι

$n=9$ 20793 τρόποι

$n=10$ 103049 τρόποι

No. Date