8º φροντιστήριο - Διακριτά Μαθηματικά 14-5-2018

Σήμερα: Ασκήσεις στις ασυμπτωτικές ισοδυναμίες
(Τύπος του Stirling
Λήμμα του Stolz)

$$f(n) \sim g(n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Τύπος του Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Λήμμα του Stolz: Αν (a_n), (A_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών και (A_n) είναι θετική και όχι φραγμένη και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ τότε } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_n} = \ell$$

Άλλοι χρήσιμοι τύποι: $\binom{2n-r}{n-s} \sim \frac{4^n}{2^r\sqrt{\pi n}}$ $r, s \in \mathbb{Z}$

$$c_n \sim \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}$$

Άσκηση 1

Να βρεθούν ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις παρακάτω εκφράσεις

α) $(3n)!$

Από τον τύπο του Stirling έχουμε ότι

$$(3n)! \sim \sqrt{2\pi 3n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n} = \sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}$$

Scanned with CamScanner

β) $\binom{7n}{2n}$

Από τον τύπο του Stirling έχουμε ότι

$$\binom{7n}{2n} = \frac{(7n)!}{(2n)!\,(5n)!} \sim \frac{\sqrt{\cancel{2\pi}\cdot 7\cancel{n}}\left(\frac{7n}{\cancel{e}}\right)^{7n}}{\sqrt{\cancel{2\pi}\cdot 2\cancel{n}}\left(\frac{2n}{\cancel{e}}\right)^{2n}\cdot\sqrt{2\pi 5n}\left(\frac{5n}{\cancel{e}}\right)^{5n}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{20\pi n}}\;\frac{(7\cancel{n})^{7n}}{(2\cancel{n})^{2n}(5\cancel{n})^{5n}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{20\pi n}}\left(\frac{7^7}{2^2\cdot 5^5}\right)^n$$

$$= \sqrt{\frac{7}{20\pi n}}\left(\frac{7^7}{4\cdot 5^5}\right)^n$$

$$\simeq \sqrt{\frac{7}{20\pi n}}\cdot(65{,}8)^n$$

γ) $\binom{6n}{3n}$

Έχουμε

$$\binom{6n}{3n} = \frac{(6n)!}{(3n)!\,(3n)!} \sim \frac{\sqrt{\cancel{2\pi}\cancel{6}^{2}\cancel{n}}\left(\frac{6n}{e}\right)^{6n}}{\sqrt{\cancel{2\pi}\,\cancel{3n}}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}\sqrt{\cancel{2}\pi\,3n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3\pi n}}\left(\frac{6^6\cdot n^6}{3^3n^3\cdot 3^3n^3}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{3\pi n}}\left(\frac{6^6}{3^3\cdot 3^3}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{3\pi n}}\cdot(2^6)^n$$

$$= \frac{64^n}{\sqrt{3\pi n}}$$

Άρα $\binom{6n}{3n} \sim \dfrac{64^n}{\sqrt{3\pi n}}$

Scanned with CamScanner

δ) $\dfrac{\binom{3n}{2n}}{\left(\frac{27}{4}\right)^n}$

$$\sim \frac{\dfrac{\sqrt{2\pi(3n)}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}}{\left(\frac{27}{4}\right)^n} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4\pi n}}\left(\frac{3^3 \cancel{n^3}}{2^2 \cancel{n^2}\,\cancel{n}}\right)^n}{\left(\frac{27}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3}{4\pi n}}\left(\frac{27}{4}\right)^n}{\left(\frac{27}{4}\right)^n} = \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}$$

Αρα $\dfrac{\binom{3n}{2n}}{\left(\frac{27}{4}\right)^n} \sim \sqrt{\dfrac{3}{4\pi n}}$

επισης $\binom{3n}{2n} \sim \sqrt{\dfrac{3}{4\pi n}}\left(\dfrac{27}{4}\right)^n$

ε) $\dfrac{n!}{\sqrt{8n}}$

$$\frac{n!}{\sqrt{8n}} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{8n}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

sos

Άσκηση 2

Να βρεθούν ασυμπτωτικές εκτιμήσεις των παρακάτω αθροισμάτων:

α) $\sum_{k=0}^{n} \binom{3k}{2k}$.

Για τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις των αθροισμάτων, ένα ισχυρό εργαλείο είναι το Λήμμα του Stolz

Μεθοδολογία

$\boxed{1}$ Θέτουμε $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3k}{2k}$

$\boxed{2}$ Βρίσκουμε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} - a_n = \binom{3(n+1)}{2(n+1)}$$

$\boxed{3}$ Βρίσκουμε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της διαφοράς $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} - a_n \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}$$

(Από την προηγούμενη άσκηση θέτωντας όπου n το $n+1$)

④ Θέτουμε $A_n = \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}$

Η A_n είναι θετική και όχι άνω φραγμένη

$\boxed{5}$ Βρίσκουμε το όριο $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n}$ ως εξής

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{a_{n+1}-a_n}{A_n} \cdot \frac{A_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{a_{n+1}-a_n}{A_n} \cdot \frac{1}{\frac{A_{n+1}}{A_n}-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_n} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n}-1} = 1 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n}-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4\pi}(n+2)}}\left(\frac{27}{4}\right)^{n+2}}{\sqrt{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4\pi}(n+1)}}\left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}} = \frac{27}{4}$$

Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{1}{\frac{27}{4}-1} = \frac{4}{23}$

Από το Λήμμα του Stolz

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_n} = \frac{4}{23} \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{4}{23}A_n} = 1$$

Άρα $a_n \sim \frac{4}{23} A_n$

δηλαδή $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{3k}{2k} \sim \frac{4}{23} \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}$

β) $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}$

Θέτουμε $a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}$

$$a_{n+1} - a_n = \binom{2(n+1)}{n+1}$$

Θα βρούμε μια ασυμπτωτική εκτίμηση για το

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\,(n+1)!} \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{\cancel{2\pi}(\cancel{2}n+2)}\left(\frac{2n+2}{e}\right)^{2n+2}}{\sqrt{\cancel{2\pi}(\cancel{n+1})}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\sqrt{\cancel{2}\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi(n+1)}}\left(\frac{2^2\cancel{(n+1)^2}}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+1)}}\right)^{n+1} = \frac{4^{n+1}}{\sqrt{\pi(n+1)}}$$

Θέτουμε $A_n = \frac{4^{n+1}}{\sqrt{\pi(n+1)}}$ A_n Θετική & όχι άνω φραγμένη

Θα βρούμε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{A_n}\cdot \lim \frac{1}{\frac{A_{n+1}}{A_n}-1}$$

Όμως

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{4^{n+2}}{\sqrt{\pi(n+2)}}}{\frac{4^{n+1}}{\sqrt{\pi(n+1)}}} = 4\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 4$$

Scanned with CamScanner

Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$

Άρα από το λήμμα του Stolz

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_n} = \frac{1}{3} \iff a_n \sim \frac{1}{3} A_n \iff \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \sim \frac{1}{3} \frac{4^{n+1}}{\sqrt{\pi(n+1)}}$$

γ) $\sum_{k=0}^{n} C_k$ όπου C_k ο κ-οστός αριθμός Catalan

Θέτουμε $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_k$

$$a_{n+1} - a_n = C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1} \sim \frac{4^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\pi(n+1)}}$$

Θέτουμε $A_n = \frac{4^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\pi(n+1)}}$

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{a_{n+1}-a_n}{A_n} \cdot \frac{A_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{a_{n+1}-a_n}{A_n} \cdot \frac{1}{\frac{A_{n+1}}{A_n} - 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4^{n+2}}{(n+2)\sqrt{\pi(n+2)}}}{\frac{4^{n+1}}{(n+1)\cdot\sqrt{\pi(n+1)}}} = 4 \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+2}} = 4$$

Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = 1 \cdot \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$

Άρα από το Λήμμα του Stolz

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_n} = \frac{1}{3} \iff a_n \sim \frac{1}{3} A_n$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \sim \frac{1}{3} \frac{4^{n+1}}{\sqrt{\pi(n+1)}\,(n+1)}$$