5º Φροντιστήριο - Διακριτά Μαθηματικά 26-3-2018

Άσκηση 1

Να βρεθεί η θέση στη λεξικογραφική διάταξη για την μετάθεση σ του S_7 όπου

$$\sigma = 1\ 7\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6$$

Η θέση της σ στη λεξικογραφική διάταξη ισούται με rank(σ)+1

Υπενθύμιση: rank(σ) = # μεταθέσεων που προηγούνται της σ.

Αν $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ τότε

$$\text{rank}(\sigma) = (\sigma_1 - 1)\cdot(n-1)! + \text{rank}(\sigma_2' \cdot \sigma_3' \cdots \sigma_n')$$

όπου $\sigma_i' = \begin{cases} \sigma_i & \text{αν } \sigma_i < \sigma_1 \\ \sigma_i - 1 & \text{αν } \sigma_i > \sigma_1 \end{cases}$

μειώνω κατά 1 τα > στα δεξιά

$$\begin{aligned}
\text{rank}(\sigma) &= (1-1)\cdot 6! + \text{rank}(6\,3\,4\,1\,2\,5) \\
&= 0\cdot 6! + (6-1)\cdot 5! + \text{rank}(3\,4\,1\,2\,5) \\
&= 0\cdot 6! + 5\cdot 5! + (3-1)\cdot 4! + \text{rank}(3\,1\,2\,4) \\
&= 0\cdot 6! + 5\cdot 5! + 2\cdot 4! + (3-1)\cdot 3! + \text{rank}(1\,2\,3) \\
&= 0\cdot 6! + 5\cdot 5! + 2\cdot 4! + 2\cdot 3! + (1-1)\cdot 2! + \text{rank}(1,2) \\
&= 0\cdot 6! + 5\cdot 5! + 2\cdot 4! + 2\cdot 3! + 0\cdot 2! + (1-1)\cdot 1! + \cancel{\text{rank}(1)}^{0} \\
&= 5\cdot 120 + 2\cdot 24 + 2\cdot 6 = \\
&= 600 + 48 + 12 \\
&= 660 \leftarrow \text{τόσες υπάρχουν πριν από αυτή}
\end{aligned}$$

Άρα η σ βρίσκεται στη θέση $(660+1) = 661$

Άσκηση 2

Να βρεθεί ποια μετάθεση τ του S_7 έχει $rank(\tau)=500$

Πρώτα θα εκφράσουμε το 500 στο παραγοντικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιώντας τα παραγοντικά $1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!$ (7-1)

$$500 = 0\cdot 6! + 500$$
$$= 0\cdot 6! + 4\cdot 5! + 20$$
$$= 0\cdot 6! + 4\cdot 5! + 0\cdot 4! + 20$$
$$= 0\cdot 6! + 4\cdot 5! + 0\cdot 4! + 3\cdot 3! + 2$$
$$= \underset{d_6}{0}\cdot 6! + \underset{d_5}{4}\cdot 5! + \underset{d_4}{0}\cdot 4! + \underset{d_3}{3}\cdot 3! + \underset{d_2}{1}\cdot 2! + \underset{d_1}{0}\cdot 1!$$

Το 0! δεν το χρησιμοποιούμε

Θα κατασκευάσουμε επαναληπτικά την ζητούμενη μετάθεση τ ξεκινώντας από την τ = 1 και χρησιμοποιώντας τα $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$

sos ο αριθμός μητρώου ως rank

$\tau = 1$

$d_1 = 0 \rightsquigarrow \tau = 1\,2$

$d_2 = 1 \rightsquigarrow \tau = 2\,1\,3$

$d_3 = 3 \rightsquigarrow \tau = 4\,\underline{2\,1\,3}$

$d_4 = 0 \rightsquigarrow \tau = 1\,\underline{5\,3\,2\,4}$

ότι ήταν ~~μεγ~~ >=1 το αυξάνω κατά 1

$d_5 = 4 \rightsquigarrow \tau = 5\,1\,6\,3\,2\,4$

$d_6 = 0 \rightsquigarrow \tau = 1\,6\,2\,7\,4\,3\,5$

Ασκηση 3

Να βρεθεί η επόμενη (στη λεξικογραφική διάταξη) για τη μετάθεση

$$\pi = 1\ 6\ 3\ 7\ 5\ 4\ 2$$

• Βρίσκουμε την τελευταία ανάβαση $(\pi(i) < \pi(i+1))$
~~Επιλέγουμε~~ Εδώ βρίσκεται εκεί που εμφανίζεται το 3

• Στα επόμενα ψηφία επιλέγουμε το μικρότερο από τα μεγαλύτερα του 3. Εδώ είναι το 4

• Εναλλάσσουμε το 3 με το 4

• Αντιστρέφουμε όλα αυτά που είναι μετά το 4

$$\boxed{1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 3\ 2}$$

$$\rightarrow 1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 5\ 7$$

Η επόμενη είναι η μετάθεση 1 6 4 2 3 5 7

Θεώρημα του Zeckendorf

Κάθε ~~φορά~~ φυσικός αριθμός $n \le F_k$ όπου F_k κ-οστός αριθμός Fibonacci εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα αριθμών Fibonacci όπου δεν χρησιμοποιούνται δύο διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fn	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_0 = F_1 = 1$$

Πέμπτη Ασκήσεις

$34 = F_8$

$50 = \overset{F_8}{34} + 16$
$= \overset{F_8}{34} + \overset{F_6}{13} + \overset{F_3}{3}$

$109 = \overset{F_{10}}{89} + 20$
$= \overset{F_{10}}{89} + \overset{F_6}{13} + 7$
$= \overset{F_{10}}{89} + \overset{F_6}{13} + \overset{F_4}{5} + \overset{F_2}{2}$

Παρ/ση: $109 = 1\cdot F_{10} + 0\cdot F_9 + 0\cdot F_8 + 0\cdot F_7 + 1\cdot F_6 + 0\cdot F_5 + 1\cdot F_4 + 0\cdot F_3 + 1\cdot F_2 + 0\cdot F_1$

$109 \rightsquigarrow (1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0)_{\text{Fibonacci}}$

δεν υπάρχουν ποτέ γειτονικοί άσσοι

Για κάθε ακολουθία $F(n) / \mathbb{N}$ οι συναρτήσεις

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot x^n \quad \text{και} \quad f^{**}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,\frac{x^n}{n!}$$

ονομάζονται αντίστοιχα <u>συνήθης γεννήτρια συνάρτηση</u> και <u>εκθετική γεννήτρια συνάρτησης</u> της $f(n)$

• Οι γεννήτριες συναρτήσεις $f^*(x)$ και $f^{**}(x)$ είναι μοναδικές για κάθε ακολουθία, δηλαδή

αν $\underset{\underset{f(n)}{\uparrow}}{f^*(x)} = \underset{\underset{g(n)}{\uparrow}}{g^*(x)}$ τότε $f(n) = g(n)\ \forall n$

και αντιστρόφως

(αν $f^{**}(x) = g^{**}(x)$ τότε $f(n) = g(n)$)

• Το ανάπτυγμα της $f^*(x)$ (αντ $f^{**}(x)$) σε δυναμοσειρά του x έχει την ιδιότητα ότι ο συντελεστής του x^n ισούται με $f(n)$ (αντ. $\frac{f(n)}{n!}$)

• Συνήθως ο συντελεστής του x^n στην $f^*(x)$ συμβολίζεται με $[x^n]\, f^*(x)$

Υπάρχουν δύο προβλήματα

1º πρόβλημα: Δίδεται η ακολουθία $f(n)$ ή μια σχέση που ικανοποιεί η $f(n)$ και ζητείται η $f^*(x)$ (αντ $f^{**}(x)$)

2º πρόβλημα: Δίδεται η γεννήτρια $f^*(x)$ ή μια σχέση που ικανοποιεί η $f^*(x)$ και ζητείται η $f(n)$

$$c_0 = 1$$

1º πρόβλημα

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot c_{n-k-1}$$

2º πρόβλημα

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$C(x) = 1 + x\left(C^*(x)\right)^2$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση των ακολουθιών $f(n)$ όπου

Βασικές γεννήτριες

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n = \frac{1}{1-ax}, \quad |ax| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \cdot x^n = (1+x)^a$$

α) $f(n) = 5^n + 3^n \ / \ n \in \mathbb{N}$

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (5^n + 3^n) \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$$

$$= \frac{1}{1-5x} + \frac{1}{1-3x}$$

β) $f(n) = 7^n + 4 \ / \ \boxed{n \geq 1}$

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (7^n + 4) \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (7x)^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (7x)^n - 1 + 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1\right)$$

$$= \frac{1}{1-7x} - 1 + 4\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$$

άλλος τρόπος:

$$7x \sum_{n=1}^{\infty} (7x)^{n-1} + 4x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

$$= 7x \sum_{n=0}^{\infty} (7x)^n + 4x \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \frac{7x}{1-7x} + \frac{4x}{1-x}$$

ίσα άμα κάνουμε πράξεις.