Ασκήσεις που έγιναν εντός μαθήματος (εκτός φροντιστηρίου)

Ασκήσεις στις Γεννήτριες

2 κατηγορίες προβλημάτων

Διακριτό χώρο ⟶ Συνεχή χώρο

Ακολουθία $f(n) \Longrightarrow$ Γεννήτρια $f^*(x)$ ή $f^{**}(x)$

συνεχής χώρος ⟶ διακριτός χώρος

Γεννήτρια $f^*(x)$ ή $f^{**}(x) \Longrightarrow$ Ακολουθία $f(n)$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΩΡΟΣ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΩΡΟΣ
$h(x) = x^k / \mathbb{R}$	$h(n) = n^k / \mathbb{N}$
$\int_0^\lambda h(x)dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^\lambda$	$\sum_{n=0}^{\lambda} n^k = $
$f(x) = 1 + x f(x) + 2x^2 f(x)$ $f(x) = 1/(1-x-2x^2)$	$f(n) = f(n-1) + 2f(n-2)$ $f(n) = ;$

Ασκηση 1

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f/\mathbb{N}$ με

$f(n) = 3f(n-1) + 7f(n-2) \quad n \geq 2$

και $f(0) = f(1) = 1$

Λύση

Έστω $f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^n$ τότε

$$f^*(x) = f(0) + f(1) \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \cdot x^n$$

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(3f(n-1) + 7f(n-2)\right) \cdot x^n$$

$$= 1 + x + 3\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)\cdot x^n + 7\sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)\cdot x^n$$

$$= 1 + x + 3x\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^{n-1} + 7x^2\sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)\cdot x^{n-2}$$

$$= 1 + x + 3x\sum_{m=1}^{\infty} f(m)\cdot x^m + 7x^2 \sum_{m=0}^{\infty} f(m)\cdot x^m$$

$n-2=m$

$$= 1 + x + 3x\left(f^*(x) - f(0)\right) + 7x^2 f^*(x)$$

Άρα

$$f^*(x) = 1 + x + 3x\left(f^*(x) - 1\right) + 7x^2 f^*(x)$$

οπότε

$$f^*(x) = \frac{1-2x}{1-3x-7x^2}$$

$$= 1 + x + 10x^2 + 37x^3 + 181x^4 + 802x^5$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η γεννήτρια της ακολουθίας $f / \mathbb{N}$ όπου

$$f(n) = 3f(n-1) + 4g(n-2)$$

και

$$g(n) = 2g(n-1) - f(n-2)$$

όπου $f(0)=1$, $f(1)=0$, $g(0)=g(1)=1$

Λύση

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot x^n \quad \text{και} \quad g^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\cdot x^n$$

$$f^*(x) = f(0) + f(1)\cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)\cdot x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 3f(n-1)\cdot x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 4g(n-2)\cdot x^n$$

$$= 1 + 3x\cdot\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)\cdot x^{n-1} + 4x^2\sum_{n=2}^{\infty} g(n-2)\, x^{n-2}$$

νέο $\overset{n}{=}$

$$= 1 + 3x\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cdot x^n + 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} g(n)\cdot x^n = 1 + 3x\left(f^*(x) - f(0)\right) + 4x^2 g^*(x)$$

$\Longrightarrow$

$$\cancel{(-1) + 3x\left(f^*(x) - f(0)\right) + 4x^2 g^*(x)}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(3x-1)\cdot f^*(x) + 4x^2 g^*(x) = 3x-1} \quad (3)$$

$$g^*(x) = g(0) + g(1)x + \sum_{n=2}^{\infty} g(n)\cdot x^n$$

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} 2g(n-1)\cdot x^n - \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)\cdot x^n$$

$$= 1 + x + 2x\sum_{n=2}^{\infty} g(n-1)\cdot x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)\,x^{n-2}$$

$$= 1 + x + 2x\big(g^*(x) - \underbrace{g(0)}_{1}\big) - x^2\cdot f^*(x) \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{-x^2 f^*(x) + (2x-1)\,g^*(x) = x-1} \quad (4)$$

Από (4),(3) $\Longrightarrow -x^2 f^*(x) + (2x-1)\cdot \dfrac{3x-1-(3x-1)f^*(x)}{4x^2} = x-1$

$$\Longrightarrow f^*(x) = \left(\frac{-(4x^4+3x-1)}{4x^2}\right)\cdot\left(x-1-\frac{(2x-1)(3x-1)}{4x^2}\right) = \dots$$

Έστω $f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot x^n$ και

$$g^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\cdot x^n$$

τότε

$$f^*(x)\cdot g^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\cdot g(n-k)\right)}_{h(n)}\cdot x^n$$

Η $h(n)$ ονομάζεται συνέλιξη των $f(n)$, και $g(n)$

Άσκηση 3

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας C_n των αριθμών Catalan όπου $C_0 = 1$ και $n \geq 1$ $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k}$

Έστω $C^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$ τότε

αλλαγή αθροισμάτων

$$C^*(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k\cdot C_{n-1-k}\right)\cdot x^n$$

$n-1 \geq k \Rightarrow n \geq k+1$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} C_k\cdot C_{n-1-k}\cdot x^n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k\cdot x^k \sum_{n=k+1}^{\infty} C_{n-1-k}\cdot x^{n-k}$$

$$= 1 + x\sum_{k=0}^{\infty} C_k\cdot x^k \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} C_{n-1-k}\cdot x^{n-1-k}$$

Θέτω $n-1-k = m$

$$= 1 + x\cdot C^*(x)\cdot \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot x^m$$

$$= 1 + x\cdot C^*(x)\cdot C^*(x)$$

(Δεν παίρνω την + ρίζα)

Άρα $C^*(x) = 1 + x\cdot (C^*(x))^2 \Longleftrightarrow C^*(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2}$

$x=0$ $C^*(0) = 1$

Ασκηση 4

α) Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n)=\frac{1}{n}$ / $\mathbb{N}^*$

β) Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$H(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \ / \ \mathbb{N}^*$$

αρμονικοί αριθμοί $\longleftrightarrow$

Έστω $f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

Παραγωγίζουμε την $f^*(x)$ ως προς x, τότε

$$\left(f^*(x)\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

Άρα

$$\left(f^*(x)\right)'=\frac{1}{1-x}\Longrightarrow$$

$$f^*(x)=\int\frac{1}{1-x}\,dx+c$$

$$f^*(x)=-\ln(1-x)+c$$

$$\underset{\overset{\parallel}{0}}{f^*(0)}=-\ln(1-0)+c\Rightarrow c=0$$

Άρα $f^*(x)=-\ln(1-x)$

β) Υπενθύμιση
Αν $f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot x^n$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot x^n = \frac{f^*(x)}{1-x}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} H(n) \cdot x^n = \frac{f^*(x)}{1-x} = -\frac{1}{1-x} \ln(1-x)$$