6ο Φροντιστήριο - Διακριτά Μαθηματικά

Σήμερα: Γεννήτριες συναρτήσεις (Αντιστροφή)

Διακριτός Χώρος

2

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

$\xrightarrow{\text{εύρεση γεννήτριας}}$

Συνεχής

3

$$C^*_{(x)} = 1 + x\left(C^*_{(x)}\right)^2$$

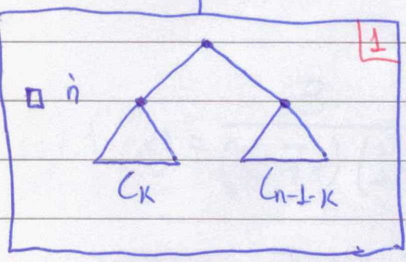
$\xrightarrow{\text{αντιστροφή}}$

Διακριτός

4

$$C_n = [x^n]\ C^*_{(x)} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

διάσπαση ↑



Διακριτός Χώρος

δηλαδή το $f(n)$

Άσκηση 1

Να βρεθεί ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης $f^*(x)$ όπου

i) $$f^*(x) = \frac{1}{(1-3x)(1+2x)(1-5x)}$$

Υπενθύμιση: Γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot x^n$$

Θα κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Έστω
$$f^*(x) = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x} + \frac{\Gamma}{1-5x}$$

Πρόταση

Αν $$g(x) = \frac{A_1}{1-p_1 x} + \frac{A_2}{1-p_2 x} + \dots + \frac{A_k}{1-p_k x}$$

Μόνο ότα έχω πρωτοβάθμιο παρονομαστή

τότε
$$A_i = \lim_{x \to \frac{1}{p_i}} (1-p_i x) \cdot g(x)$$

Εδώ

$$A = \frac{1}{\left(1+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\right)\left(1-5\left(\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{9}{-10}$$

$$B = \frac{1}{\left(1-3\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(1-5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{4}{35}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\left(1-3\left(\frac{1}{5}\right)\right)\left(1+2\left(\frac{1}{5}\right)\right)} = \frac{25}{14}$$

Άρα $f^*(x) = \frac{-9}{10} \cdot \frac{1}{1-3x} + \frac{4}{35} \cdot \frac{1}{1+2x} + \frac{25}{14} \cdot \frac{1}{1-5x}$

$$= \frac{-9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n + \frac{4}{35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot x^n + \frac{25}{14} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 5^n \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-9}{10} \cdot 3^n + \frac{4}{35} \cdot (-2)^n + \frac{25}{4} \cdot 5^n \right) x^n$$

Άρα το $f(n) = [x^n] \cdot f^*(x) = \frac{-3^{n+2}}{10} + \frac{(-2)^{n+2}}{35} + \frac{5^{n+2}}{14}$

(δηλ. ο συντελεστής)

ii) $f^*(x) = \frac{3}{(1-7x)(1+3x)} = 3 \cdot \left(\frac{A}{(1-7x)} + \frac{B}{(1+3x)} \right)$

$$A = \frac{1}{\left(1+3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)\right)} = \frac{7}{10}$$

$$B = \frac{1}{\left(1-7 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)\right)} = \frac{3}{10}$$

Άρα $f^*(x) = 3 \cdot \left(\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{1-7x} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1+3x} \right)$

$$= 3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{10} \cdot 7^n + \frac{3}{10} \cdot (-3)^n \right) \cdot x^n \right)$$

Άρα $f(n) = [x^n] \cdot f^*(x) = \frac{21}{10} \cdot 7^n + \frac{9}{10} \cdot (-3)^n = \frac{21}{10} \cdot 7^n + \frac{(-3)^{n+2}}{10}$

Άσκηση 2
Να βρεθεί μια αναγωγική σχέση για τους συντελεστές $f(n)$ της γεννήτριας συνάρτησης $f^*(x)$ όταν.

α) $f^*(x) = \dfrac{1-x}{(1+4x+3x^2-x^3)}$

Υπενθύμιση:
Συμβολισμός: $[x^n]\, f^*(x) \equiv$

Ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα της $f^*(x)$

$[x^0](3+5x+6x^3) = 3$
$[x^1](3+5x+6x^3) = 5$
$[x^2](3+5x+6x^3) = 0$
$[x^3](3+5x+6x^3) = 6$
$[x^{10}](3+5x+6x^3) = 0$

Τι συντελεστή έχει το $x^1, x^2, x^n \ldots$

$[x^5]\, x^3(1+2x^2+7x^5) = 2$
$[x^6]\, x^3(1+2x^2+7x^5) = 0$

Γνωρίζουμε ότι

$$[x^n] \cdot f^*(x) = f(n)$$

Ισχύει ότι

$$(1+4x+3x^2-x^3) \cdot f^*(x) = 1-x \quad (1)$$

Για $n \geq 3$ έχουμε ότι

$$[x^n](1+4x+3x^2-x^3) f^*(x) = [x^n](1-x)$$
$$[x^n] f^*(x) + [x^n]4x \cdot f^*(x) + [x^n] \cdot 3x^2 \cdot f^*(x) - [x^n] \cdot x^3 f^*(x) = 0$$

$[x^n] \cdot x^k \cdot f^*(x) = f(n-k)$

$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^n$

$x^k \cdot f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n-k) \cdot x^n$

$f(n) + 4f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = 0$

Άρα για $n \geq 3$ έχουμε

$f(n) = -4f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3)$

Από την (1) έχουμε

- $[x^0](1+4x+3x^2-x^3) f^*(x) = [x^0](1-x)$

$[x^0] \cdot f^*(x) + 4 \cdot [x^0] \cdot x \cdot f^*(x) + 3[x^0] x^2 \cdot f^*(x) - [x^0] \cdot x^3 \cdot f^*(x) = 1$

$f(0) + 0 + 0 - 0 = 1$

$f(0) = 1$

- $[x^1](1+4x+3x^2-x^3) \cdot f^*(x) = [x^1](1-x)$

$[x^1] \cdot f^*(x) + 4x \cdot [x^1] \cdot f^*(x) + 3 \cdot [x^1] x^2 f^*(x) - [x^1] x^3 f^*(x) = -1$

$f(1) + 4f(0) + 0 - 0 = -1$

$f(1) = -4f(0) - 1 = -5$

- $[x^2](1+4x+3x^2-x^3) \cdot f^*(x) = [x^2](1-x)$

$[x^2] \cdot f^*(x) + 4[x^2] \cdot x \cdot f^*(x) + 3[x^2] \cdot x^2 \cdot f^*(x) - [x^2] \cdot x^3 \cdot f^*(x) = 0$

$f(2) + 4f(1) + 3f(0) - 0 = 0$

$f(2) = -4f(1) - 3f(0) = 20 - 3 = 17$

β) $f^*(x) = \dfrac{1-3x+x^2}{1-x+x^5}$

Ισοδύναμα

$(1-x+x^5)\cdot f^*(x) = 1-3x+x^2 \quad (1)$

Για $n \geq 5$ έχουμε ότι

$[x^n](1-x+x^5)\cdot f^*(x) = [x^n](1-3x+x^2)$

$[x^n]\cdot f^*(x) - [x^n]\cdot x\cdot f^*(x) + [x^n]\, x^5\cdot f^*(x) = 0$

$f(n) - f(n-1) + f(n-5) = 0$

Άρα για $n \geq 5 \Rightarrow \boxed{f(n) = f(n-1) - f(n-5)}$

Από την (1)

$[x^0](1-x+x^5)\cdot f^*(x) = [x^0](1-3x+x^2)$

$\boxed{f(0) = 1}$

$[x^1](1-x+x^5)\, f^*(x) = [x^1](1-3x+x^2)$

$f(1) - f(0) = -3$

$f(1) = -3+1$

$\boxed{f(1) = -2}$

$[x^2](1-x+x^5)\cdot f^*(x) = [x^2](1-3x+x^2)$

$f(2) - f(1) = 1$

$\boxed{f(2) = -1}$

$$[x^3]\cdot(1-x+x^5)\cdot f^*(x) = [x^3](1-3x+x^2)$$

$$f(3)-f(2)=0$$

$$\boxed{f(3)=\boxed{f(2)=-1}}$$

$$[x^4](1-x+x^5)\cdot f^*(x) = [x^4](1-3x+x^2)$$

$$f(4)-f(3)=0$$

$$f(4)=f(3)$$

$$\boxed{f(4)=-1}$$