

---

Αλγεβρική και Απαριθμητική  
Συνδυαστική  
Τόμος Α

---

ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Απαρίθμηση</b>	<b>5</b>
1.1	Απαρίθμηση και γεννήτριες συναρτήσεις . . . . .	5
1.1.1	Η έννοια της απαρίθμησης . . . . .	5
1.1.2	Βασικές αρχές απαρίθμησης . . . . .	8
1.1.3	Γεννήτριες συναρτήσεις και ο δακτύλιος $\mathbb{C}[[x]]$ . . . . .	11
1.2	Εφαρμογές . . . . .	20
1.2.1	Υποσύνολα . . . . .	20
1.2.2	Συνδυασμοί με επανάληψη και συνθέσεις . . . . .	22
1.2.3	Διαμερίσεις ακεραίων . . . . .	24
1.2.4	Τριγωνισμοί και μη διασταυρούμενες διαμερίσεις . . . . .	27
1.3	Άλλες αρχές απαρίθμησης . . . . .	31
1.3.1	Η αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού . . . . .	31
1.3.2	Η αρχή της αυτοαντίστροφης απεικόνισης . . . . .	33
1.3.3	Το Λήμμα του κύκλου . . . . .	35
1.4	Ασκήσεις . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Μεταθέσεις</b>	<b>55</b>
2.1	Η συμμετρική ομάδα . . . . .	55
2.2	Απαρίθμηση μεταθέσεων . . . . .	56
2.2.1	Αντιστροφές . . . . .	56
2.2.2	Κύκλοι . . . . .	58
2.2.3	Κάθοδοι και πολυώνυμα Euler . . . . .	60
2.2.4	Υπερβάσεις . . . . .	64
2.2.5	Πρωτεύων δείκτης και το Θεώρημα του MacMahon . . . . .	65
2.2.6	Σταθερά σημεία . . . . .	67
2.2.7	Εναλλάσσουσες μεταθέσεις . . . . .	68
2.3	Μεταθέσεις συλλογών . . . . .	72
2.4	Ασκήσεις . . . . .	76

<b>3</b>	<b>Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις</b>	<b>95</b>
3.1	Ορισμοί και παραδείγματα . . . . .	95
3.2	Πράξεις . . . . .	97
3.2.1	Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός . . . . .	97
3.2.2	Σύνθεση . . . . .	102
3.2.3	Ο εκθετικός τύπος . . . . .	104
3.3	Ο τύπος αντιστροφής του Lagrange . . . . .	105
3.4	Ασκήσεις . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Young ταμπλώ</b>	<b>125</b>
4.1	Ταμπλώ . . . . .	125
4.2	Η αντιστοιχία Robinson-Schensted . . . . .	127
4.3	Το σχήμα μιας μετάθεσης . . . . .	130
4.3.1	Λέξεις . . . . .	130
4.3.2	Η σχέση ισοδυναμίας του Knuth . . . . .	130
4.3.3	Μονότονες υποακολουθίες . . . . .	132
4.4	Η αντίστροφη μετάθεση . . . . .	136
4.5	Η ανάστροφη μετάθεση . . . . .	140
4.5.1	Το ανάστροφο ταμπλώ . . . . .	140
4.5.2	Το παιχνίδι του Schützenberger . . . . .	142
4.5.3	Το ταμπλώ εκκένωσης . . . . .	147
4.6	Το πλήθος των Young ταμπλώ . . . . .	149
4.7	Ασκήσεις . . . . .	155
<b>5</b>	<b>Γραμμική άλγεβρα και συνδυαστική</b>	<b>161</b>
5.1	Γραφήματα . . . . .	161
5.1.1	Περίπατοι . . . . .	162
5.1.2	Γραμμικές απεικονίσεις . . . . .	163
5.1.3	Γραφήματα με βάρη . . . . .	167
5.2	Εφαρμογές . . . . .	167
5.2.1	Περίπατοι στο γράφημα του Young . . . . .	167
5.2.2	Το Θεώρημα του Sperner . . . . .	174
5.2.3	Μονοτροπία των $q$ -διωνυμικών συντελεστών . . . . .	174
5.3	Απαρίθμηση δένδρων . . . . .	174
5.3.1	Παράγοντα δένδρα . . . . .	175
5.3.2	Ο πίνακας Laplace . . . . .	176
5.3.3	Το Θεώρημα Πίνακα-Δένδρου . . . . .	177
5.3.4	Το Θεώρημα Πίνακα-Δάσους . . . . .	181
5.4	Ασκήσεις . . . . .	183

# Κεφάλαιο 1

## Απαρίθμηση

Το κύριο πρόβλημα της συνδυαστικής που θα μας απασχολήσει στο βιβλίο αυτό είναι η εύρεση τρόπων απαρίθμησης (καταμέτρησης) των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου. Σκοπός μας στο πρώτο κεφάλαιο είναι να εξοικειώσουμε τον αναγνώστη με την έννοια της απαρίθμησης και να εισάγουμε ένα απλό αλλά ισχυρό αλγεβρικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης, τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων. Επιπλέον, θα συνοψίσουμε ορισμένες από τις βασικότερες αρχές απαρίθμησης, δίνοντας έμφαση στην τεχνική της 1–1 αντιστοιχίας και θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω μεθόδους σε συγκεκριμένα στοιχειώδη προβλήματα απαρίθμησης συνόλων, συλλογών, συνθέσεων και διαμερίσεων ακεραίων, τριγωνισμών πολυγώνων και διαμερίσεων συνόλων.

### 1.1 Απαρίθμηση και γεννήτριες συναρτήσεις

#### 1.1.1 Η έννοια της απαρίθμησης

Απαρίθμηση των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου λέγεται ο υπολογισμός του πλήθους των στοιχείων (πληθικού αριθμού) του συνόλου αυτού. Συνήθως, το σύνολο που δίνεται σε κάποιο πρόβλημα απαρίθμησης εξαρτάται από ένα (τουλάχιστον) μη αρνητικό ακέραιο  $n$ , οπότε μπορούμε να το συμβολίσουμε με  $A_n$ . Τότε δεν είναι ξεκάθαρο το τι ακριβώς εννοούμε με τον όρο «υπολογισμός» του πλήθους των στοιχείων του  $A_n$ , άρα ούτε με τον όρο «απαρίθμηση» των στοιχείων του  $A_n$ . Ασφαλώς ο πιο φιλόδοξος στόχος μας είναι να βρούμε έναν απλό τύπο, αν αυτό είναι δυνατό, για το πλήθος  $a_n$  των στοιχείων αυτών.

Για να γίνουμε πιο κατανοητοί, παραθέτουμε τρία συγκεκριμένα παραδείγματα. Για μη αρνητικούς ακεραίους  $m$ , θα συμβολίζουμε με  $[m]$  το σύνολο  $\{1, 2, \dots, m\}$ , όπου  $[0] = \emptyset$  κατά σύμβαση.

**Παράδειγμα 1.1.1** Έστω  $a_n$  το πλήθος των ακολουθιών  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  μήκους  $n$  με την εξής ιδιότητα: κάθε στοιχείο του  $[n]$  εμφανίζεται στη  $\sigma$  ακριβώς μία φορά. Έστω επίσης  $D_n$  το πλήθος των ακολουθιών  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  μήκους  $n$  όπως προηγουμένως, για τις οποίες ισχύει επιπλέον ότι  $\sigma_i \neq i$  για  $1 \leq i \leq n$ . Θα δείξουμε στην Παράγραφο 1.1.2 ότι

$$a_n = n! \quad (1.1)$$

και στην Παράγραφο 2.2.6 ότι

$$D_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \quad (1.2)$$

για κάθε  $n$ . □

Στο προηγούμενο παράδειγμα, ο τύπος (1.1) για το  $a_n$  είναι αναμφίβολα ικανοποιητικός και λύνει πλήρως το αντίστοιχο πρόβλημα απαρίθμησης. Ασφαλώς ο τύπος (1.2) δεν είναι εξίσου απλός. Εφόσον όμως δε γνωρίζουμε κάποιο απλούστερο τύπο για το  $D_n$ , είναι φυσικό να θεωρήσουμε την απάντηση που δίνει ο (1.2) ικανοποιητική.

**Παράδειγμα 1.1.2** Έστω  $a_n$  το πλήθος των συνόλων της μορφής  $\{B_1, \dots, B_r\}$ , όπου  $r$  είναι τυχαίος θετικός ακέραιος και τα  $B_i$  είναι μη κενά, ανά δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα, η ένωση των οποίων είναι ίση με  $[n]$ . Για το  $a_n$  ισχύει ο τύπος

$$a_n = \frac{1}{e} \left( \frac{1^n}{1!} + \frac{2^n}{2!} + \frac{3^n}{3!} + \dots \right), \quad (1.3)$$

όπου  $e = \sum_{k \geq 0} 1/k!$ . □

Το δεξιό μέλος του τύπου (1.3) είναι ένα άπειρο άθροισμα το οποίο έχει πολλαπλασιαστεί με τον άρρητο αριθμό  $1/e$ . Προφανώς η έκφραση αυτή είναι πρακτικά δυσκολότερο να υπολογιστεί, για παράδειγμα, από την αντίστοιχη του τύπου (1.2). Επομένως είναι φυσικό να έχουμε μικρότερο ενθουσιασμό για την αποτελεσματικότητα του τύπου (1.3) από ότι για τους (1.1) και (1.2).

**Παράδειγμα 1.1.3** Έστω  $a_n$  το πλήθος των ακολουθιών  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$  τυχαίου μήκους  $k$ , τέτοιων ώστε  $r_i \in \{1, 2\}$  για κάθε δείκτη  $i$  και  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ . Με άλλα λόγια,  $a_n$  είναι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γραφεί ο  $n$  ως άθροισμα ακεραίων ίσων με 1 ή 2, όπου η σειρά των προσθετέων έχει σημασία. Θα δούμε στην Παράγραφο 1.2.2 ότι

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (1.4)$$

για  $n \geq 2$ , όπου  $a_0 = 1$ , ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{1 - x - x^2} \quad (1.5)$$

και θα συμπεράνουμε ότι

$$a_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}, \quad (1.6)$$

όπου  $\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$ , και ότι

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^{n+1} - \bar{\tau}^{n+1}), \quad (1.7)$$

όπου  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  και  $\bar{\tau} = (1 - \sqrt{5})/2$ . □

Οι παραπάνω τύποι δίνουν διαφορετικούς τρόπους να καθορισθούν οι όροι της ακολουθίας  $(a_n)$ , ο καθένας με τα δικά του πλεονεκτήματα. Από την (1.4) και την  $a_0 = a_1 = 1$ , για παράδειγμα, προκύπτει ότι  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 5$ ,  $a_5 = 8$ ,  $a_6 = 13$ ,  $a_7 = 21$  κ.ο.κ., γρηγορότερα από ότι με χρήση της (1.6) ή της (1.7), ενώ από την (1.7) προκύπτει η ασυμπτωτική συμπεριφορά  $a_n \sim \tau^{n+1}/\sqrt{5}$  για  $n \rightarrow \infty$ . Η σχέση (1.5), η οποία είναι και η πιο δυσνόητη, καθορίζει τη «συνήθη γεννήτρια συνάρτηση» της ακολουθίας  $(a_n)$ , έννοια την οποία θα μελετήσουμε στην Παράγραφο 1.1.3. Η σχέση αυτή κρύβει πληροφορίες για την  $(a_n)$  που δεν είναι άμεσα ορατές. Από αυτήν, για παράδειγμα, προκύπτουν αμέσως οι υπόλοιπες σχέσεις, όπως θα δούμε στην Παράγραφο 1.2.2, καθώς και άλλες (βλέπε π.χ. Άσκηση 8).

Από τα προηγούμενα παραδείγματα γίνονται φανερά τα εξής: Πρώτον, το ερώτημα εάν σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε «υπολογίσει» τα στοιχεία ενός πεπερασμένου συνόλου επαρκώς ή όχι μπορεί να είναι ζήτημα υποκειμενικής κρίσης. Δεύτερον, μπορεί ένα πρόβλημα απαρίθμησης να επιδέχεται πολλές διαφορετικές ικανοποιητικές λύσεις. Κατά συνέπεια δεν υπάρχει σαφής τρόπος να ορίσει κανείς επακριβώς την έννοια της απαρίθμησης. Μπορεί όμως να αναπτύξει τη διαίσθησή του για το τι εννοούμε με τον όρο «απαρίθμηση» μέσα από την εμπειρία με τα προβλήματα απαρίθμησης και τις τεχνικές για τη λύση τους. Ελπίζουμε ότι η έννοια της απαρίθμησης θα φωτιστεί με τον τρόπο αυτό στις παραγράφους και τα κεφάλαια που ακολουθούν.

## 1.1.2 Βασικές αρχές απαρίθμησης

Στενά συνδεδεμένη με την έννοια της απαρίθμησης των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου είναι αυτή της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης. Υπενθυμίζουμε ότι μια απεικόνιση συνόλων  $\varphi : A \rightarrow B$  λέγεται *αμφιμονοσήμαντη* (ή *1-1 αντιστοιχία*, ή *1-1 και επί απεικόνιση*) αν για κάθε στοιχείο  $y$  του  $B$  υπάρχει μοναδικό στοιχείο  $x$  του  $A$  τέτοιο ώστε  $\varphi(x) = y$ .

Ισοδύναμα, η απεικόνιση  $\varphi : A \rightarrow B$  είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση  $\psi : B \rightarrow A$  τέτοια ώστε να ισχύει  $\psi(\varphi(x)) = x$  για κάθε  $x \in A$  και  $\varphi(\psi(y)) = y$  για κάθε  $y \in B$ , δηλαδή τέτοια ώστε η σύνθεση  $\varphi \circ \psi$  να είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο  $B$  και η σύνθεση  $\psi \circ \varphi$  να είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο  $A$ . Στην περίπτωση αυτή, καθεμιά από τις  $\varphi, \psi$  είναι η αντίστροφη της άλλης.

**Ορισμός 1.1.1** Ένα σύνολο  $A$  ονομάζεται *πεπερασμένο* αν υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος  $m$  και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f : A \rightarrow [m]$ . Στην περίπτωση αυτή ο ακέραιος  $m$ , ο οποίος είναι μοναδικός, λέγεται *πληθικός αριθμός* ή *πλήθος των στοιχείων του  $A$*  και συμβολίζεται με  $\#A$ .

Οι δύο ακόλουθες προτάσεις, οι οποίες είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού 1.1.1, συνιστούν τις πρώτες αρχές απαρίθμησης που θα χρησιμοποιήσουμε.

**Πρόταση 1.1.1** Αν  $\varphi : A \rightarrow B$  είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων, τότε  $\#A = \#B$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $\#B = m$ , οπότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f : B \rightarrow [m]$ . Η απεικόνιση  $f \circ \varphi : A \rightarrow [m]$  είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη, ως σύνθεση δύο αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων, και συνεπώς  $\#A = m$ .  $\square$

Το μέρος (β) της επόμενης πρότασης γενικεύει την Πρόταση 1.1.1.

**Πρόταση 1.1.2** (α) (Προσθετική Αρχή) Αν  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι πεπερασμένα σύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, τότε

$$\# \bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \#A_i.$$

(β) Έστω μη αρνητικός ακέραιος  $m$ . Αν  $\varphi : A \rightarrow B$  είναι απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων και για κάθε  $y \in B$  υπάρχουν ακριβώς  $m$  στοιχεία  $x \in A$  με  $\varphi(x) = y$ , τότε  $\#A = m \cdot (\#B)$ .

*Απόδειξη.* Αφήνουμε το μέρος (α) ως άσκηση (βλέπε Άσκηση 1) και αποδεικνύουμε το (β). Για  $y \in B$  γράφουμε  $\varphi^{-1}(y) = \{x \in A : \varphi(x) = y\}$ . Παρατηρούμε ότι το  $A$  γράφεται ως ένωση

$$A = \bigcup_{y \in B} \varphi^{-1}(y)$$



ξένων ανά δύο,  $\#B$  το πλήθος υποσυνόλων του της μορφής  $\varphi^{-1}(y)$ , το καθένα από τα οποία έχει  $m$  στοιχεία. Το ζητούμενο έπεται από το (α).  $\square$

**Πόρισμα 1.1.1** Για το καρτεσιανό γινόμενο  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  πεπερασμένων συνόλων  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ισχύει

$$\# A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n \#A_i.$$

Απόδειξη. Θέτουμε  $B_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i$  και  $m_i = \#A_i$  για  $1 \leq i \leq n$  και ζητούμε να δείξουμε ότι  $\#B_n = m_1 m_2 \dots m_n$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $\varphi : B_n \rightarrow B_{n-1}$  για την οποία

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

για  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_n$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε  $y \in B_{n-1}$  υπάρχουν ακριβώς  $m_n$  το πλήθος στοιχεία  $x \in B_n$  με  $\varphi(x) = y$ , όσα είναι τα στοιχεία  $x_n \in A_n$ . Από την Πρόταση 1.1.2 (β) έπεται ότι  $\#B_n = m_n (\#B_{n-1})$  και το ζητούμενο προκύπτει με επαγωγή στο  $n$ .  $\square$

Ας εφαρμόσουμε σε «αργή κίνηση» τις αρχές αυτές σε κάποια συγκεκριμένα προβλήματα απαρίθμησης.

**Παράδειγμα 1.1.4** Έστω  $a_n$  το πλήθος των υποσυνόλων του  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει  $a_n = 2^n$  για κάθε  $n$ . Για παράδειγμα για  $n = 2$ , τα τέσσερα υποσύνολα του συνόλου  $\{1, 2\}$  είναι τα εξής:  $\emptyset, \{1\}, \{2\}$  και  $\{1, 2\}$ .

Έστω  $A_n$  το σύνολο των υποσυνόλων του  $[n]$  και έστω  $B_n = \{0, 1\}^n$  το καρτεσιανό γινόμενο του  $\{0, 1\}$  με τον εαυτό του  $n$  φορές. Με άλλα λόγια,  $B_n$  είναι το σύνολο των ακολουθιών  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  μήκους  $n$  με  $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$  για κάθε δείκτη  $i$ . Από το Πόρισμα 1.1.1 έχουμε  $\#B_n = 2^n$ . Μπορούμε να ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $\varphi : A_n \rightarrow B_n$  ως εξής. Για  $S \in A_n$ , έστω  $\varphi(S)$  η ακολουθία  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in B_n$  για την οποία

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in S \\ 0, & \text{αν } i \notin S. \end{cases}$$

Για παράδειγμα αν  $n = 5$  και  $S = \{2, 3, 5\}$ , τότε  $\varphi(S) = (0, 1, 1, 0, 1)$ . Αν η απεικόνιση  $\psi : B_n \rightarrow A_n$  ορίζεται θέτοντας

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \{i \in [n] : \varepsilon_i = 1\}$$

για  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in B_n$ , τότε ισχύουν  $\psi(\varphi(x)) = x$  για  $x \in A_n$  και  $\varphi(\psi(y)) = y$  για  $y \in B_n$ . Συνεπώς η  $\varphi$  είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με αντίστροφη απεικόνιση την  $\psi$ . Από την Πρόταση 1.1.1 προκύπτει ότι  $\#A_n = \#B_n = 2^n$ .  $\square$

**Παράδειγμα 1.1.5** Αναδιάταξη ενός συνόλου  $S$  με  $n$  στοιχεία λέγεται μία ακολουθία  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  μήκους  $n$  στην οποία κάθε στοιχείο του  $S$  εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Για παράδειγμα, η  $(4, 2, 5, 1, 3)$  είναι αναδιάταξη του συνόλου  $[5]$ .

Έστω  $a_n$  το πλήθος των αναδιατάξεων του συνόλου  $[n]$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει  $a_n = n!$  για κάθε  $n$ . Για  $n = 3$ , οι έξι αναδιατάξεις του  $[3]$  είναι οι  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$  και  $(3, 2, 1)$ .

Έστω  $A_n$  το σύνολο των αναδιατάξεων του  $[n]$  και  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_n$ . Διαγράφοντας τον όρο  $n$  από τη  $\sigma$  προκύπτει μία αναδιάταξη  $\varphi(\sigma)$  του συνόλου  $[n-1]$ . Για παράδειγμα αν  $n = 5$  και  $\sigma = (3, 1, 5, 4, 2)$ , τότε  $\varphi(\sigma) = (3, 1, 4, 2)$ . Με τον τρόπο αυτό ορίζεται η απεικόνιση  $\varphi : A_n \rightarrow A_{n-1}$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε αναδιάταξη  $\tau \in A_{n-1}$  υπάρχουν ακριβώς  $n$  αναδιατάξεις  $\sigma \in A_n$  με  $\varphi(\sigma) = \tau$ . Για παράδειγμα αν  $n = 4$  και  $\tau = (3, 1, 2)$ , τότε οι τέσσερις αναδιατάξεις  $\sigma \in A_n$  με  $\varphi(\sigma) = \tau$  είναι οι  $(4, 3, 1, 2)$ ,  $(3, 4, 1, 2)$ ,  $(3, 1, 4, 2)$  και  $(3, 1, 2, 4)$ . Από την Πρόταση 1.1.2 (β) συμπεραίνουμε ότι  $a_n = na_{n-1}$ , από όπου προκύπτει ο τύπος  $a_n = n!$  με επαγωγή στο  $n$ .  $\square$

Το σκεπτικό με το οποίο εφαρμόσαμε την Πρόταση 1.1.1 στο Παράδειγμα 1.1.4 συνιστά μια από τις απλούστερες αλλά σημαντικότερες τεχνικές απαρίθμησης, την *τεχνική της 1-1 αντιστοιχίας*. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου  $A$  αρκεί να βρούμε μια 1-1 αντιστοιχία του  $A$  με κατάλληλο σύνολο  $B$ , του οποίου ήδη γνωρίζουμε το πλήθος των στοιχείων. Η τεχνική αυτή συχνά βοηθάει σημαντικά στην καλύτερη κατανόηση ενός απλού τύπου σαν αυτούς που συναντήσαμε παραπάνω, όπως ελπίζουμε να γίνει και με το επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 1.1.6** Ένα τουρνουά τένις, στο οποίο λαμβάνουν μέρος  $n$  παίκτες, διεξάγεται με αγώνες knock out. Συγκεκριμένα αν ο  $n$  είναι άρτιος, τότε οι παίκτες αγωνίζονται σε ζευγάρια και οι νικητές των αγώνων προχωρούν στον επόμενο γύρο, ενώ οι ηττημένοι αποχωρούν και αν ο  $n$  είναι περιττός, τότε ένας παίκτης προκρίνεται με κλήρωση και οι υπόλοιποι αγωνίζονται σε ζευγάρια. Η διαδικασία συνεχίζεται ώσπου να μείνουν δύο παίκτες και να ανακηρυχθεί ο νικητής στο μεταξύ τους αγώνα. Ποιό είναι το πλήθος  $a_n$  των αγώνων που θα διεξαχθούν συνολικά;

Εύκολα βρίσκουμε ότι  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = 3$ ,  $a_5 = 4$  κ.ο.κ. και οδηγούμαστε στο να εικάσουμε ότι ισχύει  $a_n = n - 1$  για κάθε  $n$ . Πράγματι, έστω  $A_n$  το σύνολο των αγώνων που διεξήχθησαν και  $B_n$  το σύνολο των ηττημένων παικτών στους αγώνες αυτούς. Εφόσον στο τέλος μένει μόνο ένας νικητής, έχουμε  $\#B_n = n - 1$ . Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση  $\varphi : A_n \rightarrow B_n$  που αντιστοιχεί σε κάθε αγώνα τον ηττημένο παίκτη είναι αμφιμονοσήμαντη. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε παίκτης, εκτός του νικητή, χάνει σε ακριβώς έναν αγώνα. Από την Πρόταση 1.1.1 προκύπτει ότι  $\#A_n = \#B_n = n - 1$ .  $\square$

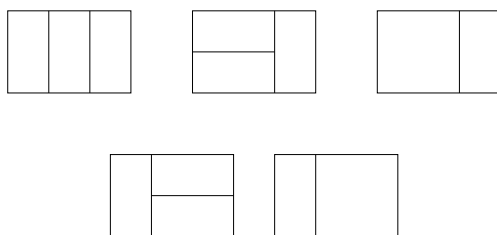
Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό στο Παράδειγμα 1.1.5, έστω  $A_n$  το σύνολο των αναδιατάξεων του  $[n]$  και  $B_n$  το καρτεσιανό γινόμενο  $[1] \times [2] \times \dots \times [n]$ , δηλαδή

το σύνολο των ακολουθιών  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  μήκους  $n$  με ακέραιους όρους, τέτοιους ώστε  $1 \leq \varepsilon_i \leq i$  για κάθε  $i$ . Από το Πρόρισμα 1.1.1 έχουμε αμέσως ότι  $\#B_n = n!$ . Προτρέπουμε τον αναγνώστη να επιχειρήσει να βρει ο ίδιος μια 1-1 αντιστοιχία  $\varphi : A_n \rightarrow B_n$ . Μια τέτοια αντιστοιχία θα ορίσουμε στην Παράγραφο 2.2.1 και θα τη χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε μία ισχυρότερη από τον τύπο  $\#A_n = n!$  πρόταση.

### 1.1.3 Γεννήτριες συναρτήσεις και ο δακτύλιος $\mathbb{C}[[x]]$

Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια. Αρχίζουμε πάλι με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 1.1.7** Έστω  $a_n$  το πλήθος των καλύψεων μιας  $n \times 2$  σκακιέρας με ορθογώνια  $1 \times 2$  ή  $2 \times 1$  (ντόμινα) ή  $2 \times 2$  (τετράγωνα), τα οποία ανά δύο δεν τέμνονται στο εσωτερικό τους. Έχουμε  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 5$  και  $a_4 = 11$ . Για  $n = 3$  οι πέντε καλύψεις φαίνονται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Οι πέντε καλύψεις της  $3 \times 2$  σκακιέρας.

Αυτή τη φορά δεν είναι τόσο εύκολο να μαντέψει κανείς έναν απλό τύπο για το  $a_n$ . Μπορούμε όμως να σκεφτούμε ως εξής. Για καθεμιά από τις  $a_n$  καλύψεις της  $n \times 2$  σκακιέρας, είτε η τελευταία στήλη καλύπτεται από ένα κάθετο ( $2 \times 1$ ) ντόμινο, είτε οι δύο τελευταίες στήλες καλύπτονται από δύο οριζόντια ( $1 \times 2$ ) ντόμινα ή από ένα  $2 \times 2$  τετράγωνο. Υπάρχουν  $a_{n-1}$  καλύψεις στην πρώτη περίπτωση και  $2a_{n-2}$  στη δεύτερη. Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.2 (α) ισχύει

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (1.8)$$

για  $n \geq 2$ , όπου έχουμε θέσει  $a_0 = 1$ . Το επόμενο βήμα αποτελεί τη βασική ιδέα της μεθόδου των γεννητριών συναρτήσεων: Για τον υπολογισμό του  $a_n$  χρησιμοποιούμε τη δυναμοσειρά

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (1.9)$$

Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 1 + x + \sum_{n \geq 2} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n \geq 2} (a_{n-1} + 2a_{n-2}) x^n \\
 &= 1 + x + x \sum_{n \geq 2} a_{n-1} x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^{n-2} \\
 &= 1 + x + x(F(x) - 1) + 2x^2 F(x) \\
 &= 1 + (x + 2x^2) F(x)
 \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}. \quad (1.10)$$

Παρατηρώντας τώρα ότι  $1 - x - 2x^2 = (1+x)(1-2x)$ , η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$F(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right) = \frac{1}{3} \left( \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + 2 \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \right). \quad (1.11)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^n$  στις (1.9) και (1.11) προκύπτει ο τύπος

$$a_n = \frac{1}{3} (2^{n+1} + (-1)^n).$$

□

Η δυναμοσειρά  $F(x)$ , όπως ορίζεται από την (1.9), λέγεται (συνήθως) *γεννήτρια συνάρτηση* της ακολουθίας  $(a_n)$ . Μέθοδος των γεννητριών συναρτήσεων ονομάζεται η εύρεση της δυναμοσειράς  $F(x)$  και χρησιμοποιείται συνήθως όταν ο υπολογισμός της  $F(x)$  είναι ευκολότερος από τον απευθείας υπολογισμό του  $a_n$ .

**Τυπικές δυναμοσειρές.** Είναι σημαντικό να κατανοήσει κανείς την έννοια που δίνουμε στο άπειρο άθροισμα (1.9), η οποία δε συμπίπτει με αυτή που συναντούμε στον απειροστικό λογισμό και δε σχετίζεται με το αν το άθροισμα συγκλίνει ή αποκλίνει για συγκεκριμένες τιμές του  $x$ . Το άθροισμα  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  δε νοείται ως συνάρτηση του  $x$ , όπως στον απειροστικό λογισμό, αλλά απλά ως ένας ισοδύναμος τρόπος να καταγράψουμε την ακολουθία  $(a_n)$ , που όμως υπακούει στους κανόνες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) + \left( \sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n \quad (1.12)$$

και

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n, \quad (1.13)$$

όπου

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0. \quad (1.14)$$

Για παράδειγμα, αν

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} x^n \\ G(x) &= 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \sum_{n \geq 0} n x^n, \end{aligned}$$

τότε

$$F(x) + G(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$$

και

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots) = x + 3x^2 + 6x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{n(n+1)}{2} x^n. \end{aligned}$$

Το σύνολο των αθροισμάτων  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , με  $a_n \in \mathbb{C}$  για κάθε  $n$ , συμβολίζεται με  $\mathbb{C}[[x]]$  και βρίσκεται σε 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των ακολουθιών  $(a_0, a_1, \dots)$  με  $a_n \in \mathbb{C}$  για κάθε  $n$ . Δηλαδή στο  $\mathbb{C}[[x]]$  ισχύει  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$  αν και μόνο αν  $a_n = b_n$  για κάθε  $n$ . Οι πράξεις που ορίσαμε στο  $\mathbb{C}[[x]]$  με τις (1.12) και (1.13) επεκτείνουν τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του δακτυλίου  $\mathbb{C}[x]$  των πολυωνύμων στο  $x$  με μιγαδικούς συντελεστές, τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως τα στοιχεία του  $\mathbb{C}[[x]]$  με πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών συντελεστών. Οι πράξεις αυτές καθιστούν το  $\mathbb{C}[[x]]$  μεταθετικό δακτύλιο (και μάλιστα  $\mathbb{C}$ -άλγεβρα). Με απλά λόγια, ισχύουν οι συνήθεις νόμοι (μεταθετικότητας, προσεταιρισμού, επιμερισμού κ.ο.κ.) που ισχύουν και για τις πράξεις του δακτυλίου  $\mathbb{C}[x]$ . Το μηδενικό στοιχείο και η μονάδα του  $\mathbb{C}[[x]]$  είναι τα  $0 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots$  και  $1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots$ , αντίστοιχα.

Τα στοιχεία του  $\mathbb{C}[[x]]$  λέγονται *τυπικές δυναμοσειρές* με μιγαδικούς συντελεστές, όρος που κάνει σαφή τη διάκρισή τους από τις δυναμοσειρές του απειροστικού λογισμού. Αν  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ , γράφουμε  $[x^n]F(x)$  για το συντελεστή  $a_n$

του  $x^n$  στην τυπική δυναμοσειρά  $F(x)$ . Η σπουδαιότητα που έχουν για μας οι πράξεις του  $\mathbb{C}[[x]]$  οφείλεται στη συνδυαστική ερμηνεία που επιδέχονται, η οποία δίνεται από την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 1.1.3** Έστω στοιχεία  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  και  $G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$  του  $\mathbb{C}[[x]]$  και έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα  $A_n$  και  $B_n$ , τέτοια ώστε  $a_n = \#A_n$  και  $b_n = \#B_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

- (α) Αν τα  $A_n$  και  $B_n$  είναι ξένα μεταξύ τους, τότε  $[x^n](F(x)+G(x)) = \#(A_n \cup B_n)$ .
- (β) Ο συντελεστής  $[x^n]F(x)G(x)$  είναι ίσος με το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να γράψουμε το  $n$  ως άθροισμα των στοιχείων ενός ζεύγους  $(i, j)$  μη αρνητικών ακεραίων και να επιλέξουμε ένα στοιχείο του  $A_i$  και ένα στοιχείο του  $B_j$ .

*Απόδειξη.* Το (α) προκύπτει από τον τύπο-ορισμό (1.12) και την προσθετική αρχή. Από το Πρόσθημα 1.1.1 γνωρίζουμε ότι το  $a_i b_j$  είναι ίσο με το πλήθος των ζευγών  $(a, b)$  με  $a \in A_i$  και  $b \in B_j$ . Από την παρατήρηση αυτή, τον τύπο-ορισμό (1.14) και την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι ο συντελεστής  $[x^n]F(x)G(x)$  είναι ίσος με το πλήθος των τετράδων  $(i, j, a, b)$  με  $i + j = n$ ,  $a \in A_i$  και  $b \in B_j$ , δηλαδή ότι ισχύει το (β).  $\square$

**Παράδειγμα 1.1.8** Έστω  $c_n$  το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να γράψουμε το  $n$  ως άθροισμα  $n = i + j$  των στοιχείων ενός ζεύγους  $(i, j)$  μη αρνητικών ακεραίων και να επιλέξουμε (i) μία κάλυψη της  $i \times 2$  σκακιέρας με ορθογώνια  $1 \times 2$  ή  $2 \times 1$  ή  $2 \times 2$ , όπως στο Παράδειγμα 1.1.7 και (ii) ένα υποσύνολο του συνόλου  $[j]$ .

Αν  $a_n$  είναι όπως στο Παράδειγμα 1.1.7,  $b_n = 2^n$  είναι το πλήθος των υποσυνόλων του  $[n]$  και  $c_0 = 1$ , τότε από την Πρόταση 1.1.3 (β) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} c_n x^n &= \left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \\ &= \frac{1}{(1+x)(1-2x)^2}. \end{aligned}$$

Από τη σχέση αυτή μπορεί να προκύψει ο τύπος  $c_n = (2^{n+1}(3n+4) + (-1)^n)/9$  με διαδικασία ανάλογη με αυτήν που εφαρμόσαμε για την ισότητα (1.10).  $\square$

Ασφαλώς οφείλουμε να δικαιολογήσουμε το γιατί οι διάφορες πράξεις μεταξύ δυναμοσειρών που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στα προηγούμενα παραδείγματα έχουν νόημα στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , με την έννοια που του έχουμε δώσει. Για τυπικές δυναμοσειρές  $F(x)$  και  $G(x)$  γράφουμε  $F(x) = 1/G(x)$ , ή  $F(x) = G(x)^{-1}$  αν ισχύει  $F(x)G(x) = 1$  στο

$\mathbb{C}[[x]]$ , δηλαδή αν η  $F(x)$  είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του  $\mathbb{C}[[x]]$  με αντίστροφο τη  $G(x)$ . Έτσι, η (1.10) σαν ισότητα στο  $\mathbb{C}[[x]]$  είναι ισοδύναμη με την

$$(1 - x - 2x^2) \left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) = 1$$

που αποδείξαμε, η οποία, εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^n$  στα δύο της μέλη, σημαίνει ότι για την ακολουθία  $(a_n)$  ισχύουν η (1.8) και  $a_0 = a_1 = 1$ . Ομοίως, η ισότητα στην οποία καταλήξαμε στο Παράδειγμα 1.1.8 ερμηνεύεται ως η ισότητα

$$(1 + x)(1 - 2x)^2 \left( \sum_{n \geq 0} c_n x^n \right) = 1$$

στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , η οποία σημαίνει ότι για την ακολουθία  $(c_n)$  ισχύει  $c_n - 3c_{n-1} + 4c_{n-3} = 0$  για  $n \geq 1$ , όπου  $c_n = 0$  για  $n < 0$  και  $c_0 = 1$ . Γενικότερα, για τυπικές δυναμοσειρές  $F(x), G(x)$  και  $H(x)$  γράφουμε  $F(x) = H(x)/G(x)$  αν ισχύει  $F(x)G(x) = H(x)$  και η  $G(x)^{-1}$  υπάρχει στο  $\mathbb{C}[[x]]$ . Με την προϋπόθεση αυτή για τη  $G(x)$ , τα στοιχεία  $H(x)/G(x)$  του  $\mathbb{C}[[x]]$  υπακούουν στους γνωστούς κανόνες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που ισχύουν για ρητές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, η πρώτη ισότητα της (1.11) έχει νόημα στο  $\mathbb{C}[[x]]$  και προκύπτει από την (1.10).

**Πρόταση 1.1.4** *Μια τυπική δυναμοσειρά  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$  έχει αντίστροφο στο  $\mathbb{C}[[x]]$  αν και μόνο αν  $a_0 \neq 0$ .*

*Απόδειξη.* Από τις (1.13) και (1.14) προκύπτει ότι η δυναμοσειρά  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$  είναι η αντίστροφος της  $F(x)$  αν και μόνο αν

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \geq 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Για  $n = 0$  η σχέση (1.15) γράφεται  $a_0 b_0 = 1$ , από όπου προκύπτει ότι  $a_0 \neq 0$ . Αντιστρόφως αν  $a_0 \neq 0$ , τότε η (1.15) έχει μοναδική λύση ως προς  $(b_0, b_1, b_2, \dots)$  που ορίζεται επαγωγικά από τις σχέσεις  $b_0 = a_0^{-1}$ ,  $b_1 = -a_1 b_0 / a_0$ ,  $b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0) / a_0$  κ.ο.κ.  $\square$

**Άπειρα άθροισματα και γινόμενα.** Για  $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \dots \in \mathbb{C}[[x]]$  το άπειρο άθροισμα  $F(x) = \sum_{k \geq 0} F_k(x)$  ορίζεται ως στοιχείο του  $\mathbb{C}[[x]]$  αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους δείκτες  $k$  με  $[x^n] F_k(x) \neq 0$ . Στην περίπτωση αυτή το άθροισμα των  $[x^n] F_k(x)$  για αυτούς τους δείκτες  $k$  ορίζει το συντελεστή του  $x^n$  στην  $F(x)$ . Για παράδειγμα, το άθροισμα

$$\sum_{k \geq 0} (x + x^2 + x^3)^k$$

ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$  διότι για  $n \in \mathbb{N}$ , το πολυώνυμο  $(x + x^2 + x^3)^k$  δε συνεισφέρει στον υπολογισμό του συντελεστή του  $x^n$  για  $k > n$ , ενώ το

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2} + x\right)^k$$

δεν έχει νόημα στο  $\mathbb{C}[[x]]$  διότι ο σταθερός του όρος είναι το μη πεπερασμένο άθροισμα  $\sum_{k \geq 0} 2^{-k} = 1 + 1/2 + 1/4 + \dots$ . Η επόμενη πρόταση δίνει βασικές ιδιότητες των παραπάνω εννοιών.

**Πρόταση 1.1.5** Έστω  $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ , με  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

(α) Αν  $a_0 = 0$ , τότε το άθροισμα  $\sum_{k \geq 0} F(x)^k$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$  και ισχύει

$$\sum_{k \geq 0} F(x)^k = \frac{1}{1 - F(x)}. \quad (1.16)$$

Ειδικότερα, έχουμε

$$\sum_{k \geq 0} \alpha^k x^k = \frac{1}{1 - \alpha x} \quad (1.17)$$

στο  $\mathbb{C}[[x]]$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(β) Το άθροισμα  $F(G(x)) = \sum_{k \geq 0} a_k G(x)^k$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$  αν  $F(x) \in \mathbb{C}[x]$  ή αν  $G(0) = 0$ .

*Απόδειξη.* (α) Αφού  $a_0 = 0$ , έχουμε  $F(x) = xH(x)$  όπου  $H(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1} \in \mathbb{C}[[x]]$ . Επομένως  $[x^n] F(x)^k = [x^n] x^k H(x)^k = 0$  για  $k > n$  και συνεπώς το άθροισμα στο αριστερό μέλος της (1.16) ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$ . Για τον ίδιο λόγο

$$\begin{aligned} [x^n] (1 - F(x)) \sum_{k \geq 0} F(x)^k &= [x^n] (1 - F(x)) \sum_{k=0}^n F(x)^k \\ &= [x^n] (1 - F(x)^{n+1}) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

το οποίο ισοδυναμεί με την προτεινόμενη ισότητα. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη θέτοντας  $F(x) = \alpha x = 0 + \alpha \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$ .

(β) Το ζητούμενο προκύπτει με το σκεπτικό της απόδειξης του (α) αν  $G(0) = 0$ , ενώ είναι προφανές αν  $F(x) \in \mathbb{C}[x]$ .  $\square$



Το μέρος (α) της Πρότασης 1.1.5 δικαιολογεί τη δεύτερη ισότητα στην (1.11) στο Παράδειγμα 1.1.7. Η δυναμοσειρά  $F(G(x))$  του μέρους (β), όταν ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , λέγεται *σύνθεση* των  $F(x)$  και  $G(x)$ .

Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για άπειρα γινόμενα στοιχείων του  $\mathbb{C}[[x]]$ . Για παράδειγμα, για  $F_1(x), F_2(x), \dots \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $F_k(0) = 0$  για κάθε  $k$ , το γινόμενο

$$\prod_{k \geq 1} (1 + F_k(x)) \quad (1.18)$$

είναι καλά ορισμένο στοιχείο του  $\mathbb{C}[[x]]$  αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  υπάρχει  $N \in \mathbb{N}$  ώστε  $[x^i]F_k(x) = 0$  για κάθε  $1 \leq i \leq n$  και  $k > N$ . Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής του  $x^n$  στο γινόμενο (1.18) ορίζεται ως ο συντελεστής του  $x^n$  στο πεπερασμένο γινόμενο  $\prod_{k=1}^N (1 + F_k(x))$ . Για παράδειγμα, το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k \geq 1} (1 + x^k)$$

ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , ενώ το

$$\prod_{k \geq 1} (1 + \frac{x}{2^k})$$

δεν έχει νόημα στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , αφού ο συντελεστής του  $x$  στο γινόμενο αυτό υπολογίζεται από το άπειρο άθροισμα  $\sum_{k \geq 1} 2^{-k}$ .

**Παράγωγοι και διωνυμικές δυναμοσειρές.** Πολλές έννοιες που ορίζονται στον απειροστικό λογισμό για δυναμοσειρές έχουν νόημα στο  $\mathbb{C}[[x]]$  και δίνουν χρήσιμα εργαλεία για τον υπολογισμό τυπικών δυναμοσειρών. Θα εξετάσουμε σύντομα την έννοια της παραγώγου και τις διωνυμικές σειρές (και θα παραπέμφουμε τον αναγνώστη στην Άσκηση 12 για τις βασικές ιδιότητες των εκθετικών δυναμοσειρών).

Για  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ , ορίζουμε την *παράγωγο*  $F'(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  από τον τύπο

$$F'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}. \quad (1.19)$$

Για παράδειγμα, αν

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

τότε

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{n \geq 0} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = (1 + x + x^2 + \dots)^2 \\ &= (F(x))^2 = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Όπως υποδεικνύει το παράδειγμα αυτό, στο  $\mathbb{C}[[x]]$  ισχύουν οι συνήθεις νόμοι παραγώγισης για την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση και τη σύνθεση, όταν αυτές ορίζονται (βλέπε Άσκηση 7).

**Παράδειγμα 1.1.9** Έστω  $a_0, a_1, \dots$  η ακολουθία που ορίζεται από τις σχέσεις  $a_0 = 1, a_1 = 0$  και

$$a_{n+1} = \frac{6}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1}$$

για  $n \geq 1$ . Υπάρχει κάποιος απλός τύπος για το  $a_n$ ;

Έστω  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  η γεννήτρια συνάρτηση της  $(a_n)$ . Παρατηρούμε ότι για  $n \geq 1$  ισχύει

$$\begin{aligned} [x^n] F'(x) &= (n+1) a_{n+1} = 6 \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1} = 6 [x^{n-1}] \left( \sum_{k \geq 0} a_k x^k \right)^2 \\ &= [x^n] 6x (F(x))^2. \end{aligned}$$

Η προηγούμενη ισότητα και η υπόθεση  $a_1 = 0$  δίνουν  $F'(x) = 6x (F(x))^2$ . Ισοδύναμα, έχουμε  $(1/F(x))' = -6x$  από όπου, με το δεδομένο  $F(0) = a_0 = 1$ , συμπεραίνουμε ότι  $1/F(x) = 1 - 3x^2$  και

$$F(x) = \frac{1}{1-3x^2} = \sum_{n \geq 0} 3^n x^{2n}.$$

Επομένως  $a_n = 3^{n/2}$  ή 0, αν ο  $n$  είναι άρτιος ή περιττός, αντίστοιχα. □

Ερχόμαστε τώρα στις διωνυμικές σειρές. Για  $\alpha \in \mathbb{C}$  ορίζουμε τη διωνυμική σειρά  $(1+x)^\alpha$  ως την τυπική δυναμοσειρά

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (1.20)$$

όπου

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (1.21)$$

για  $n \geq 1$  και  $\binom{\alpha}{0} = 1$ . Για παράδειγμα, για  $\alpha = -1/2$  έχουμε

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

και συνεπώς  $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$ . Ισοδύναμα, έχουμε

$$(1-4x)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n. \quad (1.22)$$

Από την Πρόταση 1.1.5 (β) προκύπτει ότι για κάθε  $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $F(0) = 0$ , η σειρά

$$(1+F(x))^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} F(x)^n$$

είναι καλά ορισμένο στοιχείο του  $\mathbb{C}[[x]]$ . Για  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , όπως φαίνεται από την ακόλουθη πρόταση, ο ορισμός αυτός συμφωνεί με την έννοια που ήδη έχουμε δώσει στην τυπική δυναμοσειρά  $(1+F(x))^\alpha$ . Τις διωνυμικές σειρές  $(1+x)^\alpha$  με  $\alpha \in \mathbb{Z}$  θα τις εξετάσουμε διεξοδικά στις Παραγράφους 1.2.1 και 1.2.2.

**Πρόταση 1.1.6** Για  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  και  $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $F(0) = G(0) = 0$ , ισχύουν στο  $\mathbb{C}[[x]]$  τα εξής:

- (α)  $(1+F(x))^\alpha (1+F(x))^\beta = (1+F(x))^{\alpha+\beta}$ .
- (β)  $((1+F(x))^\alpha)^\beta = (1+F(x))^{\alpha\beta}$ .
- (γ)  $(1+F(x))^\alpha (1+G(x))^\alpha = ((1+F(x))(1+G(x)))^\alpha$ .

Με άλλα λόγια, ισχύουν οι γνωστοί κανόνες που διέπουν τις εκθετικές συναρτήσεις  $x^\alpha$  του απειροστικού λογισμού. Η απόδειξη της Πρότασης 1.1.6 δίνεται στην Άσκηση 9.

**Παράδειγμα 1.1.10** Έστω  $a_n = \binom{2n}{n}$  για  $n \in \mathbb{N}$  και  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Από την ισότητα (1.22) έχουμε  $F(x) = (1-4x)^{-1/2}$ , οπότε

$$(F(x))^2 = (1-4x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} 4^n x^n$$

και συνεπώς

$$\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = [x^n] (F(x))^2 = 4^n.$$

Δείξαμε δηλαδή ότι ισχύει

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n \quad (1.23)$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . □

## 1.2 Εφαρμογές

### 1.2.1 Υποσύνολα

Έστω πεπερασμένο σύνολο  $S$ . Ένα υποσύνολο του  $S$  με  $k$  στοιχεία θα ονομάζεται  $k$ -υποσύνολο του  $S$ . Συμβολίζουμε με  $\binom{S}{k}$  το σύνολο όλων των  $k$ -υποσυνόλων του  $S$  και θέτουμε  $\binom{n}{k} = \#\binom{S}{k}$  όταν το πλήθος των στοιχείων του  $S$  είναι ίσο με  $n$ . Οι ακέραιοι  $\binom{n}{k}$  λέγονται *διωνυμικοί συντελεστές*. Για παράδειγμα έχουμε  $\binom{4}{2} = 6$ , αφού για  $n = 4$  υπάρχουν τα εξής έξι διμελή υποσύνολα του  $[n]$ :  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$  και  $\{3, 4\}$ . Θεωρώντας το  $n$  σταθερό, η γεννήτρια συνάρτηση των διωνυμικών συντελεστών δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 1.2.1** Για θετικούς ακέραιους  $n$  ισχύει

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k. \quad (1.24)$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $\varphi : A_n \rightarrow \{0, 1\}^n$  του Παραδείγματος 1.1.4, όπου  $A_n$  είναι το σύνολο των υποσυνόλων του  $[n]$ . Παρατηρώντας ότι αν  $\varphi(S) = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ , τότε  $\#S = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k &= \sum_{S \subseteq [n]} x^{\#S} \\ &= \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \{0, 1\}^n} x^{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \\ &= \left( \sum_{r_1 \in \{0, 1\}} x^{r_1} \right) \left( \sum_{r_2 \in \{0, 1\}} x^{r_2} \right) \cdots \left( \sum_{r_n \in \{0, 1\}} x^{r_n} \right) \\ &= (1+x)^n. \end{aligned}$$

□

Από την Πρόταση 1.2.1 μπορούμε να συνάγουμε εύκολα πολλές από τις βασικές ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών. Εξισώνοντας, για παράδειγμα, τους συντελεστές του  $x^k$  στην ταυτότητα  $(1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x)$ , προκύπτει από την (1.24) ότι

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \quad (1.25)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.20) και (1.21), ή την (1.25) και επαγωγή στο  $n$ , προκύπτει ο γνωστός τύπος

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.26)$$

Επίσης, θέτοντας  $x = 1$  και  $x = -1$  στην (1.24), αντίστοιχα, παίρνουμε  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  και  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$  για  $n \geq 1$ . Παραγωγίζοντας την (1.24) ως προς  $x$  και θέτοντας  $x = 1$ , παίρνουμε  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$  κ.ο.κ.

Φυσικά οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να προκύψουν ευθέως από τις βασικές αρχές της Παραγράφου 1.1.2. Για παράδειγμα, η (1.25) προκύπτει από την προσθετική αρχή, παρατηρώντας ότι το πλήθος των  $k$ -υποσυνόλων  $T$  του  $[n]$  με  $n \in T$  είναι ίσο με  $\binom{n-1}{k-1}$  και ότι το πλήθος των  $k$ -υποσυνόλων  $T$  του  $[n]$  με  $n \notin T$  είναι ίσο με  $\binom{n-1}{k}$ . Για την (1.26) σκεπτόμαστε ως εξής. Έστω  $A_n$  το σύνολο των αναδιατάξεων του  $[n]$  και  $B_n = \binom{[n]}{k}$ . Ορίζουμε την απεικόνιση  $\varphi : A_n \rightarrow B_n$  θέτοντας  $\varphi(\sigma) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$  για  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_n$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε  $T \in B_n$  υπάρχουν ακριβώς  $k!(n-k)!$  αναδιατάξεις  $\sigma \in A_n$  με  $\varphi(\sigma) = T$ . Εφόσον  $\#A_n = n!$  και  $\#B_n = \binom{[n]}{k}$ , από την Πρόταση 1.1.2 (β) συμπεραίνουμε ότι  $n! = k!(n-k)! \binom{[n]}{k}$ .

Μια ενδιαφέρουσα γενίκευση της (1.26) είναι η εξής. Θεωρούμε σύνολο  $S$  με  $n$  στοιχεία και μη αρνητικούς ακεραίους  $n_1, n_2, \dots, n_r$  με άθροισμα  $n$ . Συμβολίζουμε με  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$  το πλήθος των ακολουθιών  $(T_1, T_2, \dots, T_r)$  μήκους  $r$ , ξένων ανά δύο υποσυνόλων  $T_i$  του  $S$  με ένωση  $S$  και με  $\#T_i = n_i$  για κάθε  $i$ . Για παράδειγμα, για  $S = [4]$ ,  $r = 3$  και  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = n_3 = 1$ , μία από τις τριάδες  $(T_1, T_2, T_3)$  είναι η  $(\{2, 4\}, \{3\}, \{1\})$ , ενώ υπάρχουν συνολικά  $\binom{4}{2, 1, 1} = 12$  τέτοιες τριάδες. Παρατηρούμε ότι  $\binom{n}{1, 1, \dots, 1} = n!$  και  $\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k}$ . Συνεπώς η (1.26) είναι η ειδική περίπτωση  $r = 2$  της επόμενης πρότασης.

**Πρόταση 1.2.2** Για θετικούς ακεραίους  $n_1, n_2, \dots, n_r$  με άθροισμα  $n$  ισχύει

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}. \quad (1.27)$$

*Απόδειξη.* Έστω  $A_n$  το σύνολο των αναδιατάξεων του  $[n]$  και  $B_n$  το σύνολο των ακολουθιών  $(T_1, T_2, \dots, T_r)$ , όπου  $T_i$  είναι ξένα ανά δύο σύνολα με ένωση  $[n]$  και με  $\#T_i = n_i$  για κάθε  $i$ . Ορίζουμε την απεικόνιση  $\varphi : A_n \rightarrow B_n$  ως εξής: Έστω  $m_0 = 0$  και  $m_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$  για  $1 \leq i \leq r$ . Για  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_n$  θέτουμε  $\varphi(\sigma) = (T_1, T_2, \dots, T_r)$ , όπου το  $T_i$  αποτελείται από τους όρους  $\sigma_j$  της  $\sigma$  με  $m_{i-1} < j \leq m_i$ . Όπως στην ειδική περίπτωση  $r = 2$ , έχουμε ότι για κάθε  $\tau \in B_n$  υπάρχουν ακριβώς  $n_1! n_2! \dots n_r!$  αναδιατάξεις  $\sigma \in A_n$  με  $\varphi(\sigma) = \tau$ . Έχουμε επίσης  $\#A_n = n!$  και  $\#B_n = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ . Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 1.1.2 (β).  $\square$

## 1.2.2 Συνδυασμοί με επανάληψη και συνθέσεις

**Συνδυασμοί με επανάληψη.** Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μεταβλητές που ανά δύο μετατίθενται και έστω  $k \in \mathbb{N}$ . Για μη αρνητικούς ακεραίους  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ο βαθμός του μονωνύμου  $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$  ορίζεται ως το άθροισμα  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Πόσα μονώνυμα υπάρχουν στις μεταβλητές  $x_1, x_2, \dots, x_n$  βαθμού  $k$ ; Ισοδύναμα, ποιο είναι το πλήθος των διανυσμάτων  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$  με  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$ ; Το πλήθος αυτό συμβολίζεται με  $\binom{n}{k}$  και αναφέρεται ως το πλήθος των *συνδυασμών με επανάληψη*  $k$  από  $n$  αντικείμενα  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Για παράδειγμα έχουμε  $\binom{3}{2} = 6$ , αφού για  $n = 3$  υπάρχουν τα έξι μονώνυμα  $x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2^2, x_2 x_3$  και  $x_3^2$  βαθμού δύο στις μεταβλητές  $x_1, x_2, x_3$ .

**Πρόταση 1.2.3** Για μη αρνητικούς ακεραίους  $n, k$  ισχύει  $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$ .

*Απόδειξη.* Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.2.1 βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k &= \sum_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} x^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{a_i \geq 0} x^{a_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + x + x^2 + \dots) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-x}, \end{aligned}$$

δηλαδή προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}. \quad (1.28)$$

Αναπτύσσοντας τη δυναμοσειρά  $(1-x)^{-n} = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} (-x)^k$  σύμφωνα με την (1.20), προκύπτει ότι  $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k}$ . Τέλος, από την (1.21) βρίσκουμε ότι  $(-1)^k \binom{-n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$ .  $\square$

**Συνθέσεις ακεραίων.** Έστω  $n$  θετικός ακέραιος. *Σύνθεση* (ή διατεταγμένη διαμέριση) του  $n$  λέγεται μια ακολουθία  $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$  με στοιχεία θετικούς ακεραίους που έχουν άθροισμα  $n$ . Οι ακεραίοι  $r_i$  λέγονται *μέρη* της σύνθεσης  $\rho$ . Για παράδειγμα, ο ακεραίος  $n = 5$  έχει συνολικά 16 συνθέσεις, από τις οποίες τρία μέρη έχουν οι  $(3, 1, 1)$ ,  $(1, 3, 1)$ ,  $(1, 1, 3)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 2)$  και  $(1, 2, 2)$ .

**Πρόταση 1.2.4** Το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  είναι ίσο με  $2^{n-1}$ . Το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  με  $k$  μέρη είναι ίσο με  $\binom{n-1}{k-1}$ .

*Απόδειξη.* Προφανώς, αρκεί να αποδείξουμε το δεύτερο ισχυρισμό της πρότασης. Θέτοντας  $\varphi(\rho) = (r_1 - 1, r_2 - 1, \dots, r_k - 1)$  για  $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ , προκύπτει μια 1-1 αντιστοιχία  $\varphi$  από το σύνολο των συνθέσεων του  $n$  με  $k$  μέρη στο σύνολο των διανυσμάτων  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$  με  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n - k$ . Κατά συνέπεια, το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  με  $k$  μέρη είναι ίσο με  $\binom{k}{n-k}$ . Το ζητούμενο προκύπτει από την Πρόταση 1.2.3.  $\square$

Μια ευθεία απόδειξη της Πρότασης 1.2.4 (επομένως και της Πρότασης 1.2.3), βασισμένη στην τεχνική της 1-1 αντιστοιχίας, μπορεί να δοθεί ως εξής. Έστω  $A_n$  το σύνολο των συνθέσεων του  $n$  και  $B_n$  το σύνολο των υποσυνόλων του  $[n]$ , οπότε  $\#B_{n-1} = 2^{n-1}$ . Για  $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k) \in A_n$ , έστω

$$\psi(\rho) = \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1}\}.$$

Από την υπόθεση ότι οι  $r_1, r_2, \dots, r_k$  είναι θετικοί ακέραιοι με άθροισμα  $n$  προκύπτει ότι  $\psi(\rho) \in B_{n-1}$ . Επιπλέον, η απεικόνιση  $\psi : A_n \rightarrow B_{n-1}$  είναι αμφιμονοσήμαντη, όπου η αντίστροφη της απεικονίζει το υποσύνολο  $\{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$  του  $[n-1]$  με  $s_1 < s_2 < \dots < s_{k-1}$  στο στοιχείο  $(s_1, s_2 - s_1, \dots, n - s_{k-1})$  του  $A_n$ . Έπεται ότι  $\#A_n = \#B_{n-1} = 2^{n-1}$ . Επίσης, η σύνθεση  $\rho \in A_n$  έχει  $k$  μέρη αν και μόνο αν το σύνολο  $\psi(\rho)$  έχει  $k-1$  στοιχεία. Κατά συνέπεια, ο περιορισμός  $\psi_k$  της  $\psi$  στο σύνολο  $A_{n,k}$  των συνθέσεων του  $n$  με  $k$  μέρη είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση της μορφής  $\psi_k : A_{n,k} \rightarrow \binom{[n-1]}{k-1}$ , οπότε  $\#A_{n,k} = \#\binom{[n-1]}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ .

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με μια εφαρμογή στο πρόβλημα του Παραδείγματος 1.1.3.

**Οι αριθμοί Fibonacci.** Έστω  $a_n$  ο ακέραιος που ορίσαμε στο Παράδειγμα 1.1.3, δηλαδή το πλήθος των συνθέσεων  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$  του  $n$  τυχαίου μήκους, με  $r_i \in \{1, 2\}$  για κάθε  $i$ . Έτσι για  $n = 1, 2, 3, 4$  έχουμε  $a_n = 1, 2, 3, 5$ , αντίστοιχα. Για  $n = 3$  οι τρεις συνθέσεις είναι οι  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 2)$  και  $(2, 1)$ . Συμβολίζοντας με  $a_{n,k}$  το πλήθος των συνθέσεων  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$  του  $n$  με δοσμένο μήκος  $k$  και μέρη  $r_i \in \{1, 2\}$  για κάθε  $i$ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_{n,k} x^n &= \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_k) \in \{1, 2\}^k} x^{r_1 + r_2 + \dots + r_k} \\ &= \left( \sum_{r_1 \in \{1, 2\}} x^{r_1} \right) \left( \sum_{r_2 \in \{1, 2\}} x^{r_2} \right) \dots \left( \sum_{r_k \in \{1, 2\}} x^{r_k} \right) \\ &= (x + x^2)^k. \end{aligned}$$

Θέτοντας  $a_0 = 1$  και αθροίζοντας πάνω στο  $k$  προκύπτει ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{k \geq 0} (x + x^2)^k = \frac{1}{1 - x - x^2}, \quad (1.29)$$

δηλαδή η (1.5). Γράφοντας τώρα  $(1 - x - x^2) \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 1$  και εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^n$  στα δύο μέλη της ισότητας αυτής προκύπτει ότι  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  για  $n \geq 2$ , δηλαδή η σχέση (1.4). Επίσης, αναπτύσσοντας το διώνυμο  $(x + x^2)^k$  ως

$$(x + x^2)^k = x^k (1 + x)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k+i}$$

προκύπτει από την (1.29) ότι  $a_n = \sum_{k+i=n} \binom{k}{i}$ , δηλαδή ο τύπος (1.6). Ένας ακόμα τύπος για το  $a_n$  προκύπτει γράφοντας  $1 - x - x^2 = (1 - \tau x)(1 - \bar{\tau} x)$  και

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{x\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 - \tau x} - \frac{1}{1 - \bar{\tau} x} \right),$$

όπου  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  και  $\bar{\tau} = (1 - \sqrt{5})/2$ . Πράγματι, αναπτύσσοντας τις γεωμετρικές σειρές όπως στην Πρόταση 1.1.5 (α) και εξάγοντας το συντελεστή του  $x^{n-1}$  στην παραπάνω ισότητα, συμπεραίνουμε ότι για  $n \geq 1$  ισχύει

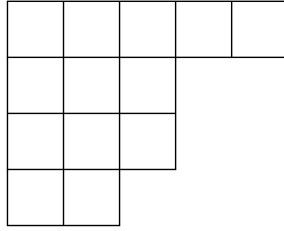
$$a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^n - \bar{\tau}^n),$$

δηλαδή ο τύπος (1.7). Ο ακέραιος  $a_{n-1}$  λέγεται *αριθμός Fibonacci* και συχνά συμβολίζεται με  $F_n$ .

### 1.2.3 Διαμερίσεις ακεραίων

Έστω  $n$  θετικός ακέραιος. *Διαμέριση* του  $n$  είναι μια ακολουθία  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  με στοιχεία θετικούς ακεραίους  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$  που έχουν άθροισμα  $n$ . Οι ακέραιοι  $\lambda_i$  λέγονται *μέρη* της  $\lambda$  και γράφουμε  $\lambda \vdash n$ , ή  $|\lambda| = n$ , για το άθροισμά τους. Για παράδειγμα, η  $(5, 3, 3, 2)$  είναι διαμέριση του  $n = 13$  με τέσσερα μέρη. Στο Σχήμα 1.2 απεικονίζεται το *διάγραμμα Young* για τη διαμέριση αυτή, ένας από τους κύριους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε σχηματικά διαμερίσεις ακεραίων. Το διάγραμμα Young της  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  αποτελείται από  $n = |\lambda|$  μοναδιαία τετράγωνα παραταγμένα σε  $r$  σειρές. Η σειρά  $i$  περιέχει  $\lambda_i$  τετράγωνα και οι  $r$  σειρές αρχίζουν από αριστερά από την ίδια κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα.





Σχήμα 1.2: Το διάγραμμα Young της διαμέρισης  $(5, 3, 3, 2)$ .

Συμβολίζουμε με  $p(n)$  το πλήθος των διαμερίσεων του  $n$ . Έτσι για  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  έχουμε  $p(n) = 1, 2, 3, 5, 7$ , αντίστοιχα. Οι πέντε διαμερίσεις του  $n = 4$  είναι οι  $(4)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 1, 1)$  και  $(1, 1, 1, 1)$ . Ενώ δεν υπάρχει κάποιος απλός γενικός τύπος για το  $p(n)$ , η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση υπολογίζεται εύκολα ως εξής. Έστω  $\Lambda_k$  το σύνολο των διαμερίσεων  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  (συμπεριλαμβανομένης και της μοναδικής διαμέρισης χωρίς μέρη) με  $\lambda_i \leq k$  για κάθε  $i$  και έστω  $p_k(n)$  το πλήθος των διαμερίσεων του  $n$  που ανήκουν στο  $\Lambda_k$ . Για τυχαία διαμέριση  $\lambda$ , έστω  $m_i$  το πλήθος των μερών της  $\lambda$  που είναι ίσα με  $i$ . Για παράδειγμα, για  $\lambda = (5, 3, 3, 2)$  έχουμε  $m_2 = m_5 = 1$ ,  $m_3 = 2$  και  $m_i = 0$  για τις υπόλοιπες τιμές του  $i$ . Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση  $\varphi_k : \Lambda_k \rightarrow \mathbb{N}^k$  με  $\varphi_k(\lambda) = (m_1, m_2, \dots, m_k)$  για  $\lambda \in \Lambda_k$  είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι  $|\lambda| = m_1 + 2m_2 + \dots + km_k$ . Έπεται ότι

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_k} x^{|\lambda|} = \sum_{m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}} x^{m_1 + 2m_2 + \dots + km_k} = \prod_{i=1}^k \left( \sum_{m_i \geq 0} x^{im_i} \right) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^i},$$

δηλαδή ότι

$$\sum_{n \geq 0} p_k(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}, \quad (1.30)$$

όπου  $p_k(0) = 1$ . Άμεση συνέπεια της (1.30) είναι η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 1.2.5** *Θέτοντας  $p(0) = 1$ , έχουμε*

$$\sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x^i}. \quad (1.31)$$

Το παραπάνω σκεπτικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε προβλήματα απαρίθμησης διαμερίσεων ακεραίων με συγκεκριμένες ιδιότητες. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η εξής. Για  $n \in \mathbb{N}$ , έστω  $o(n)$  το πλήθος των διαμερίσεων του  $n$  με μέρη περιττούς ακεραίους και  $q(n)$  το πλήθος των διαμερίσεων του  $n$  με μέρη

ακεραίους διαφορετικούς ανά δύο. Για παράδειγμα, για  $n = 5$  υπάρχουν οι διαμερίσεις  $(5)$ ,  $(3, 1, 1)$  και  $(1, 1, 1, 1, 1)$  του πρώτου είδους και οι διαμερίσεις  $(5)$ ,  $(4, 1)$  και  $(3, 2)$  του δεύτερου. Συνεπώς  $o(5) = q(5) = 3$ .

**Πρόταση 1.2.6** *Ισχύει  $o(n) = q(n)$  για κάθε  $n$ .*

*Απόδειξη.* Για τυχαία διαμέριση  $\lambda$ , έστω  $m_i$  το πλήθος των μερών της  $\lambda$  που είναι ίσα με  $i$ , όπως πριν, και έστω  $\Gamma$  (αντίστοιχα,  $\Delta$ ) το σύνολο των διαμερίσεων με μέρη περιττούς (αντίστοιχα, διαφορετικούς ανά δύο) ακεραίους. Έτσι έχουμε  $\lambda \in \Gamma$  αν και μόνο αν  $m_i = 0$  για κάθε άρτιο  $i$ , ενώ  $\lambda \in \Delta$  αν και μόνο αν  $m_i \in \{0, 1\}$  για κάθε  $i$ . Το σκεπτικό της απόδειξης της Πρότασης 1.2.5 δείχνει με ανάλογο τρόπο ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} o(n)x^n &= \sum_{\lambda \in \Gamma} x^{|\lambda|} = \sum_{m_i \in \mathbb{N}} x^{m_1+3m_3+5m_5+\dots} \\ &= \left( \sum_{m_1 \geq 0} x^{m_1} \right) \left( \sum_{m_3 \geq 0} x^{3m_3} \right) \dots = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \dots \\ &= \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1-x^{2j-1}} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} q(n)x^n &= \sum_{\lambda \in \Delta} x^{|\lambda|} = \sum_{m_i \in \{0,1\}} x^{m_1+2m_2+3m_3+\dots} = \\ &= \left( \sum_{m_1 \in \{0,1\}} x^{m_1} \right) \left( \sum_{m_2 \in \{0,1\}} x^{2m_2} \right) \dots = (1+x)(1+x^2) \dots \\ &= \prod_{i \geq 1} (1+x^i). \end{aligned}$$

Όμως

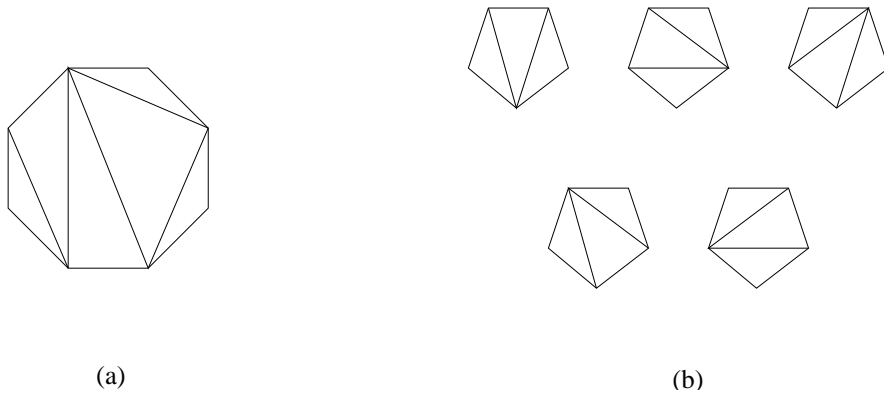
$$\begin{aligned} \prod_{i \geq 1} (1+x^i) &= \prod_{i \geq 1} \frac{1-x^{2i}}{1-x^i} = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6) \dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5) \dots} = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1-x^{2j-1}} \end{aligned}$$

και, εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^n$ , έχουμε  $o(n) = q(n)$  για κάθε  $n$ .  $\square$

Μια απόδειξη της προηγούμενης πρότασης με την τεχνική της 1-1 αντιστοιχίας προτείνεται στην Άσκηση 22. Για παρόμοια φαινόμενα στη θεωρία των διαμερίσεων ακεραίων παραπέμπουμε στο κλασικό σύγγραμμα [3].

### 1.2.4 Τριγωνισμοί και μη διασταυρούμενες διαμερίσεις

Έστω  $P$  ένα κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο με  $n+2$  κορυφές, όπου  $n \geq 1$ . Ονομάζουμε *τριγωνισμό* του  $P$  μια υποδιαίρεσή του σε τρίγωνα με  $n-1$  διαγωνίους, οι οποίες ανά δύο δεν τέμνονται στο εσωτερικό του  $P$ . Στο Σχήμα 1.3 απεικονίζεται ένας τριγωνισμός ενός κυρτού οκταγώνου και οι πέντε δυνατοί τριγωνισμοί ενός κυρτού πενταγώνου.



Σχήμα 1.3: (a) Ένας τριγωνισμός οκταγώνου (b) Οι τριγωνισμοί ενός πενταγώνου.

Πόσοι είναι οι τριγωνισμοί του πολυγώνου  $P$  για τυχαίο  $n$ ; Έστω  $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n+1}$  οι κορυφές του  $P$  αριθμημένες κυκλικά, ώστε οι  $\kappa_{i-1}$  και  $\kappa_i$  να είναι άκρα ακμής του  $P$  για  $1 \leq i \leq n+2$ , όπου  $\kappa_{n+2} = \kappa_0$ . Έστω  $\mathcal{T}(P)$  το σύνολο των τριγωνισμών του  $P$  και  $a_n$  το πλήθος των τριγωνισμών αυτών. Παρατηρούμε ότι για  $\tau \in \mathcal{T}(P)$  υπάρχει μοναδικός δείκτης  $2 \leq i \leq n+1$  για τον οποίο ο  $\tau$  περιέχει το τρίγωνο  $T_i$  με κορυφές  $\kappa_0, \kappa_1$  και  $\kappa_i$ . Έστω  $\mathcal{T}_i(P)$  το σύνολο αυτών των τριγωνισμών του  $P$ . Ένας τριγωνισμός  $\tau \in \mathcal{T}_2(P)$  αποτελείται από το  $T_2$  και  $n-1$  ακόμη τρίγωνα που σχηματίζουν τριγωνισμό  $\varphi(\tau)$  του πολυγώνου  $Q$  με κορυφές  $\kappa_0, \kappa_2, \dots, \kappa_{n+1}$ . Έτσι ορίζεται μια 1-1 αντιστοιχία  $\varphi : \mathcal{T}_2(P) \rightarrow \mathcal{T}(Q)$ , από όπου προκύπτει ότι  $\#\mathcal{T}_2(P) = a_{n-1}$ . Ομοίως έχουμε  $\#\mathcal{T}_{n+1}(P) = a_{n-1}$ . Τέλος, για τις υπόλοιπες τιμές  $3 \leq i \leq n$  του  $i$  και  $\tau \in \mathcal{T}_i(P)$ , τα τρίγωνα του  $\tau$  εκτός του  $T_i$  σχηματίζουν

δύο τριγωνισμούς, έναν του πολυγώνου  $Q$  με κορυφές  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_i$  και έναν του πολυγώνου  $R$  με κορυφές  $\kappa_i, \kappa_{i+1}, \dots, \kappa_{n+2} = \kappa_0$ . Έτσι ορίζεται μία 1-1 αντιστοιχία  $\varphi_i : \mathcal{T}_i(P) \rightarrow \mathcal{T}(Q) \times \mathcal{T}(R)$ , όπου τα  $Q$  και  $R$  είναι κυρτά πολύγωνα με  $i$  και  $n-i+3$  κορυφές, αντίστοιχα, και συνεπώς  $\#\mathcal{T}_i(P) = a_{i-2} a_{n-i+1}$ . Από τα προηγούμενα συνάγουμε ότι  $a_n = 2a_{n-1} + \sum_{i=3}^n a_{i-2} a_{n-i+1}$  ή, ισοδύναμα,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1}, \quad (1.32)$$

όπου  $a_0 = 1$  κατά σύμβαση. Θέτοντας  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  και αναγνωρίζοντας το άθροισμα στο δεξιό μέλος της (1.32) ως το συντελεστή του  $x^{n-1}$  στην τυπική δυναμοσειρά  $F(x)^2$ , συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$F(x)^2 = \sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1} = (F(x) - 1) / x,$$

δηλαδή ότι  $xF(x)^2 - F(x) + 1 = 0$ . Με χρήση της Πρότασης 1.1.6 (α) προκύπτει εύκολα ότι η (μοναδική) λύση της εξίσωσης αυτής στο  $\mathbb{C}[[x]]$  είναι η

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (1.33)$$

Από την ισότητα  $\sqrt{1 - 4x} = \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$  και τον τύπο (1.21) για  $\alpha = 1/2$  συμπεραίνουμε ότι για  $n \geq 0$  ισχύει

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n+1} (-4)^{n+1} = (-1)^n 2^{2n+1} \frac{\frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \cdots (\frac{1}{2} - n)}{(n+1)!} \\ &= 2^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

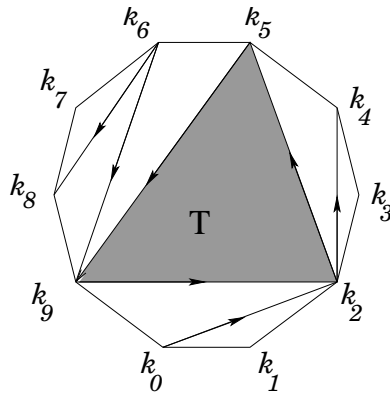
Αποδείξαμε την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 1.2.7** Το πλήθος των τριγωνισμών ενός κυρτού πολυγώνου με  $n+2$  κορυφές είναι ίσο με  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .  $\square$

Ο αριθμός  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  λέγεται  $n$ -οστός αριθμός Catalan και συχνά συμβολίζεται με  $C_n$ . Για  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  ο  $C_n$  παίρνει τις τιμές 1, 2, 5, 14 και 42, αντίστοιχα. Ο τύπος  $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  στον οποίο καταλήξαμε μπορεί να αποδειχθεί με την τεχνική της 1-1 αντιστοιχίας και μάλιστα με διάφορους τρόπους. Αξίζει τον κόπο να περιγράψουμε έναν από αυτούς. Γράφουμε πρώτα τον τύπο αυτό ισοδύναμα ως

$$na_n = \binom{2n}{n-1}.$$

Έστω  $P$  κυρτό πολύγωνο με  $n+2$  κορυφές  $k_0, k_1, \dots, k_{n+1}$  και  $\mathcal{T}(P)$  το σύνολο των τριγωνισμών του  $P$ , όπως προηγουμένως. Έστω επίσης  $A_n$  το σύνολο των ζευγών  $(\tau, T)$ , όπου  $\tau \in \mathcal{T}(P)$  και  $T$  είναι τρίγωνο που ανήκει στον  $\tau$ , και  $B_n$  το σύνολο των διανυσμάτων  $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$  με στοιχεία ακεραίους με  $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{n-1} \leq n+1$ . Έχουμε  $\#A_n = na_n$  αφού κάθε τριγωνισμός  $\tau \in \mathcal{T}(P)$  αποτελείται από  $n$  ακριβώς τρίγωνα. Επίσης, σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.3, το  $B_n$  έχει  $\binom{2n}{n-1}$  στοιχεία, όσοι είναι και οι συνδυασμοί με επανάληψη  $n-1$  αντικειμένων από  $n+2$  αντικείμενα. Αρκεί επομένως να βρούμε μία 1-1 αντιστοιχία  $\varphi: A_n \rightarrow B_n$ . Έστω  $(\tau, T) \in A_n$ . Κατευθύνουμε καθεμιά από τις διαγωνίους  $\delta$  που σχηματίζουν τον  $\tau$  έτσι ώστε το τρίγωνο  $T$  να βρίσκεται στα αριστερά μας όταν προχωρούμε από την αρχική προς την τελική κορυφή της  $\delta$  και θέτουμε  $\varphi(\tau, T) = (r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ , όπου  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{n-1}$  και  $k_{r_1}, k_{r_2}, \dots, k_{r_{n-1}}$  είναι οι αρχικές κορυφές των  $n-1$  διαγωνίων που ορίζουν τον  $\tau$ . Για παράδειγμα, για το ζεύγος του Σχήματος 1.4 έχουμε  $\varphi(\tau, T) = (0, 2, 2, 5, 6, 6, 9)$ . Αφήνεται στον αναγνώστη να αποδείξει ότι η απεικόνιση  $\varphi: A_n \rightarrow B_n$  είναι πράγματι 1-1 αντιστοιχία.



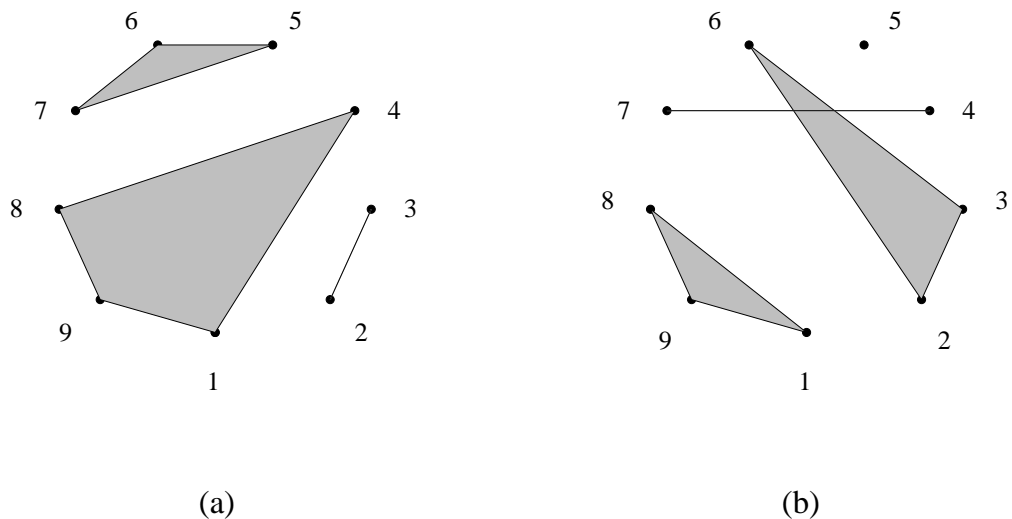
Σχήμα 1.4: Τριγωνισμός ενός δεκαγώνου με ένα καθορισμένο τρίγωνο  $T$ .

Η Πρόταση 1.2.7 δίνει μια *συνδυαστική ερμηνεία* του αριθμού Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ , δηλαδή τον εκφράζει ως το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου. Ο ίδιος αριθμός επιδέχεται πληθώρα συνδυαστικών ερμηνειών, μια από τις οποίες περιγράφουμε ευθύς αμέσως.

**Μη διασταυρούμενες διαμερίσεις.** Διαμέριση ενός συνόλου  $S$  είναι ένα σύνολο  $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  μη κενών υποσυνόλων  $B_i$  του  $S$ , τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και έχουν ένωση ίση με  $S$ . Τα σύνολα  $B_i$  λέγονται *μέρη* της  $\pi$ . Για παράδειγμα, το σύνολο  $\pi = \{\{1, 4, 7\}, \{2\}, \{3, 9\}, \{5, 6, 8\}\}$  είναι διαμέριση του

συνόλου  $[9] = \{1, 2, \dots, 9\}$  με μέρη  $\{1, 4, 7\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3, 9\}$  και  $\{5, 6, 8\}$  και γράφεται πιο σύντομα ως  $\pi = 147/2/39/568$ .

Έστω τώρα θετικός ακέραιος  $n$ . Μία διαμέριση  $\pi$  του  $S = [n]$  λέγεται *μη διασταυρούμενη* (noncrossing) αν έχει την εξής ιδιότητα: αν  $B, B'$  είναι μέρη της  $\pi$  και  $a, c \in B, b, d \in B'$  με  $a < b < c < d$ , τότε  $B = B'$ . Για παράδειγμα, η διαμέριση  $1489/23/567$  του  $[9]$  είναι μη διασταυρούμενη, ενώ η  $189/236/47/5$  δεν είναι. Οι διαμερίσεις αυτές παριστάνονται γεωμετρικά στο Σχήμα 1.5. Σε μια τέτοια παράσταση της διαμέρισης  $\pi$  του  $[n]$ , οι ακέραιοι  $1, 2, \dots, n$  παριστάνονται με κυκλική σειρά ως οι κορυφές  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$  ενός κυρτού  $n$ -γώνου στο επίπεδο. Ένα μέρος  $B$  της  $\pi$  παριστάνεται ως το κυρτό πολύγωνο  $\rho(B)$  με κορυφές τα σημεία  $\kappa_i$  για  $i \in B$ , όπου το  $\rho(B)$  είναι σημείο ή ευθύγραμμο τμήμα, αν το  $B$  έχει ένα ή δύο στοιχεία, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η διαμέριση  $\pi$  είναι μη διασταυρούμενη ακριβώς όταν τα πολύγωνα  $\rho(B)$  που παριστάνουν τα μέρη της  $\pi$  ανά δύο δεν τέμνονται. Το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  υπολογίζεται ως  $1, 2, 5, 14$  για  $n = 1, 2, 3, 4$  αντίστοιχα. Για παράδειγμα οι πέντε διαμερίσεις  $1/2/3, 12/3, 13/2, 23/1$  και  $123$  του  $\{1, 2, 3\}$  είναι όλες μη διασταυρούμενες, ενώ η μόνη διασταυρούμενη διαμέριση του  $\{1, 2, 3, 4\}$  είναι η  $13/24$ . Οδηγούμαστε στο να εικάσουμε την ακόλουθη πρόταση.



Σχήμα 1.5: (a) Η διαμέριση  $1489/23/567$ . (b) Η διαμέριση  $189/236/47/5$ .

**Πρόταση 1.2.8** Το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του συνόλου  $[n]$  είναι ίσο με τον αριθμό Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

Απόδειξη. Έστω  $\text{NC}_n$  το σύνολο των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  και  $a_n = \#\text{NC}_n$ , με  $a_0 = 1$ . Αρκεί να δείξουμε ότι το  $a_n$  ικανοποιεί τη σχέση (1.32). Έστω  $B$  το μέρος της  $\pi \in \text{NC}_n$  που περιέχει το  $n$ . Έστω  $\text{NC}_n(0)$  το σύνολο των διαμερίσεων  $\pi \in \text{NC}_n$  με  $B = \{n\}$  και για  $1 \leq i \leq n-1$ , έστω  $\text{NC}_n(i)$  το σύνολο των διαμερίσεων  $\pi \in \text{NC}_n$  για τις οποίες το  $B \setminus \{n\}$  είναι μη κενό και έχει μέγιστο στοιχείο το  $i$ . Ισχύει  $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \#\text{NC}_n(i)$  και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι  $\#\text{NC}_n(i) = a_i a_{n-i-1}$  για  $0 \leq i \leq n-1$ .

Πράγματι, για  $i = 0$  ή  $i = n-1$  έχουμε  $\#\text{NC}_n(i) = a_{n-1}$ , αφού υπάρχει η εμφανής 1-1 αντιστοιχία  $\varphi : \text{NC}_n(i) \rightarrow \text{NC}_{n-1}$ , όπου  $\varphi(\pi)$  είναι η διαμέριση του  $[n-1]$  που προκύπτει από την  $\pi$  διαγράφοντας το μέρος  $B = \{n\}$ , αν  $i = 0$ , ή το  $n$  από το μέρος  $B$ , αν  $i = n-1$ . Έστω τώρα  $1 \leq i \leq n-2$  και  $\pi \in \text{NC}_n(i)$ , οπότε  $i, n \in B$ . Από την επιλογή του  $i$  και την υπόθεση ότι η  $\pi$  είναι μη διασταυρούμενη έπεται ότι δεν υπάρχουν  $a, c \in [n]$  με  $a < i < c < n$  που ανήκουν στο ίδιο μέρος της  $\pi$ . Συνεπώς, διαγράφοντας το  $n$  από την  $\pi$  προκύπτει μία μη διασταυρούμενη διαμέριση  $\pi_1$  του συνόλου  $[i]$  και μία μη διασταυρούμενη διαμέριση  $\pi_2$  του  $\{i+1, \dots, n-1\}$ . Για παράδειγμα, για  $n = 9$  και  $\pi = 159/234/68/7$ , οπότε  $B = \{1, 5, 9\}$  και  $i = 5$ , έχουμε  $\pi_1 = 15/234$  και  $\pi_2 = 68/7$ . Θέτοντας  $\varphi_i(\pi) = (\pi_1, \pi_2)$  ορίζεται μια απεικόνιση  $\varphi_i : \text{NC}_n(i) \rightarrow \text{NC}_i \times \text{NC}_{i+1, n}$ , όπου  $\text{NC}_{i+1, n}$  είναι το σύνολο των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $\{i+1, \dots, n\}$ . Αφήνεται στον αναγνώστη να βεβαιωθεί ότι η  $\varphi_i$  είναι 1-1 αντιστοιχία. Προφανώς  $\#\text{NC}_{i+1, n} = \#\text{NC}_{n-i-1} = a_{n-i-1}$ , οπότε  $\#\text{NC}_n(i) = a_i a_{n-i-1}$ , όπως το θέλαμε.  $\square$

## 1.3 Άλλες αρχές απαρίθμησης

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε σύντομα τρεις ακόμη θεμελιώδεις αρχές απαρίθμησης: την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού, την αρχή της αυτοαντίστροφης απεικόνισης και το Λήμμα του κύκλου.

### 1.3.1 Η αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού

Ακρογωνιαίο λίθο της απαριθμητικής συνδυαστικής αποτελεί η αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού. Γενικεύοντας την προσθετική αρχή της Πρότασης 1.1.2 (α), η αρχή αυτή αφορά το πλήθος των στοιχείων της ένωσης  $n$  υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου τα οποία μπορούν να τέμνονται μεταξύ τους με τυχαίο τρόπο. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μόνο τη διατύπωση και την απόδειξη αυτής της αρχής. Μια εφαρμογή της δίνεται στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.6.

**Θεώρημα 1.3.1** (Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού) Για υποσύνολα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  πεπερασμένου συνόλου  $S$  ισχύει

$$\# \left( S - \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{\#I} \# \bigcap_{i \in I} A_i, \quad (1.34)$$

όπου έχουμε  $\bigcap_{i \in I} A_i = S$  για  $I = \emptyset$  κατά σύμβαση.

Το άθροισμα στο δεξιό μέλος της (1.34) έχει ακριβώς  $2^n$  όρους, όσα είναι και τα υποσύνολα του  $[n]$ . Δύο από τους όρους αυτούς είναι ο  $\#S$  (προκύπτει για  $I = \emptyset$ ) και ο  $(-1)^n \# \bigcap_{i=1}^n A_i$  (προκύπτει για  $I = [n]$ ).

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 που θα δώσουμε βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα, το οποίο θα γενικεύσουμε με το Θεώρημα αντιστροφής του Möbius στο δεύτερο τόμο. Για την αβελιανή ομάδα  $R$  που εμφανίζεται στο λήμμα αυτό συνήθως αρκεί να θεωρήσει κανείς ότι  $R = \mathbb{C}$ , ή ότι το  $R$  είναι κάποιος πολυωνυμικός δακτύλιος, όπως ο  $\mathbb{C}[x]$ . Συμβολίζουμε με  $2^{[n]}$  το σύνολο των υποσυνόλων του  $[n]$ .

**Λήμμα 1.3.1** Για θετικό ακέραιο  $n$ , προσθετική αβελιανή ομάδα  $R$  και συναρτήσεις  $f, g : 2^{[n]} \rightarrow R$  ισχύει

$$f(x) = \sum_{x \subseteq y \subseteq [n]} g(y) \quad (1.35)$$

για κάθε  $x \subseteq [n]$  αν και μόνο αν

$$g(x) = \sum_{x \subseteq y \subseteq [n]} (-1)^{\#(y \setminus x)} f(y) \quad (1.36)$$

για κάθε  $x \subseteq [n]$ .

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η (1.35) για κάθε  $x \subseteq [n]$ . Για δοσμένο  $x \subseteq [n]$  έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{x \subseteq y \subseteq [n]} (-1)^{\#(y \setminus x)} f(y) &= \sum_{x \subseteq y \subseteq [n]} (-1)^{\#(y \setminus x)} \sum_{y \subseteq z \subseteq [n]} g(z) \\ &= \sum_{x \subseteq z \subseteq [n]} g(z) \sum_{x \subseteq y \subseteq z} (-1)^{\#(y \setminus x)} \\ &= \sum_{x \subseteq z \subseteq [n]} g(z) \sum_{u \subseteq z \setminus x} (-1)^{\#u} \\ &= g(x) \end{aligned}$$



διότι, θέτοντας  $m = \#(z \setminus x)$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{u \subseteq z \setminus x} (-1)^{\#u} &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} = \begin{cases} 1, & \text{αν } m = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{αν } z = x \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει η (1.36) για κάθε  $x \subseteq [n]$ . Η απόδειξη του αντίστροφου είναι παρόμοια.  $\square$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1.* Για  $I \subseteq [n]$  θέτουμε

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i, \quad B_I = A_I \cap \left( \bigcap_{j \in [n] \setminus I} (S \setminus A_j) \right),$$

όπου  $A_\emptyset = S$  κατά σύμβαση, οπότε  $B_I$  είναι το σύνολο των στοιχείων  $x$  του  $S$  με την ιδιότητα  $x \in A_i \Leftrightarrow i \in I$ . Θέτουμε επίσης  $f(I) = \#A_I$  και  $g(I) = \#B_I$ . Παρατηρούμε ότι κάθε  $x \in S$  ανήκει σε ακριβώς ένα από τα σύνολα  $B_I$ , συγκεκριμένα σε εκείνο για το οποίο  $I = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ . Κατά συνέπεια, το  $S$  είναι η ξένη ένωση των συνόλων  $B_I$  για  $I \subseteq [n]$ . Γενικότερα, το  $A_I$  είναι η ξένη ένωση των συνόλων  $B_J$  για  $J \supseteq I$ . Επομένως, από την προσθετική αρχή της Πρότασης 1.1.2 (α) έχουμε

$$f(I) = \sum_{I \subseteq J \subseteq [n]} g(J)$$

για  $I \subseteq [n]$ . Από το Λήμμα 1.3.1 προκύπτει ότι

$$g(I) = \sum_{I \subseteq J \subseteq [n]} (-1)^{\#(J \setminus I)} f(J)$$

για  $I \subseteq [n]$ . Θέτοντας  $I = \emptyset$  στην προηγούμενη ισότητα και παρατηρώντας ότι  $g(\emptyset) = \#(S - \cup_{i=1}^n A_i)$ , έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

### 1.3.2 Η αρχή της αυτοαντίστροφης απεικόνισης

Όπως η τεχνική της 1-1 αντιστοιχίας, έτσι και η αρχή της αυτοαντίστροφης απεικόνισης είναι εξαιρετικά χρήσιμη, αν και βασίζεται σε μια απλούστατη παρατήρηση. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την αρχή αυτή θα εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε συνδυαστικά την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}. \quad (1.37)$$

Συμβολίζουμε με  $A(n, m)$  το σύνολο των υποσυνόλων του  $[n]$  που έχουν πληθάρημο μικρότερο ή ίσο του  $m$  και γράφουμε την (1.37) στη μορφή

$$\sum_{S \in A(n, m)} (-1)^{\#S} = (-1)^m \binom{n-1}{m}. \quad (1.38)$$

Για να αποδείξουμε την ταυτότητα αυτή, επιχειρούμε να ζευγαρώσουμε κάθε όρο ίσο με  $(-1)^{m-1}$  στο άθροισμα του αριστερού μέλους της (1.38) με έναν από τους όρους ίσους με  $(-1)^m$ . Για το λόγο αυτό θεωρούμε την απεικόνιση  $\tau : A(n, m) \rightarrow A(n, m)$  με

$$\tau(S) = \begin{cases} S \setminus \{n\}, & \text{αν } n \in S \\ S \cup \{n\}, & \text{αν } n \notin S \text{ και } \#S < m \\ S, & \text{αν } n \notin S \text{ και } \#S = m \end{cases}$$

για κάθε  $S \in A(n, m)$ . Παρατηρούμε ότι η  $\tau$  είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, με αντίστροφη τον εαυτό της (μια απεικόνιση με την ιδιότητα αυτή λέγεται *αυτοαντίστροφη*), δηλαδή ότι ισχύει  $\tau(\tau(S)) = S$  για κάθε  $S \in A(n, m)$ . Παρατηρούμε επίσης ότι

$$(-1)^{\#S} + (-1)^{\#\tau(S)} = 0$$

αν  $\tau(S) \neq S$ . Έτσι, οι όροι του αριστερού μέλους της (1.38) με  $\tau(S) \neq S$  έχουν ανά δύο άθροισμα μηδέν και συνεπώς ισχύει

$$\sum_{S \in A(n, m)} (-1)^{\#S} = \sum_{S \in A(n, m): \tau(S)=S} (-1)^{\#S}.$$

Το ζητούμενο έπεται αφού υπάρχουν ακριβώς  $\binom{n-1}{m}$  σύνολα  $S \in A(n, m)$  με  $\tau(S) = S$  και καθένα από αυτά έχει πληθάρημο ίσο με  $m$ . Η μέθοδος της προηγούμενης απόδειξης εκφράζεται από την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 1.3.1** Έστω πεπερασμένο σύνολο  $S$ , προσθετική αβελιανή ομάδα  $R$  και απεικονίσεις  $w : S \rightarrow R$  και  $\tau : S \rightarrow S$  ώστε να ισχύει  $\tau^2(x) = x$  για κάθε  $x \in S$ . Αν  $w(\tau(x)) = -w(x)$  για κάθε  $x \in S$  για το οποίο  $\tau(x) \neq x$ , τότε

$$\sum_{x \in S} w(x) = \sum_{x \in S: \tau(x)=x} w(x). \quad (1.39)$$

*Απόδειξη.* Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι οι όροι του αθροίσματος στο αριστερό μέλος της (1.39) οι οποίοι δεν εμφανίζονται στο άθροισμα του δεξιού μέλους της ισότητας αυτής χωρίζονται σε ζεύγη της μορφής  $\{w(x), w(\tau(x))\}$ , καθένα από τα οποία έχει άθροισμα μηδέν.  $\square$

Η αρχή της αυτοαντίστροφης απεικόνισης οφείλεται στους Garsia και Milne [7]. Εφαρμογές της δίνονται στις αποδείξεις των Προτάσεων 2.2.8 και 4.6.1.

### 1.3.3 Το Λήμμα του κύκλου

Θεωρούμε το πρόβλημα απαρίθμησης του επόμενου παραδείγματος.

**Παράδειγμα 1.3.1** Ποιο είναι το πλήθος των ακολουθιών  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n})$  μήκους  $2n$  με τις ιδιότητες:

- (i)  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  για  $1 \leq i \leq 2n$ ,
- (ii)  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_j \geq 0$  για  $1 \leq j \leq 2n$  και
- (iii)  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{2n} = 0$ ;

Για παράδειγμα, για  $n = 3$  υπάρχουν οι εξής πέντε ακολουθίες:

$$\begin{array}{ll} (1, 1, 1, -1, -1, -1) & (1, -1, 1, 1, -1, -1) \\ (1, 1, -1, 1, -1, -1) & (1, -1, 1, -1, 1, -1) \\ (1, 1, -1, -1, 1, -1) & \end{array}$$

Θέτοντας  $\varepsilon_{2n+1} = -1$ , έχουμε να απαριθμήσουμε ορισμένες ακολουθίες ακεραίων μήκους  $2n + 1$  το άθροισμα των στοιχείων των οποίων είναι ίσο με  $-1$ . Στις περιπτώσεις αυτές μπορεί να εφαρμοστεί η ακόλουθη χρήσιμη πρόταση των Dvoretzky και Motzkin [4].

**Πρόταση 1.3.2** (Λήμμα του Κύκλου) Έστω  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  ακολουθία ακεραίων με  $m \geq 2$  και  $b_1 + b_2 + \dots + b_m = -1$ . Θέτοντας  $b_{m+j} = b_j$  για  $1 \leq j \leq m$ , υπάρχει μοναδικός δείκτης  $i \in [m]$  τέτοιος ώστε να ισχύει

$$b_i + b_{i+1} + \dots + b_{i+k-1} \geq 0$$

για  $1 \leq k \leq m - 1$ .

Πριν αποδείξουμε την πρόταση αυτή, ας την εφαρμόσουμε στο πρόβλημα του Παραδείγματος 1.3.1. Έστω  $B_n$  το σύνολο των ακολουθιών  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n+1})$  μήκους  $2n + 1$  με στοιχεία  $1$  ή  $-1$ , άθροισμα στοιχείων ίσο με  $-1$  και μερικά άθροισματα  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_j \geq 0$  για  $1 \leq j \leq 2n$  (οπότε, αναγκαστικά  $\varepsilon_{2n+1} = -1$ ). Έστω επίσης  $A_n$  το σύνολο όλων των ακολουθιών μήκους  $2n + 1$  με στοιχεία  $1$  ή  $-1$  και άθροισμα στοιχείων ίσο με  $-1$ . Προφανώς ισχύει  $\#A_n = \binom{2n+1}{n}$ . Θεωρούμε τυχαίο στοιχείο  $x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n+1})$  του  $A_n$  και τις κυκλικές μετατοπίσεις αυτού, δηλαδή τις ακολουθίες της μορφής  $(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1})$  για  $1 \leq i \leq 2n+1$ . Από την Πρόταση 1.3.2 προκύπτει ότι οι ακολουθίες αυτές είναι ανά δύο διαφορετικές και ότι μεταξύ τους υπάρχει μοναδική, έστω η  $f(x)$ , η οποία ανήκει στο  $B_n$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 3$  και  $x = (1, -1, -1, 1, -1, 1, -1)$ , τότε  $f(x) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, -1)$ , με  $i = 4$ . Για την απεικόνιση  $f : A_n \rightarrow B_n$  που ορίσαμε, παρατηρούμε ότι για

κάθε  $y \in B_n$  υπάρχουν ακριβώς  $2n + 1$  στοιχεία  $x \in A_n$  με  $f(x) = y$ . Από την Πρόταση 1.1.2 (β) συμπεραίνουμε ότι

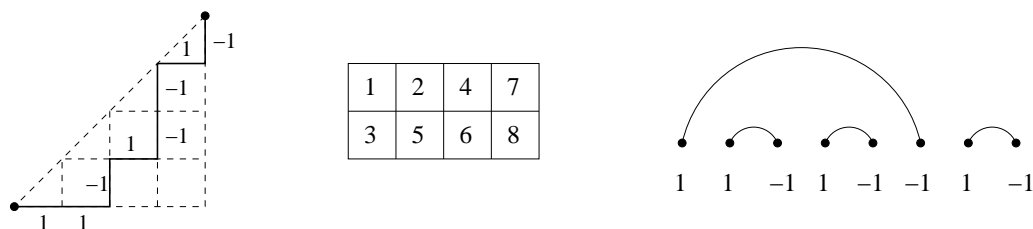
$$\#B_n = \frac{1}{2n+1} (\#A_n) = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Δηλαδή, το πλήθος των στοιχείων του  $B_n$ , άρα και το ζητούμενο πλήθος των ακολουθιών του Παραδείγματος 1.3.1, είναι ίσο με τον  $n$ στό αριθμό Catalan.  $\square$

**Πόρισμα 1.3.1** Οι ακόλουθοι ακέραιοι είναι ίσοι με τον αριθμό Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ :

- (i) Το πλήθος των μονοπατιών  $(v_0, v_1, \dots, v_{2n})$  στο ημιεπίπεδο  $x \geq y$  του  $\mathbb{R}^2$  με αρχή  $v_0 = (0, 0)$ , πέρας  $v_{2n} = (n, n)$  και βήματα  $v_j - v_{j-1} \in \{(1, 0), (0, 1)\}$  για  $1 \leq j \leq 2n$ .
- (ii) Το πλήθος των Young ταμπλώ σχήματος  $(n, n)$  (βλέπε Παράγραφο 4.1 για το σχετικό ορισμό).
- (iii) Το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του συνόλου  $[2n]$ , κάθε μέρος των οποίων έχει ακριβώς δύο στοιχεία.

*Απόδειξη.* Σε κάθε περίπτωση μπορεί εύκολα να περιγραφεί μια 1-1 αντιστοιχία του συνόλου που καλούμαστε να απαριθμήσουμε με εκείνο των ακολουθιών του Παραδείγματος 1.3.1 (οι αντιστοιχίες αυτές περιγράφονται με παράδειγμα στο Σχήμα 1.6). Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.  $\square$



Σχήμα 1.6: Αντικείμενα που αντιστοιχούν στην  $(1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1)$

*Απόδειξη της Πρότασης 1.3.2.* Ισχυριζόμαστε πρώτα ότι υπάρχει το πολύ ένας τέτοιος δείκτης  $i \in [m]$ . Πράγματι, αν δύο στοιχεία  $i < j$  του συνόλου  $[m]$  είχαν τη δοσμένη ιδιότητα, τότε θα είχαμε  $b_i + b_{i+1} + \dots + b_{j-1} \geq 0$  και  $b_j + b_{j+1} + \dots + b_{m+i-1} \geq 0$ . Αθροίζοντας τις δύο αυτές ανισότητες προκύπτει ότι  $b_1 + b_2 + \dots + b_m \geq 0$ , σε αντίθεση με την υπόθεση. Για την ύπαρξη, θέτουμε

$$b(i, j) = b_i + b_{i+1} + \dots + b_{j-1}$$

για  $i < j$  με  $1 \leq i \leq m$  και θεωρούμε το μικρότερο δυνατό άθροισμα  $b(r, s)$  αυτής της μορφής με όχι περισσότερους από  $m$  όρους, δηλαδή με  $s - r \leq m$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο ακέραιος  $s - r$  είναι ο ελάχιστος δυνατός για όλα τα ζεύγη  $(i, j)$  με  $j - i \leq m$ , όπως παραπάνω, που ελαχιστοποιούν το  $b(i, j)$ . Θα δείξουμε ότι  $b(s, t) \geq 0$  για  $s < t \leq s + m - 1$ . Πράγματι, αν  $t - r \leq m$ , τότε το ζητούμενο ισχύει αφού έχουμε  $b(r, s) \leq b(r, t) = b(r, s) + b(s, t)$  από την επιλογή του  $(r, s)$ . Αν  $t - r > m$ , τότε

$$b(s, t) = -1 - b(t - m, s) = -1 - b(r, s) + b(r, t - m) \geq 0$$

διότι  $b(r, t - m) > b(r, s)$  από την επιλογή του  $(r, s)$ . Έπεται ότι ο δείκτης  $i = s$  ή  $s - m$ , αν  $s \leq m$  ή  $s > m$ , αντίστοιχα, έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.  $\square$

## 1.4 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την Πρόταση 1.1.2 (α).
2. Για ποιες τυπικές δυναμοσειρές  $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  υπάρχει τυπική δυναμοσειρά  $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $F(0) = 0$ , τέτοια ώστε  $G(x) = \sum_{k \geq 1} (F(x))^k$ ;
3. Έστω  $(a_n)$  η ακολουθία του Παραδείγματος 1.1.7, με  $a_0 = a_1 = 1$  και  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$  για  $n \geq 2$ .

(α) Δείξτε ότι

$$a_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^i \binom{n-i}{i}$$

για  $n \in \mathbb{N}$ .

(β) Δείξτε ότι το  $a_{n+1}$  είναι ίσο με το πλήθος των ακολουθιών  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  για τις οποίες ισχύουν  $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$  για  $1 \leq i \leq n$  και  $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = 0$  για  $1 \leq i \leq n - 1$ .

4. Έστω  $m$  θετικός ακέραιος και έστω  $f(x) = (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2m})$ .

(α) Δείξτε ότι η τυπική δυναμοσειρά  $F(x) = f(x)/f(-x)$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$  και ότι έχει μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές.

(β) Περιγράψτε μια συνδυαστική ερμηνεία για το συντελεστή του  $x^n$  στην  $F(x)$ .

5. Έστω  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$  και έστω  $b_{ij}$  ο συντελεστής του  $x^i$  στην τυπική δυναμοσειρά  $(F(x))^j$ . Αν  $B_m$  είναι ο  $(m+1) \times (m+1)$  πίνακας με στοιχεία  $b_{ij}$  για  $0 \leq i, j \leq m$ , δείξτε ότι

$$\det(B_m) = a_1^{\binom{m+1}{2}}.$$

6. Έστω  $a_{nk}$  το πλήθος των διανυσμάτων  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ , όπου  $m_1, \dots, m_k$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με άθροισμα τετραγώνων ίσο με  $n$  (με  $a_{00} = 1$  και  $a_{n0} = 0$  για  $n \geq 1$ ).

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_{nk} x^n = \left( \sum_{n \geq 0} x^{n^2} \right)^k$$

για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ .

(β) Δείξτε ότι  $\det (a_{ij})_{i,j=0}^m = 1$  για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ .

7. Δείξτε ότι για  $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  ισχύουν οι συνήθεις νόμοι παραγώγισης

(α)  $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x)$ ,

(β)  $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$ ,

(γ)  $(F(G(x)))' = F'(G(x))G'(x)$ , αν η σύνθεση  $F(G(x))$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$ ,

(δ)  $(1/F(x))' = -F'(x)/F(x)^2$ , αν  $F(0) \neq 0$ ,

(ε)  $F'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ , αν  $\alpha \in \mathbb{C}$  και  $F(x) = (1+x)^\alpha$ .

Επίσης, για  $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \dots \in \mathbb{C}[[x]]$  δείξτε ότι

(στ) αν το άθροισμα  $F(x) = \sum_{k \geq 0} F_k(x)$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , τότε και το  $\sum_{k \geq 0} F'_k(x)$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$  και ισχύει  $F'(x) = \sum_{k \geq 0} F'_k(x)$ .

8. Έστω  $(a_n)$  η ακολουθία του Παραδείγματος 1.1.3, με  $a_0 = a_1 = 1$  και  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  για  $n \geq 2$ . Δείξτε ότι

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=0}^n a_i a_{n-i} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1} \right)$$

για  $n \geq 1$ .

9. Αποδείξτε την Πρόταση 1.1.6.
10. Υπολογίστε το γενικό όρο της ακολουθίας  $(a_n)$  πραγματικών αριθμών που ορίζεται θέτοντας  $a_0 = 1$  και

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k 2^{2n-2k+1}$$

για  $n \in \mathbb{N}$ .

11. Έστω  $c_0 = 1$  και

$$c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

για  $n \geq 1$ .

(α) Δείξτε ότι  $c_n = (-1)^n \binom{-3/2}{n}$ .

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το άθροισμα  $\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$ .

12. Για  $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $F(0) = 0$ , ορίζουμε τη δυναμοσειρά

$$\exp(F(x)) = e^{F(x)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(F(x))^n}{n!}. \quad (1.40)$$

Δείξτε ότι

(α) η  $\exp(F(x))$  είναι καλά ορισμένη ως στοιχείο του  $\mathbb{C}[[x]]$ ,

(β) η  $\exp(F(x))$  είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του  $\mathbb{C}[[x]]$  με αντίστροφη την  $\exp(-F(x))$ ,

(γ) ισχύει  $\exp(F(x) + G(x)) = \exp(F(x)) \cdot \exp(G(x))$  στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , όπου  $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $G(0) = 0$ ,

(δ)  $(\exp(F(x)))' = F'(x) \cdot \exp(F(x))$ ,

(ε) η  $(\exp(F(x)))^\alpha$  είναι καλά ορισμένη στο  $\mathbb{C}[[x]]$  για  $\alpha \in \mathbb{R}$  και ισχύει  $(\exp(F(x)))^\alpha = \exp(\alpha F(x))$ .

13. Για θετικούς ακεραίους  $n$  και  $k$  συμβολίζουμε με  $a(n, k)$  το πλήθος των επί απεικονίσεων  $f: [n] \rightarrow [k]$  και θέτουμε  $F_n(x) = \sum_{k=1}^n a(n, k)x^k$ .

(α) Δείξτε ότι  $F_{n+1}(x) = xF_n(x) + x(x+1)F_n'(x)$  για κάθε  $n \geq 1$ .

(β) Συνάγετε ότι κάθε ρίζα του πολυωνύμου  $F_n(x)$  είναι πραγματικός αριθμός.

14. Δείξτε ότι για  $0 \leq d \leq n$  και  $x \in \mathbb{C}$  ισχύει

$$\sum_{i=0}^d \binom{n}{i} (x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^d \binom{n-d+i-1}{i} x^{d-i}. \quad (1.41)$$

Συνάγετε ότι

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{n}{i} \binom{d-i}{d-k} = \binom{n-d+k-1}{k} \quad (1.42)$$

για  $0 \leq k \leq d \leq n$ .

15. Έστω  $c_n$  το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλέξει κανείς μία σύνθεση  $\rho$  του θετικού ακεραίου  $n$  με δύο μέρη και έπειτα να επιλέξει μία σύνθεση για κάθε μέρος της  $\rho$ .

(α) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση  $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$  και εξάγετε έναν απλό τύπο για το  $c_n$ . Δώστε μια ευθεία συνδυαστική απόδειξη του τύπου που βρήκατε για το  $c_n$ .

(β) Γενικεύστε το (α) όταν η  $\rho$  έχει δοσμένο πλήθος  $k$  μερών.

(γ) Απαντήστε στα ερωτήματα του (α) αν η  $\rho$  έχει τυχαίο πλήθος μερών.

16. (α) Έστω θετικός ακεραίος  $m$  και έστω  $c(n, m)$  το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  με μέρη μεγαλύτερα ή ίσα του  $m$ . Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} c(n, m) x^n = \frac{1-x}{1-x-x^m},$$

όπου  $c(0, m) = 1$  κατά σύμβαση.

(β) Συνάγετε ότι το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  με μέρη διάφορα του 1 είναι ίσο με τον αριθμό Fibonacci  $F_{n-1}$ . Επιπλέον, βρείτε μια 1-1 αντιστοίχια από το σύνολο των συνθέσεων του  $n$  με μέρη διάφορα του 1 στο σύνολο των συνθέσεων του  $n-2$  με μέρη ίσα με 1 ή 2.

(γ) Δείξτε ότι το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  με μέρη περιττούς ακεραίους είναι ίσο με τον αριθμό Fibonacci  $F_n$ . Επιπλέον, βρείτε μια 1-1 αντιστοίχια από το σύνολο των συνθέσεων του  $n$  με μέρη περιττούς ακεραίους στο σύνολο των συνθέσεων του  $n-1$  με μέρη ίσα με 1 ή 2.

(δ) Για  $0 \leq j \leq n$  υπολογίστε το πλήθος των συνθέσεων του  $n$ , ακριβώς  $j$  μέρη των οποίων είναι ίσα με 1.

17. Έστω  $a_n$  το πλήθος των διανυσμάτων  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ , όπου  $m_1, m_2, \dots, m_n$  είναι ακεραίοι με άθροισμα  $n$  και  $0 \leq m_i \leq 3$  για κάθε  $i$ . Δείξτε ότι

$$a_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n}{2j}.$$

18. Έστω  $n, k$  θετικοί ακεραίοι.

(α) Δείξτε ότι το άθροισμα των γινομένων  $a_1 a_2 \cdots a_k$  πάνω σε όλα τα διανύσματα  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$  με  $a_1 + \cdots + a_k = n$  είναι ίσο με  $\binom{n+k-1}{2k-1}$ .

(β) Δείξτε ότι το άθροισμα των γινομένων  $a_1(a_1-1)a_2(a_2-1)\cdots a_k(a_k-1)$  πάνω σε όλα τα διανύσματα  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$  με  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$  είναι ίσο με  $2^k \binom{n+k-1}{3k-1}$ .



(γ) Μπορείτε να διατυπώσετε και να αποδείξετε γενίκευση των (α) και (β);

19. (α) Αν

$$\sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \frac{p(x)}{(1-x)^{d+1}} \quad (1.43)$$

για κάποια συνάρτηση  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  και πολυώνυμο  $p(x)$ , υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση  $\sum_{n \geq 0} f(2n)x^n$  ως ρητή συνάρτηση του  $x$ .

(β) Έστω  $g(n)$  το πλήθος των διανυσμάτων  $(r_1, r_2, \dots, r_6)$ , όπου  $r_1, \dots, r_6$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με άθροισμα  $2n$ . Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση  $\sum_{n \geq 0} g(n)x^n$ .

(γ) Γενικότερα, αν ισχύει η (1.43) και  $m \in \mathbb{N}$ , δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} f(mn)x^n = \frac{q_m(x)}{(1-x)^{d+1}} \quad (1.44)$$

για κάποιο πολυώνυμο  $q_m(x)$  και υπολογίστε τους συντελεστές του  $q_m(x)$  ως συναρτήσεις εκείνων του  $p(x)$ . Δείξτε επίσης ότι αν ο βαθμός του  $p(x)$  δεν υπερβαίνει το  $d$ , τότε το ίδιο ισχύει για το  $q_m(x)$ .

20. Μια διαμέριση ακεραίου  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  λέγεται *αυτοσυζυγής* αν οι στήλες του διάγραμματος Young της  $\lambda$  έχουν μήκη  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ . Έστω  $c(n)$  το πλήθος των αυτοσυζυγών διαμερίσεων του ακεραίου  $n$ , όπου  $c(0) = 1$  κατά σύμβαση. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} c(n)x^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x^{2i-1}). \quad (1.45)$$

21. Δίνεται ακέραιος  $m \geq 2$ . Συμβολίζουμε με  $s(n)$  το πλήθος των διαμερίσεων του  $n$  κανένα μέρος των οποίων δεν εμφανίζεται  $m$  ή περισσότερες φορές και με  $t(n)$  το πλήθος των διαμερίσεων του  $n$  κανένα μέρος των οποίων δεν είναι πολλαπλάσιο του  $m$  (όπου  $s(0) = t(0) = 1$  κατά σύμβαση).

(α) Υπολογίστε τις γεννήτριες συναρτήσεις  $\sum_{n \geq 0} s(n)x^n$  και  $\sum_{n \geq 0} t(n)x^n$ .

(β) Δείξτε ότι ισχύει  $s(n) = t(n)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

22. Βρείτε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των διαμερίσεων του  $n$  με μέρη περιττούς ακεραίους και του συνόλου των διαμερίσεων του  $n$  με διακεκριμένα μέρη.

23. Έστω κυρτό πολύγωνο  $P$  με  $n+2$  κορυφές. Μια *πολυγωνική υποδιαίρεση* του  $P$  είναι μια υποδιαίρεσή του σε πολύγωνα, η οποία ορίζεται από διαγωνίους του

$P$  που ανά δύο δεν τέμνονται στο εσωτερικό του  $P$ . Δείξτε ότι για  $1 \leq i \leq n$ , το πλήθος των πολυγωνικών υποδιαίρέσεων του  $P$  σε  $i$  πολύγωνα (οπότε χρησιμοποιούνται  $i - 1$  διαγώνιοι) είναι ίσο με

$$\frac{1}{n+1} \binom{n-1}{i-1} \binom{n+i}{i}.$$

24. Υπολογίστε το πλήθος των διαμερίσεων  $\pi$  του συνόλου  $[n]$  με την εξής ιδιότητα: αν  $B, B'$  είναι διαφορετικά μέρη της  $\pi$  και  $a, b \in B, c, d \in B'$ , με  $a < b$  και  $c < d$ , τότε  $b < c$  ή  $d < a$ .

25. Υπολογίστε:

- (α) Το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου  $[2n]$ , κάθε μέρος των οποίων έχει ακριβώς δύο στοιχεία.
- (β) Το πλήθος των ζευγών  $(w, \pi)$ , όπου  $w = (w_1, \dots, w_{2n})$  είναι αναδιάταξη του  $[2n]$  και  $\pi$  είναι διαμέριση του  $[2n]$  σε δισύνολα, όπως στο (α), και επιπλέον ισχύουν τα εξής: (i) η διαμέριση  $\{\{i, j\} : \{w_i, w_j\} \in \pi\}$  του  $[2n]$  είναι μη διασταυρούμενη, (ii) αν  $i < j$  και  $\{w_i, w_j\} \in \pi$ , τότε  $w_i < w_j$  και (iii) αν  $k < i < j < \ell$  και  $\{w_i, w_j\} \in \pi, \{w_k, w_\ell\} \in \pi$ , τότε  $w_j < w_\ell$ .

26. (α) Δείξτε ότι το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  είναι ίσο με  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  χωρίς χρήση της αναγωγικής σχέσης (1.32).
- (β) Δείξτε ότι το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  με  $k$  μέρη είναι ίσο με  $\frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k-1}$ .
- (γ) Έστω διαμέριση  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  του  $n$ . Δείξτε ότι το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  τα μέρη των οποίων έχουν πληθάρητους  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  είναι ίσο με

$$\frac{n!}{m_1! \cdots m_n! (n-r+1)!},$$

όπου  $m_i$  είναι το πλήθος των μερών της  $\lambda$  ίσων με  $i$ .

- (δ) Βρείτε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  και του συνόλου των τριγωνισμών ενός κυρτού πολυγώνου με  $n + 2$  κορυφές.

27. Μία διαμέριση  $\pi$  του  $[n]$  λέγεται *μη εμφωλευμένη* (nonnesting) αν έχει την εξής ιδιότητα: αν  $B, B'$  είναι διακεκριμένα μέρη της  $\pi$  και  $a, e \in B, b, d \in B'$  με  $a < b < d < e$ , τότε υπάρχει  $c \in B$  με  $b < c < d$ .

- (α) Δείξτε ότι το πλήθος των μη εμφωλευμένων διαμερίσεων του  $[n]$  είναι ίσο με τον αριθμό Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

- (β) Δείξτε ότι το πλήθος των μη εμφωλευμένων διαμερίσεων του  $[n]$  με  $k$  μέρη είναι ίσο με  $\frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k-1}$ .
- (γ) Δείξτε ότι το πλήθος των μη εμφωλευμένων διαμερίσεων του  $[n]$  τα μέρη των οποίων έχουν δοσμένους πληθάρθμους  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  είναι ίσο με το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  με την ίδια ιδιότητα.
28. (α) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς  $(n+1)^{n-1}$  ακολουθίες  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  στοιχείων του  $[n]$  με την εξής ιδιότητα: για κάθε  $1 \leq i \leq n$  οι ακέραιοι  $1, 2, \dots, i$  εμφανίζονται στην  $a$  συνολικά τουλάχιστον  $i$  φορές.
- (β) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς  $(n-1)^{n-1}$  ακολουθίες  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  στοιχείων του  $[n]$  με την εξής ιδιότητα: για κάθε  $1 \leq i \leq n-1$  οι ακέραιοι  $1, 2, \dots, i$  εμφανίζονται στην  $a$  συνολικά τουλάχιστον  $i+1$  φορές.
29. Έστω  $\mathcal{B}$  το σύνολο των ακολουθιών  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  ακεραίων τυχαίου μήκους με τις ιδιότητες  $b_1 + \dots + b_m = -1$  και  $b_1 + \dots + b_{r-1} \geq 0$  για  $1 \leq r \leq m-1$  και έστω  $k$  θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  ακεραίων με  $b_1 + \dots + b_m = -k$  και  $b_i \geq -1$  για κάθε  $i$ , υπάρχει μοναδική ακολουθία δεικτών  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ , τέτοια ώστε οι ακολουθίες  $(b_{i_j}, b_{i_j+1}, \dots, b_{i_{j+1}-1})$  για  $1 \leq j \leq k-1$  και  $(b_{i_k}, \dots, b_m, b_1, \dots, b_{i_1-1})$  να ανήκουν στο  $\mathcal{B}$ .

## Υποδείξεις - Λύσεις

1. Για  $1 \leq i \leq n$  έστω  $m_i = \#A_i$ , οπότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f_i : A_i \rightarrow [m_i]$ . Δείξτε ότι η απεικόνιση  $f : \cup_{i=1}^n A_i \rightarrow [m_1 + m_2 + \dots + m_n]$  με  $f(x) = f_1(x)$  αν  $x \in A_1$  και  $f(x) = m_1 + \dots + m_{i-1} + f_i(x)$  αν  $x \in A_i$  με  $i \geq 2$ , είναι καλά ορισμένη και αμφιμονοσήμαντη και συμπεράνετε το ζητούμενο.
2. Παρατηρήστε πρώτα ότι θα πρέπει  $G(0) = 0$ . Αντιστρόφως, αν  $G(0) = 0$ , χρησιμοποιήστε την Πρόταση 1.1.5 (α) για να δείξετε ότι η μοναδική  $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με τις δοσμένες ιδιότητες είναι η  $F(x) = G(x)/(1 + G(x)) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} (G(x))^k$ .
3. Για το (α) χρησιμοποιήστε τη σχέση (1.10) για τη γεννήτρια συνάρτηση της  $(a_n)$  και εργασθείτε όπως στην απόδειξη της (1.6) στο τέλος της Παραγράφου 1.2.2. Για το (β) διακρίνετε τις περιπτώσεις  $\varepsilon_n = 0$  και  $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$  για να δείξετε ότι το πλήθος  $b_n$  των ακολουθιών αυτών επαληθεύει τον αναγωγικό τύπο  $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$ , με  $b_0 = 1$  και  $b_1 = 3$ .
4. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{2m})}{(1-x)(1+x^2)(1-x^3)\cdots(1+x^{2m})} = \frac{(1+x)(1+x^3)\cdots(1+x^{2m-1})}{(1-x)(1-x^3)\cdots(1-x^{2m-1})} \\ &= \prod_{i=1}^m (1+x^{2i-1}) \left( \sum_{k \geq 0} x^k \right) \left( \sum_{k \geq 0} x^{3k} \right) \cdots \left( \sum_{k \geq 0} x^{(2m-1)k} \right), \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το (α). Για το (β) συνάγετε π.χ. ότι ο συντελεστής του  $x^n$  στην  $F(x)$  είναι ίσος με το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών  $(\lambda, \mu)$ , όπου  $\lambda$  και  $\mu$  είναι διαμερίσεις ακεραίων τέτοιες ώστε τα μέρη της  $\lambda$  είναι διακεκριμένοι περιττοί ακέραιοι  $\leq 2m-1$ , τα μέρη της  $\mu$  είναι περιττοί ακέραιοι  $\leq 2m-1$  και  $|\lambda| + |\mu| = n$ .

5. Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει αν  $a_0 = 0$ , αφού τότε ο πίνακας  $B_m$  είναι κάτω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία ίσα με  $1, a_1, a_1^2, \dots, a_1^m$ . Για τη γενική περίπτωση θέτουμε  $F(x) = a_0 + G(x)$ , οπότε η  $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  έχει σταθερό όρο ίσο με 0, και  $c_{ij} = [x^i] G(x)^j$ . Από τις ισότητες

$$\begin{aligned} b_{ij} &= [x^i] F(x)^j = [x^i] (a_0 + G(x))^j = [x^i] \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} a_0^{j-k} G(x)^k \\ &= \sum_{k=0}^j c_{ik} \binom{j}{k} a_0^{j-k} \end{aligned}$$

προκύπτει ότι  $B_m = C_m D_m$ , όπου  $C_m$  είναι ο  $(m+1) \times (m+1)$  πίνακας με στοιχεία  $c_{ij}$  για  $0 \leq i, j \leq m$  και  $D_m$  είναι άνω τριγωνικός  $(m+1) \times (m+1)$  πίνακας με διαγώνια στοιχεία ίσα με 1. Συμπεραίνουμε ότι  $\det(B_m) = \det(C_m)$ , οπότε το ζητούμενο προκύπτει από την ειδική περίπτωση  $a_0 = 0$ .

6. Για το (α) παρατηρήστε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_{nk} x^n = \sum_{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}} x^{m_1^2 + m_1^2 + \dots + m_k^2}$$

και παραγοντοποιήστε το δεξιό μέλος. Με δεδομένο το (α), το (β) προκύπτει εφαρμόζοντας την Άσκηση 5 στην  $F(x) = \sum_{n \geq 0} x^{n^2}$ .

7. Για τα (α)–(γ) χρησιμοποιήστε απευθείας υπολογισμούς, ή το γεγονός ότι οι νόμοι αυτοί ισχύουν για πολυώνυμα. Για το (δ) υποθέστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $F(x) = 1 - H(x)$ , όπου  $H(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $H(0) = 0$ , και χρησιμοποιήστε τον τύπο της Πρότασης 1.1.5 (α) για την αντίστροφη της  $F(x)$ , καθώς και το (στ) (εύκολο). Για το (ε) χρησιμοποιήστε την ταυτότητα  $n \binom{\alpha}{n} = \alpha \binom{\alpha-1}{n-1}$ , όπου  $n \geq 1$ .

8. Παραγωγίστε τη σχέση (1.5).

9. Η απόδειξη της Πρότασης 1.1.6 που θα περιγράψουμε δίνεται ως δείγμα για το πώς κανόνες για να χειριζόμαστε τυπικές δυναμοσειρές μπορούν να προκύψουν σχετικά εύκολα από αντίστοιχους κανόνες που ισχύουν για τις δυναμοσειρές του απειροστικού λογισμού (μια πιο ευθεία απόδειξη είναι ασφαλώς δυνατή). Θα θεωρήσουμε γνωστό από τον απειροστικό λογισμό το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 1.4.1** (α) Αν για κάποιο  $\epsilon > 0$  οι δυναμοσειρές  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  και  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  συγκλίνουν και ισχύει  $f(x) = g(x)$  για  $|x| < \epsilon$ , τότε  $a_n = b_n$  για κάθε  $n$ .

(β) Για  $\alpha \in \mathbb{C}$ , η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$  συγκλίνει για κάθε  $x \in \mathbb{C}$  με  $|x| < 1$  και ισχύει  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ .

(γ) Αν για κάποιο  $\epsilon > 0$  οι δυναμοσειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  και  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  συγκλίνουν για  $|x| < \epsilon$  και η ακολουθία  $(c_n)$  ορίζεται από την (1.14), τότε η  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  συγκλίνει για  $|x| < \epsilon$  και ισχύει  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$  για  $|x| < \epsilon$ .

Για το (α) παρατηρούμε ότι

$$(1 + F(x))^{\alpha+\beta} = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha+\beta}{n} F(x)^n$$

και ότι

$$\begin{aligned} (1 + F(x))^\alpha (1 + F(x))^\beta &= \left( \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} F(x)^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} \binom{\beta}{n} F(x)^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} \right) F(x)^n. \end{aligned}$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι για  $n \geq 0$  ισχύει

$$\binom{\alpha + \beta}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k}. \quad (1.46)$$

Για  $x \in \mathbb{C}$  με  $|x| < 1$ , γνωρίζουμε ότι  $(1+x)^{\alpha+\beta} = (1+x)^\alpha (1+x)^\beta$ . Χρησιμοποιώντας τα μέρη (β) και (γ) του Λήμματος 1.4.1, μπορούμε να γράψουμε αυτή την ισότητα ως ισότητα μεταξύ δύο δυναμοσειρών. Η (1.46) προκύπτει εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^n$ , σύμφωνα με το μέρος (α) του ίδιου λήμματος. Εργαζόμενοι ομοίως, για το (β) χρησιμοποιούμε τις ισότητες

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n &= (1+x)^{\alpha+\beta} = ((1+x)^\alpha)^\beta \\ &= \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \binom{\alpha}{k} x^k \right)^\beta \\ &= \sum_{l \geq 0} \binom{\beta}{l} \left( \sum_{k \geq 1} \binom{\alpha}{k} x^k \right)^l \end{aligned}$$

για  $x \in \mathbb{C}$  με  $|x| < \epsilon$  και για το (γ) την ισότητα

$$(1+x)^\alpha (1+y)^\alpha = (1+x+y+xy)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} (x+y+xy)^n$$

καθώς και το ανάλογο του Λήμματος 1.4.1 (α) για δυναμοσειρές σε δύο μεταβλητές  $x$  και  $y$ . Οι λεπτομέρειες παραλείπονται. Μια αλγεβροσυνδυαστική απόδειξη της (1.46) μπορεί να δοθεί ως εξής. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ , τότε η (1.46) προκύπτει απαριθμώντας με δύο τρόπους τα  $n$ -υποσύνολα της ένωσης δύο ξένων συνόλων με πληθάρητους  $\alpha$  και  $\beta$ . Αφού τα δύο μέλη της (1.46) είναι πολυώνυμα στα  $\alpha$  και  $\beta$  (με συντελεστές π.χ. από το σώμα  $\mathbb{C}$ ), η ισότητα ισχύει σαν ταυτότητα στο δακτύλιο  $\mathbb{C}[x, y]$  και συνεπώς για τυχαίες τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

10.

11. Για το (α) παρατηρούμε ότι

$$c_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) = (-1)^n \binom{-3/2}{n}.$$

Για το (β), από την (1.21) προκύπτει ότι  $\sum_{n \geq 0} c_n x^n = (1-x)^{-3/2}$  και συνεπώς ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} &= [x^n] \left( \sum_{n \geq 0} c_n x^n \right)^2 = [x^n] (1-x)^{-3} \\ &= (-1)^n \binom{-3}{n} = (n+1)(n+2)/2. \end{aligned}$$

12. Για το (α) χρησιμοποιήστε την Πρόταση 1.1.5 (β). Το (β) προκύπτει από το (γ). Για το (γ) υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \exp(F(x) + G(x)) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(F(x) + G(x))^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F(x)^k G(x)^{n-k} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} F(x)^k G(x)^{n-k} = \sum_{k, l \geq 0} \frac{F(x)^k}{k!} \frac{G(x)^l}{l!} \\
 &= \left( \sum_{k \geq 0} \frac{F(x)^k}{k!} \right) \left( \sum_{l \geq 0} \frac{G(x)^l}{l!} \right) \\
 &= \exp(F(x)) \cdot \exp(G(x)).
 \end{aligned}$$

Για το (δ) χρησιμοποιήστε ένα από τα ερωτήματα (γ) ή (στ) της Άσκησης 7. Για το (ε) μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $F(x) = x$ . Από την Πρόταση 1.1.5 (β) προκύπτει ότι η

$$\begin{aligned}
 (\exp(x))^\alpha &= (e^x)^\alpha = (1 + (e^x - 1))^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} (e^x - 1)^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} \left( x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^k
 \end{aligned}$$

ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , όπου έχουμε επίσης

$$\exp(\alpha x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n x^n}{n!}.$$

Μένει να δείξουμε ότι  $[x^n](\exp(x))^\alpha = \alpha^n/n!$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Κατά το πρότυπο της λύσης της Άσκησης 9, ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι ο εξής. Γνωρίζουμε ότι  $\exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$  για  $x \in \mathbb{R}$  και ότι υπάρχει  $\epsilon > 0$  τέτοιο ώστε  $|e^x - 1| < 1$  για  $|x| < \epsilon$ . Από αυτά συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n x^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} (e^x - 1)^k \quad (1.47)$$

για  $|x| < \epsilon$ , όπου η σύγκλιση και στα δύο μέλη είναι απόλυτη και ομοιόμορφη. Για  $n \in \mathbb{N}$ , ας συμβολίσουμε με  $\mathcal{D}^n f(x)$  την τιμή στο μηδέν της  $n$ -στής παραγώγου μιας απείρως παραγωγίσιμης στο  $x = 0$  συνάρτησης  $f(x)$ . Εφαρμόζοντας τη  $\mathcal{D}^n$  στα δύο μέλη της (1.47) προκύπτει ότι

$$\alpha^n = \mathcal{D}^n \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} (e^x - 1)^k = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} \mathcal{D}^n (e^x - 1)^k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \mathcal{D}^n (e^x - 1)^k = \mathcal{D}^n \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} (e^x - 1)^k \\
&= n! [x^n] \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} (e^x - 1)^k \\
&= n! [x^n] \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} (e^x - 1)^k = n! [x^n] (\exp(x))^\alpha
\end{aligned}$$

και συνεπώς το ζητούμενο.

13.

14. Αφού τα δύο μέλη της (1.41) είναι πολυώνυμα στο  $x$ , αρκεί να αποδείξει κανείς την ισότητα αυτή για θετικές ακέραιες τιμές του  $x$ . Θεωρήστε λοιπόν ότι ο  $x$  είναι θετικός ακέραιος και απαριθμήστε με δύο τρόπους το σύνολο των ζευγών  $(S, f)$ , όπου  $S$  είναι  $d$ -υποσύνολο του  $[n]$  και  $f : S \rightarrow [x]$  είναι απεικόνιση για την οποία για κάθε  $j \in S$  ισχύει  $f(j) \neq x \Rightarrow [j-1] \subseteq S$ . Πιο συγκεκριμένα, για το αριστερό μέλος επιλέξτε πρώτα τα στοιχεία (έστω  $i$  σε πλήθος)  $j \in S$  για τα οποία  $f(j) = x$  με  $\binom{n}{i}$  τρόπους και έπειτα τα υπόλοιπα στοιχεία του  $S$  και τιμές της  $f$  με  $(x-1)^{d-i}$  τρόπους. Για το δεξιό μέλος, επιλέξτε πρώτα το ελάχιστο  $0 \leq i \leq d$  με την ιδιότητα  $[d-i] \subseteq S$  και τις αντίστοιχες τιμές της  $f$  με  $x^{d-i}$  τρόπους και έπειτα τα υπόλοιπα στοιχεία του  $S$  και τιμές της  $f$  (αναγκαστικά ίσες με  $x$ ) με  $\binom{n-d+i-1}{i}$  τρόπους. Για την (1.42) εξισώστε τους συντελεστές του  $x^{d-k}$  στα δύο μέλη της (1.41).

15. Για το (α) εφαρμόστε την Πρόταση 1.1.3 (β) όταν  $a_n = b_n = 2^{n-1}$  είναι το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  και συμπεράνετε ότι  $\sum_{n \geq 0} c_n x^n = F(x)^2$ , όπου  $F(x) = x/(1-2x)$ . Συνάγετε ότι  $c_n = (n-1)2^{n-2}$  για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ . Το τελευταίο ερώτημα του (α) αφήνεται στον αναγνώστη. Για τη γενίκευση του (β) οι αντίστοιχες απαντήσεις είναι οι  $F(x)^k = x^k/(1-2x)^k$  και  $\binom{n-1}{k-1} 2^{n-k}$ . Για το (γ) η γεννήτρια συνάρτηση είναι η

$$\sum_{k \geq 1} F(x)^k = \frac{F(x)}{1-F(x)} = \frac{x}{1-3x}$$

και το ζητούμενο πλήθος ίσο με  $3^{n-1}$ .

16. Για το (α) εργαστείτε όπως στην (1.29) και δείξτε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} c(n, m) x^n &= \sum_{k \geq 0} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_k \geq m} x^{r_1 + r_2 + \dots + r_k} \\
&= \sum_{k \geq 0} (x^m + x^{m+1} + \dots)^k = \frac{1}{1 - x^m/(1-x)}.
\end{aligned}$$

Για  $m = 2$  προκύπτει το (β). Μια 1-1 αντιστοιχία με τις ζητούμενες ιδιότητες μπορεί να ορισθεί ξεκινώντας από μια σύνθεση  $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$  του  $n$  με μέρη μεγαλύτερα του 1, αντικαθιστώντας κάθε μέρος  $r_i \geq 3$  με τη σύνθεση του  $r_i$  της μορφής  $\rho_i =$



$(2, 1, \dots, 1)$  και διαγράφοντας το πρώτο μέρος της  $\rho_1$  (οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη). Για παράδειγμα, από τη σύνθεση  $(3, 2, 4, 3)$  του 12 προκύπτει με αυτόν τον τρόπο η σύνθεση  $(1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)$  του 10. Για το (γ) εργαστείτε όπως στο (α) και δείξτε ότι αν  $c(n)$  είναι το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  με μέρη περιττούς ακεραίους, τότε

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} c(n)x^n &= \sum_{k \geq 0} (x + x^3 + x^5 + \dots)^k = \frac{1}{1 - x/(1 - x^2)} \\ &= \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2} = 1 + x \sum_{n \geq 1} F_n x^{n-1}, \end{aligned}$$

οπότε  $c(n) = F_n$ . Μια 1-1 αντιστοιχία με τις ζητούμενες ιδιότητες μπορεί να οριστεί ξεκινώντας από μια σύνθεση  $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$  του  $n$  με μέρη περιττούς ακεραίους, αντικαθιστώντας κάθε μέρος  $r_i$  με τη σύνθεση του  $r_i$  της μορφής  $\rho_i = (2, \dots, 2, 1)$  και διαγράφοντας το τελευταίο μέρος της  $\rho_k$  (οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη). Για παράδειγμα, από τη σύνθεση  $(3, 1, 5, 3)$  του 12 προκύπτει με αυτόν τον τρόπο η σύνθεση  $(2, 1, 1, 2, 2, 1, 2)$  του 11. Για το (δ), δείξτε ότι το ζητούμενο πλήθος συνθέσεων είναι ίσο με το άθροισμα

$$\sum_{k=j}^{\lfloor (n-j)/2 \rfloor} \binom{k}{j} \binom{n-k-1}{k-j-1}$$

για  $0 \leq j < n$ , υπολογίζοντας το πλήθος εκείνων των συνθέσεων με δοσμένο πλήθος μερών  $k$ .

17. Παρατηρήστε ότι ο ακεραίος  $a_n$  είναι ίσος με το συντελεστή του  $x^n$  στο πολυώνυμο  $(1 + x + x^2 + x^3)^n$ . Πώς παραγοντοποιείται το πολυώνυμο αυτό;
18. Χρησιμοποιώντας το λογισμό των τυπικών δυναμοσειρών, εργαστείτε ως εξής. Θεωρήστε την ταυτότητα

$$\sum_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} = \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_k)}. \quad (1.48)$$

Παραγωγίστε ως προς  $x_i$  για κάθε  $i$  και πολλαπλασιάστε με  $x_1 x_2 \dots x_k$  για να δείξετε ότι

$$\sum_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_k x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} = \frac{x_1 x_2 \dots x_k}{(1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2 \dots (1 - x_k)^2}. \quad (1.49)$$

Θέστε  $x_1 = \dots = x_k = x$  στην (1.49) και εξισώστε τους συντελεστές του  $x^n$  στα δύο μέλη της ισότητας που προκύπτει για να καταλήξετε στο ζητούμενο του (α). Για το (β) εργαστείτε παρόμοια, παραγωγίζοντας δύο φορές την (1.48). Χρησιμοποιώντας μόνο τις βασικές αρχές απαρίθμησης, δώστε μια διαφορετική λύση ως εξής. Για το (α) παρατηρήστε πρώτα ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι ίσο με το πλήθος των ζευγών  $(\pi, f)$ , όπου  $\pi$  είναι διαμέριση του συνόλου  $[n]$  με  $k$  μέρη της μορφής  $\{a, a + 1, \dots, b\}$

και  $f$  είναι μια επιλογή ενός στοιχείου από καθένα από τα  $k$  μέρη της  $\pi$ . Έπειτα περιγράψτε μια 1-1 αντιστοιχία του συνόλου των ζευγών αυτών με το σύνολο των  $(2k-1)$ -υποσυνόλων του  $[n+k-1]$ . Εργαστείτε παρόμοια για το  $(\beta)$ , αντικαθιστώντας την  $f$  με την επιλογή ενός ζεύγους στοιχείων από καθένα από τα  $k$  μέρη της  $\pi$ .

19. Για το  $(\alpha)$ , θέστε  $-x$  αντί για το  $x$  στην (1.43) και προσθέστε κατά μέλη για να συμπεράνετε ότι

$$\sum_{n \geq 0} f(2n)x^n = \frac{p(\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^{d+1} + p(-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})^{d+1}}{2 \cdot (1-x)^{d+1}}.$$

Για το  $(\beta)$  εφαρμόστε το  $(\alpha)$ . Απάντηση:  $(1+15x+15x^2+x^3)/(1-x)^6$ . Για το  $(\gamma)$ , θέτοντας

$$E_m \left( \sum_{n \geq 0} g(n)x^n \right) = \sum_{n \geq 0} g(mn)x^n,$$

παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f(mn)x^n &= E_m \left( \frac{p(x)}{(1-x)^{d+1}} \right) = E_m \left( \frac{p(x)(1+x+\dots+x^{m-1})^{d+1}}{(1-x^m)^{d+1}} \right) \\ &= \frac{E_m(p(x)(1+x+\dots+x^{m-1})^{d+1})}{(1-x)^{d+1}} \end{aligned}$$

και συνεπώς ότι η (1.44) ισχύει με  $q_m(x) = E_m(p(x)(1+x+\dots+x^{m-1})^{d+1})$ . Συνάγετε ότι για το συντελεστή του  $x^i$  στο  $q_m(x)$  ισχύει

$$\begin{aligned} [x^i] q_m(x) &= [x^{mi}] (p(x)(1+x+\dots+x^{m-1})^{d+1}) \\ &= \sum_{j \geq 0} p_j [x^{mi-j}] (1+x+\dots+x^{m-1})^{d+1}, \end{aligned}$$

όπου  $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots$ . Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο άρθρο των F. Brenti και V. Welker [*The Veronese construction for formal power series and graded algebras*, Adv. in Appl. Math. **42** (2009), 545–556].

20. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του  $x^n$  στο δεξιό μέλος της (1.45) είναι ίσος με το πλήθος των διαμερίσεων του  $n$  με μέρη διακεκριμένους περιττούς ακεραίους. Επομένως, αρκεί να βρεθεί μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των αυτοσυζυγών διαμερίσεων του  $n$  στο σύνολο των διαμερίσεων του  $n$  με μέρη διακεκριμένους περιττούς ακεραίους. Για τυχαία αυτοσυζυγή διαμέριση  $\lambda$  του  $n$ , έστω  $\varphi(\lambda)$  η ακολουθία  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$  που ορίζεται ως εξής:  $\mu_1$  είναι το πλήθος των τετραγώνων που βρίσκονται στην πρώτη γραμμή ή πρώτη στήλη του διαγράμματος Young της  $\lambda$ . Οι υπόλοιποι όροι  $\mu_2, \dots, \mu_r$  ορίζονται παρόμοια από την αυτοσυζυγή διαμέριση που προκύπτει από το διάγραμμα Young της  $\lambda$  διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και στήλη. Για παράδειγμα, αν  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$ , τότε  $\varphi(\lambda) = (9, 7, 3, 1)$ . Αφήνουμε στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι η  $\varphi(\lambda)$  είναι πράγματι διαμέριση του  $n$  με μέρη διακεκριμένους περιττούς ακεραίους και ότι η  $\varphi$  έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

21. Εφαρμόζοντας το σκεπτικό στην απόδειξη της ειδικής περίπτωσης  $m = 2$  (Πρόταση 1.2.6), δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} s(n)x^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i + x^{2i} + \dots + x^{(m-1)i})$$

$$\sum_{n \geq 0} t(n)x^n = \prod_{i \not\equiv 0 \pmod{m}} \frac{1}{1 - x^i}$$

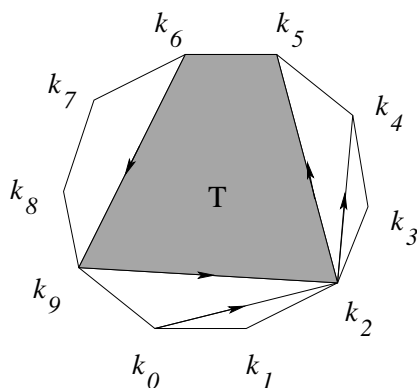
και συνάγετε ότι  $s(n) = t(n)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

22. Έστω  $\Gamma(n)$  (αντίστοιχα,  $\Delta(n)$ ) το σύνολο των διαμερίσεων του  $n$  με μέρη περιττούς (αντίστοιχα, διακεκριμένους) ακεραίους. Έστω  $\lambda \in \Gamma(n)$  και  $m_i$  το πλήθος των μερών της  $\lambda$  που είναι ίσα με  $i$ , ώστε  $m_i = 0$  αν ο  $i$  είναι άρτιος. Έστω  $\varphi(\lambda)$  η διαμέριση που προκύπτει από τη  $\lambda$  γράφοντας το  $m_i$  στη δυαδική του παράσταση  $m_i = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_r}$  για κάθε  $i$  με  $m_i \neq 0$  και αντικαθιστώντας τα  $m_i$  μέρη της  $\lambda$  που είναι ίσα με  $i$  με τους ακεραίους  $2^{k_j} \cdot i$ . Για παράδειγμα αν  $n = 35$  και  $\lambda = (7, 7, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1)$ , τότε  $m_7 = 2$ ,  $m_3 = 6 = 4 + 2$ ,  $m_1 = 3 = 2 + 1$  και  $\varphi(\lambda) = (14, 12, 6, 2, 1)$ . Για  $n = 3$ , η  $\varphi$  απεικονίζει τα στοιχεία (5), (3, 1, 1) και (1, 1, 1, 1) του  $\Gamma(n)$  στα στοιχεία (5), (3, 2) και (4, 1) του  $\Delta(n)$ , αντίστοιχα. Δείξτε ότι  $\varphi(\lambda) \in \Delta(n)$  αν  $\lambda \in \Gamma(n)$  και ότι η απεικόνιση  $\varphi : \Gamma(n) \rightarrow \Delta(n)$  είναι 1-1 αντιστοιχία για κάθε  $n$  (για να ορίσετε την αντίστροφη της  $\varphi$ , γράψτε κάθε μέρος της  $\lambda \in \Delta(n)$  στη μορφή  $2^k \cdot q$  με  $q$  περιττό ακέραιο και συλλέξτε όλα τα μέρη της  $\lambda$  με τον ίδιο μέγιστο περιττό παράγοντα  $q$ ).
23. Μια λύση που γενικεύει τη δεύτερη απόδειξη της Πρότασης 1.2.7 που δώσαμε είναι η εξής. Ο προτεινόμενος τύπος για το πλήθος, έστω  $a_{n,i}$ , των πολυγωνικών υποδιαίρεσεων του  $P$  σε  $i$  πολύγωνα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$i \cdot a_{n,i} = \binom{n-1}{i-1} \binom{n+i}{i-1}. \quad (1.50)$$

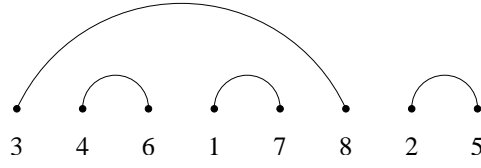
Όπως στην ειδική περίπτωση  $i = n$ , αρκεί να βρούμε μία 1-1 αντιστοιχία  $\varphi : A_n \rightarrow B_n$ , όπου  $A_n$  είναι το σύνολο των ζευγών  $(\tau, T)$  των υποδιαίρεσεων  $\tau$  που θέλουμε να απαριθμήσουμε και πολυγώνων  $T \in \tau$  και  $B_n$  είναι το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των ακολουθιών  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1}$  που έχουν ακριβώς  $i - 1$  συντεταγμένες ίσες με 1, με το σύνολο των διανυσμάτων  $(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})$  με στοιχεία ακεραίους  $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{i-1} \leq n + 1$ . Έστω ζεύγος  $(\tau, T) \in A_n$  για το οποίο θέλουμε να ορίσουμε το  $\varphi(\tau, T)$ . Το διάνυσμα  $(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})$  ορίζεται ακριβώς όπως στην ειδική περίπτωση  $i = n$ . Έστω  $j$  ο ελάχιστος δείκτης για τον οποίο η κορυφή  $\kappa_{r_j+1}$  βρίσκεται τουλάχιστον δύο ακμές μετά την  $\kappa_{r_j}$  κατά την κυκλική μας αρίθμηση. Θέτουμε  $\varepsilon_1 = 1$  αν η διαγώνιος με άκρα  $\kappa_{r_j}$  και  $\kappa_{r_j+2}$  είναι μια από τις διαγωνίους που ορίζουν την υποδιαίρεση  $\tau$  και  $\varepsilon_1 = 0$  διαφορετικά. Διαγράφοντας την κορυφή  $\kappa_{r_j+1}$  προκύπτει κυρτό πολύγωνο με  $n + 1$  κορυφές και υποδιαίρεσή του σε  $i - \varepsilon_1$  πολύγωνα, ένα από τα οποία είναι το  $T$ . Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία ορίζονται τα  $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$  και συνεπώς η απεικόνιση  $\varphi$ . Για παράδειγμα, για το ζεύγος του Σχήματος 1.7, όπου  $n = 8$  και  $i = 6$ , έχουμε  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = r_3 = 2$ ,  $r_4 = 6$ ,  $r_5 = 9$  (οπότε  $j = 1$  στο πρώτο βήμα της διαδικασίας που περιγράψαμε) και

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = 0, \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1, \varepsilon_7 = 0$ . Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι η  $\varphi : A_n \rightarrow B_n$  είναι αμφιμονοσήμαντη, κατασκευάζοντας την αντίστροφη απεικόνιση. Μια γενίκευση του αποτελέσματος αυτού δίνεται στην Άσκηση 13 (γ) του Κεφαλαίου 3.



Σχήμα 1.7: Μια πολυγωνική υποδιαίρεση.

24. Δείξτε ότι  $a_1 = 1$  και  $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$  για  $n \geq 2$ . Συνάγετε ότι  $a_n = F_{2n-1}$  για κάθε  $n$ , όπου  $F_1 = F_2 = 1$  και  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  για  $n \geq 3$  είναι η ακολουθία Fibonacci.
25. Η απάντηση στο (α) είναι  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ . Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 1.2.2 ή ευθέως από την πολλαπλασιαστική αρχή, αφού υπάρχουν  $2n-1$  επιλογές για το ζευγάρι π.χ. του 1 και, δεδομένης της επιλογής αυτής, υπάρχουν  $2n-3$  επιλογές για το ζευγάρι οποιουδήποτε στοιχείου του  $[2n]$  εκτός του 1 και του ζευγαριού του κ.ο.κ. Έστω  $\mathcal{A}_n$  το σύνολο των ζευγών του ερωτήματος (β) και έστω διαμέριση  $\pi$  του συνόλου  $[2n]$ , όπως στο ερώτημα (α). Θα δείξουμε ότι υπάρχουν ακριβώς  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$  αναδιατάξεις  $w$  του  $[2n]$ , τέτοιες ώστε  $(w, \pi) \in \mathcal{A}_n$ . Από αυτό και το αποτέλεσμα του (α) προκύπτει ότι  $\#\mathcal{A}_n = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2$ . Γράφουμε  $\pi = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_n, b_n\}\}$ , όπου  $a_i < b_i$  για κάθε  $i$  και  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ . Ο ισχυρισμός μας προκύπτει από την πολλαπλασιαστική αρχή, παρατηρώντας ότι υπάρχουν τρεις επιλογές για τη θέση του  $\{a_{n-1}, b_{n-1}\}$  στη  $w$  ως προς το  $\{a_n, b_n\}$  (συγκεκριμένα, είτε το  $b_{n-1}$  βρίσκεται στα αριστερά του  $a_n$ , είτε τα  $a_{n-1}$  και  $b_{n-1}$  βρίσκονται ανάμεσα στα  $a_n$  και  $b_n$ , είτε το  $a_{n-1}$  βρίσκεται στα δεξιά του  $b_n$ ) και, δοσμένης της επιλογής αυτής, υπάρχουν πέντε επιλογές για τη θέση του  $\{a_{n-2}, b_{n-2}\}$  στη  $w$  ως προς τα δύο προηγούμενα κ.ο.κ. Στο Σχήμα 1.8 απεικονίζεται το ζεύγος  $(w, \pi) \in \mathcal{A}_4$  με  $w = (3, 4, 6, 1, 7, 8, 2, 5)$  και  $\pi = \{\{3, 8\}, \{4, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 5\}\}$ .
26. Συμβολίζουμε με  $\text{NC}_n$  το σύνολο των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$ . Μια λύση για τα (α) και (β) μπορεί να δοθεί ως εξής. Έστω  $i \in [n]$  και  $\pi \in \text{NC}_n$  και έστω



Σχήμα 1.8: Ένα στοιχείο του  $\mathcal{A}_4$ .

η γραμμική διάταξη

$$i \triangleleft i+1 \triangleleft \dots \triangleleft n \triangleleft 1 \triangleleft \dots \triangleleft i-1$$

του συνόλου  $[n]$ . Για κάθε μέρος  $B$  της  $\pi$  συμβολίζουμε με  $\ell_i(B)$  και  $r_i(B)$ , αντίστοιχα, το ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο του  $B$  ως προς την  $\triangleleft$  και θέτουμε  $\varphi(i, \pi) = (L_i, R_i)$ , όπου  $L_i = \{\ell_i(B) : B \in \pi\}$  και  $R_i = \{r_i(B) : i \notin B, B \in \pi\}$ . Για παράδειγμα, για  $n = 9$ ,  $i = 5$  και  $\pi = 178/256/34/9$  έχουμε  $L_i = \{3, 5, 7, 9\}$  και  $R_i = \{1, 4, 9\}$ . Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\varphi : [n] \times \text{NC}_n \rightarrow \{(L, R) : L, R \subseteq [n], \#L = \#R + 1\}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη και συνάγετε ότι  $\#\text{NC}_n = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}$ . Το (β) προκύπτει περι-ορίζοντας κατάλληλα την αντιστοιχία  $\varphi$  (για τις λεπτομέρειες δείτε π.χ. το άρθρο του P.H. Edelman, [*Chain enumeration and non-crossing partitions*, Discrete Math. **31** (1980), 171–180]).

Για το (γ) θεωρήστε την ακολουθία  $b(\pi) = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$  που προκύπτει από μια διαμέριση  $\pi$  με τις δοσμένες ιδιότητες θέτοντας  $b_j = \#B - 1$ , αν  $j$  είναι το ελάχιστο στοιχείο του μέρους  $B$  της  $\pi$  και  $b_j = -1$  για τις υπόλοιπες τιμές του  $j \in [n+1]$  και χρησιμοποιήστε το Λήμμα του κύκλου (Πρόταση 1.3.2) για τις κυκλικές μετατοπίσεις  $(b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i-1})$  των ακολουθιών  $b(\pi)$ .

Για το (δ), έστω πολύγωνο  $P$  με  $n+2$  κορυφές  $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n+1}$ , όπως στην Παράγραφο 1.2.4 και έστω  $\tau$  τριγωνισμός του  $P$ . Παρατηρούμε ότι ο  $\tau$  καθορίζεται πλήρως από τις διαγωνίους του της μορφής  $\kappa_i \kappa_j$ , όπου  $0 \leq i < j \leq n+1$ , με την εξής ιδιότητα: υπάρχουν δείκτες  $r, s$  με  $0 \leq i < r < j < s \leq n+1$  ώστε το σύνολο που προκύπτει από το  $\tau$  διαγράφοντας την  $\kappa_i \kappa_j$  και προσθέτοντας την  $\kappa_r \kappa_s$  να είναι επίσης τριγωνισμός του  $P$ . Ονομάζουμε αυτές τις διαγωνίους *καλές*. Για παράδειγμα, οι καλές διαγωνίους του τριγωνισμού του Σχήματος 1.4 είναι οι  $\kappa_0 \kappa_2, \kappa_2 \kappa_4, \kappa_2 \kappa_5, \kappa_6 \kappa_8$ . Έστω  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$  οι ευθείες που προκύπτουν μετατοπίζοντας παράλληλα και ελάχιστα, με κατεύθυνση μακριά από την ακμή  $\kappa_0 \kappa_{n+1}$ , τις ευθείες που ορίζονται από τις καλές διαγωνίους του  $\tau$ . Έστω  $\varphi(\tau)$  η διαμέριση του  $[n]$  για την οποία τα  $i, j \in [n]$  ανήκουν στο ίδιο μέρος της  $\varphi(\tau)$  αν και μόνο αν οι κορυφές  $\kappa_i$  και  $\kappa_j$  βρίσκονται στο ίδιο από τα δύο ανοικτά ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία  $\ell_i$  για κάθε  $i \in [m]$ . Για το παράδειγμα του Σχήματος 1.4, η  $\varphi(\tau)$  έχει μέρη  $\{1\}$ ,  $\{2, 5, 6, 8\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$  και  $\{7\}$ . Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι η  $\varphi$  είναι 1–1 αντιστοιχία από το σύνολο των τριγωνισμών του  $P$  στο  $\text{NC}_n$ .

27. Από την Πρόταση 1.2.8 και την Άσκηση 26 προκύπτει ότι αρκεί να βρεθεί μια 1–1 αντιστοιχία του συνόλου των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[n]$  και αυτού των

μη εμφωλευμένων διαμερίσεων του  $[n]$ , η οποία να διατηρεί τους πληθάρθμους των μερών μιας διαμέρισης. Μια τέτοια αντιστοιχία περιγράφεται στο Θεώρημα 3.1 του άρθρου [C.A. Athanasiadis, *On noncrossing and nonnesting partitions for classical reflection groups*, Electron. J. Combin. **5** (1998), Research Paper 42, 16pp (electronic)].

28. Για το (α) θεωρήστε την (προσθετική) αβελιανή ομάδα  $\mathbb{Z}_{n+1}$  των ακεραίων mod  $n+1$ , την ομάδα γινόμενο  $\mathbb{Z}_{n+1}^n$  και την κυκλική υποομάδα  $H$  της τελευταίας που παράγεται από το στοιχείο  $(1, 1, \dots, 1)$ . Δείξτε ότι κάθε πλευρική κλάση  $(a_1, a_2, \dots, a_n) + H$  της  $H$  στην  $\mathbb{Z}_{n+1}^n$  περιέχει ακριβώς μία από τις ακολουθίες τις οποίες θέλουμε να απαριθμήσουμε, θέτοντας

$$b_i = \#\{j \in [n] : a_j = i\} - 1$$

για  $i \in [n+1]$  και εφαρμόζοντας το Λήμμα του κύκλου. Για το (β) εργαστείτε ομοίως με την ομάδα  $\mathbb{Z}_{n-1}^n$ .

29. Για τη μοναδικότητα εργαστείτε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.2. Για την ύπαρξη, εφαρμόζοντας κατάλληλα το Λήμμα του κύκλου, δείξτε πρώτα ότι υπάρχει  $i \in [m]$  τέτοιο ώστε να ισχύει

$$b_i + b_{i+1} + \dots + b_{i+r-1} \geq -k + 1$$

για  $1 \leq r \leq m-1$ , όπου  $b_{m+j} = b_j$  για  $1 \leq j \leq m$  (προσθέστε  $k-1$  σε κάποιον από τους ίσους με  $-1$  όρους της ακολουθίας). Θέτοντας  $i_1 = i$ , θεωρήστε το μικρότερο ακέραο  $i_2 > i_1$  τέτοιο ώστε η ακολουθία  $(b_{i_1}, b_{i_1+1}, \dots, b_{i_2-1})$  να ανήκει στο  $\mathcal{B}$  και ορίστε ανάλογα τους  $i_3, \dots, i_k$ . Χρησιμοποιώντας τον τρόπο επιλογής του  $i$ , δείξτε ότι η ακολουθία  $(b_{i_k}, b_{i_k+1}, \dots, b_{i_1+m-1})$  ανήκει επίσης στο  $\mathcal{B}$ .

# Κεφάλαιο 2

## Μεταθέσεις

Οι μεταθέσεις πεπερασμένων συνόλων και οι συνδυαστικές τους ιδιότητες παίζουν σημαντικό ρόλο σε ένα ευρύ φάσμα των μαθηματικών και των εφαρμογών τους. Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρούμε μια πρώτη εξοικείωση με τη δομή του συνόλου των μεταθέσεων ενός πεπερασμένου συνόλου και εφαρμόζουμε τις μεθόδους που αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο πάνω σε κάποια βασικά προβλήματα απαρίθμησης μεταθέσεων. Τα προβλήματα αυτά αφορούν τις αντιστροφές, την κυκλική δομή, τις καθόδους, τις υπερβάσεις και τα σταθερά σημεία μεταθέσεων.

### 2.1 Η συμμετρική ομάδα

Έστω σύνολο  $\Theta$ . Μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $w : \Theta \rightarrow \Theta$  λέγεται *μετάθεση* του  $\Theta$ . Συμβολίζουμε με  $\mathcal{S}(\Theta)$  το σύνολο των μεταθέσεων του  $\Theta$  και θέτουμε  $\mathcal{S}(\Theta) = \mathcal{S}_n$  όταν  $\Theta = [n]$ .

Μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  μπορεί να παρασταθεί με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα ως η αναδιάταξη  $(w(1), w(2), \dots, w(n))$  του συνόλου  $[n]$ , ή ως ο  $2 \times n$  πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(n) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

ή ως η λέξη  $w(1)w(2)\cdots w(n)$ , ή με την κυκλική της μορφή (βλέπε Παράγραφο 2.2.2), ή ως ένας  $n \times n$  πίνακας με στοιχεία 0 ή 1 (πίνακας - μετάθεση), ή με τη μορφή δένδρου (βλέπε Ασκήσεις 19, 20 και [12, Παράγραφος 1.3]), ή ως ένα ζεύγος ταμπλώ (βλέπε Κεφάλαιο 4) κ.ο.κ. (δύο ακόμη τρόποι απεικονίζονται στα Σχήματα 2.1 και 2.2). Αυτή η ποικιλομορφία είναι ένας από τους λόγους που καθιστά τη μελέτη των μεταθέσεων και των συνδυαστικών τους ιδιοτήτων εξαιρετικά χρήσιμη και ενδιαφέρουσα. Από τους δύο πρώτους τρόπους που αναφέραμε και το Παράδειγμα 1.1.5 προκύπτει το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα.

**Πρόταση 2.1.1** Το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου  $[n]$  είναι ίσο με  $n!$  για κάθε  $n \geq 1$ .

*Απόδειξη.* Μια απεικόνιση  $w : [n] \rightarrow [n]$  είναι αμφιμονοσήμαντη εάν και μόνο αν η ακολουθία  $(w(1), w(2), \dots, w(n))$  είναι αναδιάταξη του  $[n]$ . Έτσι ορίζεται μια 1-1 αντιστοιχία του  $\mathcal{S}_n$  με το σύνολο των αναδιατάξεων του  $[n]$  και συνεπώς  $\#\mathcal{S}_n = n!$ .  $\square$

Ως γνωστόν, η σύνθεση δύο αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων και η αντίστροφη μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης είναι επίσης αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις. Θα συμβολίζουμε με  $uv$  τη σύνθεση δύο μεταθέσεων  $u, v \in \mathcal{S}(\Theta)$ , δηλαδή το στοιχείο του  $\mathcal{S}(\Theta)$  για το οποίο ισχύει  $uv(x) = u(v(x))$  για  $x \in \Theta$ , και με  $w^{-1}$  την αντίστροφη απεικόνιση της  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$ . Όπως γνωρίζουμε από την άλγεβρα, το σύνολο  $\mathcal{S}(\Theta)$  αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Η ομάδα  $\mathcal{S}_n$  των μεταθέσεων του  $[n]$  είναι η συμμετρική ομάδα βαθμού  $n$ .

## 2.2 Απαρίθμηση μεταθέσεων

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε κάποια από τα σημαντικότερα προβλήματα απαρίθμησης μεταθέσεων με δοσμένες ιδιότητες.

### 2.2.1 Αντιστροφές

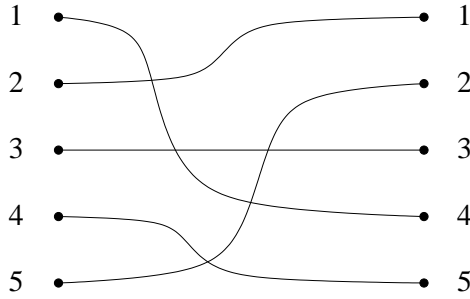
Έστω  $w \in \mathcal{S}_n$ .

**Ορισμός 2.2.1** Το ζεύγος  $(i, j)$  λέγεται *αντιστροφή (inversion)* της μετάθεσης  $w$  αν  $1 \leq i < j \leq n$  και  $w(i) > w(j)$ .

Συμβολίζουμε με  $\text{inv}(w)$  το πλήθος των αντιστροφών της  $w$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 5$  και  $w = (4, 1, 3, 5, 2)$  ως αναδιάταξη (δηλαδή  $w(1) = 4, w(2) = 1, w(3) = 3, w(4) = 5$  και  $w(5) = 2$ ), τότε οι αντιστροφές της  $w$  είναι οι  $(1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 5)$  και  $(4, 5)$  και συνεπώς  $\text{inv}(w) = 5$ .

Ένας τρόπος να απεικονίσει κανείς τη  $w$  και τις αντιστροφές της δίνεται στο Σχήμα 2.1. Σε ένα τέτοιο σχήμα υπάρχουν δύο σύνολα σημείων, κατάλληλα τοποθετημένων στο επίπεδο. Κάθε σύνολο περιέχει  $n$  σημεία, αριθμημένα με τους ακέραιους  $1, 2, \dots, n$ . Για κάθε  $1 \leq i \leq n$  υπάρχει ένα τόξο  $\gamma_i$  που συνδέει το σημείο  $i$  του πρώτου συνόλου με το σημείο  $w(i)$  του δεύτερου και για  $i < j$ , τα τόξα  $\gamma_i$  και  $\gamma_j$  τέμνονται αν και μόνο αν το  $(i, j)$  είναι αντιστροφή της  $w$  (στην περίπτωση αυτή, τα δύο τόξα τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο, στο οποίο διασταυρώνονται). Το πλήθος των σημείων τομής των τόξων είναι ίσο με  $\text{inv}(w)$ .





Σχήμα 2.1: Αντιστροφές της μετάθεσης  $(4, 1, 3, 5, 2)$ .

**Παρατήρηση 2.2.1** Έστω  $w \in \mathcal{S}_n$ .

(α) Το πλήθος των αντιστροφών της  $w$  είναι ίσο με το πλήθος των ζευγών  $(s, t)$  με  $1 \leq s < t \leq n$  για τα οποία το  $t$  εμφανίζεται στα αριστερά του  $s$  στην αναδιάταξη  $(w(1), w(2), \dots, w(n))$ . Τα ζεύγη αυτά συμπίπτουν με τις αντιστροφές της  $w^{-1}$  και συνεπώς ισχύει  $\text{inv}(w) = \text{inv}(w^{-1})$ .

(β) Ο ακέραιος  $(-1)^{\text{inv}(w)}$  είναι ίσος το πρόσημο της μετάθεσης  $w$  (βλέπε Άσκηση 4), το οποίο εμφανίζεται στον τύπο που εκφράζει την ορίζουσα ενός  $n \times n$  πίνακα ως πολυωνυμική συνάρτηση των στοιχείων του.  $\square$

Η ακόλουθη πρόταση καθορίζει το πλήθος των στοιχείων της  $\mathcal{S}_n$  με δοσμένο πλήθος αντιστροφών. Η Πρόταση 2.1.1 προκύπτει από αυτήν θέτοντας  $q = 1$ .

**Πρόταση 2.2.1** Για  $n \geq 1$  ισχύει

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} q^{\text{inv}(w)} = (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}). \quad (2.2)$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$B_n = \{0\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1, \dots, n-1\}$$

και την απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow B_n$  που ορίζεται ως εξής. Για  $w \in \mathcal{S}_n$  θέτουμε  $\varphi(w) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  όπου για  $1 \leq t \leq n$ , το  $a_t$  είναι ίσο με το πλήθος των ακεραίων  $1 \leq s < t$  που βρίσκονται στα δεξιά του  $t$  στην αναδιάταξη  $(w(1), w(2), \dots, w(n))$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 5$  και  $w = (4, 1, 3, 5, 2)$ , τότε  $\varphi(w) = (0, 0, 1, 3, 1)$ . Από τον ορισμό της  $\varphi$  έχουμε  $\text{inv}(w) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , αν  $\varphi(w) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Ισχυριζόμαστε ότι η απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow B_n$  είναι αμφιμονοσήμαντη, οπότε

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} q^{\text{inv}(w)} = \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B_n} q^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{a_1=0} q^{a_1} \right) \left( \sum_{a_2 \in \{0,1\}} q^{a_2} \right) \cdots \left( \sum_{a_n \in \{0,1,\dots,n-1\}} q^{a_n} \right) \\
&= (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}).
\end{aligned}$$

Για να δείξουμε τον ισχυρισμό, έστω  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B_n$  και για  $1 \leq i \leq n$  έστω  $u_i$  η αναδιάταξη του  $[i]$  που ορίζεται επαγωγικά ως εξής. Η  $u_i$  προκύπτει παρεμβάλλοντας τον ακέραιο  $i$  ανάμεσα στα στοιχεία της  $u_{i-1}$  ώστε να υπάρχουν  $a_i$  στοιχεία της  $u_i$  στα δεξιά του  $i$ , όπου  $u_0 = \emptyset$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 5$  και  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, 1, 3, 1)$ , τότε  $u_1 = (1)$ ,  $u_2 = (1, 2)$ ,  $u_3 = (1, 3, 2)$ ,  $u_4 = (4, 1, 3, 2)$  και  $u_5 = (4, 1, 3, 5, 2)$ . Θέτουμε  $\psi(a_1, a_2, \dots, a_n) = w$  όπου  $(w(1), w(2), \dots, w(n)) = u_n$  και αφήνουμε στον αναγνώστη να δείξει ότι η  $\psi : B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  είναι η αντίστροφη απεικόνιση της  $\varphi$ .  $\square$

## 2.2.2 Κύκλοι

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η κυκλική μορφή με την οποία μπορεί να παρασταθεί μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  και την οποία υπενθυμίζουμε συνοπτικά. Για  $x \in [n]$ , η ακολουθία  $(x, w(x), w^2(x), \dots)$  έχει ασφαλώς πεπερασμένου πλήθους διακεκριμένα στοιχεία. Συνεπώς υπάρχουν δείκτες  $i < j$  τέτοιοι ώστε  $w^i(x) = w^j(x)$ , οπότε  $w^{j-i}(x) = x$ . Αν  $\ell$  είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος με την ιδιότητα  $w^\ell(x) = x$ , τότε η ακολουθία  $(x, w(x), w^2(x), \dots, w^{\ell-1}(x))$  έχει διακεκριμένα στοιχεία, λέγεται κύκλος (cycle) της  $w$  μήκους  $\ell$  και συμβολίζεται απλούστερα ως  $(x \ w(x) \ w^2(x) \ \cdots \ w^{\ell-1}(x))$ . Οι κύκλοι της  $w$  ανά δύο δεν έχουν κοινό στοιχείο (και συνεπώς ανά δύο μετατίθενται) και η  $w$  είναι ίση με το γινόμενό τους. Για παράδειγμα, αν  $n = 7$  και

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

ως  $2 \times n$  πίνακας, τότε έχουμε  $w = (14)(2)(375)(6)$  σε κυκλική μορφή. Στη μορφή αυτή οι κύκλοι μπορούν να εμφανιστούν σε τυχαία σειρά και καθένας τους μπορεί να αναδιαταχθεί κυκλικά, αφού για παράδειγμα ισχύει  $(375) = (537) = (753)$ . Θα συμβολίζουμε με  $c(w)$  το πλήθος των κύκλων της  $w$ . Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε  $c(w) = 4$ .

Η ακόλουθη πρόταση καθορίζει το πλήθος των στοιχείων της  $\mathcal{S}_n$  με δοσμένο πλήθος κύκλων και εξειδικεύεται στην Πρόταση 2.1.1 για  $x = 1$ .

**Πρόταση 2.2.2** Για  $n \geq 1$  ισχύει

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{c(w)} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1). \quad (2.3)$$

Πρώτη απόδειξη. Έστω

$$C_n(x) := \sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{c(w)} = \sum_{k=1}^n c(n, k)x^k,$$

όπου  $c(n, k)$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  κύκλους. Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k) \quad (2.4)$$

για  $n \geq 2$ . Παρατηρούμε ότι από τις  $c(n, k)$  μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  κύκλους, οι  $c(n-1, k-1)$  περιέχουν τον κύκλο  $(n)$  μήκους ένα στην κυκλική τους μορφή, δηλαδή ισχύει  $w(n) = n$ . Οι υπόλοιπες προκύπτουν από καθεμιά από τις  $c(n-1, k)$  μεταθέσεις του  $[n-1]$  με  $k$  κύκλους παρεμβάλλοντας το  $n$  σε κάποιον από αυτούς τους κύκλους με  $n-1$  δυνατούς τρόπους. Για παράδειγμα, από τη μετάθεση  $(13)(24)$  του [4] προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο οι τέσσερις μεταθέσεις  $(153)(24)$ ,  $(135)(24)$ ,  $(13)(254)$  και  $(13)(245)$  του [5]. Συνεπώς υπάρχουν  $(n-1)c(n-1, k)$  μεταθέσεις του  $[n]$  με  $k$  κύκλους που δεν περιέχουν τον κύκλο  $(n)$  και η σχέση (2.4) έπεται από την προσθετική αρχή. Από την (2.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \sum_{k=1}^n c(n-1, k-1)x^k + \sum_{k=1}^n (n-1)c(n-1, k)x^k \\ &= x \sum_{k=1}^n c(n-1, k-1)x^{k-1} + (n-1) \sum_{k=1}^n c(n-1, k)x^k \\ &= x C_{n-1}(x) + (n-1)C_{n-1}(x) = (x+n-1)C_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Με επαγωγή στο  $n$  προκύπτει ότι  $C_n(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$  για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ .  $\square$

*Δεύτερη απόδειξη.* Αφού η (2.3) είναι ισότητα μεταξύ δύο πολυωνύμων, αρκεί να την αποδείξουμε για τυχαία θετική ακέραια τιμή  $r$  της μεταβλητής  $x$ .

Θεωρούμε τους τρόπους να επιλέξουμε μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  και να χρωματίσουμε τα στοιχεία του συνόλου  $[n]$ , το καθένα με ένα από τα χρώματα  $1, 2, \dots, r$ , έτσι ώστε στοιχεία που ανήκουν στον ίδιο κύκλο της  $w$  να έχουν το ίδιο χρώμα. Προφανώς, για δοσμένη  $w \in \mathcal{S}_n$  υπάρχουν  $r^{c(w)}$  τέτοιοι χρωματισμοί και συνεπώς το πλήθος των τρόπων είναι ίσο με το αριστερό μέλος της ισότητας (2.3) για  $x = r$ . Θα δείξουμε ότι το πλήθος αυτό είναι επίσης ίσο με  $r(r+1) \cdots (r+n-1)$ . Ας χρωματίσουμε πρώτα τα στοιχεία του  $[n]$  και ας επιλέξουμε έπειτα τη  $w$ . Παρατηρούμε ότι υπάρχουν  $\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_r}$  χρωματισμοί τέτοιοι ώστε ακριβώς  $a_i$  στοιχεία του  $[n]$  να έχουν χρώμα  $i$

για  $1 \leq i \leq r$ . Για κάθε τέτοιο χρωματισμό υπάρχουν  $a_i!$  τρόποι να επιλέξει κανείς τους κύκλους χρώματος  $i$  της  $w$  (όσοι και οι μεταθέσεις ενός συνόλου με  $a_i$  στοιχεία) για κάθε  $i$ . Τέλος, υπάρχουν  $\binom{r+n-1}{n}$  διανύσματα  $(a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r$  με άθροισμα στοιχείων ίσο με  $n$  (Πρόταση 1.2.3 του Κεφαλαίου 1). Από τα προηγούμενα και την (1.27) συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_r} a_1! a_2! \cdots a_r! \binom{r+n-1}{n} = n! \binom{r+n-1}{n},$$

δηλαδή με  $r(r+1) \cdots (r+n-1)$ . □

Υπολογίζοντας τους συντελεστές του  $x^n$  και του  $x$  στο πολυώνυμο στο δεξιό μέλος της (2.3) παίρνουμε  $c(n, n) = 1$  και  $c(n, 1) = (n-1)!$ . Ισοδύναμα, υπάρχει μοναδική μετάθεση του  $[n]$  με  $n$  κύκλους (ποια;) και  $(n-1)!$  μεταθέσεις με ένα μόνο κύκλο (αναγκαστικά μήκους  $n$ ). Αφήνεται στον αναγνώστη να δώσει ευθεία απόδειξη της τελευταίας παρατήρησης, χρησιμοποιώντας τις βασικές αρχές απαρίθμησης.

### 2.2.3 Κάθοδοι και πολυώνυμο Euler

Έστω  $w \in \mathcal{S}_n$ .

**Ορισμός 2.2.2** *Ο ακέραιος  $i \in [n-1]$  λέγεται κάθοδος (descent) της μετάθεσης  $w$  αν  $w(i) > w(i+1)$  και άνοδος (ascent) διαφορετικά.*

Συμβολίζουμε με  $\text{des}(w)$  το πλήθος των καθόδων της  $w$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 6$  και  $w = (3, 1, 5, 6, 4, 2)$  ως αναδιάταξη, τότε η  $w$  έχει τις καθόδους 1, 4 και 5 και συνεπώς  $\text{des}(w) = 3$ . Το πολυώνυμο

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{1+\text{des}(w)} \tag{2.5}$$

λέγεται πολυώνυμο του Euler τάξης  $n$  και συμβολίζεται με  $A_n(x)$  (όπου  $A_0(x) = 1$  κατά σύμβαση). Οι συντελεστές του  $A_n(x)$  λέγονται αριθμοί Euler: ο συντελεστής του  $x^k$  είναι ίσος με το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  οι οποίες έχουν ακριβώς  $k-1$  καθόδους. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} A_1(x) &= x \\ A_2(x) &= x(1+x) \\ A_3(x) &= x(1+4x+x^2) \\ A_4(x) &= x(1+11x+11x^2+x^3) \\ A_5(x) &= x(1+26x+66x^2+26x^3+x^4) \end{aligned}$$

κ.ο.κ. Το  $A_n(x)$  είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού  $n$  (εξηγήστε γιατί) χωρίς σταθερό όρο. Η επόμενη πρόταση εξηγεί την παλινδρομικότητα που εμφανίζουν οι συντελεστές του  $A_n(x)/x$  για  $n \leq 5$ .

**Πρόταση 2.2.3** Το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  καθόδους είναι ίσο με το πλήθος εκείνων με  $n - k - 1$  καθόδους. Ισοδύναμα, αν

$$A_n(x)/x = p_0 + p_1x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1}, \quad (2.6)$$

τότε  $p_k = p_{n-k-1}$  για  $0 \leq k \leq n - 1$ .

*Απόδειξη.* Για  $w \in \mathcal{S}_n$ , έστω η μετάθεση  $\tilde{w}$  του  $[n]$  με  $\tilde{w}(i) = n + 1 - w(i)$  για  $i \in [n]$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 5$  και  $w = (2, 5, 1, 4, 3)$  ως αναδιάταξη, τότε  $\tilde{w} = (4, 1, 5, 2, 3)$ . Προφανώς το  $i \in [n - 1]$  είναι κάθοδος της  $w$  αν και μόνο αν το  $i$  είναι άνοδος της  $\tilde{w}$ . Συνεπώς η απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  με  $\varphi(w) = \tilde{w}$ , η οποία είναι εμφανώς αμφιμονοσήμαντη, περιορίζεται σε μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  με  $k$  καθόδους στο σύνολο εκείνων με  $k$  ανόδους ή, ισοδύναμα, εκείνων με  $n - k - 1$  καθόδους. Έπεται το ζητούμενο.  $\square$

Ένας βασικός τύπος για τα πολυώνυμα του Euler δίνεται από την ακόλουθη πρόταση, για την οποία δίνουμε ευθεία συνδυαστική απόδειξη. Ο τύπος αυτός γενικεύει τις ταυτότητες  $\sum_{r \geq 0} x^r = \frac{1}{1-x}$ ,  $\sum_{r \geq 0} rx^r = \frac{x}{(1-x)^2}$ ,  $\sum_{r \geq 0} r^2x^r = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$  κ.ο.κ.

**Πρόταση 2.2.4** Για  $n \geq 0$  ισχύει

$$\sum_{r \geq 0} r^n x^r = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}. \quad (2.7)$$

*Απόδειξη.* Έστω η συλλογή  $\Lambda(n, r)$  με στοιχεία  $1, 2, \dots, n$  και  $r - 1$  αντίτυπα του συμβόλου  $\circ$ . Θεωρούμε τις αναδιατάξεις της συλλογής  $\Lambda(n, r)$ , δηλαδή ακολουθίες μήκους  $n + r - 1$  στις οποίες κάθε  $i \in [n]$  εμφανίζεται ακριβώς μία φορά, ενώ το σύμβολο  $\circ$  εμφανίζεται ακριβώς  $r - 1$  φορές. Για παράδειγμα, για  $n = 6$  και  $r = 8$  μια τέτοια αναδιάταξη είναι η

$$2 \circ 4 1 \circ 5 \circ \circ \circ 3 6 \circ \circ. \quad (2.8)$$

Ένας δείκτης  $k \in [n + r - 2]$  λέγεται κάθοδος της  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+r-1}) \in \Lambda(n, r)$  αν τα  $\sigma_k$  και  $\sigma_{k+1}$  είναι αέραιοι και  $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ . Για παράδειγμα, το  $k = 3$  είναι η μοναδική κάθοδος της (2.8).

Έστω  $\Gamma(n, r)$  το σύνολο των αναδιατάξεων του  $\Lambda(n, r)$  χωρίς καθόδους. Θα αποδείξουμε τη (2.7) απαριθμώντας τα στοιχεία του  $\Gamma(n, r)$  με δύο τρόπους. Για

$\sigma \in \Gamma(n, r)$  θεωρούμε την απεικόνιση  $f_\sigma : [n] \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$ , όπου  $f_\sigma(i)$  είναι το πλήθος των συμβόλων  $\bigcirc$  που βρίσκονται στα αριστερά του  $i$  στη  $\sigma$ . Για παράδειγμα, για την αναδιάταξη που προκύπτει από τη (2.8) εναλλάσσοντας τα 1 και 4 έχουμε  $f_\sigma(2) = 0$ ,  $f_\sigma(1) = f_\sigma(4) = 1$ ,  $f_\sigma(5) = 2$  και  $f_\sigma(3) = f_\sigma(6) = 5$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε απεικόνιση  $f : [n] \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$  υπάρχει μοναδική αναδιάταξη  $\sigma \in \Gamma(n, r)$  με  $f_\sigma = f$ , συγκεκριμένα αυτή που κατασκευάζεται παρατάσσοντας τα  $r-1$  σύμβολα  $\bigcirc$  σε μια ευθεία, παρεμβάλλοντάς τα στοιχεία του  $[n]$  στις  $r$  δυνατές θέσεις ανάμεσα στα σύμβολα ώστε το  $i$  να παρεμβάλλεται στη θέση  $f(i)+1$  από αριστερά για  $1 \leq i \leq n$  και τέλος, αναδιατάσσοντας σε αύξουσα σειρά από αριστερά προς τα δεξιά τα στοιχεία του  $[n]$  που έχουν παρεμβληθεί στην ίδια θέση. Έπεται ότι το  $\Gamma(n, r)$  βρίσκεται σε 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των απεικονίσεων  $f : [n] \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$  και επομένως ότι

$$\#\Gamma(n, r) = r^n. \quad (2.9)$$

Για  $w \in \mathcal{S}_n$ , έστω  $\Gamma_w(n, r)$  το σύνολο των στοιχείων του  $\Gamma(n, r)$  από τα οποία προκύπτει η αναδιάταξη  $(w(1), w(2), \dots, w(n))$  του  $[n]$  όταν απομακρύνει κανείς τα  $r-1$  σύμβολα  $\bigcirc$ . Προφανώς έχουμε

$$\#\Gamma(n, r) = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} \#\Gamma_w(n, r). \quad (2.10)$$

Θεωρώντας το πλήθος  $a_i$  των συμβόλων  $\bigcirc$  σε μια αναδιάταξη στο  $\Gamma_w(n, r)$  που παρεμβάλλονται μεταξύ του  $w(i)$  και του  $w(i+1)$  αν  $1 \leq i \leq n-1$ , και το πλήθος  $a_0$  και  $a_n$  των συμβόλων  $\bigcirc$  που βρίσκονται στην αρχή και στο τέλος της αναδιάταξης, αντίστοιχα, βλέπουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του  $\Gamma_w(n, r)$  είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = r - 1,$$

όπου τα  $a_i$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και επιπλέον ισχύει  $a_i \geq 1$  αν  $1 \leq i \leq n-1$  και  $w(i) > w(i+1)$ . Ισοδύναμα, θέτοντας

$$a_i = \begin{cases} b_i + 1, & \text{αν } 1 \leq i \leq n-1 \text{ και } w(i) > w(i+1) \\ b_i, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

το  $\#\Gamma_w(n, r)$  είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$b_0 + b_1 + \dots + b_n + \text{des}(w) = r - 1 \quad (2.11)$$

στους μη αρνητικούς ακεραίους. Κατά συνέπεια

$$\sum_{r \geq 1} \#\Gamma_w(n, r) x^{r-1} = \sum_{b_i \geq 0} x^{b_0 + b_1 + \dots + b_n + \text{des}(w)} = \frac{x^{\text{des}(w)}}{(1-x)^{n+1}}. \quad (2.12)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη (2.12) με το  $x$ , αθροίζοντας πάνω στα στοιχεία  $w$  της  $\mathcal{S}_n$  και λαμβάνοντας υπόψη τις (2.9) και (2.10) προκύπτει το ζητούμενο.  $\square$

**Πόρισμα 2.2.1** Στον πολυωνυμικό δακτύλιο  $\mathbb{C}[x]$  ισχύει

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \binom{x+k}{n}, \quad (2.13)$$

όπου  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$  είναι οι αριθμοί Euler όπως στη (2.6).

Απόδειξη. Έστω  $r \in \mathbb{N}$ . Στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.4 δείξαμε ότι

$$r^n = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} f_r(w),$$

όπου  $f_r(w)$  είναι το πλήθος των λύσεων της (2.11) στους μη αρνητικούς ακεραίους. Από την Πρόταση 1.2.3 (θέτοντας όπου  $n$  το  $n+1$  και όπου  $k$  το  $r - \text{des}(w) - 1$ ) έχουμε

$$f_r(w) = \binom{n+r-\text{des}(w)-1}{n}$$

και συνεπώς

$$r^n = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} \binom{n+r-\text{des}(w)-1}{n}.$$

Από την προηγούμενη ισότητα και την Πρόταση 2.2.3 συμπεραίνουμε ότι

$$r^n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \binom{n+r-k-1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \binom{r+k}{n},$$

δηλαδή ότι ισχύει η (2.13) για  $x = r \in \mathbb{N}$ . Αφού η (2.13) είναι ισότητα μεταξύ δύο πολυωνύμων και ισχύει για άπειρες τιμές του  $x$ , έπεται ότι η ισότητα αυτή ισχύει ταυτοτικά στο  $\mathbb{C}[x]$ .  $\square$

Για παράδειγμα, για  $n = 3$  η (2.13) γράφεται

$$x^3 = \binom{x}{3} + 4 \binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{3}.$$

**Πόρισμα 2.2.2** Για το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k-1$  καθόδους ισχύει ο τύπος

$$[x^k] A_n(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (k-j)^n \binom{n+1}{j} \quad (2.14)$$

για  $1 \leq k \leq n$ .

Απόδειξη. Γράφουμε τη σχέση (2.7) στη μορφή

$$A_n(x) = \left( \sum_{r \geq 0} r^n x^r \right) (1-x)^{n+1}.$$

Το ζητούμενο προκύπτει εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^k$  στα δύο μέλη αυτής της ισότητας.  $\square$

## 2.2.4 Υπερβάσεις

Έστω  $w \in \mathcal{S}_n$ .

**Ορισμός 2.2.3** *Ο ακέραιος  $i \in [n]$  λέγεται υπέρβαση της  $w$  αν  $w(i) > i$ .*

Συμβολίζουμε με  $\text{exc}(w)$  το πλήθος των υπερβάσεων της  $w$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 5$  και  $w = (3, 1, 5, 4, 2)$  ως αναδιάταξη, τότε η  $w$  έχει τις υπερβάσεις 1 και 3 και συνεπώς  $\text{exc}(w) = 2$ .

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει ότι η κατανομή των στοιχείων της  $\mathcal{S}_n$  ως προς το πλήθος των υπερβάσεων συμπίπτει με εκείνη ως προς το πλήθος των καθόδων και συνεπώς παρέχει μια νέα συνδυαστική ερμηνεία στους συντελεστές του πολυωνύμου του Euler  $A_n(x)$ . Άλλες συνδυαστικές ερμηνείες για το  $A_n(x)$  περιγράφονται στις Ασκήσεις 19 και 20.

**Πρόταση 2.2.5** *Το πλήθος των στοιχείων της  $\mathcal{S}_n$  με  $k$  υπερβάσεις είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων της  $\mathcal{S}_n$  με  $k$  καθόδους για όλους τους ακραίους  $0 \leq k \leq n-1$ . Ισοδύναμα,*

$$A_n(x)/x = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{\text{exc}(w)} \quad (2.15)$$

για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ .

Απόδειξη. Ονομάζουμε κανονική κυκλική μορφή μιας μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}_n$  την κυκλική μορφή της  $w$  που προκύπτει γράφοντας κάθε κύκλο έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο του να εμφανίζεται πρώτο (από τα αριστερά) και αναδιατάσσοντας τους κύκλους σε φθίνουσα διάταξη των ελάχιστων στοιχείων τους. Συμβολίζουμε με  $\varphi(w)$  τη μετάθεση η οποία, ως αναδιάταξη, προκύπτει παραθέτοντας τα στοιχεία του  $[n]$  από αριστερά προς τα δεξιά με τη σειρά με την οποία εμφανίζονται στην κανονική κυκλική μορφή της  $w$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 9$  και  $w = (3419)(75)(6)(28)$  σε κυκλική μορφή, τότε  $w = (6)(57)(28)(1934)$  σε κανονική κυκλική μορφή και

$$\varphi(w) = (6, 5, 7, 2, 8, 1, 9, 3, 4).$$



Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  είναι αμφιμονοσήμαντη. Για τυχαία μετάθεση  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}_n$ , σε μορφή αναδιάταξης, θεωρούμε τις μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $\varphi(w) = \sigma$ . Παρατηρούμε ότι, εξαιτίας του ορισμού της  $\varphi$ , αν  $i$  είναι ο μοναδικός δείκτης με  $\sigma_i = 1$ , τότε ο κύκλος  $(\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_n)$  θα πρέπει να είναι κύκλος κάθε τέτοιας μετάθεσης  $w$ . Ομοίως, αν  $\sigma_j$  είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}\}$ , τότε ο κύκλος  $(\sigma_j \sigma_{j+1} \dots \sigma_{i-1})$  θα πρέπει επίσης να είναι κύκλος της  $w$ , κ.ο.κ. Το σκεπτικό αυτό δείχνει ότι η μοναδική μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $\varphi(w) = \sigma$  είναι το γινόμενο των κύκλων που ορίζονται με αυτή τη διαδικασία και συνεπώς ότι η απεικόνιση  $\varphi$  είναι αμφιμονοσήμαντη.

Έστω τώρα  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $\varphi(w) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , έστω  $i \in [n]$  και έστω  $k \in [n]$  ο μοναδικός δείκτης με  $\sigma_k = i$ . Ισχυριζόμαστε ότι  $w(i) > i$  αν και μόνο αν το  $k$  είναι άνοδος της  $\sigma$ . Πράγματι, αυτό είναι φανερό αν το  $i$  δεν είναι το τελευταίο στοιχείο του κύκλου του στην κανονική κυκλική μορφή της  $w$ , αφού τότε  $\sigma_{k+1} = w(i)$ . Διαφορετικά, το  $w(i)$  είναι το πρώτο από αριστερά στοιχείο του κύκλου που περιέχει το  $i$ , άρα  $w(i) \leq i$ , και το  $k$  δεν είναι άνοδος της  $\sigma$  αφού είτε  $k = n$ , είτε το  $\sigma_{k+1}$  είναι το πρώτο από αριστερά στοιχείο του επόμενου κύκλου, οπότε  $\sigma_k = i \geq w(i) > \sigma_{k+1}$ . Από τον ισχυρισμό μας συμπεραίνουμε ότι η  $\varphi$  περιορίζεται σε μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  με  $k$  υπερβάσεις στο σύνολο εκείνων με  $k$  ανόδους ή, ισοδύναμα, εκείνων με  $n - k - 1$  καθόδους. Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός αυτό και την Πρόταση 2.2.3.  $\square$

## 2.2.5 Πρωτεύων δείκτης και το Θεώρημα του MacMahon

Θα γράφουμε  $\text{Des}(w) = \{i \in [n-1] : w(i) > w(i+1)\}$  για το σύνολο των καθόδων της μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}_n$ .

**Ορισμός 2.2.4** Ο *ακέραιος*

$$\text{maj}(w) = \sum_{i \in \text{Des}(w)} i$$

λέγεται *πρωτεύων δείκτης (major index)* της  $w \in \mathcal{S}_n$ .

Για παράδειγμα, αν  $n = 6$  και  $w = (5, 1, 6, 4, 2, 3)$ , σε μορφή αναδιάταξης, τότε  $\text{Des}(w) = \{1, 3, 4\}$  και  $\text{maj}(w) = 8$ .

Όπως και για το πλήθος των αντιστροφών  $\text{inv}(w)$ , έχουμε  $0 \leq \text{maj}(w) \leq \binom{n}{2}$  για  $w \in \mathcal{S}_n$ , όπου η ταυτοτική μετάθεση και η  $w = (n, n-1, \dots, 1)$  είναι οι μόνες μεταθέσεις με πρωτεύοντα δείκτη ίσο με μηδέν και  $\binom{n}{2}$ , αντίστοιχα. Το ακόλουθο θεώρημα, σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.2.1, δείχνει ότι η κατανομή των στοιχείων της  $\mathcal{S}_n$  ως προς τον πρωτεύοντα δείκτη συμπίπτει με εκείνη ως προς το πλήθος των αντιστροφών.

**Θεώρημα 2.2.1** (MacMahon [9]) Για  $n \geq 1$  ισχύει

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} q^{\text{maj}(w)} = (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}). \quad (2.16)$$

*Απόδειξη.* Θα εργαστούμε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.4, χρησιμοποιώντας όμως άπειρου πλήθους αντίτυπα του συμβόλου  $\circ$ . Θεωρούμε τις άπειρες ακολουθίες  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  με στοιχεία από το σύνολο  $[n] \cup \{\circ\}$ , στις οποίες κάθε  $i \in [n]$  εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Έστω  $\Gamma(n)$  το σύνολο εκείνων των ακολουθιών  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  για τις οποίες δεν υπάρχει δείκτης  $k$  ώστε  $\sigma_k, \sigma_{k+1} \in [n]$  και  $\sigma_k < \sigma_{k+1}$  (δηλαδή απαγορεύουμε τις ανόδους στη  $\sigma$ , αντί για τις καθόδους). Για παράδειγμα για  $n = 6$ , μια τέτοια ακολουθία είναι η

$$2 \circ \circ 5 \ 4 \ 1 \circ 6 \ 3 \circ \circ \circ \cdots \quad (2.17)$$

Για  $\sigma \in \Gamma(n)$  θεωρούμε την απεικόνιση  $f_\sigma : [n] \rightarrow \mathbb{N}$ , όπου  $f_\sigma(i)$  είναι το πλήθος των συμβόλων  $\circ$  που βρίσκονται στα αριστερά του  $i$  στη  $\sigma$ , και ορίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$G_n(q) = \sum_{\sigma \in \Gamma(n)} q^{a(\sigma)},$$

όπου  $a(\sigma)$  είναι το άθροισμα των τιμών της  $f_\sigma$ . Για παράδειγμα, για την ακολουθία (2.17) έχουμε  $f_\sigma(2) = 0$ ,  $f_\sigma(1) = f_\sigma(4) = f_\sigma(5) = 2$ ,  $f_\sigma(3) = f_\sigma(6) = 3$  και συνεπώς  $a(\sigma) = 12$ . Θα υπολογίσουμε τη  $G_n(q)$  με δύο διαφορετικούς τρόπους. Παρατηρούμε πρώτα, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.4, ότι για δοσμένους μη αρνητικούς ακεραίους  $m_1, m_2, \dots, m_n$  υπάρχει μοναδική ακολουθία  $\sigma \in \Gamma(n)$ , τέτοια ώστε  $f_\sigma(i) = m_i$  για  $1 \leq i \leq n$ . Από αυτό προκύπτει ότι

$$G_n(q) = \sum_{m_i \geq 0} q^{m_1+m_2+\cdots+m_n} = \frac{1}{(1-q)^n}. \quad (2.18)$$

Για  $w \in \mathcal{S}_n$ , έστω  $\Gamma_w(n)$  το σύνολο των στοιχείων  $\sigma$  του  $\Gamma(n)$  με την εξής ιδιότητα: όταν απομακρύνει κανείς τα σύμβολα  $\circ$  από τη  $\sigma$  προκύπτει η αναδιάταξη  $(w(n), w(n-1), \dots, w(1))$  του  $[n]$ . Προφανώς έχουμε

$$G_n(q) = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} \sum_{\sigma \in \Gamma_w(n)} q^{a(\sigma)}. \quad (2.19)$$

Για  $\sigma \in \Gamma_w(n)$ , έστω  $a_i$  το πλήθος των συμβόλων  $\circ$  που παρεμβάλλονται μεταξύ του  $w(i)$  και του  $w(i+1)$  στη  $\sigma$ , αν  $1 \leq i \leq n-1$ , και  $a_n$  το πλήθος των συμβόλων  $\circ$  που

βρίσκονται στα αριστερά του  $w(n)$ . Παρατηρούμε ότι  $f_\sigma(w(i)) = a_i + a_{i+1} + \dots + a_n$  για  $1 \leq i \leq n$  και συνεπώς

$$a(\sigma) = \sum_{i=1}^n f_\sigma(w(i)) = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι τα  $a_i$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, ότι ισχύει  $a_i \geq 1$  αν  $1 \leq i \leq n-1$  και  $w(i) > w(i+1)$  και ότι, αντιστρόφως, για ακεραίους  $a_1, a_2, \dots, a_n$  με τις ιδιότητες αυτές υπάρχει μοναδική ακολουθία  $\sigma \in \Gamma_w(n)$  με  $f_\sigma(w(i)) = a_i + a_{i+1} + \dots + a_n$  για  $1 \leq i \leq n$ . Θέτοντας

$$a_i = \begin{cases} b_i + 1, & \text{αν } 1 \leq i \leq n-1 \text{ και } w(i) > w(i+1) \\ b_i, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

έχουμε  $b_i \geq 0$  για κάθε  $i$  και

$$\begin{aligned} a(\sigma) &= b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n + \sum_{w(i) > w(i+1)} i \\ &= b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n + \text{maj}(w). \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Gamma_w(n)} q^{a(\sigma)} &= \sum_{b_i \geq 0} q^{b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n + \text{maj}(w)} \\ &= \frac{q^{\text{maj}(w)}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}. \end{aligned}$$

Από τη σχέση αυτή και τις (2.18) και (2.19) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{(1-q)^n} = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} \frac{q^{\text{maj}(w)}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)},$$

δηλαδή η (2.16). □

## 2.2.6 Σταθερά σημεία

Έστω μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  και  $i \in [n]$ .

**Ορισμός 2.2.5** Ο ακέραιος  $i$  λέγεται σταθερό σημείο της  $w$  αν  $w(i) = i$ .

Συμβολίζουμε με  $D_n$  το πλήθος των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  χωρίς σταθερά σημεία. Για παράδειγμα αν  $w = (4, 2, 1, 3, 5)$ , σε μορφή αναδιάταξης, τότε η  $w$  έχει δύο σταθερά σημεία, τα 2 και 5, ενώ οι  $(2, 3, 1)$  και  $(3, 1, 2)$  είναι οι μόνες μεταθέσεις της  $\mathcal{S}_3$  χωρίς σταθερά σημεία. Έχουμε  $D_n = 0, 1, 2, 9, 44$  για  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , αντίστοιχα.

**Πρόταση 2.2.6** Για το πλήθος των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  χωρίς σταθερά σημεία ισχύει

$$D_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \quad (2.20)$$

και

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad (2.21)$$

όπου  $D_0 = 1$  κατά σύμβαση.

Το πλήθος των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  με  $k$  σταθερά σημεία είναι ίσο με  $\binom{n}{k} D_{n-k}$  για  $0 \leq k \leq n$ .

*Απόδειξη.* Θέτουμε  $A_i = \{w \in \mathcal{S}_n : w(i) = i\}$  για  $1 \leq i \leq n$ , οπότε  $D_n$  είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $\mathcal{S}_n - \cup_{i=1}^n A_i$ . Παρατηρούμε ότι για  $I \subseteq [n]$ , η τομή  $A_I = \cap_{i \in I} A_i$  είναι ίση με το σύνολο των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  για τις οποίες καθένα από τα στοιχεία του  $I$  είναι σταθερό σημείο. Συνεπώς ισχύει  $\#A_I = (n-r)!$ , όπου  $r = \#I$ , όσες είναι οι μεταθέσεις του συνόλου  $[n] \setminus I$ . Από το Θεώρημα 1.3.1 παίρνουμε

$$D_n = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{\#I} \#A_I = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)! = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{r!},$$

δηλαδή τη (2.20). Από αυτή προκύπτει άμεσα η (2.21).

Για τον τελευταίο ισχυρισμό της πρότασης, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι υπάρχουν  $\binom{n}{k}$  τρόποι να επιλεγεί το σύνολο των σταθερών σημείων μιας μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}_n$  και  $D_{n-k}$  τρόποι να αναδιαταχθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του  $[n]$ , ώστε η  $w$  να έχει ακριβώς  $k$  σταθερά σημεία.  $\square$

## 2.2.7 Εναλλάσσουσες μεταθέσεις

Υπενθυμίζουμε ότι με  $\text{Des}(w)$  συμβολίζουμε το σύνολο των καθόδων της  $w \in \mathcal{S}_n$ .

**Ορισμός 2.2.6** Η μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  λέγεται εναλλάσσουσα (alternating) αν ισχύει  $\text{Des}(w) = \{1, 3, 5, \dots\} \cap [n-1]$ .

Ισοδύναμα, γράφοντας  $w_i = w(i)$  για  $1 \leq i \leq n$ , η  $w$  λέγεται εναλλάσσουσα αν  $w_1 > w_2 < w_3 > \dots$ . Συμβολίζουμε με  $E_n$  το πλήθος των εναλλάσσουσών μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$ . Για παράδειγμα, έχουμε  $E_n = 1, 1, 2, 5, 16$  για  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ,

αντίστοιχα, όπου οι εναλλάσσουσες μεταθέσεις της  $\mathcal{S}_4$  είναι, σε μορφή αναδιάταξης, οι  $(2, 1, 4, 3)$ ,  $(3, 1, 4, 2)$ ,  $(3, 2, 4, 1)$ ,  $(4, 1, 3, 2)$  και  $(4, 2, 3, 1)$ . Οι αριθμοί  $E_n$  καθορίζονται από το ακόλουθης απρόσμενο αποτέλεσμα του André [2]. Η γεννήτρια συνάρτηση που εμφανίζεται εκεί είναι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας  $(E_n)$  (οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις θα μας απασχολήσουν στο Κεφάλαιο 3).

**Πρόταση 2.2.7** *Θέτοντας  $E_0 = 1$ , έχουμε*

$$\sum_{n \geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \tan(x) + \sec(x), \quad (2.22)$$

όπου

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

και

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots$$

είναι η συνάρτηση της εφαπτομένης και της συντέμνουσας, αντίστοιχα.

Θα ονομάζουμε μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  αντιστρόφως εναλλάσσουσα αν  $\text{Des}(w) = \{2, 4, 6, \dots\} \cap [n-1]$ , δηλαδή αν  $w_1 < w_2 > w_3 < \dots$ , όπου  $w_i = w(i)$  για  $1 \leq i \leq n$ . Όπως δείχνει η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  με  $\varphi(w) = \tilde{w}$ , όπου  $\tilde{w}(i) = n + 1 - w(i)$  για  $i \in [n]$  (την οποία χρησιμοποιήσαμε και στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.3), το πλήθος των αντιστρόφως εναλλάσσουσών μεταθέσεων του  $[n]$  είναι επίσης ίσο με  $E_n$ .

*Απόδειξη της Πρότασης 2.2.7.* Θα δείξουμε πρώτα ότι ισχύει

$$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k E_{n-k} \quad (2.23)$$

για  $n \geq 1$ . Πράγματι, έστω  $B_n$  το σύνολο των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_{n+1}$  οι οποίες είναι είτε εναλλάσσουσες, είτε αντιστρόφως εναλλάσσουσες. Έχουμε  $\#B_n = 2E_{n+1}$  για  $n \geq 1$ . Για  $w \in \mathcal{S}_{n+1}$ , θέτουμε  $w_i = w(i)$  για  $1 \leq i \leq n+1$  και θεωρούμε το μοναδικό δείκτη  $0 \leq k \leq n$  με  $w_{k+1} = n+1$ . Παρατηρούμε ότι ισχύει  $w \in B_n$  αν και μόνο αν  $w_k < w_{k-1} > \dots$  και  $w_{k+2} < w_{k+3} > \dots$ . Γράφοντας  $S = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ , υπάρχουν  $\binom{n}{k}$  τρόποι να επιλέξουμε τα στοιχεία του  $S$  και  $E_k E_{n-k}$  τρόποι να αναδιατάξουμε τα στοιχεία του  $S$  και τα στοιχεία του  $[n] \setminus S$  ώστε να ισχύουν οι προηγούμενες ανισότητες. Έπεται ότι το δεξιό μέλος της (2.23) είναι επίσης ίσο με  $\#B_n$  και συνεπώς ισχύει η (2.23).

Οι σχέσεις (2.23) και  $E_0 = E_1 = 1$  καθορίζουν μονοσήμαντα την ακολουθία  $(E_n)$  και μεταφράζονται στις σχέσεις  $2F'(x) = F(x)^2 + 1$  και  $F(0) = 1$  για τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} E_n \frac{x^n}{n!}$$

(λεπτομέρειες για τον πολλαπλασιασμό εκθετικών γεννητριών συναρτήσεων δίνονται στην Παράγραφο 3.2.1). Με απευθείας υπολογισμό βρίσκουμε ότι η συνάρτηση  $G(x) = \tan(x) + \sec(x)$  ικανοποιεί επίσης τις συνθήκες  $2G'(x) = G(x)^2 + 1$  και  $G(0) = 1$ . Γράφοντας

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

και εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.4.1 (α) για τις  $2G'(x)$  και  $G(x)^2 + 1$ , συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία  $(a_n)$  ικανοποιεί επίσης τον αναγωγικό τύπο (2.23) και τις  $a_0 = a_1 = 1$ . Έπεται ότι  $a_n = E_n$  για κάθε  $n \geq 0$ , το οποίο είναι το ζητούμενο.  $\square$

Η Πρόταση 2.2.7 εξηγεί το γεγονός ότι οι συντελεστές των δυναμοσειρών που ορίζουν τις συναρτήσεις  $\tan(x)$  και  $\sec(x)$  είναι μη αρνητικοί (ρητοί) αριθμοί. Το επίσης απρόσμενο αποτέλεσμα της επόμενης πρότασης συνδέει τις εναλλάσσουσες μεταθέσεις με τα πολυώνυμα Euler της Παραγράφου 2.2.3.

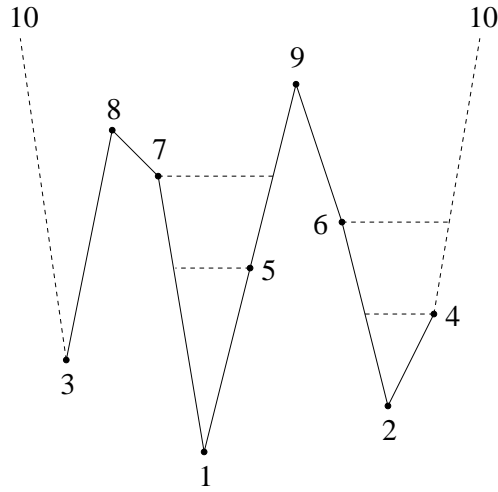
**Πρόταση 2.2.8** Για  $n \geq 1$  ισχύει

$$A_n(-1) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} E_n, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός,} \end{cases}$$

όπου  $A_n(x) = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{1+\text{des}(w)}$  είναι το πολυώνυμο Euler τάξης  $n$ .

Όταν  $n$  είναι άρτιος, η Πρόταση 2.2.8 προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 2.2.3, αφού έχουμε  $A_n(-1) = -p_0 + p_1 - \dots + p_{n-1}$  και οι όροι της τελευταίας έκφρασης ανά δύο έχουν άθροισμα μηδέν.

Οι επόμενοι ορισμοί θα φανούν χρήσιμοι για την περίπτωση όπου  $n$  είναι περιττός. Έστω  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$ , ώστε  $w_i = w(i)$  για  $1 \leq i \leq n$ . Θέτοντας  $w_0 = w_{n+1} = n + 1$ , ονομάζουμε τον ακέραιο  $i \in [n]$  διπλή κάθοδο της  $w$  αν  $w_{i-1} > w_i > w_{i+1}$  και διπλή άνοδο αν  $w_{i-1} < w_i < w_{i+1}$ . Για παράδειγμα, η μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_9$  που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2 έχει τις διπλές καθόδους 3 και 7 και τις διπλές ανόδους 5 και 9. Αν το  $i \in [n]$  είναι διπλή κάθοδος (αντίστοιχα, διπλή άνοδος) της  $w$ , συμβολίζουμε με  $\varphi_i(w)$  τη μετάθεση που προκύπτει από τη  $w$  μεταφέροντας τον όρο  $w_i$  ανάμεσα στους  $w_j$  και  $w_{j+1}$ , όπου  $j$  είναι ο μικρότερος δείκτης με  $i < j \leq n$  και  $w_j < w_i < w_{j+1}$  (αντίστοιχα, ο μεγαλύτερος δείκτης με  $0 \leq j < i$  και  $w_j > w_i > w_{j+1}$ ). Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.2, για  $n = 9$  και  $w = (3, 8, 7, 1, 5, 9, 6, 2, 4)$  έχουμε



Σχήμα 2.2: Η μετάθεση  $(3, 8, 7, 1, 5, 9, 6, 2, 4)$ .

$$\begin{aligned} \varphi_3(w) &= (3, 8, 1, 5, 7, 9, 6, 2, 4), & \varphi_7(w) &= (3, 8, 7, 1, 5, 9, 2, 4, 6), \\ \varphi_5(w) &= (3, 8, 7, 5, 1, 9, 6, 2, 4), & \varphi_9(w) &= (3, 8, 7, 1, 5, 9, 6, 4, 2). \end{aligned}$$

Μια από τις κρίσιμες για μας ιδιότητες της  $\varphi_i(w)$  είναι ότι ισχύει  $\text{des}(\varphi_i(w)) = \text{des}(w) - 1$  (αντίστοιχα  $\text{des}(\varphi_i(w)) = \text{des}(w) + 1$ ), αν το  $i \in [n]$  είναι διπλή κάθοδος (αντίστοιχα, διπλή άνοδος) της  $w$ . Επίσης, στην περίπτωση αυτή, το  $w_i$  μεταφέρεται σε θέση  $i$  οποία αποτελεί διπλή άνοδο (αντίστοιχα, διπλή κάθοδο) της  $\varphi_i(w)$ .

*Απόδειξη της Πρότασης 2.2.8.* Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, το ζητούμενο προκύπτει από την Πρόταση 2.2.3 αν ο  $n$  είναι άρτιος. Υποθέτουμε ότι ο  $n$  είναι περιττός και παρατηρούμε ότι μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  είναι αντιστρόφως εναλλάσσουσα αν και μόνο αν η  $w$  δεν έχει διπλές καθόδους ή ανόδους. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της αυτοαντίστροφης απεικόνισης (Παράγραφος 1.3.2). Για  $w \in \mathcal{S}_n$  θέτουμε

$$w(w) = (-1)^{1+\text{des}(w)},$$

οπότε  $A_n(-1) = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} w(w)$ . Ορίζουμε επίσης την απεικόνιση  $\tau : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  θέτοντας  $\tau(w) = w$ , αν η  $w$  είναι αντιστρόφως εναλλάσσουσα, και  $\tau(w) = \varphi_i(w)$ , αν  $w_i$  είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του  $[n]$  για το οποίο το  $i$  αποτελεί είτε διπλή κάθοδο, είτε διπλή άνοδο της  $w$ . Για παράδειγμα, για τη μετάθεση του Σχήματος 2.2 έχουμε  $w_i = 7$ ,  $i = 3$  και  $\tau(w) = \varphi_3(w)$ . Αφήνουμε στον αναγνώστη να βεβαιωθεί ότι ισχύει  $\tau^2(w) = w$  για κάθε  $w \in \mathcal{S}_n$  και  $w(\tau(w)) = -w(w)$  για κάθε  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $\tau(w) \neq w$  (δηλαδή για κάθε μη αντιστρόφως εναλλάσσουσα  $w$ ). Από την Πρόταση

1.3.1 προκύπτει ότι

$$A_n(-1) = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} w(w) = \sum_w w(w) = \sum_w (-1)^{1+\text{des}(w)},$$

όπου στα δύο τελευταία αθροίσματα το  $w$  διατρέχει το σύνολο των αντιστρόφως εναλλασσουσών μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$ . Αφού για κάθε τέτοια μετάθεση ισχύει  $\text{des}(w) = \frac{n-1}{2}$ , έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

## 2.3 Μεταθέσεις συλλογών

Έστω θετικοί ακέραιοι  $n_1, n_2, \dots, n_r$  και έστω  $n$  το άθροισμα αυτών. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r)$  το σύνολο των ακολουθιών  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  μήκους  $n$  στις οποίες κάθε ακέραιος  $i$  με  $1 \leq i \leq r$  εμφανίζεται ακριβώς  $n_i$  φορές. Έτσι, το  $\mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r)$  ταυτίζεται με το σύνολο των αναδιατάξεων του  $[n]$  στην ειδική περίπτωση  $n_1 = \dots = n_r = 1$  και ισχύει

$$\#\mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r) = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$$

(εξηγήστε γιατί), όπου ο πολυωνυμικός συντελεστής στο δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας ορίστηκε στην Παράγραφο 1.2.1. Τα στοιχεία του  $\mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r)$  μπορούν να θεωρηθούν ως οι αναδιατάξεις της συλλογής που αποτελείται από  $n_i$  αντίτυπα του  $i$ , για  $1 \leq i \leq r$ .

Ονομάζουμε *αντιστροφή* της  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r)$  ένα ζεύγος  $(i, j)$  αν  $1 \leq i < j \leq n$  και  $\sigma_i > \sigma_j$  και συμβολίζουμε με  $\text{inv}(\sigma)$  το πλήθος των αντιστροφών της  $\sigma$ . Φυσικά, στην ειδική περίπτωση  $r = n$  και  $n_1 = \dots = n_r = 1$  υπάρχει μοναδική μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $w(i) = \sigma_i$  για  $1 \leq i \leq n$  και η έννοια της αντιστροφής για τη  $\sigma$  συμπίπτει με εκείνη που ορίσαμε για τη  $w$  στην Παράγραφο 2.2.1. Θα μας απασχολήσει το πρόβλημα της απαρίθμησης των αναδιατάξεων μιας συλλογής με δοσμένο πλήθος αντιστροφών, το οποίο γενικεύει αυτό που εξετάσαμε στην Παράγραφο 2.2.1. Για μη αρνητικούς ακεραίους  $n_1, n_2, \dots, n_r$  με άθροισμα  $n$  θέτουμε

$$\left[ \begin{matrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_r \end{matrix} \right]_q = \frac{[n]!_q}{[n_1]!_q [n_2]!_q \cdots [n_r]!_q}, \quad (2.24)$$

όπου  $[n]!_q = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q$  και  $[m]_q = 1 + q + \cdots + q^{m-1} = (1 - q^m)/(1 - q)$ . Για την περίπτωση  $r = 2$  θέτουμε επίσης

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q := \left[ \begin{matrix} n \\ k, n-k \end{matrix} \right]_q = \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)}{\prod_{i=1}^k (1-q^i) \prod_{i=1}^{n-k} (1-q^i)} \quad (2.25)$$



για  $0 \leq k \leq n$ . Η παράσταση (2.24) ονομάζεται  $q$ -πολυωνυμικός συντελεστής. Η (2.25) ονομάζεται  $q$ -διωνυμικός συντελεστής (η ορολογία αυτή αιτιολογείται από την Άσκηση 30) ή *πολυώνυμο του Gauss*. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}{(1-q)^2(1-q^2)^2} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4.$$

Ισχύουν επίσης

$$\begin{bmatrix} n \\ 1, 1, \dots, 1 \end{bmatrix}_q = [n]!_q = (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) \quad (2.26)$$

και

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_r \end{bmatrix}_{q=1} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}, \quad (2.27)$$

αφού για  $q = 1$  έχουμε  $[m]_q = m$  και  $[n]!_q = n!$ .

**Πρόταση 2.3.1** Για θετικούς ακέραιους  $n_1, n_2, \dots, n_r$  με άθροισμα  $n$  ισχύει

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r)} q^{\text{inv}(\sigma)} = \begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_r \end{bmatrix}_q.$$

*Απόδειξη.* Για  $m \in \mathbb{N}$  συμβολίζουμε με  $A_m$  το σύνολο των αναδιατάξεων του  $[m]$  και θέτουμε  $B = \mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r)$ . Στην ειδική περίπτωση  $r = n$  και  $n_1 = \cdots = n_r = 1$  έχουμε  $B = A_n$  και το ζητούμενο προκύπτει από την Πρόταση 2.2.1 και τη σχέση (2.26). Για τη γενική περίπτωση, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi : A_n \rightarrow B \times A_{n_1} \times A_{n_2} \times \cdots \times A_{n_r}$$

ως εξής: Έστω  $m_0 = 0$  και  $m_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i$  για  $1 \leq i \leq r$ . Για  $\tau \in A_n$  θέτουμε  $\varphi(\tau) = (\sigma, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ , όπου (i) η  $\sigma \in B$  προκύπτει από την  $\tau$  αντικαθιστώντας κάθε όρο  $j$  της  $\tau$  με το  $i$  αν  $m_{i-1} < j \leq m_i$  και (ii) για  $1 \leq i \leq r$ , η  $\tau_i$  προκύπτει από την  $\tau$  μειώνοντας κατά  $m_{i-1}$  κάθε όρο  $j$  της  $\tau$  με  $m_{i-1} < j \leq m_i$  και διαγράφοντας τους υπόλοιπους όρους της  $\tau$ . Για παράδειγμα αν  $n = 7$ ,  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = n_3 = 2$  και  $\tau = (4, 1, 7, 3, 6, 5, 2)$ , τότε  $\sigma = (2, 1, 3, 1, 3, 2, 1)$  και  $\tau_1 = (1, 3, 2)$ ,  $\tau_2 = (1, 2)$ ,  $\tau_3 = (2, 1)$ . Αφήνεται στον αναγνώστη να αποδείξει ότι η  $\varphi$  είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση και ότι για  $\tau \in A_n$  με  $\varphi(\tau) = (\sigma, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$  ισχύει

$$\text{inv}(\tau) = \text{inv}(\sigma) + \text{inv}(\tau_1) + \cdots + \text{inv}(\tau_r).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
 [n]!_q &= \sum_{\tau \in A_n} q^{\text{inv}(\tau)} = \sum_{\sigma \in B, \tau_i \in A_{n_i}} q^{\text{inv}(\sigma) + \text{inv}(\tau_1) + \dots + \text{inv}(\tau_r)} \\
 &= \left( \sum_{\sigma \in B} q^{\text{inv}(\sigma)} \right) \left( \sum_{\tau_1 \in A_{n_1}} q^{\text{inv}(\tau_1)} \right) \dots \left( \sum_{\tau_r \in A_{n_r}} q^{\text{inv}(\tau_r)} \right) \\
 &= \left( \sum_{\sigma \in B} q^{\text{inv}(\sigma)} \right) [n_1]!_q \dots [n_r]!_q
 \end{aligned}$$

και συνεπώς το ζητούμενο.  $\square$

Το ακόλουθο πόρισμα, το οποίο δεν είναι προφανές από τον ορισμό (2.24), είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.3.1.

**Πόρισμα 2.3.1** *Θεωρώντας τα  $n_1, n_2, \dots, n_r$  σταθερά, ο συντελεστής*

$$\left[ \begin{array}{c} n \\ n_1, n_2, \dots, n_r \end{array} \right]_q$$

*είναι πολυωνυμική συνάρτηση του  $q$  με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές.*  $\square$

Μια διαφορετική ερμηνεία των  $q$ -διωνυμικών συντελεστών (η περίπτωση  $r = 2$ ) σχετίζεται με διαμερίσεις ακεραίων. Για  $k, m \in \mathbb{N}$  συμβολίζουμε με  $\Lambda(k, m)$  το σύνολο των διαμερίσεων ακεραίων οι οποίες έχουν το πολύ  $k$  μέρη και καθένα από αυτά είναι μικρότερο ή ίσο του  $m$  (στο σύνολο αυτό περιλαμβάνεται και η μοναδική διαμέριση  $\emptyset$  του 0, η οποία δεν έχει μέρη). Ισοδύναμα, έχουμε  $\lambda \in \Lambda(k, m)$  αν το διάγραμμα Young της  $\lambda$  περιέχεται σε ορθογώνιο διαστάσεων  $k \times m$ .

			2	2	1
		2	1		
	2	2	1		
1					

Σχήμα 2.3: Το μονοπάτι για τη διαμέριση  $(5, 3, 2)$ .

**Πρόταση 2.3.2** Για ακεραίους  $0 \leq k \leq n$  ισχύει

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{k(n-k)} p_i q^i,$$

όπου  $p_i$  είναι το πλήθος των διαμερίσεων του ακεραίου  $i$  που ανήκουν στο σύνολο  $\Lambda(k, n-k)$ .

*Απόδειξη.* Για  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{A}(k, n-k)$  θεωρούμε το μονοπάτι  $f(\sigma) = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$  μήκους  $n$  στο  $\mathbb{Z}^2$ , όπου οι κορυφές  $v_0, v_1, \dots, v_n$  ορίζονται διαδοχικά από τις σχέσεις  $v_0 = (0, 0)$  και

$$v_j - v_{j-1} = \begin{cases} (1, 0), & \text{αν } \sigma_j = 2 \\ (0, 1), & \text{αν } \sigma_j = 1 \end{cases}$$

για  $1 \leq j \leq n$  και η ακμή  $e_j$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα  $v_{j-1}$  και  $v_j$ . Αφού υπάρχουν  $k$  δείκτες  $1 \leq j \leq n$  με  $\sigma_j = 1$  και  $n-k$  δείκτες με  $\sigma_j = 2$ , το  $f(\sigma)$  έχει τελική κορυφή  $v_n = (n-k, k)$ . Το μέρος του ορθογωνίου  $[0, n-k] \times [0, k]$  στο  $\mathbb{R}^2$  που βρίσκεται βόρεια του  $f(\sigma)$  αποτελεί το διάγραμμα Young μιας διαμέρισης  $\lambda \in \Lambda(k, n-k)$ , για την οποία θέτουμε  $\varphi(\sigma) = \lambda$ . Για παράδειγμα αν  $n = 9, k = 4$  και  $\sigma = (1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1)$ , τότε το  $f(\sigma)$  απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3 και  $\varphi(\sigma) = (5, 3, 2)$ . Αφήνουμε στον αναγνώστη να δείξει ότι η απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{A}(k, n-k) \rightarrow \Lambda(k, n-k)$  είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι για κάθε  $\sigma \in \mathcal{A}(k, n-k)$ , το άθροισμα των μερών της  $\varphi(\sigma)$  είναι ίσο με  $\text{inv}(\sigma)$  (για το δεύτερο ισχυρισμό, υπολογίστε πόσα τετράγωνα του διαγράμματος Young της  $\varphi(\sigma)$  βρίσκονται στην ίδια στήλη και βόρεια από μια δοσμένη οριζόντια ακμή του  $f(\sigma)$ ). Συμπεραίνουμε ότι για το πλήθος  $p_i$  των διαμερίσεων  $\lambda \in \Lambda(k, n-k)$  του ακεραίου  $i$  ισχύει

$$p_i = \#\{\sigma \in \mathcal{A}(k, n-k) : \text{inv}(\sigma) = i\}.$$

Το ζητούμενο έπεται από την περίπτωση  $r = 2$  της Πρότασης 2.3.1.  $\square$

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα ερμηνεία των  $q$ -πολυωνυμικών συντελεστών δίνεται στην Άσκηση 33.

## 2.4 Ασκήσεις

- Δίνονται ακέραιοι  $1 \leq k \leq n$ . Υπολογίστε το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με την εξής ιδιότητα:
  - το ζεύγος  $(i, j)$  είναι αντιστροφή της  $w$  για  $1 \leq i < j \leq k$ ,
  - το ζεύγος  $(i, k)$  είναι αντιστροφή της  $w$  για  $1 \leq i < k$ .
- Ένας κύκλος της  $\mathcal{S}_n$  της μορφής  $(i \ i+1)$  λέγεται *γειτονική αντιμετάθεση*.
  - Δείξτε ότι κάθε μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  μπορεί να γραφεί ως γινόμενο  $\text{inv}(w)$  σε πλήθος γειτονικών αντιμεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$ .
  - Δείξτε ότι το πλήθος  $\text{inv}(w)$  των αντιστροφών της  $w \in \mathcal{S}_n$  είναι ίσο με τον ελάχιστο ακέραιο  $k \in \mathbb{N}$  για τον οποίο η  $w$  μπορεί να γραφεί ως γινόμενο  $k$  γειτονικών αντιμεταθέσεων.
- Έστω θετικός ακέραιος  $n$  και  $m = \binom{n}{2}$ . Για  $0 \leq i \leq m$ , έστω  $a_i$  το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $\text{inv}(w) = i$ .
  - Δείξτε ότι  $a_i = a_{m-i}$  για  $0 \leq i \leq m$ .
  - Δείξτε ότι  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{\lfloor m/2 \rfloor}$ .
- Έστω  $\epsilon(w) = (-1)^{\text{inv}(w)}$  για  $w \in \mathcal{S}_n$ . Δείξτε ότι:
  - Η απεικόνιση  $\epsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$  είναι ομομορφισμός ομάδων, δηλαδή ότι για  $u, v \in \mathcal{S}_n$  ισχύει  $\epsilon(uv) = \epsilon(u)\epsilon(v)$ .
  - $\epsilon(w) = -1$  για κάθε αντιμετάθεση (κύκλο μήκους 2)  $w$ .
  - $\epsilon(w) = (-1)^{\ell-1}$  για κάθε κύκλο  $w$  μήκους  $\ell$ .
- Υπολογίστε το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  οι οποίες έχουν
  - άρτιο πλήθος αντιστροφών,
  - πλήθος αντιστροφών που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3.Γενικεύστε για το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  οι οποίες έχουν πλήθος αντιστροφών ισότιμο του  $i \pmod{k}$ .
- Γράψτε έναν απλό τύπο για το πλήθος  $c(n, 2)$  των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με δύο ακριβώς κύκλους και δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n, 2)}{(n-1)!} = \infty.$$

7. Έστω  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$ . Ο ακέραιος  $w_i$  λέγεται από αριστερά προς τα δεξιά ελάχιστο (αντίστοιχα, μέγιστο) της  $w$  αν το  $w_i$  είναι το ελάχιστο (αντίστοιχα, μέγιστο) στοιχείο του συνόλου  $\{w_1, w_2, \dots, w_i\}$ . Ανάλογα ορίζονται τα από δεξιά προς τα αριστερά ελάχιστα και μέγιστα της  $w$ . Για  $1 \leq k \leq n$  δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ίσα:

- (α) το πλήθος των  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  από αριστερά προς τα δεξιά ελάχιστα,
- (β) το πλήθος των  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  από αριστερά προς τα δεξιά μέγιστα,
- (γ) το πλήθος των  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  από δεξιά προς τα αριστερά ελάχιστα,
- (δ) το πλήθος των  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  από δεξιά προς τα αριστερά μέγιστα,
- (ε) το πλήθος των  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  κύκλους.

8. Συμβολίζουμε με  $a(w)$  (αντίστοιχα, με  $b(w)$ ) το πλήθος των από δεξιά προς τα αριστερά ελαχίστων (αντίστοιχα, από αριστερά προς τα δεξιά μεγίστων) μιας μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}_n$ , όπως αυτά ορίστηκαν στην Άσκηση 7. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{a(w)} q^{\text{inv}(w)} &= \sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{b(w)} q^{\text{inv}(w)} \\ &= x(x+q)(x+q+q^2) \cdots (x+q+q^2+\cdots+q^{n-1}), \end{aligned}$$

όπου  $\text{inv}(w)$  είναι το πλήθος των αντιστροφών της  $w$ .

9. Δίνονται ακέραιοι  $1 \leq k \leq n$ . Πόσες είναι οι μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_n$  στις οποίες ο κύκλος που περιέχει το 1 έχει ακριβώς  $k$  στοιχεία;
10. Συμβολίζουμε με  $\ell_T(w)$  τον ελάχιστο ακέραιο  $k \in \mathbb{N}$  για τον οποίο η μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  μπορεί να γραφεί ως γινόμενο  $k$  αντιμεταθέσεων (κύκλων μήκους 2) της  $\mathcal{S}_n$ .

- (α) Δείξτε ότι  $\ell_T(w) = n - c(w)$  για κάθε  $w \in \mathcal{S}_n$ , όπου  $c(w)$  είναι το πλήθος των κύκλων της  $w$ .
- (β) Συνάγετε ότι

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{\ell_T(w)} = (1+x)(1+2x) \cdots (1+(n-1)x)$$

για  $n \geq 1$ .

11. Για  $1 \leq k \leq n$ , συμβολίζουμε με  $c_k(w)$  το πλήθος των κύκλων μήκους  $k$  μιας μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}_n$  και με  $c(w)$  το πλήθος των κύκλων (τυχαίου μήκους) της  $w \in \mathcal{S}_n$ .

(α) Δείξτε ότι

$$\frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathcal{S}_n} c(w) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

δηλαδή ότι ο μέσος όρος του πλήθους των κύκλων για τις μεταθέσεις στην  $\mathcal{S}_n$  είναι ίσος με  $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ .

(β) Δείξτε ότι

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} (-1)^{c(w)} c(w) = (n-2)!$$

για  $n \geq 2$ .

(γ) Δείξτε ότι

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} c_k(w) = \frac{n!}{k},$$

δηλαδή ότι ο μέσος όρος του πλήθους των κύκλων μήκους  $k$  για τις μεταθέσεις στην  $\mathcal{S}_n$  είναι ίσος με  $1/k$ .

12. Έστω ακέραιοι  $1 \leq k \leq n$ . Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς  $\frac{n!}{k}$  μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_n$  για τις οποίες οι ακέραιοι  $1, 2, \dots, k$  περιέχονται στον ίδιο κύκλο της  $w$ .

13. Έστω  $S(n, k)$  το πλήθος των διαμερίσεων του  $[n]$  με  $k$  μέρη.

(α) Δείξτε ότι

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) x(x-1) \cdots (x-k+1).$$

(β) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=r}^n (-1)^{n-k} c(n, k) S(k, r) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = r \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου  $c(n, k)$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  κύκλους.

(γ) Αποδείξτε την ταυτότητα του (β) συνδυαστικά, χρησιμοποιώντας την αρχή της αυτοαντίστροφης απεικόνισης.

(δ) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=r}^n c(n, k) S(k, r) = \frac{n!}{r!} \binom{n-1}{r-1}.$$

14. Λέμε ότι μια μετάθεση του  $[n]$  έχει τύπο  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  αν περιέχει ακριβώς  $m_i$  κύκλους μήκους  $i$ , για  $1 \leq i \leq n$ .

- (α) Δείξτε ότι δύο μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}_n$  ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της  $\mathcal{S}_n$  (δηλαδή υπάρχει  $w \in \mathcal{S}_n$  τέτοιο ώστε  $v = wuw^{-1}$ ) αν και μόνο αν οι  $u$  και  $v$  έχουν τον ίδιο τύπο.
- (β) Δείξτε ότι το πλήθος των στοιχείων της  $\mathcal{S}_n$  τύπου  $\lambda = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  είναι ίσο με  $n!/z_\lambda$ , όπου  $z_\lambda = 1^{m_1}m_1!2^{m_2}m_2!\dots n^{m_n}m_n!$ .
- (γ) Συνάγετε από το (β) ότι αν  $a_n$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $w^{-1} = w$ , τότε

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right),$$

όπου  $a_0 = 1$ .

15. Γράψτε έναν απλό τύπο για το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  που έχουν ακριβώς μία κάθοδο. Ποια είναι η απλούστερη απόδειξη αυτού του τύπου που γνωρίζετε;
16. Δείξτε ότι για  $m, n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}. \quad (2.28)$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ταυτότητα, υπολογίστε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^m i^4$  ως συνάρτηση του  $m$ .

17. Έστω  $A(n, k)$  το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k-1$  καθόδους.

- (α) Δείξτε ότι

$$A(n, k) = kA(n-1, k) + (n-k+1)A(n-1, k-1) \quad (2.29)$$

για  $1 \leq k \leq n$ .

- (β) Αποδείξτε τύπο του Euler

$$\sum_{n \geq 0} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1-x}{1-xe^{(1-x)t}}, \quad (2.30)$$

όπου  $A_n(x) = \sum_{k=1}^n A(n, k)x^k$  είναι το πολυώνυμο του Euler τάξης  $n$ , με  $A_0(x) = 1$ .

18. Συμβολίζουμε με  $A(n, k)$  το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k-1$  καθόδους και με  $S(n, k)$  το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου  $[n]$  με  $k$  μέρη.

(α) Δείξτε ότι

$$r! S(n, r) = \sum_{k=1}^r A(n, k) \binom{n-k}{r-k} \quad (2.31)$$

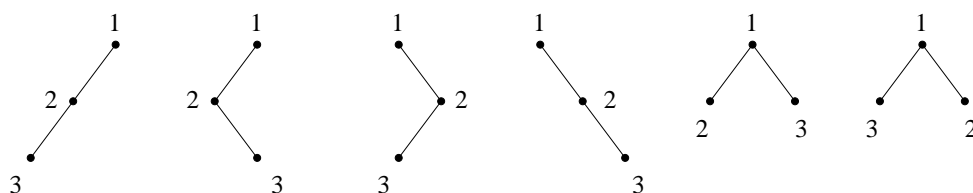
για  $1 \leq r \leq n$ .

(β) Συνάγετε ότι

$$A_n(x)/x = \sum_{r=1}^n r! S(n, r)(x-1)^{n-r}, \quad (2.32)$$

όπου  $A_n(x)$  είναι το πολυώνυμο του Euler τάξης  $n$ .

19. Έστω  $\mathcal{T}_n$  το σύνολο των δένδρων με ρίζα στο σύνολο κορυφών  $[n]$  τα οποία είναι αύξοντα (δηλαδή αν η κορυφή  $i$  είναι πρόγονος της  $j$ , τότε  $i < j$ ) και επίπεδα, δυαδικά (δηλαδή κάθε κορυφή έχει δύο υποδένδρα, ένα αριστερό και ένα δεξιό, πιθανώς κενά). Τα στοιχεία του  $\mathcal{T}_n$  απεικονίζονται στο Σχήμα 2.4 για  $n = 3$ .



Σχήμα 2.4: Τα αύξοντα, επίπεδα δυαδικά δένδρα με ρίζα σε τρεις κορυφές.

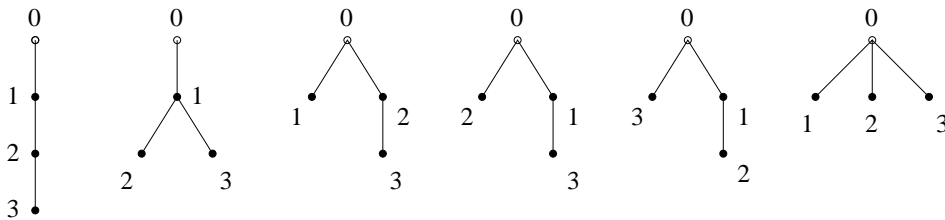
Δείξτε ότι:

- (α) Το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{T}_n$  είναι ίσο με  $n!$ .  
 (β) Το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{T}_n$  στα οποία ακριβώς  $k$  κορυφές έχουν μη κενό αριστερό υποδένδρο είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  καθόδους.
20. Έστω  $\mathcal{T}_n$  το σύνολο των δένδρων με ρίζα στο σύνολο κορυφών  $\{0, 1, \dots, n\}$  τα οποία έχουν ρίζα το 0 και είναι αύξοντα (δηλαδή αν η κορυφή  $i$  είναι πρόγονος της  $j$ , τότε  $i < j$ ). Τα δένδρα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 2.5 για  $n = 3$ .

Δείξτε ότι:

- (α) Το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{T}_n$  είναι ίσο με  $n!$ .





Σχήμα 2.5: Τα αύξοντα δένδρα με ρίζα σε τέσσερις κορυφές.

- (β) Το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{T}_n$  στα οποία η ρίζα έχει  $k$  απογόνους είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  κύκλους.
- (γ) Το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{T}_n$  που έχουν  $k$  κορυφές χωρίς απογόνους (φύλλα) είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k - 1$  καθόδους.
21. Συμβολίζουμε με  $B_n$  το σύνολο των ακολουθιών  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  στις οποίες εμφανίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου  $\{i, -i\}$  για  $1 \leq i \leq n$ . Ένας δείκτης  $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$  λέγεται  $B$ -κάθοδος της  $w$  αν  $w_i > w_{i+1}$ , όπου  $w_0 = 0$  κατά σύμβαση. Συμβολίζουμε με  $\text{des}_B(w)$  το πλήθος των  $B$ -καθόδων της  $w$  και θέτουμε

$$B_n(x) = \sum_{w \in B_n} x^{\text{des}_B(w)} \quad (2.33)$$

για  $n \geq 1$ .

- (α) Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο  $B_n$ ;
- (β) Υπολογίστε το  $B_n(x)$  για  $n \in \{1, 2, 3\}$ .
- (γ) Δείξτε ότι  $B_n(x) = x^n B_n(1/x)$  για κάθε  $n \geq 1$ .
- (δ) Δείξτε ότι

$$\sum_{r \geq 0} (2r + 1)^n x^r = \frac{B_n(x)}{(1 - x)^{n+1}}. \quad (2.34)$$

(ε) Δείξτε ότι

$$B_n(x) = ((2n - 1)x + 1) B_{n-1}(x) + 2(x - x^2) B'_{n-1}(x) \quad (2.35)$$

για  $n \geq 2$ .

- (στ) Βρείτε έναν απλό τύπο για το πλήθος των  $w \in B_n$  που έχουν ακριβώς μία  $B$ -κάθοδο και μία όσο το δυνατόν απλούστερη συνδυαστική απόδειξη του τύπου αυτού.

22. Έστω θετικοί ακέραιοι  $n, r$ . Για  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \{0, 1, \dots, r-1\}^n$  συμβολίζουμε με  $\text{des}(w)$  το πλήθος των δεικτών  $i \in [n]$  με  $w_i > w_{i+1}$ , όπου  $w_{n+1} = 0$  κατά σύμβαση, και θέτουμε

$$\mathcal{I}_n^r(x) = \sum_{w \in \{0, 1, \dots, r-1\}^n} x^{\text{des}(w)}.$$

Δείξτε ότι

$$\sum_{m \geq 0} \binom{n+rm}{n} x^m = \frac{\mathcal{I}_n^r(x)}{(1-x)^{n+1}}. \quad (2.36)$$

23. Ο ακέραιος  $i \in [n]$  λέγεται ασθενής υπέρβαση (weak excedance) της  $w \in \mathcal{S}_n$  αν  $w(i) \geq i$ . Για  $0 \leq k \leq n$  δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ίσα:

- (α) Το πλήθος των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  με  $k$  ασθενείς υπερβάσεις.
- (β) Το πλήθος των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  για τις οποίες υπάρχουν ακριβώς  $k$  δείκτες  $i \in [n]$  με  $w(i) \leq i$ .
- (γ) Το πλήθος των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  με  $k-1$  υπερβάσεις.

24. Για  $n \in \mathbb{N}$ , συμβολίζουμε με  $E(n)$  το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  για τις οποίες το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου  $\text{Asc}(w) \cup \{n\}$  είναι άρτιος αριθμός, όπου  $\text{Asc}(w)$  είναι το σύνολο των ανόδων της  $w$  και  $E(0) = 1$ .

- (α) Δείξτε ότι  $E(n) = nE(n-1) + (-1)^n$  για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ .
- (β) Συνάγετε ότι το  $E(n)$  είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων της  $\mathcal{S}_n$  χωρίς σταθερά σημεία.
- (γ) Αποδείξτε το συμπέρασμα του (β) με χρήση κατάλληλης 1-1 αντιστοιχίας.

25. Έστω θετικός ακέραιος  $n$ . Για  $0 \leq i \leq n$  συμβολίζουμε με  $f_{i-1}$  το πλήθος των 1-1 απεικονίσεων  $\sigma : [i] \rightarrow [n]$  (οπότε  $f_{-1} = 1$ ). Δείξτε ότι

$$\sum_{i=0}^n f_{i-1} (x-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^n h_i x^i, \quad (2.37)$$

όπου  $h_i$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με ακριβώς  $i$  σταθερά σημεία, για  $0 \leq i \leq n$ .

26. Στην ακόλουθη τριγωνική διάταξη ακεραίων

$$\begin{array}{cccccc}
& & & & & 1 \\
& & & & & 0 & 1 \\
& & & & 1 & 1 & 0 \\
& & 0 & 1 & 2 & 2 & \\
& 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & \\
0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & \\
& & & \dots & & & 
\end{array}$$

η αφετηρία της γραμμής  $i$  από τα αριστερά (αν ο  $i$  είναι άρτιος) ή από τα δεξιά (αν ο  $i$  είναι περιττός μεγαλύτερος του 1) είναι το 0 και κάθε άλλο στοιχείο της γραμμής  $i$  είναι ίσο με το άθροισμα του προηγούμενου στοιχείου της ίδιας γραμμής και του πάνω αριστερά ή πάνω δεξιά στοιχείου, αντίστοιχα, της γραμμής  $i - 1$ . Δείξτε ότι στις πλευρές του τριγώνου εμφανίζονται οι ακέραιοι  $E_n$  της Παραγράφου 2.2.7.

27. Δείξτε ότι για κάθε  $n \geq 1$  υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$  τέτοιοι ώστε

$$A_n(x)/x = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \gamma_i x^i (1+x)^{n-1-2i}, \quad (2.38)$$

όπου  $A_n(x)$  είναι το πολυώνυμο Euler τάξης  $n$ . Συνάγετε ότι αν  $A_n(x)/x = p_0 + p_1x + \dots + p_{n-1}x^{n-1}$ , τότε  $p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ .

28. Έστω

$$d_n(x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_n} x^{\text{exc}(w)}, \quad (2.39)$$

όπου  $\text{exc}(w)$  είναι το πλήθος των υπερβάσεων της  $w \in \mathcal{S}_n$  και  $\mathcal{D}_n$  είναι το σύνολο των μεταθέσεων του  $[n]$  χωρίς σταθερά σημεία.

(α) Δείξτε ότι  $d_{n,k} = d_{n,n-k}$ , όπου  $d_n(x) = \sum_{i=0}^n d_{n,k} x^k$ .

(β) Έστω  $\tilde{A}_n(x) = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{\text{des}(w)} = A_n(x)/x$ , όπου  $\tilde{A}_0(x) = 1$  κατά σύμβαση. Δείξτε ότι

$$d_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \tilde{A}_k(x). \quad (2.40)$$

Συνάγετε ότι το δεξιό μέλος της (2.40) έχει μη αρνητικούς (ακέραιους) συντελεστές.

(γ) Δείξτε ότι υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\lfloor n/2 \rfloor}$  τέτοιοι ώστε

$$d_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_i x^i (1+x)^{n-2i}. \quad (2.41)$$

Συνάγετε ότι για τους συντελεστές του  $d_n(x)$  ισχύουν οι ανισότητες  $d_{n,0} \leq d_{n,1} \leq \dots \leq d_{n,\lfloor n/2 \rfloor}$ .

29. Έστω ακέραιοι  $1 \leq k \leq n$  και έστω

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^m p_i q^i,$$

όπου  $m = k(n-k)$ . Δείξτε ότι  $p_i = p_{m-i}$  για  $0 \leq i \leq m$ . Γενικεύστε για τους  $q$ -πολυωνυμικούς συντελεστές.

30. Έστω μεταβλητές  $x, y, q$  για τις οποίες ισχύουν  $qx = xq$ ,  $qy = yq$  και  $yx = qxy$ . Δείξτε ότι για μη αρνητικούς ακεραίους  $n$  ισχύει

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}.$$

31. Δείξτε ότι για ακεραίους  $1 \leq k \leq n$  ισχύει ο τύπος

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{n-k} q^{n-k-i} \begin{bmatrix} n-i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

(α) υπολογιστικά,

(β) χρησιμοποιώντας μια από τις συνδυαστικές ερμηνείες των  $q$ -διωνυμικών συντελεστών.

32. Για θετικούς ακεραίους  $n$  θέτουμε

$$C_n(q) = \frac{1}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q.$$

(α) Δείξτε ότι

$$C_n(q) = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q - q \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix}_q.$$

(β) Συνάγετε ότι το  $C_n(q)$  είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού  $n(n-1)$  στο  $q$  με ακέραιους συντελεστές.

(γ) Έστω  $m = n(n - 1)$  και  $C_n(q) = \sum_{i=0}^m p_i q^i$ . Δείξτε ότι  $p_i = p_{m-i}$  για  $0 \leq i \leq m$ .

(δ) Δείξτε ότι το  $C_n(q)$  έχει μη αρνητικούς συντελεστές.

33. Έστω  $V$  ένας γραμμικός χώρος διάστασης  $n$  πάνω σε ένα (πεπερασμένο) σώμα  $\mathbb{F}_q$  με  $q$  στοιχεία, όπου  $q$  είναι δύναμη πρώτου αριθμού. Δείξτε ότι:

(α) Το πλήθος των γραμμικών υπόχωρων διάστασης  $k$  του  $V$  είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

(β) Για θετικούς ακεραίους  $n_1, n_2, \dots, n_r$  με άθροισμα  $n$ , ο  $q$ -πολυωνυμικός συντελεστής

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_r \end{bmatrix}_q$$

είναι ίσος με το πλήθος των αλυσίδων

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{r-1} \subset V$$

γραμμικών υπόχωρων του  $V$ , τέτοιων ώστε  $\dim(V_i) = n_1 + \dots + n_i$  για  $1 \leq i \leq r - 1$ .

(γ) Το πλήθος των αλυσίδων  $\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V$  γραμμικών υπόχωρων του  $V$ , τέτοιων ώστε  $\dim(V_i) = i$  για  $1 \leq i \leq n - 1$ , είναι ίσο με  $[n]!_q$ .

## Υποδείξεις - Λύσεις

1. Θεωρούμε την απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow B_n$  που ορίστηκε στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.1 και την απεικόνιση  $\psi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  με  $\psi(w) = w^{-1}$  για  $w \in \mathcal{S}_n$ . Με τη σύνθεση (1-1 αντιστοιχία)  $\varphi \circ \psi : \mathcal{S}_n \rightarrow B_n$ , το σύνολο των μεταθέσεων τις οποίες θέλουμε να απαριθμήσουμε στις δύο περιπτώσεις απεικονίζεται στο σύνολο των διανυσμάτων  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B_n$  για τα οποία ισχύουν: (α)  $a_i = i - 1$  για  $1 \leq i \leq k$  στην πρώτη περίπτωση και (β)  $a_k = k - 1$  στη δεύτερη περίπτωση. Συνεπώς η απάντηση είναι  $n!/k!$  για το (α) και  $n!/k$  για το (β).
2. Γράφοντας  $s_i = (i \ i + 1)$  για  $1 \leq i \leq n - 1$ , παρατηρήστε ότι  $ws_i$  είναι η αναδιάταξη που προκύπτει από τη  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$  εναλλάσσοντας τα  $w_i$  και  $w_{i+1}$ . Συμπεράνετε ότι η  $w$  μπορεί να γραφεί ως γινόμενο  $k$  γειτονικών αντιμεταθέσεων αν και μόνο αν η αναδιάταξη  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  μπορεί να προκύψει από την ταυτοτική αναδιάταξη  $(1, 2, \dots, n)$  με  $k$  γειτονικές εναλλαγές αυτού του είδους και δείξτε ότι η ελάχιστη δυνατή τιμή του  $k$  είναι ίση με  $\text{inv}(w)$ .
3. Για το (α) ακολουθήστε το σκεπτικό στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.3, ή θέστε όπου  $q$  το  $1/q$  στη γεννήτρια συνάρτηση (2.2). Για το (β) θα χρησιμοποιήσουμε το εξής γενικότερο αποτέλεσμα. Ένα πολυώνυμο  $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i$  βαθμού  $m$  με μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές λέγεται *παλινδρομικό και μονότροπο* αν  $a_i = a_{m-i}$  για  $0 \leq i \leq m$  και  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{\lfloor m/2 \rfloor}$ . Το μέρος (α) του ακόλουθου λήμματος είναι εύκολο, ενώ το (β) προκύπτει από το (α) (οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη).

**Λήμμα 2.4.1** Για  $m \in \mathbb{N}$ , θεωρούμε τα πολυώνυμα  $\varphi_k(x) = \sum_{i=0}^{m-k} x^i$  για  $0 \leq k \leq \lfloor m/2 \rfloor$ .

- (α) Ένα πολυώνυμο  $f(x)$  βαθμού  $m$  με μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές είναι παλινδρομικό και μονότροπο αν και μόνο αν το  $f(x)$  γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{\lfloor m/2 \rfloor}(x)$  με μη αρνητικούς συντελεστές.
- (β) Έστω πολυώνυμο  $f(x), g(x)$  με μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές. Αν τα  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι παλινδρομικά και μονότροπα, τότε το ίδιο ισχύει για το γινόμενο  $f(x)g(x)$ .

Εφαρμόζοντας το μέρος (β) στο δεξιό μέλος της (2.2) προκύπτει το ζητούμενο.

4. Για το (α) παρατηρήστε ότι  $\epsilon(w) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}$  και συνεπώς ότι

$$\begin{aligned} \epsilon(uv) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{u(v(i)) - u(v(j))}{i - j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{u(v(i)) - u(v(j))}{v(i) - v(j)} \cdot \epsilon(v) \\ &= \prod_{1 \leq a < b \leq n} \frac{u(a) - u(b)}{a - b} \cdot \epsilon(v) = \epsilon(u)\epsilon(v). \end{aligned}$$

Για το (β) παρατηρήστε ότι  $\text{inv}(w) = 2(b - a) - 1$  αν  $w = (a \ b)$  με  $a < b$ . Για το (γ) χρησιμοποιήστε τα (α) και (β).

5. Θέτοντας  $q = -1$  στην (2.2), δείξτε ότι η απάντηση στο (α) είναι 1 αν  $n = 1$  και  $n!/2$  αν  $n \geq 2$ . Θέτοντας  $q = \omega$  στην (2.2), όπου  $\omega \neq 1$  είναι μία τρίτη ρίζα της μονάδος, προκύπτει ότι  $a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 = 0$  για  $n \geq 3$ , όπου  $a_i$  είναι το πλήθος των  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $\text{inv}(w) \equiv i \pmod{3}$ . Από τη σχέση αυτή και την  $\omega^2 = -1 - \omega$  προκύπτει ότι  $(a_0 - a_2) + (a_1 - a_2)\omega = 0$  και συνεπώς ότι  $a_0 = a_1 = a_2$  (αφού τα  $1, \omega$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα επί του  $\mathbb{Q}$ ). Άρα, η απάντηση στο (β) είναι 1 αν  $n \leq 2$  και  $n!/3$  αν  $n \geq 3$ . Εργαζόμενοι παρόμοια με το δακτύλιο  $\mathbb{Q}[x]/\langle 1+x+\dots+x^{k-1} \rangle$ , στον οποίο τα μονώνυμα  $1, x, \dots, x^{k-2}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα επί του  $\mathbb{Q}$ , βρίσκουμε ότι για  $n \geq k$ , το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $\text{inv}(w) \equiv i \pmod{k}$  είναι ίσο με  $n!/k$  για κάθε  $i$ .
- 6.
7. Θεωρήστε πρώτα την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  που ορίστηκε στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.5. Δείξτε ότι για κάθε  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$  το  $w_i$  είναι από αριστερά προς τα δεξιά ελάχιστο της  $\varphi(w)$  αν και μόνο αν το  $w_i$  είναι το ελάχιστο στοιχείο του κύκλου που το περιέχει στην κυκλική μορφή της  $w$  και συνάγετε ότι το (α) είναι ίσο με το (ε). Για την ισότητα των (α), (β), (γ) και (δ) χρησιμοποιήστε 1-1 αντιστοιχίες όπως εκείνη στην Πρόταση 2.2.3.
- 8.
9. Υπάρχουν  $\binom{n-1}{k-1}(k-1)!$  τρόποι να επιλεγεί ο κύκλος της  $w$  που περιέχει το 1 και  $(n-k)!$  τρόποι να σχηματισθούν οι υπόλοιποι κύκλοι της  $w$ . Κατά συνέπεια, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με  $(n-1)!$  και συνεπώς ανεξάρτητο του  $k$ .
10. Για το (α) παρατηρήστε πρώτα ότι κάθε κύκλος μήκους  $r$  στην  $\mathcal{S}_n$  μπορεί να γραφεί ως γινόμενο  $r-1$  αντιμεταθέσεων και συνάγετε ότι  $\ell_T(w) \leq n - c(w)$  για κάθε  $w \in \mathcal{S}_n$ . Παρατηρήστε έπειτα ότι  $c(wt) - c(w) \in \{-1, 1\}$  για κάθε  $w \in \mathcal{S}_n$  και κάθε αντιμετάθεση  $t \in \mathcal{S}_n$ . Συμπεράνετε ότι ισχύει  $c(t_1 t_2 \dots t_k) \geq n - k$  για τυχαίες αντιμεταθέσεις  $t_1, t_2, \dots, t_k$  στην  $\mathcal{S}_n$  και συνάγετε ότι  $\ell_T(w) \geq n - c(w)$  για κάθε  $w \in \mathcal{S}_n$ . Το (β) είναι άμεση συνέπεια του (α) και της Πρότασης 2.2.2.
11. Το (α) προκύπτει άμεσα από το (γ), αφού  $c(w) = c_1(w) + c_2(w) + \dots + c_n(w)$ , ή παραγωγίζοντας την (2.3) και θέτοντας  $x = 1$ . Για το (γ), παρατηρήστε ότι το άθροισμα στο αριστερό μέλος της προτεινόμενης ισότητας απαριθμεί το σύνολο  $S$  των ζευγών  $(w, \gamma)$  μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  και κύκλων  $\gamma$  μήκους  $k$  για τα οποία ο  $\gamma$  εμφανίζεται στην κυκλική μορφή της  $w$ . Δείξτε ότι υπάρχουν  $\binom{n}{k}(k-1)!$  κύκλοι  $\gamma$  μήκους  $k$  στην  $\mathcal{S}_n$  και ότι για δοσμένο  $\gamma$  υπάρχουν ακριβώς  $(n-k)!$  μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $(w, \gamma) \in S$  για να συμπεράνετε ότι το πλήθος των στοιχείων του  $S$  είναι ίσο με  $n!/k$ . Για το (β) χρησιμοποιήστε παρόμοιο σκεπτικό, ή παραγωγίστε την (2.3) και θέστε  $x = -1$ .
12. Θεωρήστε την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  που ορίστηκε στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.5. Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία του  $\{2, \dots, n\}$  που περιέχονται στον κύκλο της  $w$  που περιέχει το 1 είναι ακριβώς αυτά που εμφανίζονται στα δεξιά του 1 στην αναδιάταξη  $\varphi(w)$  και συμπεράνετε το ζητούμενο.
13. (α) Υποθέστε ότι  $x \in \mathbb{N}$  και απαριθμήστε το σύνολο των απεικονίσεων  $f : [n] \rightarrow [x]$  με δύο διαφορετικούς τρόπους.

(β) Χρησιμοποιήστε τη σχέση

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} c(n, k) x^k,$$

η οποία προκύπτει από τη (2.3) θέτοντας όπου  $x$  το  $-x$ , την ταυτότητα του μέρους (α) και το γεγονός ότι τα πολυώνυμα  $x(x-1)\cdots(x-n+1)$  για  $n \in \mathbb{N}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(γ) Έστω  $\mathcal{A}(n, r)$  το σύνολο των ζευγών  $(w, \pi)$ , όπου  $w \in \mathcal{S}_n$  και  $\pi$  είναι διαμέριση του συνόλου των κύκλων της  $w$  με  $r$  μέρη. Για  $\alpha = (w, \pi) \in \mathcal{A}(n, r)$  θέτουμε  $w(\alpha) = (-1)^{n-k}$ , όπου  $k$  είναι το πλήθος των κύκλων της  $w$ . Η περίπτωση  $r = n$  δεν παρουσιάζει δυσκολίες. Υποθέτοντας λοιπόν ότι  $r < n$ , ζητούμε να δείξουμε ότι το άθροισμα των τιμών της  $w$  πάνω στο σύνολο  $\mathcal{A}(n, r)$  είναι ίσο με μηδέν. Συνεπώς αρκεί να βρούμε μια αυτοαντίστροφη απεικόνιση  $\tau : \mathcal{A}(n, r) \rightarrow \mathcal{A}(n, r)$  χωρίς σταθερά σημεία, τέτοια ώστε  $w(\tau(\alpha)) = -w(\alpha)$  για  $\alpha \in \mathcal{A}(n, r)$ . Για  $\alpha = (w, \pi) \in \mathcal{A}(n, r)$  συμβολίζουμε με  $\pi_0$  τη διαμέριση του  $[n]$  για την οποία δύο στοιχεία του  $[n]$  ανήκουν στο ίδιο μέρος της  $\pi_0$  αν και μόνο αν οι κύκλοι της  $w$  που περιέχουν τα στοιχεία αυτά ανήκουν στο ίδιο μέρος της  $\pi$ . Έστω  $i \in [n]$  ο μικρότερος ακέραιος που δεν είναι μόνος στο μέρος  $B$  της  $\pi_0$  που τον περιέχει και έστω  $j \in [n]$  ο μεγαλύτερος ακέραιος που ανήκει στο  $B$ . Θέτουμε  $\tau(\alpha) = (\tilde{w}, \tilde{\pi})$ , όπου  $\tilde{w}$  είναι το γινόμενο  $w(i, j)$  της  $w$  με την αντιμετάθεση  $(i, j)$  και η  $\tilde{\pi}$  ορίζεται από τη σχέση  $(\tilde{\pi})_0 = \pi_0$ . Παρατηρούμε ότι η  $\tilde{w}$  προκύπτει από τη  $w$  διασπώντας κατάλληλα τον κύκλο που περιέχει τα  $i, j$  σε δύο κύκλους, ή συνενώνοντας κατάλληλα τους δύο κύκλους της  $w$  που περιέχουν τα  $i, j$  σε έναν και αφήνουμε στον αναγνώστη να βεβαιωθεί ότι η  $\tau : \mathcal{A}(n, r) \rightarrow \mathcal{A}(n, r)$  έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

(δ) Όπως στη λύση του (γ) διαπιστώνουμε ότι το αριστερό μέλος της προτεινόμενης ισότητας είναι ίσο με  $\#\mathcal{A}(n, r)$ . Παρατηρούμε ότι το τελευταίο είναι επίσης ίσο με το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί μια διαμέριση  $\pi$  του συνόλου  $[n]$  με  $r$  μέρη και να οριστεί μια μετάθεση (σε κυκλική μορφή) για κάθε μέρος της  $\pi$ . Κατά συνέπεια, το γινόμενο του  $\#\mathcal{A}(n, r)$  με  $r!$  απαριθμεί το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί μια διατεταγμένη διαμέριση  $(B_1, B_2, \dots, B_r)$  του συνόλου  $[n]$  με  $r$  μέρη και να οριστεί μια αναδιάταξη για κάθε μέρος  $B_i$ . Το τελευταίο είναι επίσης ίσο με το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν μια αναδιάταξη  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  του συνόλου  $[n]$  και μια διαμέρισή του σε  $r$  μέρη της μορφής  $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_j\}$ , και συνεπώς ίσο με  $n! \binom{n-1}{r-1}$ .

14. Έστω  $\mathcal{S}_\lambda$  το σύνολο των μεταθέσεων  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  τύπου  $\lambda$  και  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  η διαμέριση του  $n$  που έχει  $m_i$  μέρη ίσα με  $i$ , για  $1 \leq i \leq n$ . Για το (β) θεωρήστε την απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_\lambda$  με

$$\varphi(w) = (w_1 \cdots w_{\mu_1}) (w_{\mu_1+1} \cdots w_{\mu_2}) \cdots (w_{\mu_{r-1}+1} \cdots w_{\mu_r})$$

σε κυκλική μορφή, αν  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$  ως αναδιάταξη, όπου έχουμε θέσει  $\mu_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_i$  για  $1 \leq i \leq r$ . Δείξτε ότι για κάθε  $\sigma \in \mathcal{S}_\lambda$  υπάρχουν ακριβώς  $\lambda$  μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $\varphi(w) = \sigma$  και εφαρμόστε την Πρόταση 1.1.2 (β). Για το (γ)



παρατηρήστε ότι μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  έχει την ιδιότητα  $w = w^{-1}$  αν και μόνο αν η  $w$  έχει μόνο κύκλους μήκους 1 και 2. Συμπεράνετε από το (β) ότι

$$a_n = \sum_{m_1, m_2} \frac{n!}{m_1! 2^{m_2} m_2!},$$

όπου το άθροισμα του δεξιού μέλους διατρέχει τα ζεύγη  $(m_1, m_2)$  μη αρνητικών ακεραιών με  $m_1 + 2m_2 = n$ , και συνάγετε το ζητούμενο.

15. Θέτοντας  $k = 2$  στο Πρόβλημα 2.2.2 προκύπτει ότι το ζητούμενο πλήθος των μεταθέσεων είναι ίσο με  $2^n - n - 1$ . Δώστε μια πιο άμεση απόδειξη ως εξής: Παρατηρήστε ότι η  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$  έχει ακριβώς μία καθόδο αν και μόνο αν για κάποιο (μοναδικό) δείκτη  $i \in [n-1]$  ισχύει  $w_1 < \dots < w_i > w_{i+1} < \dots < w_n$ . Δείξτε ότι η απεικόνιση  $\varphi$  από το σύνολο των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με μία ακριβώς καθόδο στο σύνολο  $2^{[n]} \setminus \{[k] : 0 \leq k \leq n\}$  που ορίζεται θέτοντας  $\varphi(w) = \{w_1, \dots, w_i\}$  είναι αμφιμονοσήμαντη και συνάγετε το ζητούμενο.
16. Για το πρώτο ζητούμενο χρησιμοποιήστε τη σχέση (1.25), ή απαριθμήστε τα  $(n+1)$ -υποσύνολα του  $[n+m+1]$  ως προς το μέγιστο στοιχείο τους. Για το δεύτερο ζητούμενο θεωρούμε την ταυτότητα

$$x^4 = \binom{x}{4} + 11 \binom{x+1}{4} + 11 \binom{x+2}{4} + \binom{x+3}{4},$$

η οποία προκύπτει από το Πρόβλημα 2.2.1. Θέτοντας  $x = i$ , αθροίζοντας και χρησιμοποιώντας την (2.28) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m i^4 &= \binom{m+1}{5} + 11 \binom{m+2}{5} + 11 \binom{m+3}{5} + \binom{m+4}{5} \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}. \end{aligned}$$

17. (α) Παραγωγίστε τη σχέση που προκύπτει από την (2.7), θέτοντας όπου  $n$  το  $n-1$ . Διαφορετικά, παρατηρήστε ότι αν η  $w \in \mathcal{S}_n$  έχει  $k$  καθόδους, τότε η  $\varphi(w) \in \mathcal{S}_{n-1}$  που προκύπτει ως αναδιάταξη διαγράφοντας το  $n$  από την αναδιάταξη  $w$  έχει  $k-1$  ή  $k$  καθόδους και για  $\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}$ , υπολογίστε το πλήθος των  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $k$  καθόδους και  $\varphi(w) = \sigma$ .

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.7), υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} A_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} (1-x)^{n+1} \left( \sum_{r \geq 0} r^n x^r \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= (1-x) \sum_{r \geq 0} x^r \left( \sum_{n \geq 0} (1-x)^n r^n \frac{t^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-x) \sum_{r \geq 0} x^r e^{(1-x)tr} \\
&= \frac{1-x}{1-xe^{(1-x)t}}.
\end{aligned}$$

Διαφορετικά, πολλαπλασιάστε με  $x^k t^{n-1}/(n-1)!$  την αναγωγική σχέση (2.29) του μέρους (α) και αθροίστε πάνω στους ακεραίους  $k \geq 0$  και  $n \geq 1$ . Συνάγετε ότι το αριστερό μέλος, έστω  $F(x, t)$ , της (2.30) ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = x \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) + x \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{x}, xt\right) + x,$$

$$F(x, 0) = 1.$$

Δείξτε ότι το δεξιό μέλος της (2.30) ικανοποιεί επίσης τις παραπάνω εξισώσεις και συνάγετε το ζητούμενο.

18. Παρατηρήστε ότι ο ακέραιος  $r!S(n, r)$  είναι ίσος με το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων  $(B_1, \dots, B_r)$  του συνόλου  $[n]$  με  $r$  μέρη. Από μια τέτοια διατεταγμένη διαμέριση  $\pi$  ορίζεται μια μετάθεση  $\varphi(\pi) \in \mathcal{S}_n$  παραθέτοντας τα στοιχεία κάθε μέρους της  $\pi$  σε αύξουσα διάταξη. Για παράδειγμα αν  $n = 8$  και  $\pi = (\{1, 5\}, \{3, 6, 8\}, \{2\}, \{4, 7\})$ , τότε  $\varphi(\pi) = (1, 5, 3, 6, 8, 2, 4, 7)$ . Δείξτε ότι αν  $w \in \mathcal{S}_n$  είναι τυχαία μετάθεση με  $k-1$  καθόδους, τότε υπάρχουν ακριβώς  $\binom{n-k}{r-k}$  διατεταγμένες διαμερίσεις  $\pi$  τέτοιες ώστε  $\varphi(\pi) = w$  και συμπεράνετε ότι ισχύει το (α). Το (β) μπορεί να προκύψει από το (α) αντικαταθιστώντας το  $r!S(n, r)$  στο δεξιό μέλος της (2.32) με το δεξιό μέλος της (2.31) και αλλάζοντας τη σειρά της άθροισης.
19. Έστω η απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  η οποία ορίζεται ως εξής: Για δένδρο  $T \in \mathcal{T}_n$  με ρίζα  $r$  (όπου  $r = 1$ ) και με αριστερό και δεξιό υποδένδρο της ρίζας  $T_1$  και  $T_2$ , αντίστοιχα, θέτουμε  $\varphi(T) = (\varphi(T_1), r, \varphi(T_2))$ , όπου τα  $\varphi(T_1)$  και  $\varphi(T_2)$  ορίζονται επαγωγικά με παρόμοιο τρόπο. Για παράδειγμα για  $n = 3$ , στα έξι δένδρα του Σχήματος 2.4 αντιστοιχούν οι μεταθέσεις

$$(3, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2),$$

σε μορφή αναδιάταξης. Δείξτε ότι η  $\varphi$  είναι 1-1 αντιστοιχία και ότι το πλήθος των καθόδων της  $\varphi(T)$  είναι ίσο με το πλήθος των κορυφών του  $T$  με μη κενό αριστερό υποδένδρο.

20. Έστω η απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$  η οποία ορίζεται ως εξής: Αν  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$ , τότε  $\varphi(w)$  είναι το δένδρο στο σύνολο κορυφών  $\{0, 1, \dots, n\}$  με ρίζα 0, στο οποίο για  $j \in [n]$ , ο γονέας της κορυφής  $w_j$  είναι η κορυφή  $w_i$  όπου  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος με  $i < j$  και  $w_i < w_j$  και όπου έχουμε θέσει  $w_0 = 0$ . Για παράδειγμα για  $n = 3$ , στα έξι δένδρα του Σχήματος 2.5 απεικονίζονται οι μεταθέσεις

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1),$$

αντίστοιχα. Δείξτε ότι η  $\varphi$  είναι 1-1 αντιστοιχία, ότι το  $i \in [n-1]$  είναι κάθοδος της  $w$  αν και μόνο αν η κορυφή  $w_i$  είναι φύλλο του δένδρου  $\varphi(w)$  και ότι η  $w_i$  έχει γονέα

το 0 στο  $\varphi(w)$  αν και μόνο αν το  $w_i$  είναι από αριστερά προς τα δεξιά ελάχιστο της  $w$  (βλέπε Άσκηση 7).

21.

22.

23. Για την ισότητα των (α) και (β) χρησιμοποιήστε την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $\psi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  με  $\psi(w) = w^{-1}$  και παρατηρήστε ότι το  $i$  είναι ασθενής υπέρβαση της  $w$  αν και μόνο αν  $w^{-1}(i) \leq i$ . Για την ισότητα των (β) και (γ) χρησιμοποιήστε την παλινδρομικότητα των πολυωνύμων του Euler και την Πρόταση 2.2.5.

24. (αβ) Έστω  $E_n$  το σύνολο των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με τη δοσμένη ιδιότητα και έστω  $u_n \in \mathcal{S}_n$  η μοναδική μετάθεση του  $[n]$  χωρίς άνοδο. Συμβολίζουμε με  $f(w) \in \mathcal{S}_{n-1}$  τη μετάθεση που προκύπτει από τη  $w \in \mathcal{S}_n$  αγνοώντας το  $w(n)$  και αντικαθιστώντας το  $w(i)$  με το  $w(i) - 1$  για κάθε δείκτη  $i$  με  $w(i) > w(n)$ . Παρατηρούμε ότι  $f(w) \in E_{n-1}$  για κάθε  $w \in E_n$ , εκτός του  $w = u_n$  όταν το  $n$  είναι άρτιος αριθμός. Παρατηρούμε επίσης ότι  $\#f^{-1}(w) = n$  για κάθε  $w \in E_{n-1}$ , εκτός του  $w = u_{n-1}$  όταν το  $n$  είναι περιττός αριθμός, οπότε  $\#f^{-1}(w) = n - 1$ . Ο ζητούμενος αναγωγικός τύπος του (α) προκύπτει από τις παρατηρήσεις αυτές. Το (β) είναι άμεση συνέπεια του (α) και του τύπου (2.21).

(γ) Συμβολίζουμε με  $\mathcal{D}_n$  το σύνολο των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  χωρίς σταθερά σημεία. Γράφουμε μια μετάθεση  $w \in \mathcal{D}_n$  σε κυκλική μορφή, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο κάθε κύκλου να εμφανίζεται δεύτερο από αριστερά και έτσι ώστε οι κύκλοι της  $w$  να είναι διαταγμένοι σε φθίνουσα σειρά των ελάχιστων στοιχείων τους. Έστω  $\varphi(w)$  η μετάθεση του  $[n]$  η οποία προκύπτει, ως αναδιάταξη, παραθέτοντας τα στοιχεία του  $[n]$  από αριστερά προς τα δεξιά με τη σειρά με την οποία εμφανίζονται στην παραπάνω κυκλική μορφή της  $w$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 9$  και  $w = (3419)(765)(28)$  σε κυκλική μορφή, τότε  $w = (657)(82)(4193)$  επίσης σε κυκλική μορφή και  $\varphi(w) = (6, 5, 7, 8, 2, 4, 1, 9, 3)$ . Αφήνουμε στον αναγνώστη να δείξει ότι  $\varphi(w) \in E_n$  για κάθε  $w \in \mathcal{D}_n$  και ότι η απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{D}_n \rightarrow E_n$  που προκύπτει είναι 1-1 αντιστοιχία. Η άσκηση αυτή και η παραπάνω λύση οφείλονται στον J. Désarménien [Sém. Lothar. Combin. **8** (1984), 11-16].

25. Παρατηρήστε πρώτα ότι  $f_{i-1} = i! \binom{n}{i}$  για  $0 \leq i \leq n$  και ότι

$$\begin{aligned} h_k &= [x^k] \sum_{i=0}^n f_{i-1} (x-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-i-k} f_{i-1} \binom{n-i}{k} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-i-k} i! \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-i-k} \frac{(n-k)!}{(n-k-i)!} \end{aligned}$$

και χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2.2.6.

26. Δείξτε ότι τα στοιχεία της γραμμής  $n$  απαριθμούν το πλήθος των εναλλασσουσών μεταθέσεων  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$  με  $w_1 \leq k$ , για  $k = 0, 1, \dots, n$ .
27. Δοσμένης μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}_n$ , θέτουμε  $w_i = w(i)$  για  $1 \leq i \leq n$  και  $w_0 = w_{n+1} = n+1$ , όπως πράξαμε μετά την εκφώνηση της Πρότασης 2.2.8. Ονομάζουμε ένα δείκτη  $j \in [n]$  κορυφή (αντίστοιχα, κοιλάδα) της  $w$  αν  $w_{j-1} < w_j > w_{j+1}$  (αντίστοιχα,  $w_{j-1} > w_j < w_{j+1}$ ). Συμβολίζοντας με  $\text{peak}(w)$  το πλήθος των κορυφών της  $w$ , θα δείξουμε ότι η (2.38) ισχύει αν

$$\gamma_i = \frac{1}{2^{n-1-2i}} \#\{w \in \mathcal{S}_n : \text{peak}(w) = i\}$$

για  $0 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ . Θα βασιστούμε στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.8. Για μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}_n$  γράφουμε  $u \sim v$  αν  $v = (\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_r})(u)$  για κάποιες διπλές ανόδους ή καθόδους  $i_1, i_2, \dots, i_r$  της  $u$ . Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι η  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας στην  $\mathcal{S}_n$ , οπότε διαμερίζει την  $\mathcal{S}_n$  σε κλάσεις ισοδυναμίας. Για παράδειγμα, η κλάση της μετάθεσης του Σχήματος 2.2 έχει ακριβώς 16 στοιχεία. Γενικότερα, αν  $\text{peak}(w) = i$ , τότε κάθε μετάθεση στην κλάση  $O_w$  της  $w$  έχει  $i$  κορυφές και  $i+1$  κοιλάδες, άρα συνολικά  $n-1-2i$  διπλές ανόδους ή καθόδους, και ισχύουν  $\#O_w = 2^{n-1-2i}$  και

$$\sum_{v \in O_w} x^{\text{des}(v)} = x^i (1+x)^{n-1-2i}.$$

Αθροίζοντας πάνω σε όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας της  $\sim$  προκύπτει η (2.38). Το αποτέλεσμα αυτό πιθανώς αποδείχθηκε πρώτα από τους D. Foata και M.-P. Schützenberger [Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens, Lecture Notes in Mathematics **138**, Springer-Verlag, 1970]. Το ζητούμενο συμπέρασμα για τους συντελεστές του  $A_n(x)/x$  έπεται άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες των διωνύμων  $(1+x)^{n-1-2i}$ .

28. Για το (α) χρησιμοποιήστε την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $\psi : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{D}_n$  με  $\psi(w) = w^{-1}$  και παρατηρήστε ότι το  $i$  είναι υπέρβαση της  $w \in \mathcal{D}_n$  αν και μόνο αν το  $i$  δεν είναι υπέρβαση της  $w^{-1}$ . Για το (β), σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.5 έχουμε

$$\tilde{A}_n(x) = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{\text{exc}(w)}.$$

Θεωρώντας το σύνολο των σταθερών σημείων της  $w \in \mathcal{S}_n$  στο προηγούμενο άθροισμα, συμπεράνετε ότι

$$\tilde{A}_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k(x)$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Από αυτό και το Λήμμα 1.3.1 συνάγετε ότι ισχύει η (2.40) για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Το αποτέλεσμα αυτό περιέχεται στην Πρόταση 2.4 του άρθρου [R.P. Stanley, *Subdivisions and local h-vectors*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 805–851], όπου το  $d_n(x)$  ερμηνεύεται ως το τοπικό  $h$ -πολυώνυμο της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του μονόπλοκου διάστασης  $n-1$ . Το (γ) μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο στη λύση της Άσκησης 27. Για τις λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στο άρθρο

των C.A. Athanasiadis και C. Savvidou, [*The local h-vector of the cluster subdivision of a simplex*, Sémin. Lothar. Combin. **66** (2012), Article B66c, 21pp (electronic)]. Το πολυώνυμο  $d_n(x)$  μελετήθηκε πρώτα από τον F. Brenti, [*Unimodal polynomials arising from symmetric functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 1133–1141].

29. Δείξτε ότι  $q^m f(1/q) = f(q)$ , όπου  $f(q)$  είναι το δεξιό μέλος της (2.24), ή χρησιμοποιήστε τη συνδυαστική ερμηνεία για τους συντελεστές  $p_i$  που προκύπτει από την Πρόταση 2.3.1 (ή από την Πρόταση 2.3.2).
30. Παρατηρήστε ότι το  $(x+y)^n$  είναι ίσο με το άθροισμα των  $2^n$  μονωνύμων της μορφής  $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ , με  $u_i \in \{x, y\}$  για κάθε  $i$  και ότι ισχύει  $u = q^{\text{inv}(\sigma)} x^k y^{n-k}$ , όπου  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{A}(k, n-k)$  είναι η αναδιάταξη με  $\sigma_i = 1$  αν  $u_i = x$  και  $\sigma_i = 2$  αν  $u_i = y$ . Συνάγετε το ζητούμενο από την Πρόταση 2.3.1.
31. Για το (α), χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.25), δείξτε ότι

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

και συνεχίστε με επαγωγή στο  $n-k$ . Για το (β) χρησιμοποιήστε π.χ. την Πρόταση 2.3.2 και παρατηρήστε ότι ο συντελεστής του  $q^j$  στο πολυώνυμο

$$q^{n-k-i} \begin{bmatrix} n-i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

είναι ίσος με το πλήθος των διαμερίσεων του  $j$  με  $k$  ή λιγότερα μέρη και μέγιστο μέρος ίσο με  $n-k-i$ .

32.

33. (α) Ως γνωστόν, ο χώρος  $V$  έχει ακριβώς  $q^n$  στοιχεία. Έστω  $f(n, k)$  το πλήθος των γραμμικών υπόχωρων διάστασης  $k$  του  $V$  και έστω  $g(n, k)$  το πλήθος των ακολουθιών  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  μήκους  $k$  γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του  $V$ . Παρατηρούμε ότι

$$g(n, k) = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})$$

διότι υπάρχουν  $q^n - 1$  τρόποι να επιλέξουμε το  $v_1$  ώστε  $v_1 \in V - \{0\}$ ,  $q^n - q$  τρόποι να επιλέξουμε το  $v_2 \in V$  ώστε να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο του  $v_1$ ,  $q^n - q^2$  τρόποι να επιλέξουμε το  $v_3 \in V$  ώστε να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο των  $v_1, v_2$  και ούτω καθεξής. Επίσης έχουμε

$$g(n, k) = f(n, k) (q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})$$

διότι υπάρχουν  $f(n, k)$  τρόποι να επιλέξουμε το γραμμικό υπόχωρο  $W$  του  $V$  διάστασης  $k$  που παράγουν τα  $v_1, v_2, \dots, v_k$  και έπειτα  $q^k - 1$  τρόποι να επιλέξουμε το  $v_1$  ώστε  $v_1 \in W - \{0\}$ ,  $q^k - q$  τρόποι να επιλέξουμε το  $v_2 \in W$  ώστε να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο του  $v_1$  και ούτω καθεξής. Προκύπτει ότι

$$(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}) f(n, k) = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1}),$$

δηλαδή ότι  $f(n, k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ .

(β) Σύμφωνα με το (α), υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1 \end{bmatrix}_q$$

τρόποι να επιλέξουμε τον υπόχωρο  $V_1$  του  $V$  ώστε  $\dim(V_1) = n_1$ . Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο  $r$  βλέπουμε ότι, με δεδομένη την επιλογή του  $V_1$ , υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} n - n_1 \\ n_2, \dots, n_r \end{bmatrix}_q$$

επιλογές για την  $(V_2, \dots, V_{r-1})$ , διότι οι ακολουθίες αυτές αντιστοιχούν στις αλυσίδες  $\{0\} \subset W_2 \subset \dots \subset W_{r-1} \subset V/V_1$  γραμμικών υπόχωρων του χώρου πηλίκου  $V/V_1$ , τέτοιων ώστε  $\dim(W_i) = n_2 + \dots + n_i$  για  $2 \leq i \leq r-1$ . Το ζητούμενο προκύπτει από την ταυτότητα

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n - n_1 \\ n_2, \dots, n_r \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_r \end{bmatrix}_q.$$

Το (γ) είναι η ειδική περίπτωση  $n_1 = \dots = n_r = 1$  του (β).

# Κεφάλαιο 3

## Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Η έννοια της εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης δίνει έναν τρόπο για να παρασταθεί μια ακολουθία ως τυπική δυναμοσειρά, διαφορετικό από εκείνον της συνήθους γεννήτριας συνάρτησης. Η χρησιμότητα της έννοιας αυτής οφείλεται κυρίως στη συνδυαστική ερμηνεία που επιδέχονται οι συντελεστές μιας τυπικής δυναμοσειράς η οποία προκύπτει προσθέτοντας, πολλαπλασιάζοντας ή συνθέτοντας εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τους βασικούς συνδυαστικούς νόμους που διέπουν τις πράξεις μεταξύ εκθετικών γεννητριών συναρτήσεων, καθώς και το νόμο αντιστροφής του Lagrange. Επίσης, θα περιγράψουμε διάφορες εφαρμογές σε προβλήματα απαρίθμησης, σχετιζόμενα κυρίως με την απαρίθμηση δένδρων και μεταθέσεων.

### 3.1 Ορισμοί και παραδείγματα

Έστω  $(a_n)$  μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, όπου  $n \in \mathbb{N}$ . Η τυπική δυναμοσειρά

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (3.1)$$

λέγεται *εκθετική γεννήτρια συνάρτηση* της  $(a_n)$ . Θα συμβολίζουμε την τυπική δυναμοσειρά (3.1) με  $E_f(x)$  αν  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι η συνάρτηση με  $f(n) = a_n$  για  $n \in \mathbb{N}$ , ώστε

$$E_f(x) = \sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}. \quad (3.2)$$

Για παράδειγμα, αν  $f(n) = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε

$$E_f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

(παραπέμπουμε στην Άσκηση 12 του Κεφαλαίου 1 για τις βασικές ιδιότητες αυτής της τυπικής δυναμοσειράς, τις οποίες θα χρησιμοποιούμε στο εξής). Επίσης, αν  $g(n)$  είναι το πλήθος των υποσυνόλων του  $[n]$ , τότε  $g(n) = 2^n$  για  $n \in \mathbb{N}$  και

$$E_g(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x},$$

αν  $h(n)$  είναι το πλήθος των αναδιατάξεων του  $[n]$ , τότε  $h(n) = n!$  για  $n \in \mathbb{N}$  και

$$E_h(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

και αν  $t(n)$  είναι το πλήθος των κυκλικών αναδιατάξεων του  $[n]$  (δηλαδή των κύκλων  $w \in \mathcal{S}_n$  μήκους  $n$ ), τότε (όπως διαπιστώσαμε στην Παράγραφο 2.2.2)  $t(n) = (n-1)!$  για  $n \geq 1$  και συνεπώς

$$E_t(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = \log \frac{1}{1-x}.$$

**Παράδειγμα 3.1.1** Έστω  $f(n)$  το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου  $[n]$ , κάθε μέρος των οποίων έχει ακριβώς δύο στοιχεία. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2.2 ή άλλο τρόπο (βλέπε επίσης Άσκηση 25 (α) του Κεφαλαίου 1), βρίσκουμε ότι

$$f(n) = \begin{cases} \frac{(2k)!}{2^k k!}, & \text{αν } n = 2k \\ 0, & \text{αν } n = 2k + 1 \end{cases}$$

και συνεπώς

$$E_f(x) = \sum_{k \geq 0} f(2k) \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(x^2/2)^k}{k!} = e^{x^2/2}.$$



## 3.2 Πράξεις

### 3.2.1 Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

Για την πρόσθεση εκθετικών γεννητριών συναρτήσεων, από την (1.12) βρίσκουμε ότι για  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  ισχύει

$$E_f(x) + E_g(x) = E_{f+g}(x),$$

όπου η  $f + g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  ορίζεται θέτοντας  $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$  για  $n \in \mathbb{N}$ . Για τον πολλαπλασιασμό εκθετικών γεννητριών συναρτήσεων έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 3.2.1** Δοσμένων των  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , ορίζουμε την  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  θέτοντας

$$h(\#X) = \sum_{(S,T)} f(\#S)g(\#T) \quad (3.3)$$

για τυχαίο πεπερασμένο σύνολο  $X$ , όπου στο άθροισμα του δεξιού μέλους το  $(S, T)$  διατρέχει τις ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις του  $X$  με δύο μέρη, δηλαδή τα ζεύγη  $(S, T)$  υποσυνόλων του  $X$  με  $S \cap T = \emptyset$  και  $S \cup T = X$ . Τότε ισχύει

$$E_h(x) = E_f(x)E_g(x).$$

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $\#X = n$ . Υπάρχουν  $\binom{n}{k}$  ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις  $(S, T)$  του  $X$  με  $\#S = k$ , οπότε  $\#T = n - k$ . Επομένως, από την (3.3) έχουμε

$$h(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)g(n-k).$$

Επίσης, θέτοντας  $a_n = f(n)/n!$  και  $b_n = g(n)/n!$  στην (1.13) για  $n \in \mathbb{N}$ , βρίσκουμε ότι  $E_f(x)E_g(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ , όπου

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{f(k)}{k!} \frac{g(n-k)}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)g(n-k) = \frac{1}{n!} h(n).$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι  $E_f(x)E_g(x) = \sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!} = E_h(x)$ .  $\square$

**Παρατήρηση 3.2.1** Οι εφαρμογές της Πρότασης 3.2.1 σε προβλήματα απαρίθμησης προκύπτουν από την εξής ερμηνεία. Έστω ότι  $f(\#S)$  είναι το πλήθος κάποιων συνδυαστικών δομών (όπως υποσύνολα, αναδιατάξεις, διαμερίσεις κ.ο.κ.) που υπάρχουν

σε ένα πεπερασμένο σύνολο  $S$ , τις οποίες ονομάζουμε δομές τύπου  $\alpha$ . Έστω επίσης ότι  $g(\#T)$  είναι το πλήθος των δομών τύπου  $\beta$  που υπάρχουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο  $T$ . Όπως υπονοεί ο συμβολισμός μας, υποθέτουμε ότι το πλήθος των δομών τύπου  $\alpha$  στο σύνολο  $S$  εξαρτάται μόνο από το  $\#S$  και ότι το ίδιο ισχύει για τις δομές τύπου  $\beta$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.1, αν  $h(\#X)$  είναι το πλήθος των τρόπων να διαμερίσουμε ασθενώς ένα πεπερασμένο σύνολο  $X$  σε ένα ζεύγος υποσυνόλων  $S$  και  $T$  και να επιλέξουμε μία δομή τύπου  $\alpha$  στο  $S$  και μία δομή τύπου  $\beta$  στο  $T$ , τότε οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των  $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  συνδέονται με τη σχέση  $E_h(x) = E_f(x)E_g(x)$ .  $\square$

Για παράδειγμα, αν  $h(\#X)$  είναι το πλήθος των τρόπων να διαμεριστεί ασθενώς ένα πεπερασμένο σύνολο  $X$  σε ένα ζεύγος υποσυνόλων  $S$  και  $T$  και να επιλεγεί ένα υποσύνολο του  $S$  και μία κυκλική αναδιάταξη του  $T$ , τότε

$$E_h(x) = \left( \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n \geq 0} (n-1)! \frac{x^n}{n!} \right) = e^{2x} \cdot \log \frac{1}{1-x}.$$

**Παράδειγμα 3.2.1** Έστω  $h(n)$  το πλήθος των τρόπων να διαμεριστεί ασθενώς ένα σύνολο  $X$  με  $n$  στοιχεία σε ένα ζεύγος υποσυνόλων  $S$  και  $T$  και να επιλεγεί ένα στοιχείο του  $T$ . Τότε ισχύει η (3.3), όπου  $f(\#S) = 1$  για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $S$  και  $g(\#T) = \#T$  για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $T$ . Έχουμε  $E_f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$  και

$$E_g(x) = \sum_{n \geq 0} n \cdot \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = xe^x.$$

Από την Πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι

$$E_h(x) = E_f(x)E_g(x) = xe^{2x} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} = \sum_{n \geq 1} n 2^{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

και συνεπώς  $h(n) = n 2^{n-1}$  για  $n \geq 1$ . Φυσικά, η σχέση αυτή μπορεί να προκύψει ευθέως από τις αρχές της Παραγράφου 1.1.2, αφού υπάρχουν  $n$  τρόποι να επιλεγεί ένα στοιχείο  $x$  του  $X$  και  $2^{n-1}$  τρόποι να επιλεγεί ένα υποσύνολο  $T$  του  $X$  έτσι ώστε  $x \in T$ , οπότε  $S = X \setminus T$ .

**Παράδειγμα 3.2.2** Θα συμβολίζουμε με  $\text{Fix}(\varphi)$  το σύνολο  $\{x \in A : \varphi(x) = x\}$  των σταθερών σημείων μιας απεικόνισης  $\varphi : A \rightarrow A$ . Παρατηρούμε ότι για τυχαία μετάθεση  $w : X \rightarrow X$  ενός πεπερασμένου συνόλου  $X$ , τα σύνολα  $S = \text{Fix}(w)$  και  $T = X \setminus S$  ορίζουν μια ασθενή διαμέριση  $(S, T)$  του  $X$  και ότι οι περιορισμοί

$u : S \rightarrow S$  και  $v : T \rightarrow T$  της  $w$  στα  $S$  και  $T$ , αντίστοιχα, είναι μεταθέσεις με  $\text{Fix}(u) = S$  και  $\text{Fix}(v) = \emptyset$ . Επιπλέον, για τυχαία ασθενή διαμέριση  $(S, T)$  του  $X$  και μεταθέσεις  $u : S \rightarrow S$  και  $v : T \rightarrow T$  με  $\text{Fix}(u) = S$  και  $\text{Fix}(v) = \emptyset$ , υπάρχει μοναδική μετάθεση  $w : X \rightarrow X$  που περιορίζεται στις  $u$  και  $v$ . Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (3.3), όπου

- $h(\#X)$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w : X \rightarrow X$ ,
- $f(\#S)$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $u : S \rightarrow S$  με  $\text{Fix}(u) = S$  και
- $g(\#T)$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $v : T \rightarrow T$  με  $\text{Fix}(v) = \emptyset$ .

Προφανώς έχουμε  $h(n) = n!$ ,  $f(n) = 1$  και  $g(n) = D_n$  για  $n \in \mathbb{N}$ , όπου  $D_n$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  χωρίς σταθερά σημεία, όπως στην Παράγραφο 2.2.6. Από την Πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι

$$\frac{1}{1-x} = E_h(x) = E_f(x)E_g(x) = e^x \sum_{n \geq 0} D_n \frac{x^n}{n!}$$

και συνεπώς

$$\sum_{n \geq 0} D_n \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{1-x}. \quad (3.4)$$

Φυσικά, η (3.4) είναι ισοδύναμη με τον τύπο (2.20) για το  $D_n$ .

**Παράδειγμα 3.2.3** Έστω  $a_n$  το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $w^2(i) = i$  για κάθε  $1 \leq i \leq n$  (ισοδύναμα, με  $w^{-1} = w$ ). Για παράδειγμα, έχουμε  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  και  $a_3 = 4$ .

Παρατηρούμε ότι για τη μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  ισχύει  $w^2(i) = i$  για  $1 \leq i \leq n$  αν και μόνο αν κάθε κύκλος στην κυκλική μορφή της  $w$  έχει μήκος 1 ή 2. Επομένως, το  $a_n$  απαριθμεί τους τρόπους να διαμερίσουμε ασθενώς το σύνολο  $[n]$  σε δύο μέρη  $S$  και  $T$  και να διαμερίσουμε το  $S$  σε μονοσύνολα (κύκλους μήκους 1) και το  $T$  σε μέρη με δύο στοιχεία το καθένα (κύκλους μήκους 2). Ισοδύναμα ισχύει η (3.3), όπου  $h(n) = a_n$ ,  $f(\#S)$  είναι το πλήθος των διαμερίσεων του  $S$  σε μονοσύνολα και  $g(\#T)$  είναι το πλήθος των διαμερίσεων του  $T$  σε μέρη με δύο στοιχεία. Προφανώς  $f(n) = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , άρα  $E_f(x) = e^x$ , ενώ στο Παράδειγμα 3.1.1 υπολογίσαμε ότι  $E_g(x) = e^{x^2/2}$ . Από τα παραπάνω και την Πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι  $E_h(x) = e^x \cdot e^{x^2/2}$ , δηλαδή

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = e^{x + \frac{x^2}{2}} \quad (3.5)$$

(βλέπε επίσης Άσκηση 14 του Κεφαλαίου 2). Από την (3.5) μπορούμε να εξάγουμε διάφορες πληροφορίες για την ακολουθία  $(a_n)$  ως εξής. Παραγωγίζοντας ως προς  $x$

βρίσκουμε

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{x^n}{n!} = (1+x) e^{x+\frac{x^2}{2}} = (1+x) \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^n$  στα ακραία μέλη της προηγούμενης σχέσης προκύπτει ο αναγωγικός τύπος

$$a_{n+1} = a_n + na_{n-1} \quad (3.6)$$

για  $n \geq 1$ . Επίσης, αναπτύσσοντας την τυπική δυναμοσειρά  $e^{x+\frac{x^2}{2}}$  ως

$$e^{x+\frac{x^2}{2}} = e^x \cdot e^{x^2/2} = \left( \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \right)$$

προκύπτει ο τύπος

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad (3.7)$$

από την (3.5), για  $n \in \mathbb{N}$ .

**Πόρισμα 3.2.1** Δοσμένων των  $f_1, f_2, \dots, f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , ορίζουμε την  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  θέτοντας

$$h(\#X) = \sum_{(S_1, \dots, S_k)} f_1(\#S_1) \cdots f_k(\#S_k) \quad (3.8)$$

για πεπερασμένο σύνολο  $X$ , όπου στο άθροισμα του δεξιού μέλους το  $(S_1, \dots, S_k)$  διατρέχει τις ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις του  $X$  με  $k$  μέρη, δηλαδή τις ακολουθίες  $(S_1, \dots, S_k)$  υποσυνόλων του  $X$  με  $S_i \cap S_j = \emptyset$  για  $i \neq j$  και  $S_1 \cup \dots \cup S_k = X$ . Τότε ισχύει

$$E_h(x) = E_{f_1}(x) E_{f_2}(x) \cdots E_{f_k}(x).$$

*Απόδειξη.* Το ζητούμενο προκύπτει με επαγωγή στο  $k$ , όπου η περίπτωση  $k = 1$  είναι τετριμμένη και η περίπτωση  $k = 2$  ισοδυναμεί με την Πρόταση 3.2.1.  $\square$

**Παράδειγμα 3.2.4** Αν  $f_i(n) = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $1 \leq i \leq k$ , τότε το δεξιό μέλος της (3.8) είναι ίσο με το πλήθος των ασθενών διατεταγμένων διαμερίσεων του συνόλου  $[n]$  με  $k$  μέρη. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακριβώς  $k^n$  τέτοιες ασθενείς

διαμερίσεις (εξηγήστε γιατί) και ότι  $E_{f_i}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  για  $1 \leq i \leq k$ . Από το Πρόρισμα 3.2.1 προκύπτει ότι ισχύει

$$\left( \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right)^k = \sum_{n \geq 0} \frac{k^n x^n}{n!}$$

(δηλαδή η γνωστή ταυτότητα  $(e^x)^k = e^{kx}$  στο  $\mathbb{C}[x]$ ).

**Παράδειγμα 3.2.5** Αν  $f_i(0) = 0$  και  $f_i(n) = 1$  για  $1 \leq i \leq k$  και  $n \geq 1$ , τότε το δεξιό μέλος της (3.8) απαριθμεί τις διατεταγμένες διαμερίσεις του συνόλου  $[n]$  με  $k$  (μη κενά) μέρη. Επομένως, από το Πρόρισμα 3.2.1 παίρνουμε

$$E_{f_1}(x)E_{f_2}(x) \cdots E_{f_k}(x) = \sum_{n \geq 0} k! S(n, k) \frac{x^n}{n!},$$

όπου με  $S(n, k)$  συμβολίζουμε το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου  $[n]$  με  $k$  μέρη. Οι αριθμοί  $S(n, k)$  ονομάζονται *αριθμοί Stirling του δεύτερου είδους* (βλέπε επίσης Άσκηση 13 του Κεφαλαίου 2). Αφού  $E_{f_i}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$  για  $1 \leq i \leq k$ , συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k. \quad (3.9)$$

Αναπτύσσοντας

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} e^{ix} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \sum_{n \geq 0} \frac{i^n x^n}{n!}$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές του  $\frac{x^n}{n!}$  στα δύο μέλη της (3.9) προκύπτει ο τύπος

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n \quad (3.10)$$

για το  $S(n, k)$ .

**Παράδειγμα 3.2.6** Έστω  $b_n$  το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  για τις οποίες οι  $w$  και  $w^2$  δεν έχουν σταθερά σημεία (δηλαδή για τις οποίες ισχύει  $w(i) \neq i$  και  $w^2(i) \neq i$  για  $1 \leq i \leq n$ ). Ισοδύναμα,  $b_n$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$ , η κυκλική μορφή των οποίων δεν περιέχει κύκλους μήκους 1 ή 2. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x - \frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x)^{-1}. \quad (3.11)$$

Ακολουθώντας το σκεπτικό των Παραδειγμάτων 3.2.3 και 3.2.2, παρατηρούμε ότι μια μετάθεση  $w : X \rightarrow X$  ενός πεπερασμένου συνόλου  $X$  καθορίζεται από μια ασθενή διαμέριση  $(S_1, S_2, S_3)$  του  $X$ , μια διαμέριση του  $S_1$  σε μονοσύνολα (κύκλοι μήκους 1), μια διαμέριση του  $S_2$  σε μέρη με δύο στοιχεία το καθένα (κύκλοι μήκους 2) και μια μετάθεση  $u : S_3 \rightarrow S_3$ , η κυκλική μορφή της οποίας δεν περιέχει κύκλους μήκους 1 ή 2. Κατά συνέπεια ισχύει η (3.8), όπου  $h(\#X)$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w : X \rightarrow X$ ,  $f_1(\#S)$  είναι το πλήθος των διαμερίσεων του  $S$  σε μονοσύνολα,  $f_2(\#T)$  είναι το πλήθος των διαμερίσεων του  $T$  σε μέρη με δύο στοιχεία και  $f_3(n) = b_n$  για  $n \in \mathbb{N}$ . Όπως είδαμε στα Παραδείγματα 3.2.3 και 3.2.2 ισχύουν  $E_h(x) = 1/(1-x)$ ,  $E_{f_1}(x) = e^x$  και  $E_{f_2}(x) = e^{x^2/2}$ . Από τα παραπάνω και το Πρόρισμα 3.2.1 προκύπτει ότι

$$\frac{1}{1-x} = E_h(x) = E_{f_1}(x)E_{f_2}(x)E_{f_3}(x) = e^x \cdot e^{x^2/2} \cdot \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$$

και συνεπώς η (3.11).

### 3.2.2 Σύνθεση

Υπενθυμίζουμε (βλέπε Πρόταση 1.1.5 (β)) ότι η σύνθεση  $E_g(E_f(x))$  δύο εκθετικών γεννητριών συναρτήσεων  $E_g(x)$  και  $E_f(x)$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$  αν  $f(0) = 0$ .

**Θεώρημα 3.2.1** (Τύπος Συνθέσεως) Δοσμένων των  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  με  $f(0) = 0$  και  $g(0) = 1$ , ορίζουμε την  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  θέτοντας  $h(0) = 1$  και

$$h(\#X) = \sum_{\pi \in \Pi(X)} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k) g(k) \quad (3.12)$$

για μη κενό πεπερασμένο σύνολο  $X$ , όπου στο άθροισμα του δεξιού μέλους,  $\Pi(X)$  είναι το σύνολο των διαμερίσεων  $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$  του  $X$ . Τότε ισχύει

$$E_h(x) = E_g(E_f(x)).$$

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $\#X = n$  και έστω  $h_k(n)$  το δεξιό μέλος της (3.12) για σταθερό  $k$ . Από το Πρόρισμα 3.2.1 έχουμε

$$(E_f(x))^k = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{(B_1, \dots, B_k)} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k) \right) \frac{x^n}{n!},$$

όπου το εσωτερικό άθροισμα διατρέχει τις ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις του  $X$  με  $k$  μέρη. Αφού  $f(0) = 0$ , στο άθροισμα αυτό συνεισφέρουν μόνο οι διαμερίσεις με

μη κενά μέρη. Επιπλέον, τα μέρη κάθε τέτοιας διαμέρισης είναι διαφορετικά ανά δύο και μπορούν να αναδιαταχθούν με  $k!$  τρόπους. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$g(k) (E_f(x))^k = k! E_{h_k}(x)$$

και συνεπώς

$$E_h(x) = 1 + \sum_{k \geq 1} E_{h_k}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{g(k)}{k!} (E_f(x))^k = E_g(E_f(x)).$$

□

Χρησιμοποιώντας την ορολογία της Παρατήρησης 3.2.1, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το Θεώρημα 3.2.1 ως εξής. Έστω ότι  $f(\#S)$  και  $g(\#T)$  είναι το πλήθος των δομών τύπου  $\alpha$  και τύπου  $\beta$ , αντίστοιχα, στα πεπερασμένα σύνολα  $S$  και  $T$ . Αν  $h(\#X)$  είναι το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε μία διαμέριση  $\pi$  του πεπερασμένου συνόλου  $X$ , μία δομή τύπου  $\alpha$  σε κάθε μέρος της  $\pi$  και μία δομή τύπου  $\beta$  στο σύνολο των μερών της  $\pi$ , τότε οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των  $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  συνδέονται με τη σχέση  $E_h(x) = E_g(E_f(x))$ .

**Παράδειγμα 3.2.7** Έστω  $h(n)$  το πλήθος των τρόπων να χωρίσουμε ένα σύνολο  $n$  στρατιωτών σε σειρές (μη κενά, ολικά διατεταγμένα υποσύνολα) και να αναδιατάξουμε τις σειρές μεταξύ τους. Για παράδειγμα, μια τέτοια διάταξη με  $n = 10$  είναι η

$$\begin{array}{cccc} 4 & 9 & 6 & 2 \\ 8 & 1 & & 10 \\ & 7 & & 3 \\ & 5 & & \end{array}$$

όπου οι σειρές εμφανίζονται από αριστερά προς τα δεξιά και έχουν στοιχηθεί ως προς τον πρώτο στρατιώτη της καθεμιάς. Παρατηρούμε ότι ισχύει η (3.12), όπου  $f(m) = m!$  είναι το πλήθος των αναδιατάξεων ενός συνόλου  $m$  στρατιωτών και  $g(k) = k!$  είναι το πλήθος των αναδιατάξεων των  $k$  σειρών. Από το Θεώρημα 3.2.1 έχουμε  $E_h(x) = E_g(E_f(x))$ , όπου

$$E_f(x) = \sum_{m \geq 1} f(m) \frac{x^m}{m!} = x/(1-x)$$

και

$$E_g(x) = \sum_{k \geq 0} g(k) \frac{x^k}{k!} = 1/(1-x),$$

δηλαδή

$$E_h(x) = \frac{1}{1-x/(1-x)} = 1 + \frac{x}{1-2x} = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} n! \frac{x^n}{n!}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει  $h(n) = 2^{n-1}n!$  για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  και αφήνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει αυτόν τον τύπο χρησιμοποιώντας μόνο τις αρχές της Παραγράφου 1.1.2.

### 3.2.3 Ο εκθετικός τύπος

Το επόμενο θεώρημα προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.1 θέτοντας  $g(k) = 1$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ , οπότε  $E_g(x) = e^x$ .

**Θεώρημα 3.2.2** (Εκθετικός Τύπος) *Δοσμένης της  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  με  $f(0) = 0$ , ορίζουμε την  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  θέτοντας  $h(0) = 1$  και*

$$h(\#X) = \sum_{\pi \in \Pi(X)} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k) \quad (3.13)$$

για μη κενό πεπερασμένο σύνολο  $X$ , όπου στο άθροισμα του δεξιού μέλους,  $\Pi(X)$  είναι το σύνολο των διαμερίσεων  $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$  του  $X$ . Τότε ισχύει

$$E_h(x) = \exp(E_f(x)),$$

όπου  $\exp(x) := e^x$ .

Ως ειδική περίπτωση της ερμηνείας που δώσαμε για το Θεώρημα 3.2.1 βλέπουμε ότι αν  $f(\#B)$  είναι το πλήθος των δομών τύπου  $\alpha$  σε ένα πεπερασμένο σύνολο  $B$  και  $h(\#X)$  είναι το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε μία διαμέριση  $\pi$  του πεπερασμένου συνόλου  $X$  και μία δομή τύπου  $\alpha$  σε κάθε μέρος της  $\pi$ , τότε οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των  $f, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  συνδέονται με τη σχέση  $E_h(x) = \exp(E_f(x))$ .

**Παράδειγμα 3.2.8** (α) Θέτοντας  $f(n) = 1$  για  $n \geq 1$ , το δεξιά μέλος της (3.13) είναι ίσο με το πλήθος, έστω  $B_n$ , των διαμερίσεων ενός συνόλου με  $n$  στοιχεία. Αφού  $E_f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$ , από το Θεώρημα 3.2.2 προκύπτει ότι

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp(e^x - 1). \quad (3.14)$$

Οι ακέραιοι  $B_n$  λέγονται *αριθμοί του Bell*. Για παράδειγμα έχουμε  $B_0 = B_1 = 1$ ,  $B_2 = 2$ ,  $B_3 = 5$  και  $B_4 = 15$ , όπου οι πέντε διαμερίσεις του συνόλου  $\{1, 2, 3\}$  είναι οι  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ ,  $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ,  $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ ,  $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$  και  $\{\{1, 2, 3\}\}$ .



(β) Όπως υπενθυμίσαμε στην Παράγραφο 3.1, υπάρχουν  $(n-1)!$  κυκλικές αναδιατάξεις ενός συνόλου με  $n$  στοιχεία. Επομένως, θέτοντας  $f(1) = 0$  και  $f(n) = (n-1)!$  για  $n \geq 2$ , το δεξιό μέλος της (3.13) είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  η κυκλική δομή των οποίων περιέχει μόνον κύκλους μήκους μεγαλύτερου του 1, δηλαδή με το πλήθος  $D_n$  των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  χωρίς σταθερά σημεία. Από το Θεώρημα 3.2.2 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} D_n \frac{x^n}{n!} &= \exp(E_f(x)) = \exp\left(\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n}\right) = e^{-x} \cdot \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}\right) \\ &= e^{-x} \cdot \exp\left(\log \frac{1}{1-x}\right) = \frac{e^{-x}}{1-x}, \end{aligned}$$

σε συμφωνία με την (3.4).

(γ) Έστω θετικός ακέραιος  $k$ . Θέτοντας  $f(n) = (n-1)!$  για  $1 \leq n \leq k$  στην (3.13) και  $f(n) = 0$  για τις υπόλοιπες τιμές του  $n$  και εργαζόμενοι όπως στο (β), βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!} = \exp\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k}\right), \quad (3.15)$$

όπου  $h(n)$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  η κυκλική δομή των οποίων δεν περιέχει κύκλους μήκους μεγαλύτερου του  $k$ . Για  $k = 2$  προκύπτει η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση του Παραδείγματος 3.2.3.

### 3.3 Ο τύπος αντιστροφής του Lagrange

Έστω  $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $F(0) = 0$ .

**Ορισμός 3.3.1** Η  $F(x)$  λέγεται αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση στο  $\mathbb{C}[[x]]$  αν υπάρχει  $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  ώστε να ισχύει

$$F(G(x)) = G(F(x)) = x \quad (3.16)$$

στο  $\mathbb{C}[[x]]$ . Μια τυπική δυναμοσειρά  $G(x)$  με αυτές τις ιδιότητες λέγεται αντίστροφη (ως προς τη σύνθεση) της  $F(x)$ .

Για παράδειγμα, έστω η τυπική δυναμοσειρά  $F(x) = \sum_{n \geq 1} x^n = \frac{x}{1-x}$ . Λύνοντας την εξίσωση  $F(y) = x$  ως προς  $y$ , βρίσκουμε  $y = x/(1+x)$ . Παρατηρούμε ότι η  $G(x) = \frac{x}{1+x} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^n$  ορίζεται ως στοιχείο του  $\mathbb{C}[[x]]$  και ότι ισχύει η (3.16). Συνεπώς η  $F(x)$  είναι αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση στο  $\mathbb{C}[[x]]$  με αντίστροφη τη  $G(x)$ .

Είναι φανερό ότι αν  $F(0) = 0$  και ισχύει η (3.16), τότε  $G(0) = 0$ . Συμβολίζουμε με  $x\mathbb{C}[[x]]$  το σύνολο (ιδεώδες του  $\mathbb{C}[[x]]$ ) των τυπικών δυναμοσειρών  $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $F(0) = 0$ . Η ακόλουθη πρόταση δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια τυπική δυναμοσειρά  $F(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$  αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση.

**Πρόταση 3.3.1** Για την τυπική δυναμοσειρά  $F(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η  $F(x)$  είναι αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση.
- (ii) Υπάρχει  $G(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$  ώστε να ισχύει  $F(G(x)) = x$  στο  $\mathbb{C}[[x]]$ .
- (iii) Υπάρχει  $G(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$  ώστε να ισχύει  $G(F(x)) = x$  στο  $\mathbb{C}[[x]]$ .
- (iv)  $a_1 \neq 0$ .

Απόδειξη. Θέτοντας  $G(x) = \sum_{n \geq 1} b_n x^n \in x\mathbb{C}[[x]]$ , έχουμε

$$\begin{aligned} F(G(x)) &= \sum_{n \geq 1} a_n (G(x))^n = \sum_{n \geq 1} a_n (b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^n \\ &= a_1 (b_1 x + b_2 x^2 + \dots) + a_2 (b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^2 + \dots \\ &= a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2 + \dots \end{aligned}$$

και συνεπώς η ισότητα  $F(G(x)) = x$  είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1^2 &= 0 \\ a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 &= 0 \\ &\dots \\ a_1 b_n + \dots + a_n b_1^n &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δοσμένων των  $a_1, a_2, \dots$  το σύστημα αυτό έχει λύση  $(b_1, b_2, \dots)$  αν και μόνο αν  $a_1 \neq 0$ . Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή η λύση είναι μοναδική. Ομοίως, δοσμένων των  $b_1, b_2, \dots$  το σύστημα έχει (μοναδική) λύση  $(a_1, a_2, \dots)$  αν και μόνο αν  $b_1 \neq 0$ . Αυτό αποδεικνύει τις ισοδυναμίες (ii)  $\Leftrightarrow$  (iv) και (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv). Προφανώς ισχύουν οι (i)  $\Rightarrow$  (ii) και (i)  $\Rightarrow$  (iii). Αντιστρόφως, αν ισχύουν οι (ii) και (iii), δηλαδή αν  $F(G(x)) = H(F(x)) = x$  για κάποιες τυπικές δυναμοσειρές  $G(x), H(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$ , τότε  $G(x) = H(F(G(x))) = H(x)$  και συνεπώς η  $F(x)$  είναι

αντιστρέψιμη με αντίστροφη τη  $G(x)$ , δηλαδή ισχύει η (i). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης.  $\square$

Όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.1, αν η αντίστροφη  $G(x)$  της  $F(x)$  ως προς τη σύνθεση υπάρχει, τότε αυτή είναι μοναδική. Θα συμβολίζουμε την τυπική δυναμοσειρά  $G(x)$  με  $F^{(-1)}(x)$ .

**Παράδειγμα 3.3.1** Στη λύση της Άσκησης 7 δίνεται μια συνδυαστική απόδειξη της ταυτότητας  $F(G(x)) = x$  στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , όπου  $F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$  και  $G(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x)$ . Από την Πρόταση 3.3.1 προκύπτει ότι ισχύει επίσης

$$G(F(x)) := \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(F(x))^n}{n} = x$$

στο  $\mathbb{C}[[x]]$  και έχουμε  $G(x) = F^{(-1)}(x)$ .

Το Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange παρέχει έναν τύπο για τους συντελεστές οποιασδήποτε δύναμης της  $F^{(-1)}(x)$ .

**Θεώρημα 3.3.1** (Τύπος Αντιστροφής του Lagrange) Έστω τυπική δυναμοσειρά  $F(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $a_1 \neq 0$ . Για μη αρνητικούς ακέραιους  $k, n$  ισχύει

$$n[x^n] (F^{(-1)}(x))^k = k[x^{n-k}] \left( \frac{x}{F(x)} \right)^n. \quad (3.17)$$

*Απόδειξη.* Στην απόδειξη αυτή θα εργαστούμε σε ένα δακτύλιο τυπικών δυναμοσειρών μεγαλύτερο του  $\mathbb{C}[[x]]$ . Συγκεκριμένα, θεωρούμε το δακτύλιο των τυπικών δυναμοσειρών της μορφής  $\sum_{n \geq n_0} c_n x^n$  με  $n_0 \in \mathbb{Z}$  και συντελεστές  $c_n \in \mathbb{C}$  (στις οποίες επιτρέπονται πεπερασμένου πλήθους μονώνυμα με αρνητικούς εκθέτες). Έστω ότι

$$(F^{(-1)}(x))^k = \sum_{i \geq k} p_i x^i. \quad (3.18)$$

Θέτοντας όπου  $x$  το  $F(x)$  και παραγωγίζοντας ως προς  $x$ , παίρνουμε διαδοχικά

$$x^k = \sum_{i \geq k} p_i (F(x))^i$$

και

$$kx^{k-1} = \sum_{i \geq k} i p_i (F(x))^{i-1} \cdot F'(x).$$

Η τελευταία ισότητα γράφεται

$$\frac{kx^{k-1}}{(F(x))^n} = \sum_{i \geq k} ip_i (F(x))^{i-n-1} \cdot F'(x), \quad (3.19)$$

όπου, για παράδειγμα, στο δακτύλιο που εργαζόμαστε ισχύει

$$\frac{x^{k-1}}{(F(x))^n} = \frac{x^{k-1}}{(a_1x + a_2x^2 + \dots)^n} = x^{k-n-1} (a_1 + a_2x + \dots)^{-n}$$

και η  $(a_1 + a_2x + \dots)^{-n}$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}[[x]]$ , αφού  $a_1 \neq 0$ . Εξισώνουμε τώρα τους συντελεστές του  $x^{-1}$  στα δύο μέλη της (3.19). Για το αριστερό μέλος, ο συντελεστής του  $x^{-1}$  είναι ίσος με

$$k[x^{-k}] (F(x))^{-n} = k[x^{n-k}] \left( \frac{x}{F(x)} \right)^n.$$

Για το δεξιό μέλος, παρατηρούμε ότι μόνο ο όρος  $i = n$  του αθροίσματος συνεισφέρει στο συντελεστή του  $x^{-1}$ . Πράγματι, για  $i \neq n$  έχουμε

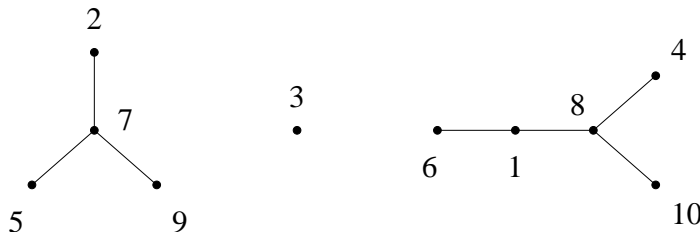
$$(F(x))^{i-n-1} \cdot F'(x) = 1/(i-n) \cdot \frac{d}{dx} (F(x))^{i-n}$$

και ο συντελεστής του  $x^{-1}$  στην παράγωγο οποιασδήποτε τυπικής δυναμοσειράς  $\sum_{n \geq n_0} c_n x^n$  είναι ίσος με μηδέν. Κατά συνέπεια, ο συντελεστής του  $x^{-1}$  στο δεξιό μέλος της (3.19) είναι ίσος με

$$\begin{aligned} np_n [x^{-1}] (F(x))^{-1} \cdot F'(x) &= np_n [x^{-1}] \frac{a_1 + 2a_2x + \dots}{a_1x + a_2x^2 + \dots} = \\ np_n [x^0] \frac{a_1 + 2a_2x + \dots}{a_1 + a_2x + \dots} &= np_n = n[x^n] (F^{(-1)}(x))^k \end{aligned}$$

και επομένως ισχύει η (3.17). □

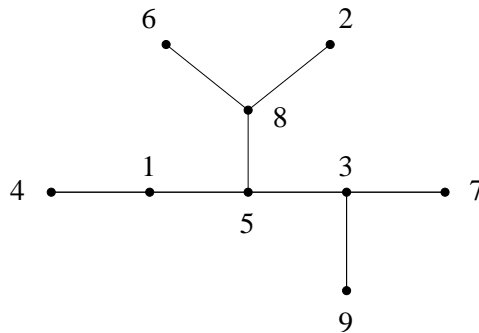
Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.1, σχετιζόμενη με την απαρίθμηση δένδρων. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε στην παράγραφο αυτή ως (απλό, μη κατευθυνόμενο) *γράφημα* ένα ζεύγος συνόλων  $G = (N, E)$  με  $E \subseteq \binom{N}{2}$  (για ένα γενικότερο ορισμό και περισσότερες πληροφορίες για γραφήματα, δένδρα και δάση παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 5). Τα στοιχεία των  $N$  και  $E$  λέγονται *κορυφές* και *ακμές* του  $G$ , αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι το σύνολο κορυφών  $N$  είναι πεπερασμένο, το  $G$  λέγεται *δάσος* αν δεν υπάρχουν διακεκριμένες κορυφές  $u_1, u_2, \dots, u_r \in N$



Σχήμα 3.1: Ένα δάσος με τρεις συνιστώσες στο σύνολο κορυφών [10].

με  $r \geq 3$ , τέτοιες ώστε  $\{u_1, u_2\}, \dots, \{u_{r-1}, u_r\}, \{u_r, u_1\} \in E$ . Στο Σχήμα 3.1 απεικονίζεται ένα δάσος στο σύνολο κορυφών [10].

Κάθε δάσος με  $n$  κορυφές έχει το πολύ  $n - 1$  ακμές. Ένα δάσος λέγεται δένδρο αν έχει ακριβώς  $n - 1$  ακμές (ισοδύναμα, αν είναι συνεκτικό γράφημα). Στο Σχήμα 3.2 απεικονίζεται ένα δένδρο στο σύνολο κορυφών [9]. Αν ένα δάσος  $G = (N, E)$  έχει  $n$  κορυφές και  $n - k$  ακμές (οπότε  $k \geq 1$ ), τότε υπάρχει μοναδική διαμέριση  $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  του συνόλου  $N$  τέτοια ώστε για κάθε  $1 \leq i \leq k$ , το  $E \cap \binom{B_i}{2}$  να είναι το σύνολο των ακμών ενός δένδρου με σύνολο κορυφών  $B_i$ . Τα δένδρα αυτά λέγονται (συνεκτικές) *συνιστώσες* του  $G$ . Για παράδειγμα, το δάσος του Σχήματος 3.1 έχει τρεις συνιστώσες, με αντίστοιχη διαμέριση  $\{\{1, 4, 6, 8, 10\}, \{2, 5, 7, 9\}, \{3\}\}$ . Ένα δάσος με ρίζες είναι ένα δάσος  $G$  στο οποίο έχουμε επιλέξει μια διακεκριμένη κορυφή (ρίζα) για κάθε συνιστώσα του  $G$ . Αν το  $G$  έχει μία συνιστώσα, τότε λέγεται δένδρο με ρίζα.



Σχήμα 3.2: Ένα δένδρο στο σύνολο κορυφών [9].

**Πρόταση 3.3.2** Το πλήθος των δασών με ρίζες στο σύνολο κορυφών  $[n]$  τα οποία έχουν  $k$  συνιστώσες (ισοδύναμα, ρίζες) είναι ίσο με  $\binom{n-1}{k-1} n^{n-k}$ . Εδικότερα, το πλήθος

των δένδρων με ρίζα (αντίστοιχα, δένδρων) στο σύνολο κορυφών  $[n]$  είναι ίσο με  $n^{n-1}$  (αντίστοιχα,  $n^{n-2}$ ).

Απόδειξη. Έστω  $r(n)$  το πλήθος των δένδρων με ρίζα στο σύνολο κορυφών  $[n]$  και έστω  $R(x) = \sum_{n \geq 1} r(n) \frac{x^n}{n!}$ . Έστω επίσης  $t(n)$  το πλήθος των δένδρων στο σύνολο κορυφών  $[n]$ . Από τον εκθετικό τύπο (Θεώρημα 3.2.2) προκύπτει ότι

$$\exp(R(x)) = \sum_{n \geq 0} p(n) \frac{x^n}{n!}, \quad (3.20)$$

όπου  $p(n)$  είναι το πλήθος των δασών με ρίζες στο σύνολο κορυφών  $[n]$ , με  $p(0) = 1$ . Θα δείξουμε ότι  $r(n) = nt(n)$  και  $t(n) = p(n-1)$  για  $n \geq 1$ . Πράγματι, η πρώτη σχέση ισχύει αφού για κάθε δένδρο  $T$  στο σύνολο κορυφών  $[n]$  υπάρχουν ακριβώς  $n$  επιλογές μιας ρίζας. Για τη δεύτερη σχέση παρατηρούμε ότι αφαιρώντας την κορυφή  $n$  από ένα δένδρο  $T$  στο σύνολο κορυφών  $[n]$  και τις ακμές που την περιέχουν, προκύπτει ένα δάσος  $\varphi(T)$  με ρίζες στο σύνολο κορυφών  $[n-1]$ , οι ρίζες του οποίου ορίζονται ως οι ακέραιοι  $j \in [n-1]$  για τους οποίους το  $\{j, n\}$  είναι ακμή του  $T$ . Επιπλέον, η  $\varphi$  είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση (εξηγήστε γιατί) από το σύνολο των δένδρων με σύνολο κορυφών  $[n]$  στο σύνολο των δασών με ρίζες με σύνολο κορυφών  $[n-1]$ . Από τις  $r(n) = nt(n)$  και  $t(n) = p(n-1)$  έπεται ότι  $r(n) = np(n-1)$  και συνεπώς

$$\begin{aligned} x \exp(R(x)) &= \sum_{n \geq 0} p(n) \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n \geq 1} p(n-1) \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geq 1} np(n-1) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} r(n) \frac{x^n}{n!} = R(x). \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι

$$R(x) = x \exp(R(x)), \quad (3.21)$$

δηλαδή ότι  $F(R(x)) = x$ , όπου  $F(y) = ye^{-y}$ . Επομένως, για την τυπική δυναμοσειρά  $R(x)$  ισχύει  $R(x) = F^{(-1)}(x)$ . Από το Πρόρισμα 3.2.1 βρίσκουμε ότι

$$(R(x))^k = \sum_{n \geq 0} k! p_k(n) \frac{x^n}{n!}, \quad (3.22)$$

όπου  $p_k(n)$  είναι το πλήθος των δασών με ρίζες στο σύνολο κορυφών  $[n]$  τα οποία έχουν ακριβώς  $k$  συνιστώσες. Από το Θεώρημα 3.3.1 προκύπτει ότι

$$p_k(n) = \frac{n!}{k!} [x^n] (R(x))^k = \frac{n!}{k!} [x^n] (F^{(-1)}(x))^k$$

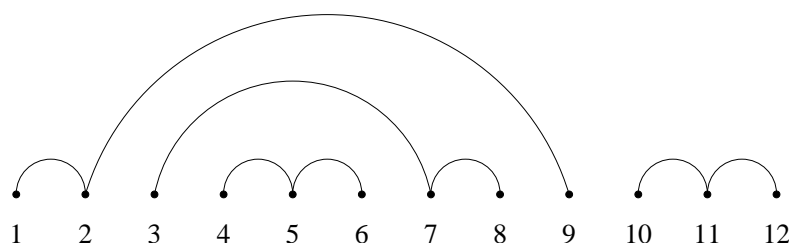
$$\begin{aligned}
&= \frac{k \cdot n!}{n \cdot k!} [x^{n-k}] \left( \frac{x}{F(x)} \right)^n = \frac{(n-1)!}{(k-1)!} [x^{n-k}] e^{nx} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}.
\end{aligned}$$

Για  $k = 1$  έχουμε  $r(n) = p_1(n) = n^{n-1}$ . Τέλος, από τη σχέση αυτή και την  $r(n) = nt(n)$  έπεται ότι  $t(n) = n^{n-2}$  για κάθε  $n$ .  $\square$

Σημειώνουμε ότι η ισότητα  $t(n) = n^{n-2}$  είναι γνωστή ως τύπος του *Cayley* για το πλήθος των δένδρων σε ένα σύνολο κορυφών με  $n$  στοιχεία. Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με μια ακόμη εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.1.

**Παράδειγμα 3.3.2** Έστω  $a_{n,k}$  το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων (βλέπε Παράγραφο 1.2.4) του συνόλου  $[kn]$ , κάθε μέρος των οποίων έχει  $k$  στοιχεία. Για  $n = 4$  και  $k = 3$ , μια τέτοια διαμέριση απεικονίζεται στο Σχήμα 3.3. Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$a_{n,k} = \frac{1}{(k-1)n+1} \binom{kn}{n}. \quad (3.23)$$



Σχήμα 3.3: Η διαμέριση  $\{\{1, 2, 9\}, \{3, 7, 8\}, \{4, 5, 6\}, \{10, 11, 12\}\}$  του  $[12]$ .

Έστω  $\text{NC}^k(n)$  το σύνολο των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $[kn]$ , κάθε μέρος των οποίων έχει  $k$  στοιχεία και έστω  $\pi \in \text{NC}^k(n)$ . Έστω  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  το μέρος της  $\pi$  που περιέχει το 1, όπου  $1 = b_1 < b_2 < \dots < b_k$ . Για  $1 \leq i \leq k$ , έστω  $N_i$  το σύνολο των ακεραίων  $j$  με  $b_i < j < b_{i+1}$ , όπου  $b_{k+1} = kn + 1$ . Παρατηρούμε ότι κάθε μέρος της  $\pi$  εκτός του  $B$  περιέχεται σε κάποιο από τα σύνολα  $N_i$ . Κατά συνέπεια, τα μέρη αυτά ορίζουν διαμερίσεις  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  των  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , αντίστοιχα. Για το παράδειγμα του Σχήματος 3.3 έχουμε  $N_1 = \emptyset$ ,  $N_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $N_3 = \{10, 11, 12\}$  και  $\sigma_1 = \emptyset$ ,  $\sigma_2 = \{\{3, 7, 8\}, \{4, 5, 6\}\}$ ,  $\sigma_3 = \{\{10, 11, 12\}\}$ . Προφανώς, για  $1 \leq i \leq k$  το πλήθος των στοιχείων του  $N_i$  είναι ίσο με  $r_i k$  για κάποιο  $r_i \in \mathbb{N}$  και ισχύει  $r_1 + \dots + r_k = n - 1$ . Επίσης, αφαιρώντας το  $b_i$  από κάθε στοιχείο

μέρους της  $\sigma_i$  προκύπτει διαμέριση  $\pi_i \in \text{NC}^k(r_i)$ . Για το παράδειγμα του Σχήματος 3.3 έχουμε  $\pi_1 = \emptyset$ ,  $\pi_2 = \{\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}\}$ ,  $\pi_3 = \{\{1, 2, 3\}\}$ . Παρατηρούμε τέλος ότι  $b_i = (r_1 + \dots + r_{i-1})k + i$  για κάθε  $i$  και συνεπώς το  $B$ , άρα και η διαμέριση  $\pi$ , ορίζονται μονοσήμαντα από τις  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ . Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$a_{n,k} = \sum_{r_1 + \dots + r_k = n-1} a_{r_1,k} a_{r_2,k} \dots a_{r_k,k}, \quad (3.24)$$

όπου  $a_{m,0} = 1$  κατά σύμβαση και το άθροισμα στο δεξιό μέλος διατρέχει τις λύσεις της εξίσωσης  $r_1 + \dots + r_k = n-1$  στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Θέτοντας

$$G(x) = \sum_{n \geq 1} a_{n,k} x^n$$

και αναγνωρίζοντας το δεξιό μέλος της (3.24) ως το συντελεστή του  $x^{n-1}$  στην τυπική δυναμοσειρά  $(\sum_{n \geq 0} a_{n,k} x^n)^k = (1 + G(x))^k$  προκύπτει ότι

$$G(x) = x(1 + G(x))^k. \quad (3.25)$$

Συνεπώς έχουμε  $G(x) = F^{(-1)}(x)$ , όπου  $F(x) = x/(1+x)^k$ . Από το Θεώρημα 3.3.1 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \frac{1}{n} [x^{n-1}] \left( \frac{x}{F(x)} \right)^n = \frac{1}{n} [x^{n-1}] (1+x)^{kn} = \frac{1}{n} \binom{kn}{n-1} \\ &= \frac{1}{(k-1)n+1} \binom{kn}{n}, \end{aligned}$$

δηλαδή η (3.23).

## 3.4 Ασκήσεις

1. Έστω δακτύλιος  $R$  (με μονάδα) χαρακτηριστικής μηδέν και  $a, b \in R$  με  $ab = ba$ . Δείξτε συνδυαστικά ότι ισχύει

$$\left( \sum_{n \geq 0} \frac{a^n x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n \geq 0} \frac{b^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} (a+b)^n \frac{x^n}{n!}$$

(δηλαδή η γνωστή ταυτότητα  $e^{ax} \cdot e^{bx} = e^{(a+b)x}$  στο δακτύλιο  $R[[x]]$  των τυπικών δυναμοσειρών με συντελεστές από το  $R$ , όπου οι πράξεις στο δακτύλιο αυτό ορίζονται όπως στην Παράγραφο 1.1.3.



2. Συμβολίζουμε με  $e_n$  (αντίστοιχα, με  $o_n$ ) το πλήθος των άρτιων (αντίστοιχα, περιττών) μεταθέσεων του  $[n]$  χωρίς σταθερά σημεία. Δείξτε ότι  $e_n - o_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$  για κάθε  $n \geq 1$ .
3. Έστω  $e_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n,k)x^k$ , όπου  $S(n,k)$  είναι οι αριθμοί Stirling του δεύτερου είδους και  $e_0(x) = 1$ .

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} e_n(x) \frac{y^n}{n!} = \exp(x(e^y - 1)).$$

(β) Δείξτε ότι

$$e_n(x) = e^{-x} \sum_{m \geq 0} m^n \frac{x^m}{m!}.$$

(γ) Δείξτε ότι  $e_n(x) = e^{-x} (x \cdot d/dx)^n e^x$ .

4. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(1-x)e^{t(1-x)}}{1-xe^{2t(1-x)}}, \quad (3.26)$$

όπου  $B_n(x) = \sum_{w \in B_n} x^{\text{des}_B(w)}$  είναι το πολυώνυμο της Άσκηση 21 του Κεφαλαίου 2 και  $B_0(x) = 1$ .

5. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} d_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(1-x)e^{-xt}}{1-xe^{(1-x)t}}, \quad (3.27)$$

όπου  $d_n(x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_n} x^{\text{exc}(w)}$  είναι το πολυώνυμο της Άσκησης 28 του Κεφαλαίου 2.

6. Για ακεραίους  $n \geq 1$  και  $k \geq 0$ , έστω  $a_{n,k}$  το πλήθος των ευθειών στο χώρο  $\mathbb{R}^n$  που μπορούν να γραφούν ως τομές κάποιων από τα αφφινικά υπερεπίπεδα

$$H_{i,j,r} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j + r\}$$

του  $\mathbb{R}^n$ , όπου οι  $i, j, k$  είναι ακέραιοι με  $1 \leq i, j \leq n$  και  $|r| \leq k$ . Χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνθέσεως για εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις, δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 1} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^x - 1}{(1+k) - ke^x}.$$

7. Έστω  $F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$  και  $G(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ . Δείξτε συνδυαστικά, με χρήση του εκθετικού τύπου, ότι στο  $\mathbb{C}[[x]]$  ισχύουν

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(F(x))^n}{n!} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (3.28)$$

και

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(G(x))^n}{n!} = 1 + x, \quad (3.29)$$

δηλαδή οι γνωστές ταυτότητες  $\exp(\log(\frac{1}{1-x})) = \frac{1}{1-x}$  και  $\exp(\log(1+x)) = 1+x$ , αντίστοιχα.

8. Έστω  $f(n)$  το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  οι οποίες δεν έχουν σταθερά σημεία και ικανοποιούν τη σχέση  $w^3 = 1$ .

(α) Βρείτε έναν απλό κλειστό τύπο για την  $E_f(x)$ .

(β) Συνάγετε έναν απλό κλειστό τύπο για το  $f(n)$ . Δώστε μια ευθεία συνδυαστική απόδειξη αυτού του τύπου.

(γ) Έστω πρώτος αριθμός  $p$ . Γενικεύστε για τις μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_n$  οι οποίες δεν έχουν σταθερά σημεία και ικανοποιούν τη σχέση  $w^p = 1$ .

9. Έστω  $\Omega_n = \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$ . Συμβολίζουμε με  $b_n$  το πλήθος των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων  $w : \Omega_n \rightarrow \Omega_n$  για τις οποίες ισχύει  $w = w^{-1}$  και  $w(-i) = -w(i)$  για  $1 \leq i \leq n$ .

(α) Υπολογίστε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση  $\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$ .

(β) Δείξτε ότι  $b_{n+1} = 2(b_n + nb_{n-1})$  για  $n \in \mathbb{N}$ .

(γ) Δείξτε ότι

$$b_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2k)!}{k!} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} \quad (3.30)$$

για  $n \in \mathbb{N}$ .

10. Έστω η συνάρτηση του υπερβολικού ημιτόνου

$$F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

θεωρούμενη ως τυπική δυναμοσειρά. Δείξτε ότι

$$F^{(-1)}(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n ((2n-1)!!)^2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

όπου

$$(2n-1)!! = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=0 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1), & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

11. Θεωρούμε τα δένδρα με ρίζα 0 και φύλλα  $1, 2, \dots, 2n+1$  τα οποία είναι τριαδικά (δηλαδή, κάθε κορυφή που δεν είναι φύλλο έχει ακριβώς τρία υποδένδρα). Έστω  $t_n$  το πλήθος των δένδρων αυτών με την εξής ιδιότητα: αν  $T_0, T_1, T_2$  είναι τα υποδένδρα μιας οποιαδήποτε κορυφής που δεν είναι φύλλο, σε αύξουσα διάταξη ως προς το μέγιστο φύλλο τους, τότε το  $T_0$  έχει μία μοναδική κορυφή. Ένα παράδειγμα με  $n=4$  απεικονίζεται στο Σχήμα 3.4. Έστω επίσης

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n t_n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

όπου  $t_0 = 1$ .

(α) Δείξτε ότι

$$G'(x) = 1 + \left( xG(x) - \int G(x)dx \right) G'(x), \quad (3.31)$$

όπου  $\int G(x)dx$  είναι η τυπική δυναμοσειρά με σταθερό όρο μηδέν και παράγωγο  $G(x)$ .

(β) Συνάγετε ότι  $t_n = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2$  για  $n \geq 1$ .

(γ) Δώστε μια ευθεία συνδυαστική απόδειξη του τύπου στο (β).

(δ) Γενικεύστε για  $k$ -αδικά δένδρα.

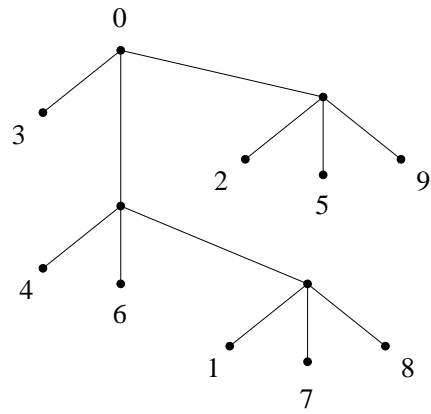
12. Ένα δένδρο  $T$  στο σύνολο κορυφών  $[n]$  λέγεται *εναλλασσόμενο* αν κάθε κορυφή του  $T$  είναι είτε μεγαλύτερη (στη φυσική διάταξη των ακεραίων) από όλες τις γειτονικές κορυφές της, είτε μικρότερη από όλες τις γειτονικές κορυφές της. Έστω  $f_n$  το πλήθος των εναλλασσόμενων δένδρων στο σύνολο κορυφών  $[n]$  και έστω

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_{n+1} \frac{x^n}{n!}.$$

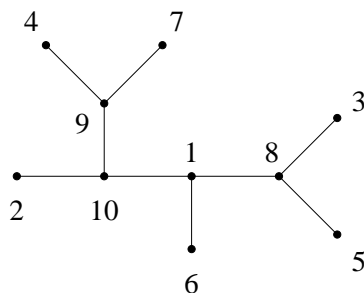
(α) Δείξτε ότι  $F(x) = \exp\left(\frac{x}{2}(F(x)+1)\right)$ .

(β) Συνάγετε από τον τύπο αντιστροφής του Lagrange ότι

$$f_n = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-1}.$$



Σχήμα 3.4: Ένα τριαδικό δένδρο με 9 φύλλα.



Σχήμα 3.5: Ένα εναλλασσόμενο δένδρο με 10 κορυφές.

(γ) Δώστε μια ευθεία συνδυαστική απόδειξη του τύπου στο (β).

13. Έστω κυρτό πολύγωνο  $P$  με  $mn + 2$  κορυφές. Μια  $m$ -επιτρεπτή πολυγωνική υποδιαίρεση του  $P$  είναι μια υποδιαίρεσή του σε πολύγωνα, το καθένα με πλήθος κορυφών ισότιμο του  $2 \pmod{m}$ , η οποία ορίζεται από διαγωνίους του  $P$  που ανά δύο δεν τέμνονται στο εσωτερικό του  $P$ .

(α) Δείξτε ότι το πλήθος των  $m$ -επιτρεπτών υποδιαιρέσεων του  $P$  σε πολύγωνα με  $m + 2$  κορυφές το καθένα (ισοδύναμα, χρησιμοποιούνται  $n - 1$  διαγώνιοι) είναι ίσο με

$$\frac{1}{mn + 1} \binom{mn + n}{n}.$$

(β) Δείξτε ότι το πλήθος των  $m$ -επιτρεπτών υποδιαιρέσεων στο ερώτημα (α) είναι ίσο με το πλήθος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του συνόλου  $[mn]$ , κάθε μέρος των οποίων έχει πληθάρημο που διαιρείται με το  $m$ .

(γ) Δείξτε ότι γενικότερα, για  $1 \leq i \leq n$ , το πλήθος των  $m$ -επιτρεπτών υποδιαιρέσεων του  $P$  σε  $i$  πολύγωνα (οπότε χρησιμοποιούνται  $i - 1$  διαγώνιοι) είναι ίσο με

$$\frac{1}{mn + 1} \binom{n - 1}{i - 1} \binom{mn + i}{i}.$$

## Υποδείξεις - Λύσεις

1. Δείξτε συνδυαστικά ότι  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$  (διωνυμικό θεώρημα για το δακτύλιο  $R$ ), π.χ. ακολουθώντας την απόδειξη της Πρότασης 1.2.1. Παρατηρήστε ότι η ταυτότητα αυτή είναι ισοδύναμη με το ζητούμενο.
2. Εργαζόμαστε όπως στο Παράδειγμα 3.2.2, με τις εξής διαφοροποιήσεις. Ορίζουμε την  $f$  όπως στο παράδειγμα αυτό και τις  $g$  και  $h$  θέτοντας

$$h(\#X) = \sum_{w \in \mathcal{S}(X)} \epsilon(w)$$

και

$$g(\#T) = \sum_{v \in \mathcal{S}(T): \text{Fix}(v)=\emptyset} \epsilon(v).$$

Παρατηρούμε ότι  $h(0) = h(1) = 1$ ,  $h(n) = 0$  για  $n \geq 2$  και ότι  $g(n) = e_n - o_n$  για  $n \geq 1$  (όπου  $g(0) = 1$ ). Επομένως, η σχέση  $E_h(x) = E_f(x)E_g(x)$  δίνει

$$1 + x = e^x \sum_{n \geq 0} (e_n - o_n) \frac{x^n}{n!},$$

από όπου προκύπτει ο προτεινόμενος τύπος για το  $e_n - o_n$ .

3. Για το (α), χρησιμοποιώντας την (3.9) υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} e_n(x) \frac{y^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k \right) \frac{y^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{y^n}{n!} \right) x^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(e^y - 1)^k}{k!} x^k = \exp(x(e^y - 1)). \end{aligned}$$

Για το (β), θεωρούμε μια νέα μεταβλητή  $y$  και υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{m \geq 0} m^n \frac{x^m}{m!} \right) \frac{y^n}{n!} &= \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} m^n \frac{y^n}{n!} \right) \frac{x^m}{m!} = \sum_{m \geq 0} e^{my} \frac{x^m}{m!} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{(xe^y)^m}{m!} = \exp(xe^y). \end{aligned}$$

Το ζητούμενο προκύπτει συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με εκείνο του (α). Για μια διαφορετική λύση, υπολογίστε το συντελεστή του  $x^k$  στο δεξιό μέλος της προτεινόμενης ισότητας και συνάγετε ότι αυτή είναι ισοδύναμη με την (3.10). Μια τρίτη λύση είναι η εξής: η ζητούμενη ισότητα γράφεται

$$\left( \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{m!} \right) \left( \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k \right) = \sum_{m \geq 0} m^n \frac{x^m}{m!}.$$

Το αριστερό μέλος αυτής της ισότητας είναι ίσο με  $E_f(x)E_g(x)$ , όπου  $f(m) = 1$  και  $g(m) = m!S(n, m)$  για  $m \in \mathbb{N}$ . Παρατηρούμε ότι το  $g(m)$  είναι ίσο με το πλήθος των επί απεικονίσεων  $\sigma : [n] \rightarrow [m]$ . Από αυτό και την Πρόταση 3.2.1 συμπεραίνουμε ότι  $E_f(x)E_g(x) = E_h(x)$ , όπου για  $m \in \mathbb{N}$ , το  $h(m)$  είναι ίσο με το πλήθος των τριάδων  $(S, T, \sigma)$  για τις οποίες  $(S, T)$  είναι ασθενής διατεταγμένη διαμέριση του συνόλου  $[m]$  και  $\sigma : [n] \rightarrow T$  είναι επί απεικόνιση. Προφανώς το  $h(m)$  είναι ίσο με το πλήθος όλων των απεικονίσεων  $\sigma : [n] \rightarrow [m]$ , οπότε  $h(m) = m^n$  για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ . Το (γ) προκύπτει από το (β) αφού

$$(x \cdot d/dx)^n e^x = (x \cdot d/dx)^n \left( \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{m!} \right) = \sum_{m \geq 0} m^n \frac{x^m}{m!}$$

ή με επαγωγή στο  $n$ , αποδεικνύοντας πρώτα ότι  $S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$  για  $n, k \in \mathbb{N}$ .

4.

5. Από τη (2.40) και την Πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι

$$\sum_{n \geq 0} d_n(x) \frac{t^n}{n!} = \left( \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{n \geq 0} \tilde{A}_n(x) \frac{t^n}{n!} \right) = e^{-t} \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \tilde{A}_n(x) \frac{t^n}{n!} \right).$$

Από τη (2.30) συνάγεται ότι

$$\sum_{n \geq 0} \tilde{A}_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(1-x)e^{(1-x)t}}{1-xe^{(1-x)t}}$$

και συμπεράνετε το ζητούμενο.

6. Έστω  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{n,k}$  το σύνολο των ευθειών που θέλουμε να απαριθμήσουμε. Για  $L \in \mathcal{L}$ , έστω  $\pi = \pi_L$  η διαμέριση του συνόλου  $[n]$  για την οποία δύο τυχαία στοιχεία  $i, j$  του  $[n]$  ανήκουν στο ίδιο μέρος της  $\pi$  αν και μόνο αν ισχύει  $x_i = x_j$  για κάθε σημείο  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  της  $L$ . Επίσης, έστω  $\omega_L$  η γραμμική διάταξη  $(B_1, B_2, \dots, B_m)$  των μερών της  $\pi$  και  $\rho_L$  η ακολουθία  $(r_1, r_2, \dots, r_{m-1})$  στοιχείων του  $[k]$  για τις οποίες ισχύει  $x_i = x_j + r_t$  για κάθε σημείο  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  της  $L$  αν  $i \in B_t$  και  $j \in B_{t+1}$ . Αφήνουμε στον αναγνώστη να δείξει ότι η απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_{n,k}$  με  $\varphi(L) = (\pi_L, \omega_L, \rho_L)$  είναι 1-1 αντιστοιχία από το  $\mathcal{L}$  στο σύνολο  $\mathcal{M}_{n,k}$  των τριάδων  $(\pi, \omega, \rho)$ , όπου  $\pi$  είναι διαμέριση του συνόλου  $[n]$ ,  $\omega$  είναι γραμμική διάταξη των μερών της  $\pi$  και  $\rho$  είναι ακολουθία στοιχείων του  $[k]$  μήκους  $m-1$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 8$ ,  $m = k = 3$ ,  $B_1 = \{2, 6, 7\}$ ,  $B_2 = \{1, 8\}$ ,  $B_3 = \{3, 4, 5\}$ ,  $r_1 = 2$  και  $r_2 = 3$ , τότε η  $L$  είναι η ευθεία στον  $\mathbb{R}^8$  που ορίζεται από τις εξισώσεις  $x_2 = x_6 = x_7$ ,  $x_1 = x_8$ ,  $x_3 = x_4 = x_5$ ,  $x_2 = x_1 + 2$  και  $x_1 = x_3 + 3$ . Από τα προηγούμενα και τον τύπο της σύνθεσης προκύπτει ότι

$$\sum_{n \geq 1} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} = E_g(E_f(x)),$$

όπου  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι οι συναρτήσεις για τις οποίες  $f(0) = g(0) = 0$  ενώ για  $m \geq 1$ ,  $f(m) = 1$  και  $g(m)$  είναι το πλήθος των τρόπων να διαταχθούν γραμμικά  $m$  αντικείμενα (τα μέρη της  $\pi$ ) και να επιλεγούν τα  $r_1, r_2, \dots, r_{m-1} \in [k]$ . Έπεται ότι  $E_f(x) = e^x - 1$  και ότι  $g(m) = m! k^{m-1}$  για  $m \geq 1$ , οπότε

$$E_g(x) = \sum_{m \geq 1} k^{m-1} x^m = \frac{x}{1 - kx}$$

και

$$\sum_{n \geq 1} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} = \frac{E_f(x)}{1 - kE_f(x)} = \frac{e^x - 1}{(1+k) - ke^x}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό εμφανίστηκε στο άρθρο [R. Gill, *The number of elements in a generalized partition semilattice*, Discrete Math. **186** (1998), 125–134].

7. Η σχέση (3.28) γράφεται  $\exp(E_f(x)) = E_h(x)$ , όπου  $f, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι οι συναρτήσεις με  $f(0) = 0$  και  $f(n) = (n-1)!$  για  $n \geq 1$  και  $h(n) = n!$  για  $n \in \mathbb{N}$ , αντίστοιχα. Από τον εκθετικό τύπο προκύπτει ότι ο συντελεστής του  $x^n/n!$  στην τυπική δυναμοσειρά  $\exp(E_f(x))$  είναι ίσος με το πλήθος των τρόπων να διαμερισθεί το σύνολο  $[n]$  και να ορισθεί μια κυκλική μετάθεση κάθε μέρους της διαμέρισης. Από την κυκλική μορφή μιας μετάθεσης συμπεραίνουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει με  $n! = h(n)$  τρόπους και συνεπώς ότι  $\exp(E_f(x)) = E_h(x)$ . Ομοίως, το αριστερό μέλος της (3.29) είναι ίσο με  $\exp(E_g(x))$ , όπου  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι η συνάρτηση με  $g(0) = 0$  και  $g(n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$  για  $n \geq 1$ . Από τον εκθετικό τύπο προκύπτει ότι  $\exp(E_g(x)) = E_t(x)$ , όπου  $t(0) = 1$ ,

$$t(n) = \sum_{\{B_1, \dots, B_k\} \in \Pi_n} g(\#B_1) \cdots g(\#B_k) \quad (3.32)$$

για  $n \geq 1$  και  $\Pi_n$  είναι το σύνολο των διαμερίσεων του  $[n]$ . Υπενθυμίζουμε ότι για το πρόσημο μιας μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}_n$  ισχύει  $\epsilon(w) = \prod_k (-1)^{k-1}$ , όπου το  $k$  διατρέχει τα μήκη των κύκλων της  $w$ . Χρησιμοποιώντας επομένως την κυκλική μορφή για μεταθέσεις, η (3.32) γράφεται

$$t(n) = \sum_{w \in \mathcal{S}_n} \epsilon(w).$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει εύκολα ότι  $t(1) = 1$  και  $t(n) = 0$  για  $n \geq 2$ , οπότε  $E_t(x) = 1 + x$ , και συνεπώς ισχύει η (3.29).

8. Για το (α), εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 3.2.8 (γ), δείξτε ότι  $E_f(x) = \exp(\frac{x^3}{3})$  και συνάγετε ότι

$$f(n) = \begin{cases} \frac{(3k)!}{3^k k!}, & \text{αν } n = 3k \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

9.



10. Θέτοντας το  $-x^2/4$  στη θέση του  $x$  στην (1.22), παίρνουμε

$$(1+x^2)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς  $x$  προκύπτει ότι

$$F^{(-1)}(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Παρατηρώντας τέλος ότι

$$((2n-1)!!)^2 = \left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

προκύπτει το ζητούμενο.

11. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{T}$  το σύνολο των δένδρων με τις επιθυμητές ιδιότητες, όπου όμως το σύνολο των φύλλων επιτρέπεται να είναι τυχαίο υποσύνολο του  $\mathbb{Z}_{>0}$  με περιττό πλήθος στοιχείων. Έχουμε

$$G'(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n t_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Έστω  $n \geq 1$  και δένδρο  $T \in \mathcal{T}$  με φύλλα  $1, 2, \dots, 2n+1$ . Έστω  $T_0, T_1, T_2$  τα υποδένδρα της ρίζας. Παρατηρούμε ότι το  $2n+1$  είναι φύλλο του  $T_2$  και ότι το  $T_0$  έχει μόνο μια κορυφή (φύλλο), η οποία ανήκει στο  $[2n]$  και είναι μικρότερη από το μέγιστο φύλλο του  $T_1$ . Επομένως, το  $T$  ορίζεται επιλέγοντας (i) μια ασθενή διατεταγμένη διαμέριση  $(B, C)$  του συνόλου  $[2n]$  σε υποσύνολα  $B$  και  $C$ , το καθένα με άρτιο πλήθος στοιχείων και με  $B \neq \emptyset$ , (ii) ένα δένδρο  $T_2 \in \mathcal{T}$  με σύνολο φύλλων  $C \cup \{2n+1\}$ , (iii) ένα στοιχείο  $r$  του  $B$  εκτός από το μέγιστο και (iv) ένα δένδρο  $T_1 \in \mathcal{T}$  με σύνολο φύλλων  $B \setminus \{r\}$ . Από τα προηγούμενα και την Πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n t_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \left( \sum_{n \geq 1} (2n-1) (-1)^{n-1} t_{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) G'(x).$$

Γράφοντας  $(2n-1)x^{2n}/(2n)! = x \cdot x^{2n-1}/(2n-1)! - x^{2n}/(2n)!$ , προκύπτει η (3.31). Ο τύπος για το  $t_n$  στο (β) οφείλεται στους H. Trappmann και G. Ziegler [J. Combin. Theory Series A **82** (1998), 168–178]. Μια απόδειξή του, βασισμένη στο ερώτημα (α), είναι η εξής: Θέτουμε

$$H(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} := \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

οπότε, όπως προκύπτει από τη λύση της Άσκησης 10, αρκεί να δείξουμε ότι  $G(x) = H(x)$ . Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βρίσκουμε ότι

$$\int H(x) dx = xH(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = xH(x) - \sqrt{1+x^2} + 1.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$H'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \left( xH(x) - \int H(x) dx \right) H'(x),$$

από όπου η ζητούμενη ισότητα  $G(x) = H(x)$  προκύπτει εύκολα με τη βοήθεια του (α). Για το (γ), έστω  $\mathcal{T}_n$  το σύνολο των δένδρων με φύλλα  $1, 2, \dots, 2n+1$ , όπως στην εκφώνηση της άσκησης. Έστω επίσης  $\mathcal{A}_n$  το σύνολο των ζευγών  $(w, \pi)$  της Άσκησης 25 (β) του Κεφαλαίου 1. Με δεδομένο το αποτέλεσμα της άσκησης αυτής, αρκεί να ορίσουμε μια 1-1 αντιστοιχία  $\varphi: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ . Έστω  $T \in \mathcal{T}_n$  και έστω  $T_0, T_1, T_2$  τα υποδένδρα της ρίζας. Αγνοούμε το φύλλο  $2n+1$  και συμβολίζουμε με  $s$  το μοναδικό φύλλο του  $T_0$  και με  $t$  και  $2m-1$  το μέγιστο φύλλο και το πλήθος των φύλλων του  $T_1$ , αντίστοιχα. Θέτουμε  $w = (w_1, w_2, \dots, w_{2n})$  και  $\pi = \{\{s, t\}\} \cup \pi_1 \cup \pi_2$ , όπου  $w_1 = s$ ,  $w_{2m} = t$ ,  $(w_2, \dots, w_{2m-1}) = u_1$ ,  $(w_{2m+1}, \dots, w_{2n}) = u_2$  και  $(u_1, \pi_1)$  και  $(u_2, \pi_2)$  είναι τα ζεύγη που ορίζονται (επαγωγικά) από τα δένδρα  $T_1$  και  $T_2$ . Για παράδειγμα, για το δένδρο του Σχήματος 3.4 έχουμε  $w = (3, 4, 6, 1, 7, 8, 2, 5)$  και  $\pi = \{\{3, 8\}, \{4, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 5\}\}$  (βλέπε επίσης Σχήμα 1.8). Αφήνεται στον αναγνώστη να βεβαιωθεί ότι η  $\varphi$  είναι πράγματι καλά ορισμένη και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Για το (δ), δείτε τη σημείωση στο τέλος του προαναφερθέντος άρθρου των H. Trappmann και G. Ziegler.

12. Θα λέμε ότι ένα δάσος  $F$  με ρίζες στο σύνολο κορυφών  $[n]$  είναι *εναλλασσόμενο* αν κάθε κορυφή του  $F$  είναι είτε μεγαλύτερη (στη φυσική διάταξη των ακεραίων) από όλες τις γειτονικές κορυφές της, είτε μικρότερη από όλες τις γειτονικές κορυφές της. Διαγράφοντας την κορυφή  $n+1$  από ένα εναλλασσόμενο δένδρο  $T$  στο σύνολο κορυφών  $[n+1]$  και τις ακμές που την περιέχουν, προκύπτει ένα εναλλασσόμενο δάσος  $\varphi(T)$  με ρίζες (οι γειτονικές κορυφές του  $n+1$  στο  $T$ ) στο σύνολο κορυφών  $[n]$ , κάθε ρίζα του οποίου είναι μικρότερη από τις γειτονικές της κορυφές. Επιπλέον, η  $\varphi(T)$  είναι 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των εναλλασσόμενων δένδρων με σύνολο κορυφών  $[n+1]$  στο σύνολο των εναλλασσόμενων δασών με ρίζες με αυτή την ιδιότητα. Επομένως ισχύει

$$f_{n+1} = \sum_{\{B_1, \dots, B_k\} \in \Pi_n} g(\#B_1) \cdots g(\#B_k)$$

για  $n \geq 1$ , όπου  $\Pi_n$  είναι το σύνολο των διαμερίσεων του  $[n]$  και  $g(m)$  είναι το πλήθος των εναλλασσόμενων δένδρων με ρίζα στο σύνολο κορυφών  $[m]$ , η ρίζα των οποίων είναι μικρότερη από τις γειτονικές της κορυφές. Από την προηγούμενη ισότητα και τον εκθετικό τύπο (και αφού  $f_1 = 1$ ) προκύπτει ότι  $F(x) = \exp(E_g(x))$ . Παρατηρώντας (εξηγήστε πώς) ότι  $g(1) = 1$  και  $g(m) = \frac{m}{2} f_m$  για  $m \geq 2$ , βρίσκουμε ότι

$$E_g(x) = \sum_{m \geq 1} g(m) \frac{x^m}{m!} = x + \frac{1}{2} \sum_{m \geq 2} m f_m \frac{x^m}{m!}$$

$$\begin{aligned}
&= x + \frac{x}{2} \sum_{m \geq 2} f_m \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = x + \frac{x}{2} (F(x) - 1) \\
&= \frac{x}{2} (F(x) + 1)
\end{aligned}$$

και συνεπώς ισχύει το (α). Θέτοντας  $H(x) = x(F(x) + 1) = x + \sum_{n \geq 0} f_{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!}$ , έχουμε από το (α)

$$H(x) = x \left( e^{\frac{x}{2}(F(x)+1)} + 1 \right) = x \left( e^{\frac{1}{2}H(x)} + 1 \right)$$

και συνεπώς

$$H(x) = \left( \frac{x}{e^{x/2} + 1} \right)^{\langle -1 \rangle}.$$

Από τον τύπο αντιστροφής του Lagrange συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{f_n}{(n-1)!} &= [x^n] H(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] \left( e^{x/2} + 1 \right)^n = \frac{1}{n} [x^{n-1}] \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx/2} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!},
\end{aligned}$$

δηλαδή ότι ισχύει το (β). Το αποτέλεσμα αυτό εμφανίστηκε στο άρθρο [A. Postnikov, *Intransitive trees*, J. Combin. Theory Series A **79** (1997), 360–366]. Για το (γ), δείτε το άρθρο [C. Chauve and S. Dulucq, *Enumerating alternating trees*, J. Combin. Theory Series A **94** (2001), 142–151].

13. Για το (α), ακολουθώντας το σκεπτικό της απόδειξης της Πρότασης 1.2.7, δείξτε ότι το ζητούμενο πλήθος ικανοποιεί την αναδρομική σχέση που προκύπτει από την (3.24) αντικαθιστώντας το  $k$  με το  $m+1$ . Για τα (β) και (γ) γενικεύστε τις 1–1 αντιστοιχίες που περιγράφηκαν στις λύσεις των Ασκήσεων 26 (δ) και 23, αντίστοιχα, του Κεφαλαίου 1. Στη δεύτερη περίπτωση, η ισότητα (1.50) πρέπει να αντικατασταθεί με την

$$i \cdot a_{n,i} = \binom{n-1}{i-1} \binom{mn+i}{i-1}. \quad (3.33)$$

Το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) οφείλεται στον N. Fuss (1791), ενώ εκείνο του (γ) στους J. Przytycki και A. Sikora [J. Combin. Theory Series A **92** (2000), 78–86].



# Κεφάλαιο 4

## Young ταμπλώ

Ένας από τους πιο περίπλοκους τρόπους με τους οποίους μπορεί να παρασταθεί μια μετάθεση είναι ως ένα ζεύγος Young ταμπλώ. Η παράσταση αυτή επιτυγχάνεται με την αντιστοιχία Robinson-Schensted, η σπουδαιότητα της οποίας στα θεωρητικά μαθηματικά είναι δύσκολο να υπερτιμηθεί. Η αντιστοιχία Robinson-Schensted ορίζεται αλγοριθμικά και μπορεί να εξηγήσει πολλές μη τετριμμένες συνδυαστικές ιδιότητες των μεταθέσεων, κάποιες από τις οποίες ιστορικά προέκυψαν μέσω της θεωρίας των αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας. Στο παρόν κεφάλαιο, αφού περιγράψουμε την αντιστοιχία αυτή, μελετάμε βασικές της ιδιότητες και δίνουμε εφαρμογές στη συνδυαστική των μεταθέσεων και των ταμπλώ. Καταλήγουμε με τύπους για το πλήθος των Young ταμπλώ δοσμένου σχήματος.

### 4.1 Ταμπλώ

Έστω διαμέριση  $\lambda$  του  $n$  με διάγραμμα Young  $Y_\lambda$ .

1	2	4	6
3	7	9	12
8	11	13	
14			

Σχήμα 4.1: Ένα ταμπλώ σχήματος  $(4, 4, 3, 1)$ .

**Ορισμός 4.1.1** Ταμπλώ σχήματος  $\lambda$  λέγεται μια 1-1 αντιστοιχία  $T$  του συνόλου των τετραγώνων του  $Y_\lambda$  με ένα υποσύνολο  $\Theta$  του συνόλου των θετικών ακεραίων, τέτοια ώστε:

- (i) οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε γραμμής του  $Y_\lambda$  να αυξάνουν προς τα δεξιά και
- (ii) οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε στήλης του  $Y_\lambda$  να αυξάνουν προς τα κάτω.

Το  $T$  λέγεται Young ταμπλώ αν  $\Theta = [n]$ .

Γράφουμε  $\text{sh}(T)$  για το σχήμα  $\lambda$  του ταμπλώ  $T$ . Το σύνολο  $\Theta$  λέγεται περιεχόμενο του  $T$  και τα στοιχεία του λέγονται στοιχεία του  $T$ . Συνεπώς Young ταμπλώ είναι ένα ταμπλώ με περιεχόμενο  $[n]$  για κάποιο ακέραιο  $n$ . Ένα ταμπλώ  $T$  απεικονίζεται αναγράφοντας τον ακέραιο  $T(x)$  εντός του αντίστοιχου τετραγώνου  $x$ , για κάθε τετράγωνο  $x$  του  $Y_\lambda$ . Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζεται ένα ταμπλώ σχήματος  $(4, 4, 3, 1)$ . Η αρίθμηση γραμμών και στηλών του  $T$  γίνεται από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, το στοιχείο στην πρώτη γραμμή και δεύτερη στήλη του ταμπλώ του Σχήματος 4.1 είναι το 2.

Θα συμβολίζουμε με  $f^\lambda$  το πλήθος των Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$ . Έχουμε, για παράδειγμα,  $f^{(n)} = f^{(1,1,\dots,1)} = 1$ . Επίσης  $f^{(n-1,1)} = n - 1$  για  $n \geq 2$  και, όπως εξηγήσαμε στο Πρόσιμα 1.3.1,  $f^{(m,m)} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$ . Στο Σχήμα 4.2 απεικονίζονται τα πέντε Young ταμπλώ σχήματος  $(3, 3)$ . Οι προηγούμενοι τύποι προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις ενός γενικότερου τύπου για το  $f^\lambda$  (βλέπε Θεώρημα 4.6.1), τον οποίο θα εξετάσουμε στην Παράγραφο 4.6.

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

1	3	4
2	5	6

1	3	5
2	4	6

Σχήμα 4.2: Τα Young ταμπλώ σχήματος  $(3, 3)$ .

**Παρατήρηση 4.1.1** Εκτός από το συνδυαστικό ενδιαφέρον που παρουσιάζουν, οι ακέραιοι  $f^\lambda$  έχουν εξέχουσα σημασία και στη θεωρία αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, είναι γνωστό (βλέπε [6, Κεφάλαιο 7] και [10, Κεφάλαιο 2]) ότι οι κλάσεις ισομορφισμού των (πεπερασμένης διάστασης, μιγαδικών) ανάγωγων αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας  $S_n$  βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις διαμερίσεις του ακεραίου  $n$  και ότι η διάσταση μιας ανάγωγης αναπαραστάσης στην κλάση που αντιστοιχεί στη διαμέριση  $\lambda$  είναι ίση με  $f^\lambda$ . Για παράδειγμα, υπάρχουν πέντε (ανισόμορφες) ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας  $S_4$  και οι διαστάσεις τους είναι ίσες με 1, 3, 2, 3 και 1.

## 4.2 Η αντιστοιχία Robinson-Schensted

Είναι γνωστό (βλέπε [10, Παράγραφο 1.10]) ότι η τάξη οποιασδήποτε πεπερασμένης ομάδας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαστάσεων των (πεπερασμένης διάστασης, μιγαδικών, ανισόμορφων) ανάγωγων αναπαραστάσεών της. Σύμφωνα με όσα επισημάνσαμε στην Παρατήρηση 4.1.1, για τη συμμετρική ομάδα  $\mathcal{S}_n$  η τελευταία πρόταση μεταφράζεται στην ταυτότητα

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!. \quad (4.1)$$

Το άθροισμα στο αριστερό μέλος της (4.1) απαριθμεί το σύνολο των ζευγών  $(P, Q)$ , όπου  $P$  και  $Q$  είναι Young ταμπλώ του ίδιου σχήματος  $\lambda \vdash n$ . Επομένως, μια συνδυαστική απόδειξη της (4.1) θα μπορούσε να δοθεί περιγράφοντας μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από την  $\mathcal{S}_n$  στο σύνολο αυτό. Αυτό ακριβώς επιτυγχάνεται με την αντιστοιχία Robinson-Schensted. Για να ορίσουμε την αντιστοιχία αυτή, θα χρειαστεί να περιγράψουμε πρώτα τον αλγόριθμο της εισαγωγής ενός ακεραίου σε ένα ταμπλώ.

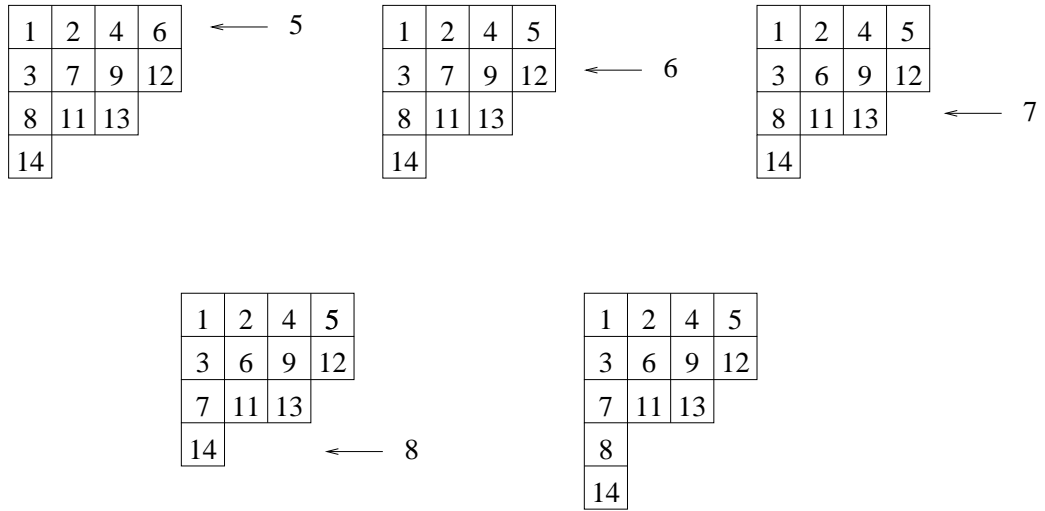
Έστω ταμπλώ  $T$  και έστω  $a$  θετικός ακεραίος που δεν είναι στοιχείο του  $T$ . Η διαδικασία της εισαγωγής του  $a$  στις γραμμές του  $T$  (row insertion) κατασκευάζει ένα νέο ταμπλώ  $T \leftarrow a$  ως εξής: Αν το  $a$  είναι μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του  $T$ , τότε το  $T \leftarrow a$  είναι το ταμπλώ που προκύπτει προσθέτοντας ένα τετράγωνο στο τέλος της πρώτης γραμμής του  $T$  με το  $a$  στο εσωτερικό του. Διαφορετικά, έστω  $b$  το μικρότερο στοιχείο της πρώτης γραμμής του  $T$  που είναι μεγαλύτερο του  $a$ . Το  $a$  αντικαθιστά το  $b$  στο αντίστοιχο τετράγωνο της πρώτης γραμμής του  $T$  και η διαδικασία επαναλαμβάνεται με το  $b$  και τη δεύτερη γραμμή του  $T$ , αν αυτή υπάρχει, ενώ το  $b$  καταλαμβάνει το πρώτο τετράγωνο μιας νέας (δεύτερης) γραμμής αν το  $T$  έχει μόνο μία γραμμή. Το  $T \leftarrow a$  είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει όταν τερματιστεί η παραπάνω διαδικασία και λέγεται *ταμπλώ εισαγωγής* του  $a$  στις γραμμές του  $T$ . Αφήνεται στον αναγνώστη (Άσκηση 2) να βεβαιωθεί ότι το  $T \leftarrow a$  είναι πράγματι ταμπλώ. Το Σχήμα 4.3 απεικονίζει την εισαγωγή του  $a = 5$  στις γραμμές του ταμπλώ του Σχήματος 4.1.

**Ορισμός 4.2.1** Έστω μετάθεση  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}(\Theta)$ , όπου  $\Theta$  είναι υποσύνολο του συνόλου των θετικών ακεραίων με  $n$  στοιχεία.

(i) Το ταμπλώ

$$P(w) = (((\emptyset \leftarrow w_1) \leftarrow w_2) \leftarrow \dots) \leftarrow w_n$$

περιεχομένου  $\Theta$  λέγεται *P-ταμπλώ*, ή *ταμπλώ εισαγωγής (insertion tableau)*, της  $w$ .



Σχήμα 4.3: Εισαγωγή του 5 στο ταμπλώ του Σχήματος 4.1.

- (ii) Έστω  $Q(w)$  το Young ταμπλώ με σχήμα  $\text{sh}(P(w))$  στο οποίο, για κάθε  $k \in [n]$ , το στοιχείο  $k$  καταλαμβάνει τη θέση στην οποία τερματίζεται η εισαγωγή του  $w_k$  στο  $P$ -ταμπλώ της μετάθεσης  $(w_1, \dots, w_{k-1})$ . Το  $Q(w)$  λέγεται  $Q$ -ταμπλώ, ή ταμπλώ καταγραφής (*recording tableau*), της  $w$ .

Αφήνεται στον αναγνώστη (Άσκηση 2) να βεβαιωθεί ότι το  $Q(w)$  είναι πράγματι Young ταμπλώ για κάθε  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$ . Επομένως αν  $w \in \mathcal{S}_n$ , τότε τα  $P(w)$  και  $Q(w)$  είναι Young ταμπλώ του ίδιου σχήματος  $\lambda \vdash n$ . Το Σχήμα 4.4 απεικονίζει τη διαδικασία εισαγωγής και καταγραφής που οδηγεί στην κατασκευή του ζεύγους  $(P(w), Q(w))$  για  $n = 6$  και  $w = (2, 5, 4, 1, 6, 3)$ .

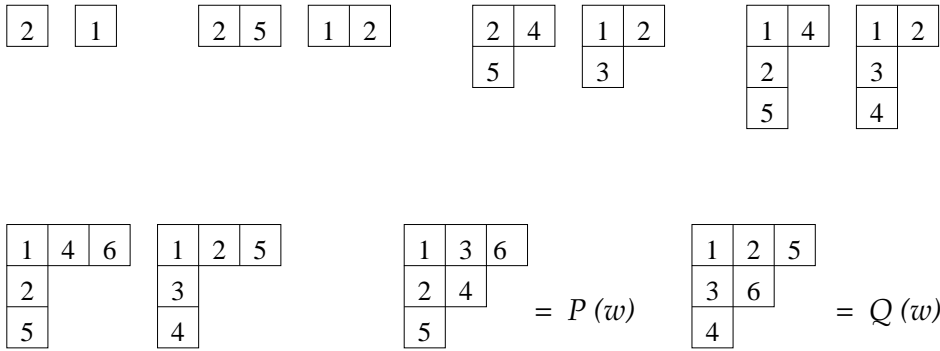
**Ορισμός 4.2.2** Έστω  $\Delta_n$  το σύνολο των ζευγών  $(P, Q)$ , όπου  $P$  και  $Q$  είναι Young ταμπλώ του ίδιου σχήματος  $\text{sh}(P) = \text{sh}(Q) \vdash n$ . Η αντιστοιχία Robinson-Schensted είναι η απεικόνιση  $\text{RS} : \mathcal{S}_n \rightarrow \Delta_n$  με  $\text{RS}(w) = (P(w), Q(w))$  για κάθε  $w \in \mathcal{S}_n$ .

Το ακόλουθο θεώρημα είναι το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου.

**Θεώρημα 4.2.1** Η αντιστοιχία Robinson-Schensted  $\text{RS} : \mathcal{S}_n \rightarrow \Delta_n$  είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση.

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση. Έστω  $(P, Q) \in \Delta_n$ . Θέτουμε  $P_n = P$  και  $Q_n = Q$  και συμβολίζουμε με  $u_n$  το στοιχείο του  $P_n$  που





Σχήμα 4.4: Κατασκευή του  $RS(w)$  για  $n = 6$  και  $w = (2, 5, 4, 1, 6, 3)$ .

καταλαμβάνει την ίδια θέση στο  $P_n$  με αυτή που καταλαμβάνει το  $n$  στο  $Q_n$ . Ορίζουμε ως  $Q_{n-1}$  το ταμπλώ που προκύπτει από το  $Q_n$  διαγράφοντας το  $n$  και το τετράγωνο που το περιέχει και ως  $P_{n-1}$  το ταμπλώ που προκύπτει από το  $P_n$  εφαρμόζοντας την εξής διαδικασία (αντίστροφη εισαγωγή στις γραμμές του  $P_n$  από το στοιχείο  $u_n$ ): Θέτουμε  $u_n = b$ , διαγράφουμε το  $b$  και το τετράγωνο που το περιέχει από το  $P_n$ . Αν το  $b$  βρίσκεται στην πρώτη γραμμή του  $P_n$ , τότε το  $P_{n-1}$  είναι το ταμπλώ που προκύπτει και θέτουμε  $w_n = b$ . Διαφορετικά, θεωρούμε το μεγαλύτερο στοιχείο  $a$  της γραμμής του  $P_n$  που προηγείται αυτής του  $b$  με την ιδιότητα  $a < b$ . Το  $b$  αντικαθιστά το  $a$  στο τετράγωνο που αυτό κατείχε στο  $P_n$  και η διαδικασία επαναλαμβάνεται με το  $a$  και τη γραμμή που προηγείται αυτής του  $a$ . Η διαδικασία τερματίζεται όταν κάποιο στοιχείο της πρώτης γραμμής, το οποίο συμβολίζουμε με  $w_n$ , αντικατασταθεί από κάποιο άλλο (της δεύτερης γραμμής), οπότε  $P_{n-1}$  είναι το ταμπλώ που προκύπτει. Αφήνεται στον αναγνώστη (Άσκηση 2) να βεβαιωθεί ότι το  $P_{n-1}$  είναι πράγματι ταμπλώ, με περιεχόμενο  $[n] \setminus \{w_n\}$ .

Από το ζεύγος  $(P_{n-1}, Q_{n-1})$  κατασκευάζονται διαδοχικά με τον ίδιο τρόπο τα ζεύγη  $(P_{n-2}, Q_{n-2}), \dots, (P_1, Q_1)$  και  $(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset)$  και ορίζονται οι ακέραιοι  $w_{n-1}, \dots, w_1$ . Θέτουμε  $RS^*(P, Q) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  και αφήνουμε και πάλι στον αναγνώστη (Άσκηση 2) να δείξει ότι η απεικόνιση  $RS^* : \Delta_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  είναι η αντίστροφη της  $RS$ .  $\square$

Η συνδυαστική απόδειξη της (4.1), την οποία υποσχεθήκαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου, έχει ως εξής.

**Πόρισμα 4.2.1** Για κάθε  $n \geq 1$ , το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών  $f^\lambda$  για  $\lambda \vdash n$  είναι ίσο με  $n!$ .

*Απόδειξη.* Το δεξιό και το αριστερό μέλος της (4.1) είναι ίσα με τους πληθάρθρωτους του  $\mathcal{S}_n$  και του συνόλου  $\Delta_n$  που εμφανίστηκε στον Ορισμό 4.2.2, αντίστοιχα. Συνεπώς το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 4.2.1.  $\square$

## 4.3 Το σχήμα μιας μετάθεσης

Στην παράγραφο αυτή  $\Theta$  είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των θετικών ακεραίων με  $n$  στοιχεία. Ονομάζουμε *σχήμα* μιας μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$  τη διαμέριση  $\text{sh}(P) = \text{sh}(Q)$  του  $n$  και τη συμβολίζουμε με  $\lambda(w)$ . Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4, για  $n = 6$  και  $w = (2, 5, 4, 1, 6, 3)$  έχουμε  $\lambda(w) = (3, 2, 1)$ . Θα μας απασχολήσουν τα εξής ερωτήματα:

- Ερώτημα 4.3.1** (α) Πώς μπορεί να περιγραφεί η διαμέριση  $\lambda(w)$  ευθέως από τη μετάθεση  $w$ ;
- (β) Ποιες είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για δύο μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}_n$  ώστε να ισχύει  $P(u) = P(v)$ ;
- (γ) Ποιες είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για δύο μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}_n$  ώστε να ισχύει  $Q(u) = Q(v)$ ;

Για να απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε τη δομή των μονότονων υποακολουθιών της  $w$ . Η απάντηση που θα δώσουμε στο δεύτερο ερώτημα (Θεώρημα 4.3.1) προϋποθέτει ένα νέο χαρακτηρισμό του  $P$ -ταμπλώ (Θεώρημα 4.3.2) και χρησιμοποιεί την έννοια της ισοδυναμίας του Knuth. Απάντηση στο τρίτο ερώτημα θα δοθεί στην Παράγραφο 4.4.

### 4.3.1 Λέξεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα ακολουθήσουμε την παράδοση κατά την οποία μια ακολουθία θετικών ακεραίων  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  παριστάνεται και ως η λέξη (με γράμματα από το αλφάβητο  $\mathbb{Z}_{>0}$ )  $w_1 w_2 \cdots w_n$ .

Σε κάθε ταμπλώ  $T$  αντιστοιχούν οι εξής δύο μεταθέσεις του περιεχομένου του  $T$ : Η λέξη των γραμμών  $w_{\text{row}}(T)$  προκύπτει διαβάζοντας τα στοιχεία των γραμμών του  $T$  από αριστερά προς τα δεξιά, αρχίζοντας από την τελευταία γραμμή και προχωρώντας προς την πρώτη, ενώ η λέξη των στηλών  $w_{\text{col}}(T)$  προκύπτει διαβάζοντας τα στοιχεία των στηλών του  $T$  από κάτω προς τα πάνω, αρχίζοντας από την πρώτη στήλη και προχωρώντας προς την τελευταία. Για παράδειγμα, για το ταμπλώ  $T$  του Σχήματος 4.1 έχουμε

$$\begin{aligned}w_{\text{row}}(T) &= 14 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \\w_{\text{col}}(T) &= 14 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6.\end{aligned}$$

### 4.3.2 Η σχέση ισοδυναμίας του Knuth

Ο ακόλουθος ορισμός θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε (βλέπε Πρόταση 4.3.1) το πώς μια μετάθεση  $w$  σχετίζεται με τη λέξη των γραμμών  $w_{\text{row}}(P(w))$ . Ο συσχετισμός αυτός θα φανεί χρήσιμος στην επόμενη υποπαράγραφο.

**Ορισμός 4.3.1** Έστω λέξεις  $u, v \in \mathcal{S}(\Theta)$ .

- (α) Οι  $u$  και  $v$  συνδέονται με ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό Knuth αν υπάρχουν ακέραιοι  $a < b < c$ , τέτοιοι ώστε η μία από τις λέξεις αυτές να προκύπτει από την άλλη αντικαθιστώντας είτε τρία διαδοχικά της γράμματα  $b \cdot a \cdot c$  με τα  $b \cdot c \cdot a$ , είτε τρία διαδοχικά της γράμματα  $a \cdot c \cdot b$  με τα  $c \cdot a \cdot b$ .
- (β) Οι  $u$  και  $v$  λέγονται ισοδύναμες κατά Knuth, οπότε γράφουμε  $u \equiv v$ , αν η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη μέσω πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών Knuth.

Για παράδειγμα, έχουμε  $2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5$ . Είναι φανερό ότι η σχέση  $\equiv$  είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο  $\mathcal{S}(\Theta)$  και ότι αν  $u \equiv v$ , τότε ισχύουν  $u \cdot w \equiv v \cdot w$  και  $w \cdot u \equiv w \cdot v$  για κάθε λέξη  $w$  με σύνολο στοιχείων ξένο προς εκείνα των  $u$  και  $v$ . Το ακόλουθο λήμμα συνδέει τις έννοιες της εισαγωγής στις γραμμές και της λέξης των γραμμών ενός ταμπλώ με αυτή της ισοδυναμίας του Knuth.

**Λήμμα 4.3.1** Για τυχαίο ταμπλώ  $T$  και θετικό ακέραιο  $a$  που δεν είναι στοιχείο του  $T$  ισχύει  $w_{\text{row}}(T) \cdot a \equiv w_{\text{row}}(T \leftarrow a)$ .

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο πλήθος των γραμμών του  $T$ . Υποθέτουμε πρώτα ότι το  $T$  έχει μόνο μία γραμμή. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε  $w_{\text{row}}(T) = a_1 \cdots a_r b_1 \cdots b_s$  με  $a_1 < \cdots < a_r < a < b_1 < \cdots < b_s$ , οπότε

$$w_{\text{row}}(T \leftarrow a) = b_1 a_1 \cdots a_r a b_2 \cdots b_s.$$

Η ζητούμενη σχέση  $w_{\text{row}}(T) \cdot a \equiv w_{\text{row}}(T \leftarrow a)$  γράφεται

$$a_1 \cdots a_r b_1 \cdots b_s a \equiv b_1 a_1 \cdots a_r a b_2 \cdots b_s$$

και προκύπτει από τις  $b_1 \cdots b_s a \equiv b_1 a b_2 \cdots b_s$  και  $a_1 \cdots a_r b_1 a \equiv b_1 a_1 \cdots a_r a$ , τις οποίες αφήνουμε στον αναγνώστη να επαληθεύσει. Για τη γενική περίπτωση, έστω  $R$  η πρώτη γραμμή του  $T$  και έστω  $S$  το ταμπλώ που σχηματίζεται από τις υπόλοιπες γραμμές του  $T$ . Όπως ήδη έχουμε δείξει, ισχύει  $w_{\text{row}}(R) \cdot a \equiv w_{\text{row}}(R \leftarrow a)$  και συνεπώς  $w_{\text{row}}(T) \cdot a = w_{\text{row}}(S) w_{\text{row}}(R) \cdot a \equiv w_{\text{row}}(S) w_{\text{row}}(R \leftarrow a)$ . Θέτοντας  $w_{\text{row}}(R) = a_1 \cdots a_r b_1 \cdots b_s$ , όπως προηγουμένως, και εφαρμόζοντας την υπόθεση της επαγωγής για το  $S$  βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} w_{\text{row}}(S) w_{\text{row}}(R \leftarrow a) &= w_{\text{row}}(S) \cdot b_1 \cdot a_1 \cdots a_r a b_2 \cdots b_s \\ &\equiv w_{\text{row}}(S \leftarrow b_1) a_1 \cdots a_r a b_2 \cdots b_s \\ &= w_{\text{row}}(T \leftarrow a). \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή.  $\square$

**Πρόταση 4.3.1** Για κάθε μετάθεση  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$  ισχύει  $w \equiv w_{\text{row}}(P(w))$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ . Εφαρμόζουμε επαγωγή στο  $n$ , όπου το ζητούμενο είναι φανερό για  $n = 1$ . Θέτοντας  $u = (w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$  και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.1 και την υπόθεση της επαγωγής για τη  $u$ , βρίσκουμε ότι  $w_{\text{row}}(P(w)) = w_{\text{row}}(P(u) \leftarrow w_n) \equiv w_{\text{row}}(P(u)) \cdot w_n \equiv u \cdot w_n = w$ . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Πόρισμα 4.3.1** Αν για τις μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}(\Theta)$  ισχύει  $P(u) = P(v)$ , τότε οι  $u$  και  $v$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth.

*Απόδειξη.* Έχουμε  $u \equiv w_{\text{row}}(P(u))$  και  $v \equiv w_{\text{row}}(P(v))$  από την Πρόταση 4.3.1. Από τις σχέσεις αυτές και την υπόθεση  $P(u) = P(v)$  προκύπτει ότι  $u \equiv v$ .  $\square$

Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει ότι ισχύει και το αντίστροφο του ισχυρισμού του Πορίσματος 4.3.1 και απαντά στο Ερώτημα 4.3.1 (β).

**Θεώρημα 4.3.1** Για μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}(\Theta)$  ισχύει  $P(u) = P(v)$  αν και μόνο αν οι  $u$  και  $v$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth.

Για παράδειγμα υπάρχουν ακριβώς τέσσερις κλάσεις ισοδυναμίας Knuth στην  $\mathcal{S}_3$ , όπου μεταξύ των έξι στοιχείων της υπάρχουν τα δύο ζεύγη  $213 \equiv 231$  και  $132 \equiv 312$  διακεκριμένων, ισοδύναμων κατά Knuth λέξεων. Επίσης, υπάρχουν ακριβώς τέσσερα Young ταμπλώ με  $n = 4$  τετράγωνα και ισχύουν  $P(213) = P(231)$  και  $P(132) = P(312)$ , σε συμφωνία με το Θεώρημα 4.3.1. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο χρήσιμο χαρακτηρισμό του  $P$ -ταμπλώ.

**Θεώρημα 4.3.2** Για δοσμένη μετάθεση  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$ , το  $P(w)$  είναι το μοναδικό ταμπλώ  $T$  για το οποίο ισχύει  $w_{\text{row}}(T) \equiv w$ .

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2 θα δοθεί στην Παράγραφο 4.3.3.

*Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1.* Όπως έχει ήδη εξηγηθεί, μένει να δείξουμε ότι αν  $u \equiv v$ , τότε  $P(u) = P(v)$ . Πράγματι, αν  $u \equiv v$ , τότε από την Πρόταση 4.3.1 συμπεραίνουμε ότι  $u \equiv w_{\text{row}}(P(v))$ . Από το Θεώρημα 4.3.2 έπεται ότι  $P(u) = P(v)$ .  $\square$

### 4.3.3 Μονότονες υποακολουθίες

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε πώς οι μονότονες υποακολουθίες μιας μετάθεσης  $w$  καθορίζουν το σχήμα  $\lambda(w)$  και θα δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2 που εχρεμεί από την προηγούμενη παράγραφο.

Υπενθυμίζουμε ότι υποακολουθία (αντίστοιχα, υπολέξη) μήκους  $m$  μιας ακολουθίας  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  (αντίστοιχα, λέξης  $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ) λέγεται μια ακολουθία (αντίστοιχα, λέξη) της μορφής  $(w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_m})$  (αντίστοιχα,  $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m}$ ) τέτοια ώστε  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ . Η υποακολουθία (αντίστοιχα, υπολέξη) αυτή είναι αύξουσα αν  $w_{i_1} \leq w_{i_2} \leq \dots \leq w_{i_m}$  και φθίνουσα αν  $w_{i_1} \geq w_{i_2} \geq \dots \geq w_{i_m}$ .

**Ορισμός 4.3.2** Έστω μετάθεση  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$ . Συμβολίζουμε με  $L(w, k)$  το μέγιστο άθροισμα των μηκών  $k$  ξένων ανά δύο αύξουσων υποακολουθιών της  $w$  και με  $L^*(w, k)$  το μέγιστο άθροισμα των μηκών  $k$  ξένων ανά δύο φθίνουσων υποακολουθιών της  $w$ .

Ειδικότερα, το μέγιστο μήκος μιας αύξουσας ή φθίνουσας υποακολουθίας της  $w$  είναι ίσο με  $L(w, 1)$  ή  $L^*(w, 1)$ , αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι οι υποακολουθίες στον Ορισμό 4.3.2 επιτρέπεται να είναι κενές. Έτσι οι ακέραιοι  $L(w, k)$  και  $L^*(w, k)$  ορίζονται για κάθε  $k \geq 1$  και ισχύει  $L(w, k) = L^*(w, k) = n$  για  $k \geq n$ . Για παράδειγμα, για  $n = 8$  και τη μετάθεση  $w = (5, 1, 7, 8, 2, 4, 6, 3)$  του Σχήματος 4.5 έχουμε  $L(w, 1) = 4$ ,  $L(w, 2) = 7$  και  $L(w, k) = 8$  για  $k \geq 3$ , όπου  $(1, 2, 4, 6)$  είναι μια αύξουσα υποακολουθία της  $w$  μήκους 4 και  $(1, 2, 4, 6)$  και  $(5, 7, 8)$  είναι δύο αύξουσες, ξένες μεταξύ τους, υποακολουθίες της  $w$  συνολικού μήκους 7. Επίσης έχουμε  $L^*(w, 1) = 3$ ,  $L^*(w, 2) = 5$ ,  $L^*(w, 3) = 7$  και  $L^*(w, k) = 8$  για  $k \geq 4$ , όπου  $(7, 4, 3)$  είναι μια φθίνουσα υποακολουθία της  $w$  μήκους 3 και  $(5, 4, 3)$  και  $(7, 6)$  είναι δύο φθίνουσες, ξένες μεταξύ τους, υποακολουθίες της  $w$  συνολικού μήκους 5.

Υπενθυμίζουμε ότι μια διαμέριση  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  του  $n$  μπορεί να γραφεί ως η άπειρη ακολουθία  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, 0, \dots)$ , προσθέτοντας άπειρου πλήθους μηδενικούς όρους στο τέλος της  $\lambda$ . Η συζυγής της  $\lambda$  ορίζεται ως η διαμέριση  $\lambda'$  του  $n$  τα μέρη της οποίας είναι τα μήκη των στηλών του διαγράμματος Young της  $\lambda$ . Για παράδειγμα, αν  $\lambda = (4, 4, 3, 1)$ , τότε  $\lambda' = (4, 3, 3, 2)$ .

**Θεώρημα 4.3.3** Για κάθε  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$  και  $k \geq 1$ , το  $L(w, k)$  (αντίστοιχα,  $L^*(w, k)$ ) είναι ίσο με το συνολικό πλήθος των τετραγώνων στις πρώτες  $k$  γραμμές (αντίστοιχα, στήλες) του διαγράμματος Young του σχήματος  $\lambda(w)$  της  $w$ . Ισοδύναμα,

$$L(w, k) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \quad (4.2)$$

και

$$L^*(w, k) = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \dots + \lambda'_k \quad (4.3)$$

για κάθε  $k \geq 1$ , όπου  $\lambda(w) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  και  $\lambda(w)' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$  είναι η συζυγής διαμέριση της  $\lambda(w)$ .

Το προηγούμενο θεώρημα δίνει την απάντηση στο Ερώτημα 4.3.1 (α) που υποσχεθήκαμε στην αρχή της Παραγράφου 4.3 αφού, για παράδειγμα, η σχέση (4.2) γράφεται ισοδύναμα

$$\lambda_k = L(w, k) - L(w, k-1), \quad (4.4)$$

όπου  $L(w, 0) = 0$ . Ειδικότερα, το  $\lambda_1$  είναι ίσο με το μέγιστο μήκος μιας αύξουσας υποακολουθίας της  $w$  (αντίστοιχα, το  $\lambda_1^t$  είναι ίσο με το μέγιστο μήκος μιας φθίνουσας υποακολουθίας της  $w$ ).

**Πόρισμα 4.3.2** Οι ακέραιοι  $L^*(w, k)$  για  $k \geq 1$  καθορίζονται από τους  $L(w, k)$  για  $k \geq 1$  και αντιστρόφως. Δηλαδή, για μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}(\Theta)$  ισχύει  $L(u, k) = L(v, k)$  για κάθε  $k \geq 1$  αν και μόνο αν  $L^*(u, k) = L^*(v, k)$  για κάθε  $k \geq 1$ .

Πριν εντυπώσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3, παρατηρούμε ότι ισχύει  $L^*(w, k) = L(w^t, k)$  για κάθε  $k$ , όπου  $w^t = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)$  είναι η ανάστροφη της μετάθεσης  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}(\Theta)$ . Η απόδειξη του ακόλουθου λήμματος αφήνεται ως άσκηση.

**Λήμμα 4.3.2** Αν οι μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}(\Theta)$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth, τότε το ίδιο ισχύει για τις  $u^t$  και  $v^t$ .

Το Θεώρημα 4.3.3 θα προκύψει από τα δύο επόμενα λήμματα.

**Λήμμα 4.3.3** Αν οι μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}(\Theta)$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth, τότε  $L(u, k) = L(v, k)$  και  $L^*(u, k) = L^*(v, k)$  για κάθε  $k \geq 1$ .

*Απόδειξη.* Παριστάνουμε τις  $u, v$  ως λέξεις. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι  $u$  και  $v$  συνδέονται με ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό Knuth. Υποθέτουμε επομένως ότι ισχύει είτε (α)  $u = x \cdot bac \cdot y$  και  $v = x \cdot bca \cdot y$ , είτε (β)  $u = x \cdot acb \cdot y$  και  $v = x \cdot cab \cdot y$ , όπου  $x, y$  είναι λέξεις και  $a, b, c$  είναι θετικοί ακέραιοι με  $a < b < c$ . Η ανισότητα  $L(u, k) \geq L(v, k)$  προκύπτει από το γεγονός ότι οποιαδήποτε συλλογή ξένων ανά δύο αύξουσων υπολέξεων της  $v$  είναι επίσης συλλογή ξένων ανά δύο αύξουσων υπολέξεων της  $u$ . Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε μια συλλογή  $\mathcal{A}$  που αποτελείται από  $k$  ξένες ανά δύο αύξουσες υπολέξεις της  $u$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει τέτοια συλλογή του ίδιου συνολικού μήκους και για τη  $v$ . Αν δεν υπάρχει λέξη της  $\mathcal{A}$  που περιέχει τα  $a$  και  $c$ , τότε η  $\mathcal{A}$  είναι η ζητούμενη συλλογή και για τη  $v$ . Έστω ότι η  $\mathcal{A}$  περιέχει λέξη της μορφής  $x_1 \cdot ac \cdot y_1$ . Αν το  $b$  δεν είναι γράμμα κάποιας άλλης λέξης της  $\mathcal{A}$ , τότε η συλλογή που προκύπτει από την  $\mathcal{A}$  αντικαθιστώντας τη λέξη  $x_1 \cdot ac \cdot y_1$  με τη  $x_1 \cdot bc \cdot y_1$  στην περίπτωση (α) και με τη  $x_1 \cdot ab \cdot y_1$  στην περίπτωση (β), έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Διαφορετικά η  $\mathcal{A}$  περιέχει στοιχείο της μορφής  $x_2 \cdot b \cdot y_2$ , όπου οι λέξεις  $x_2$  και  $y_2$  δεν περιέχουν τα  $a, c$ . Αντικαθιστώντας τις λέξεις  $x_1 \cdot ac \cdot y_1$  και  $x_2 \cdot b \cdot y_2$  στην  $\mathcal{A}$  με τις  $x_2 \cdot bc \cdot y_1$  και  $x_1 \cdot a \cdot y_2$  στην περίπτωση (α) και με τις  $x_1 \cdot ab \cdot y_2$  και  $x_2 \cdot c \cdot y_1$  στην περίπτωση (β), προκύπτει και πάλι συλλογή υπολέξεων της  $v$  με τις ζητούμενες ιδιότητες. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι  $L(u, k) \leq L(v, k)$  και συνεπώς ότι  $L(u, k) = L(v, k)$ .

Για το δεύτερο ζητούμενο χρησιμοποιούμε την ισχύ του πρώτου και το Λήμμα 4.3.2 και συμπεραίνουμε ότι  $L^*(u, k) = L(u^t, k) = L(v^t, k) = L^*(v, k)$  για κάθε  $k$ .  $\square$

**Λήμμα 4.3.4** Αν  $w = w_{\text{row}}(T)$  για κάποιο ταμπλώ  $T$  σχήματος  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , τότε  $L(w, k) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$  και  $L^*(w, k) = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \dots + \lambda'_k$  για κάθε  $k \geq 1$ , όπου  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ .

*Απόδειξη.* Οι πρώτες  $k$  γραμμές του  $T$  ορίζουν  $k$  αύξουσες υποακολουθίες της  $w$  συνολικού μήκους  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$  και συνεπώς  $L(w, k) \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ . Για την αντίστροφη ανισότητα αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι (α) μια αύξουσα υποακολουθία της  $w$  δεν μπορεί να περιέχει δύο ή περισσότερα στοιχεία που να ανήκουν στην ίδια στήλη του  $T$  και ότι (β) αν  $A$  είναι η ένωση οποιονδήποτε  $k$  ξένων ανά δύο υποσυνόλων του περιεχομένου  $\Theta$  του  $T$ , καθένα από τα οποία περιέχει το πολύ ένα στοιχείο από κάθε στήλη του  $T$ , τότε το πλήθος των στοιχείων του  $A$  δεν υπερβαίνει το συνολικό πλήθος των τετραγώνων των πρώτων  $k$  γραμμών του  $T$ .

Για τη δεύτερη ισότητα ακολουθούμε τον ίδιο συλλογισμό, εναλλάσσοντας τους ρόλους των γραμμών και στηλών του  $T$ .  $\square$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3.* Θέτοντας  $v = w_{\text{row}}(P(w))$ , έχουμε  $w \equiv v$  από την Πρόταση 4.3.1 και συνεπώς  $L(w, k) = L(v, k)$  και  $L^*(w, k) = L^*(v, k)$  από το Λήμμα 4.3.3. Αφού  $\lambda(w)$  είναι το σχήμα του ταμπλώ  $P(w)$ , το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 4.3.4.  $\square$

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο αυτή με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2.

**Λήμμα 4.3.5** Έστω  $u, v \in \mathcal{S}(\Theta)$  και  $u_\circ, v_\circ$  οι μεταθέσεις που προκύπτουν από τις  $u, v$ , αντίστοιχα, διαγράφοντας το μέγιστο στοιχείο του  $\Theta$ . Αν οι  $u, v$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth, τότε το ίδιο ισχύει για τις  $u_\circ, v_\circ$ .

*Απόδειξη.* Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι  $u$  και  $v$  συνδέονται με ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό Knuth. Έστω  $a < b < c$  τα τρία γράμματα που εμπλέκονται στο μετασχηματισμό αυτό. Παρατηρούμε ότι αν το μέγιστο στοιχείο του  $\Theta$  είναι το  $c$ , τότε  $u_\circ = v_\circ$  ενώ διαφορετικά, οι  $u_\circ$  και  $v_\circ$  συνδέονται με στοιχειώδη μετασχηματισμό Knuth στα ίδια γράμματα. Σε κάθε περίπτωση έχουμε  $u_\circ \equiv v_\circ$ .  $\square$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2.* Εξαιτίας της Πρότασης 4.3.1, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το πολύ ένα ταμπλώ  $T$  τέτοιο ώστε  $w_{\text{row}}(T) \equiv w$ . Έστω ότι το  $T$  είναι ταμπλώ με την ιδιότητα αυτή. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο μήκος  $n$  της  $w$ , όπου το ζητούμενο είναι φανερό για  $n = 1$ . Θέτουμε  $v = w_{\text{row}}(T)$ , οπότε  $v \equiv w$ . Διαγράφοντας το μέγιστο στοιχείο  $c$  του  $T$  (ισοδύναμα, της  $w$ ) και το τετράγωνο που το περιέχει από το  $T$ , προκύπτει ένα νέο ταμπλώ  $T_\circ$  με περιεχόμενο  $\Theta \setminus \{c\}$ . Έστω  $w_\circ$  και  $v_\circ$  οι μεταθέσεις που προκύπτουν, αντίστοιχα, διαγράφοντας το  $c$  από τις  $w$  και  $v$ . Προφανώς έχουμε  $w_{\text{row}}(T_\circ) = v_\circ$ . Από τη σχέση  $v \equiv w$  και το Λήμμα 4.3.5 προκύπτει ότι  $v_\circ \equiv w_\circ$ , οπότε  $w_{\text{row}}(T_\circ) \equiv w_\circ$ . Από την υπόθεση της επαγωγής

συμπεραίνουμε ότι το ταμπλώ  $T_0$  καθορίζεται μονοσήμαντα από τη  $w_0$ , άρα και από τη  $w$ . Επιπρόσθετα, από τα Λήμματα 4.3.3 και 4.3.4 γνωρίζουμε ότι το σχήμα του  $T$  καθορίζεται μονοσήμαντα από τη  $w$ . Από τις δύο αυτές διαπιστώσεις έπεται ότι το ίδιο το  $T$  καθορίζεται μονοσήμαντα από τη  $w$ , πράγμα το οποίο ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη του θεωρήματος.  $\square$

## 4.4 Η αντίστροφη μετάθεση

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε ένα αξιοσημείωτο φαινόμενο συμμετρίας που παρουσιάζει η αντιστοιχία Robinson-Schensted: Το ζεύγος των ταμπλώ  $RS(w^{-1})$  για την αντίστροφη μετάθεση  $w^{-1}$  της  $w$  προκύπτει εναλλάσσοντας τα  $P(w)$  και  $Q(w)$ . Ο αναγνώστης καλείται να επαληθεύσει το ακόλουθο θεώρημα για το παράδειγμα του Σχήματος 4.4.

**Θεώρημα 4.4.1** (Schützenberger [11]) *Για κάθε  $w \in \mathcal{S}_n$  ισχύει  $P(w^{-1}) = Q(w)$  και  $Q(w^{-1}) = P(w)$ .*

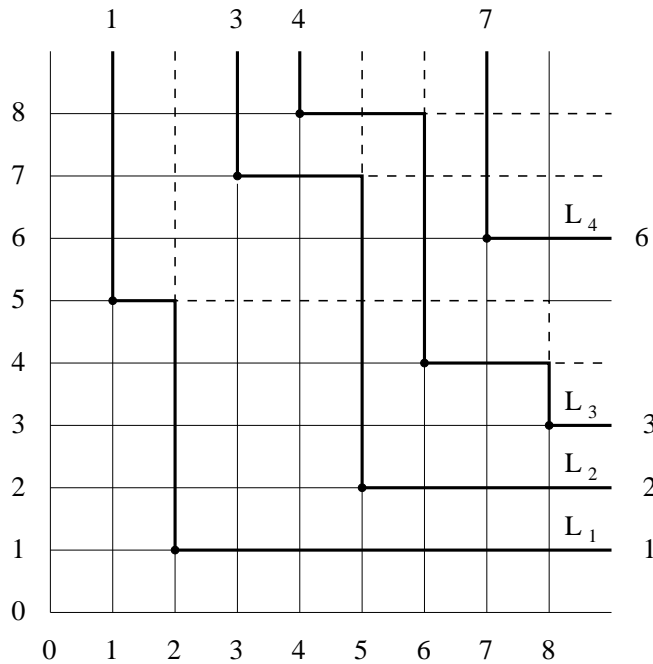
Η απόδειξη που θα δώσουμε, οφειλόμενη στον Viennot [14], βασίζεται σε μια γεωμετρική ερμηνεία της αντιστοιχίας Robinson-Schensted, της οποίας το Θεώρημα 4.4.1 είναι άμεση συνέπεια.

Παριστάνουμε μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  ως το σύνολο των σημείων  $(i, w_i)$  στο  $\mathbb{R}^2$  με  $1 \leq i \leq n$ , όπου  $w_i = w(i)$ . Η πρώτη σκιά της  $w$  ορίζεται ως το τοπολογικό σύνορο της ένωσης των συνόλων  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq i, y \geq w_i\}$  για  $1 \leq i \leq n$  και συμβολίζεται με  $L_1(w)$ . Για  $i = 2, 3, \dots$  η σκιά  $L_i(w)$  της  $w$  ορίζεται ανάλογα, διαγράφοντας από το σύνολο των σημείων  $(i, w_i)$  εκείνα που ανήκουν στις  $L_1(w), \dots, L_{i-1}(w)$ . Το Σχήμα 4.5 απεικονίζει τις τέσσερις σκιές της μετάθεσης  $w = (5, 1, 7, 8, 2, 4, 6, 3) \in \mathcal{S}_8$ . Συμβολίζουμε με  $a_i(w)$  και με  $b_i(w)$  την ελάχιστη τιμή που λαμβάνει η  $x$  και η  $y$  συντεταγμένη, αντίστοιχα, πάνω στα σημεία της  $L_i(w)$ . Για το παράδειγμα του Σχήματος 4.5 έχουμε  $a_1(w) = 1, a_2(w) = 3, a_3(w) = 4, a_4(w) = 7$  και  $b_1(w) = 1, b_2(w) = 2, b_3(w) = 3, b_4(w) = 6$ .

**Πρόταση 4.4.1** *Αν  $m$  είναι το πλήθος των σκιών της  $w$ , τότε η πρώτη γραμμή του  $P(w)$  έχει στοιχεία  $b_1(w), b_2(w), \dots, b_m(w)$  και η πρώτη γραμμή του  $Q(w)$  έχει στοιχεία  $a_1(w), a_2(w), \dots, a_m(w)$ .*

*Απόδειξη.* Ισχυριζόμαστε ότι για  $1 \leq k \leq n$ , τα ταμπλώ  $P(w_1, w_2, \dots, w_k)$  και  $Q(w_1, w_2, \dots, w_k)$  έχουν πρώτη γραμμή με στοιχεία  $b_{1,k}(w), b_{2,k}(w), \dots, b_{j,k}(w)$  και  $a_1(w), a_2(w), \dots, a_j(w)$ , αντίστοιχα, όπου  $j$  είναι το πλήθος των σκιών της  $w$  που τέμνουν την ευθεία  $x = k$  και  $b_{i,k}(w)$  είναι η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει η  $y$  συντεταγμένη πάνω στα σημεία της τομής της  $L_i(w)$  με την ευθεία  $x = k$ . Η πρόταση





Σχήμα 4.5: Σχιές για τη μετάθεση  $w = (5, 1, 7, 8, 2, 4, 6, 3)$ .

είναι η ειδική περίπτωση  $k = n$  του ισχυρισμού αυτού, αφού τότε  $j = m$  και ισχύει  $b_{i,n}(w) = b_i(w)$  για  $1 \leq i \leq m$ .

Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό με επαγωγή στο  $k$ . Στην περίπτωση  $k = 1$  έχουμε  $a_1(w) = 1$  και  $b_{1,1}(w) = w_1$  και συνεπώς ο ισχυρισμός μας ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το  $k \leq n - 1$  και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν  $w_{k+1} > b_{j,k}(w)$ , τότε το σημείο  $(k + 1, w_{k+1})$  ανήκει σε μια νέα σχιά  $L_{j+1}(w)$  της  $w$  που τέμνει την ευθεία  $x = k + 1$  και για την οποία ισχύουν  $a_{j+1}(w) = k + 1$ ,  $b_{i,k+1}(w) = b_{i,k}(w)$  για  $1 \leq i \leq j$  και  $b_{j+1,k+1}(w) = w_{k+1}$ . Επίσης, εφαρμόζοντας την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι η πρώτη γραμμή των ταμπλώ

$$P(w_1, \dots, w_{k+1}) = P(w_1, \dots, w_k) \leftarrow w_{k+1}$$

και  $Q(w_1, \dots, w_{k+1})$  έχει στοιχεία  $b_{1,k}(w), \dots, b_{j,k}(w)$ ,  $w_{k+1}$  και  $a_1(w), \dots, a_j(w)$ ,  $k + 1$  ή, ισοδύναμα,  $b_{1,k+1}(w), \dots, b_{j+1,k+1}(w)$  και  $a_1(w), \dots, a_{j+1}(w)$ , αντίστοιχα, σε συμφωνία με τον ισχυρισμό μας. Έστω ότι  $w_{k+1} < b_{j,k}(w)$ , οπότε υπάρχει δείκτης  $1 \leq p \leq j$  με  $b_{p-1,k}(w) < w_{k+1} < b_{p,k}(w)$ , όπου εννοείται ότι  $b_{0,k}(w) = 0$ . Στην περίπτωση αυτή η ευθεία  $x = k + 1$  τέμνει μόνο τις σχιές  $L_1(w), \dots, L_j(w)$  τις οποίες τέμνει και η  $x = k$  και ισχύουν  $b_{p,k+1}(w) = w_{k+1}$  και  $b_{i,k+1}(w) = b_{i,k}(w)$  για  $i \neq p$ . Επίσης, η πρώτη γραμμή του  $P(w_1, \dots, w_{k+1}) = P(w_1, \dots, w_k) \leftarrow w_{k+1}$  έχει

στοιχεία

$$b_{1,k}(w) < \dots < b_{p-1,k}(w) < w_{k+1} < b_{p+1,k}(w) < \dots < b_{j,k}$$

ενώ η πρώτη γραμμή του  $Q(w_1, \dots, w_{k+1})$  είναι ίση με εκείνη του  $Q(w_1, \dots, w_k)$ . Τα δεδομένα αυτά επαληθεύουν εκ νέου τον ισχυρισμό και συνεπώς η επαγωγή μας είναι πλήρης.  $\square$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τις υπόλοιπες γραμμές των ταμπλώ  $P(w)$  και  $Q(w)$  από το διάγραμμα των σκιών της  $w$ . Ονομάζουμε ένα σημείο  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  εσωτερική γωνία της  $w$  αν υπάρχει σκιά της  $w$  που διέρχεται από τα σημεία  $(a-1, b)$ ,  $(a, b)$  και  $(a, b-1)$ . Για παράδειγμα, για τη μετάθεση του Σχήματος 4.5 έχουμε τις εσωτερικές γωνίες  $(2, 5)$ ,  $(5, 7)$ ,  $(6, 8)$  και  $(8, 4)$ . Από το σύνολο των εσωτερικών γωνιών της  $w$  ορίζονται διαδοχικά οι σκιές  $L_i^{(2)}(w)$  τάξης δύο της  $w$  για  $i = 1, 2, \dots$ , με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο ορίστηκαν οι σκιές  $L_i(w)$  της  $w$  από το σύνολο των  $n$  σημείων  $(i, w_i)$ . Στο Σχήμα 4.5 οι σκιές τάξης δύο απεικονίζονται με διακεκομμένες γραμμές. Παρόμοια ορίζονται οι σκιές  $L_i^{(j)}(w)$  τάξης  $j$  της  $w$  από το σύνολο των εσωτερικών γωνιών των σκιών  $L_i^{(j-1)}(w)$  τάξεως  $j-1$ , όπου έχουμε θέσει  $L_i^{(1)}(w) = L_i(w)$ . Συμβολίζουμε με  $a_i^{(j)}(w)$  και με  $b_i^{(j)}(w)$  την ελάχιστη τιμή που λαμβάνει η  $x$  και η  $y$  συντεταγμένη, αντίστοιχα, πάνω στα σημεία της  $L_i^{(j)}(w)$ . Για το παράδειγμα του Σχήματος 4.5 έχουμε  $a_1^{(2)}(w) = 2$ ,  $a_2^{(2)}(w) = 5$ ,  $a_3^{(2)}(w) = 6$  και  $b_1^{(2)}(w) = 4$ ,  $b_2^{(2)}(w) = 7$ ,  $b_3^{(2)}(w) = 8$  για τις τρεις σκιές της  $w$  τάξης δύο και  $a_1^{(3)}(w) = 8$  και  $b_1^{(3)}(w) = 5$  για τη μοναδική σκιά τάξης 3. Το ακόλουθο θεώρημα γενικεύει την Πρόταση 4.4.1.

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline 4 & 7 & 8 & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \qquad Q(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 6 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}$$

Σχήμα 4.6: Τα  $P$  και  $Q$ -ταμπλώ για τη  $w = (5, 1, 7, 8, 2, 4, 6, 3)$ .

**Θεώρημα 4.4.2** *Αν  $q$  είναι το πλήθος των σκιών τάξης  $j$  της  $w$ , τότε η γραμμή  $j$  του ταμπλώ  $P(w)$  έχει στοιχεία  $b_1^{(j)}(w), b_2^{(j)}(w), \dots, b_q^{(j)}(w)$  και η γραμμή  $j$  του  $Q(w)$  έχει στοιχεία  $a_1^{(j)}(w), a_2^{(j)}(w), \dots, a_q^{(j)}(w)$ .*

*Απόδειξη.* Στην περίπτωση  $j = 1$  το θεώρημα ισοδυναμεί με την Πρόταση 4.4.1. Για την περίπτωση  $j \geq 2$  ακολουθούμε την απόδειξη της Πρότασης 4.4.1 και παρατηρούμε

ότι αν  $(k, u)$  είναι εσωτερική γωνία μιας σκιάς της  $w$ , τότε το  $w_k$  αντικαθιστά το  $u$  στην πρώτη γραμμή του  $P(w)$  κατά την εισαγωγή του  $w_k$  στο  $P(w_1, \dots, w_{k-1})$ . Κατά συνέπεια, αν  $(k_1, u_{k_1}), \dots, (k_{n-m}, u_{k_{n-m}})$  είναι οι εσωτερικές γωνίες της  $w$ , τότε το ταμπλώ που σχηματίζουν οι γραμμές του  $P(w)$  εκτός της πρώτης συμπίπτει με το  $P(u_{k_1}, \dots, u_{k_{n-m}})$  και το ταμπλώ που σχηματίζουν οι γραμμές του  $Q(w)$  εκτός της πρώτης συμπίπτει με αυτό που προκύπτει από το  $Q(u_{k_1}, \dots, u_{k_{n-m}})$  αντικαθιστώντας το  $i$  με το  $k_i$  για κάθε  $i \in [n - m]$ . Το ζητούμενο προκύπτει από την κατάλληλη τροποποίηση της διατύπωσης της Πρότασης 4.4.1 με επαγωγή στο πλήθος των γραμμών των  $P(w)$  και  $Q(w)$ . Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.  $\square$

Τα ταμπλώ  $P(w)$  και  $Q(w)$  που προβλέπει το Θεώρημα 4.4.2 για τη μετάθεση  $w$  του Σχήματος 4.5 δίνονται στο Σχήμα 4.6. Αφήνουμε στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι αυτά είναι πράγματι τα δύο ταμπλώ που ορίζει η αντιστοιχία Robinson-Schensted για τη  $w$ .

*Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1.* Παρατηρούμε ότι τα σημεία  $(i, w^{-1}(i))$  και, κατά συνέπεια, οι σκιάς τυχαίας τάξης  $j$  της  $w^{-1}$  προκύπτουν από τα αντίστοιχα σημεία και σκιάς της  $w$  με ορθογώνια ανάκλαση ως προς την ευθεία  $x = y$  του  $\mathbb{R}^2$ . Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 4.4.2.  $\square$

Το ακόλουθο πόρισμα απαντά στο Ερώτημα 4.3.1 (γ) της Παραγράφου 4.3.

**Πόρισμα 4.4.1** Για μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}_n$  ισχύει  $Q(u) = Q(v)$  αν και μόνο αν οι  $u^{-1}$  και  $v^{-1}$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth.

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 4.4.1 έχουμε  $Q(u) = P(u^{-1})$  και  $Q(v) = P(v^{-1})$ . Συνεπώς, το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 4.3.1.  $\square$

**Παρατήρηση 4.4.1** Δύο μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}_n$  για τις οποίες ισχύει  $u^{-1} \equiv v^{-1}$  λέγονται *δ्वικά ισοδύναμες κατά Knuth*. Επομένως, με την ορολογία αυτή, το Πόρισμα 4.4.1 δηλώνει ότι για τις  $u, v \in \mathcal{S}_n$  ισχύει  $Q(u) = Q(v)$  αν και μόνο αν οι  $u, v$  είναι *δ्वικά ισοδύναμες κατά Knuth*.

Η σχέση της *δ्वικής ισοδυναμίας κατά Knuth*, η οποία είναι προφανώς σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο  $\mathcal{S}_n$ , μπορεί να περιγραφεί ευθέως ως εξής: Θα λέμε ότι δύο μεταθέσεις  $u, v \in \mathcal{S}_n$  συνδέονται με ένα *στοιχειώδη δ्वικό μετασχηματισμό Knuth* αν υπάρχει ακέραιος  $i$  τέτοιος ώστε η  $(i + 1, i, i + 2)$  να είναι υποακολουθία μιας από τις  $u, v$  και η άλλη να προκύπτει από την πρώτη εναλλάσσοντας τα  $i + 1$  και  $i + 2$ , ή η  $(i, i + 2, i + 1)$  να είναι υποακολουθία μιας από τις  $u, v$  και η άλλη να προκύπτει από την πρώτη εναλλάσσοντας τα  $i$  και  $i + 1$ . Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 και την έννοια της αντίστροφης μετάθεσης, οι  $u$  και  $v$  συνδέονται με ένα *στοιχειώδη δ्वικό μετασχηματισμό Knuth* αν και μόνο αν οι  $u^{-1}$  και  $v^{-1}$  συνδέονται

με ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό Knuth. Κατά συνέπεια, δύο μεταθέσεις της  $\mathcal{S}_n$  είναι δυϊκά ισοδύναμες κατά Knuth αν και μόνο αν η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη μέσω πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών δυϊκών μετασχηματισμών Knuth.

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο αυτή με το εξής πόρισμα για το πλήθος των Young ταμπλώ τυχαίου σχήματος  $\lambda \vdash n$ , με δοσμένο πλήθος τετραγώνων  $n$ . Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας των ακεραίων στο δεξιό μέλος της (4.5) υπολογίστηκε στο Παράδειγμα 3.2.3.

**Πόρισμα 4.4.2** Για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  ισχύει

$$\sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda = \# \{w \in \mathcal{S}_n : w^{-1} = w\}. \quad (4.5)$$

*Απόδειξη.* Από τα Θεωρήματα 4.2.1 και 4.4.1 συμπεραίνουμε ότι για  $w \in \mathcal{S}_n$  έχουμε  $w^{-1} = w \Leftrightarrow \text{RS}(w) = \text{RS}(w^{-1}) \Leftrightarrow P(w) = Q(w)$ . Κατά συνέπεια, η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $\text{RS}$  του Θεωρήματος 4.2.1 περιορίζεται σε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $w^{-1} = w$  στο σύνολο των ζευγών Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda \vdash n$  της μορφής  $(P, P)$ . Επομένως ισχύει η (4.5).  $\square$

## 4.5 Η ανάστροφη μετάθεση

Υπενθυμίζουμε ότι η ανάστροφη μιας ακολουθίας  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  θετικών ακεραίων ορίζεται ως η ακολουθία  $w^t = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)$ . Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τα ταμπλώ  $P(w^t)$  και  $Q(w^t)$  για μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  από τα  $P(w)$  και  $Q(w)$ , αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι το  $P(w^t)$  είναι το ανάστροφο ταμπλώ του  $P(w)$  και ότι το  $Q(w^t)$  προκύπτει από το  $Q(w)$  με μια διαδικασία, ο ορισμός της οποίας χρησιμοποιεί το παιχνίδι jeu de taquin του Schützenberger. Το παιχνίδι αυτό έχει πληθώρα εφαρμογών στη συνδυαστική των ταμπλώ και οδηγεί σε ένα νέο ισοδύναμο ορισμό του  $P$ -ταμπλώ μιας μετάθεσης.

### 4.5.1 Το ανάστροφο ταμπλώ

Έστω  $\Theta$  ένα σύνολο με στοιχεία  $n$  θετικούς ακεραίους. Το ανάστροφο ενός ταμπλώ  $T$  με περιεχόμενο  $\Theta$  είναι το ταμπλώ  $T^t$  οι γραμμές του οποίου συμπίπτουν με τις στήλες του  $T^t$ , με την ίδια αρίθμηση. Στο Σχήμα 4.7 απεικονίζεται το ανάστροφο ταμπλώ εκείνου του Σχήματος 4.1. Το σχήμα του  $T^t$  είναι η συζυγής διαμέριση του σχήματος  $\text{sh}(T)$  του  $T$ , όπως αυτή ορίστηκε στην παράγραφο που προηγήθηκε του Θεωρήματος 4.3.3.

1	3	8	14
2	7	11	
4	9	13	
6	12		

Σχήμα 4.7: Τα ανάστροφο του ταμπλώ του Σχήματος 4.1.

Ως συνέπεια των αντίστοιχων ορισμών, οι λέξεις γραμμών και στηλών των  $T^t$  και  $T$  συνδέονται με τη σχέση

$$w_{\text{row}}(T^t) = (w_{\text{col}}(T))^t. \quad (4.6)$$

**Θεώρημα 4.5.1** Για κάθε μετάθεση  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$  ισχύει  $P(w^t) = P(w)^t$ .

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

**Λήμμα 4.5.1** Για κάθε ταμπλώ  $T$ , η λέξη των γραμμών  $w_{\text{row}}(T)$  είναι ισοδύναμη κατά Knuth με τη λέξη των στηλών  $w_{\text{col}}(T)$ .

*Απόδειξη.* Το ζητούμενο είναι φανερό αν το  $T$  έχει μία μόνο γραμμή ή μία μόνο στήλη. Για τη γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του  $T$ . Έστω  $a_1 < a_2 < \dots < a_r$  τα στοιχεία της πρώτης στήλης του  $T$  και έστω  $a_r < b_1 < \dots < b_s$  τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του. Έστω επίσης  $T'$  και  $T''$  τα ταμπλώ που προκύπτουν από το  $T$  διαγράφοντας την πρώτη στήλη του  $T$  και την τελευταία γραμμή του, αντίστοιχα, και έστω  $S$  το ταμπλώ που προκύπτει από το  $T$  διαγράφοντας και την πρώτη στήλη και την τελευταία γραμμή. Από την υπόθεση της επαγωγής, καθένα από τα  $T'$ ,  $T''$  και  $S$  έχει ισοδύναμες λέξεις γραμμών και στηλών και συνεπώς ισχύουν

$$\begin{aligned} w_{\text{col}}(T) &= a_r a_{r-1} \dots a_1 \cdot w_{\text{col}}(T') \equiv a_r a_{r-1} \dots a_1 \cdot w_{\text{row}}(T') \\ &= a_r a_{r-1} \dots a_1 b_1 b_2 \dots b_s \cdot w_{\text{row}}(S) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} w_{\text{row}}(T) &= a_r b_1 b_2 \dots b_s \cdot w_{\text{row}}(T'') \equiv a_r b_1 b_2 \dots b_s \cdot w_{\text{col}}(T'') \\ &= a_r b_1 b_2 \dots b_s a_{r-1} \dots a_1 \cdot w_{\text{col}}(S) \\ &\equiv a_r b_1 b_2 \dots b_s a_{r-1} \dots a_1 \cdot w_{\text{row}}(S). \end{aligned}$$

Για να ολοκληρώσουμε την επαγωγή, αρκεί επομένως να δείξουμε ότι

$$a_r a_{r-1} \dots a_1 b_1 b_2 \dots b_s \equiv a_r b_1 b_2 \dots b_s a_{r-1} \dots a_1.$$

Πράγματι, η λέξη στο δεξιό μέλος της σχέσης αυτής προκύπτει από εκείνη του αριστερού μέλους με  $(r-1)s$  το πλήθος στοιχειώδεις μετασχηματισμούς Knuth, οι οποίοι μεταφέρουν διαδοχικά τους ακεραίους  $b_1, b_2, \dots, b_s$  αριστερά της λέξης  $a_{r-1} \cdots a_1$ . Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.  $\square$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.1.* Θέτουμε  $T = P(w)$ . Εφαρμόζοντας διαδοχικά τη σχέση (4.6), τα Λήμματα 4.5.1 και 4.3.2 και την Πρόταση 4.3.1, βρίσκουμε ότι

$$w_{\text{row}}(T^t) = (w_{\text{col}}(T))^t \equiv (w_{\text{row}}(T))^t \equiv w^t.$$

Γνωρίζουμε επίσης (Θεώρημα 4.3.2) ότι το  $P(w^t)$  είναι το μοναδικό ταμπλώ η λέξη των γραμμών του οποίου είναι ισοδύναμη κατά Knuth με τη  $w^t$ . Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι  $P(w^t) = T^t$ .  $\square$

## 4.5.2 Το παιχνίδι του Schützenberger

Για να ορίσουμε το παιχνίδι jeu de taquin του Schützenberger θα χρειαστεί να επεκτείνουμε την έννοια του ταμπλώ σε εκείνη του λοξού ταμπλώ. Για δύο διαμερίσεις ακεραίων  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$  και  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  γράφουμε  $\mu \subseteq \lambda$  αν ισχύει  $\mu_i \leq \lambda_i$  για κάθε  $i \geq 1$ , δηλαδή αν το διάγραμμα Young της  $\mu$  περιέχεται σε εκείνο της  $\lambda$ . Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε με  $Y_{\lambda/\mu}$  το σύνολο των τετραγώνων του διαγράμματος Young της  $\lambda$  που δεν ανήκουν σε εκείνο της  $\mu$  και γράφουμε  $\lambda/\mu \vdash n$  αν το  $Y_{\lambda/\mu}$  αποτελείται από  $n$  τετράγωνα.

**Ορισμός 4.5.1** Έστω διαμερίσεις ακεραίων  $\mu \subseteq \lambda$ . Λοξό (*skew*) ταμπλώ σχήματος  $\lambda/\mu$  λέγεται μια 1-1 αντιστοιχία  $T$  του συνόλου των τετραγώνων του  $Y_{\lambda/\mu}$  με ένα υποσύνολο  $\Theta$  του συνόλου των θετικών ακεραίων, τέτοια ώστε:

- (i) οι ακεραίοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε γραμμής του  $Y_{\lambda/\mu}$  να αυξάνουν προς τα δεξιά και
- (ii) οι ακεραίοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε στήλης του  $Y_{\lambda/\mu}$  να αυξάνουν προς τα κάτω.

Όπως στην περίπτωση  $\mu = \emptyset$ , γράφουμε  $\text{sh}(T) = \lambda/\mu$  για το σχήμα του λοξού ταμπλώ  $T$  και συμβολίζουμε με  $w_{\text{row}}(T)$  τη λέξη των γραμμών του  $T$ , δηλαδή τη λέξη που προκύπτει διαβάζοντας τα στοιχεία των γραμμών του  $T$  από αριστερά προς τα δεξιά, αρχίζοντας από την τελευταία γραμμή και προχωρώντας προς την πρώτη. Το  $\Theta$  λέγεται περιεχόμενο του  $T$  και τα στοιχεία του λέγονται στοιχεία του  $T$ . Το  $T$  λέγεται *λοξό Young ταμπλώ* αν  $\Theta = [n]$  για κάποιο μη αρνητικό ακεραίο  $n$ . Το Σχήμα 4.8 απεικονίζει ένα λοξό Young ταμπλώ σχήματος  $(4, 4, 3, 1) / (3, 1)$  με  $n = 8$ ,

			3
	2	4	6
1	7	8	
5			

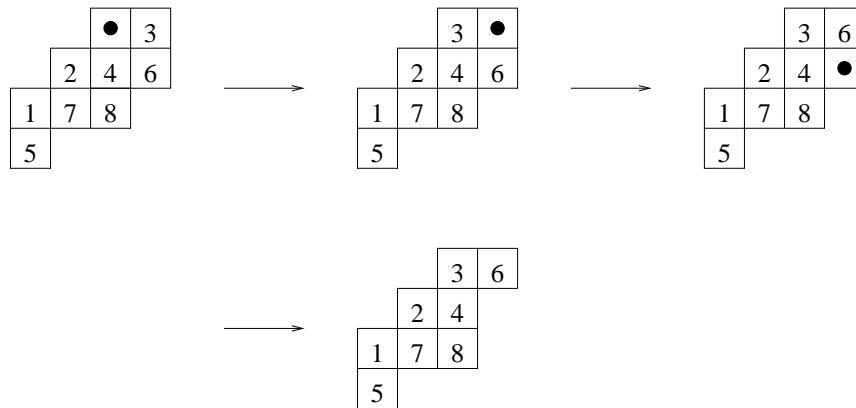
Σχήμα 4.8: Ένα λοξό Young ταμπλώ σχήματος  $(4, 4, 3, 1) / (3, 1)$ .

η λέξη γραμμών 51782463 του οποίου αντιστοιχεί στη μετάθεση του Σχήματος 4.5. Το λοξό ταμπλώ  $T$  θα λέγεται *εμφατικά και σύνηθες ταμπλώ* αν  $\mu = \emptyset$ .

Ένα τετράγωνο  $x$  του  $Y_\mu$  λέγεται *βόρεια εξωτερική γωνία* του  $\lambda/\mu$  αν το τετράγωνο ακριβώς κάτω από το  $x$  και το τετράγωνο ακριβώς στα δεξιά του  $x$  δεν ανήκουν στο  $Y_\mu$ . Ομοίως, ένα τετράγωνο  $x$  του  $Y_\lambda$  λέγεται *νότια εσωτερική γωνία* του  $\lambda/\mu$  αν το τετράγωνο ακριβώς κάτω από το  $x$  και το τετράγωνο ακριβώς στα δεξιά του  $x$  δεν ανήκουν στο  $Y_\lambda$ . Στο παράδειγμα του Σχήματος 4.8, το τετράγωνο της πρώτης γραμμής και τρίτης στήλης του  $Y_\mu$ , καθώς και εκείνο της δεύτερης γραμμής και πρώτης στήλης, αποτελούν τις βόρειες εξωτερικές γωνίες του  $\lambda/\mu$ , ενώ οι νότιες εσωτερικές γωνίες είναι τα τετράγωνα του  $Y_\lambda$  που περιέχουν τα στοιχεία 5, 6 και 8 του ταμπλώ που απεικονίζεται.

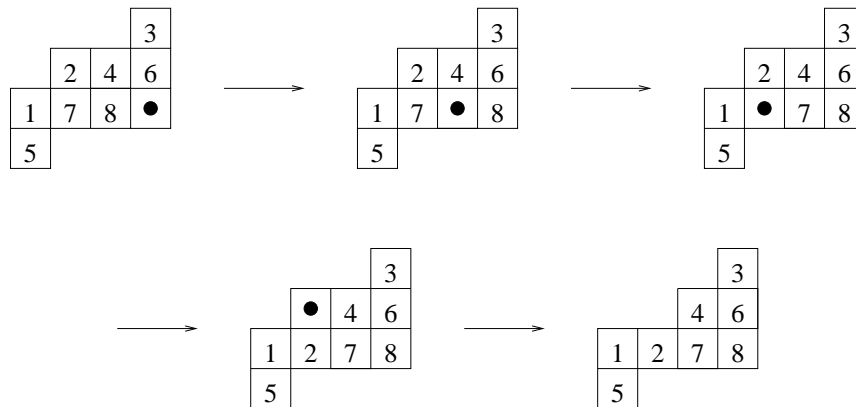
Έστω λοξό ταμπλώ  $T$  σχήματος  $\lambda/\mu$ . Δοσμένης μιας βόρειας εξωτερικής γωνίας  $x$  του  $\lambda/\mu$ , η *κίνηση ολίσθησης* (slide) του  $T$  από το τετράγωνο  $x$  κατασκευάζει ένα νέο λοξό ταμπλώ  $T'$  ως εξής: Τοποθετούμε μια μαύρη κουκίδα στο τετράγωνο  $x$  και θεωρούμε τα στοιχεία του  $T$  στα δύο τετράγωνα που βρίσκονται ακριβώς κάτω και δεξιά του  $x$ . Ανταλλάσσουμε την κουκίδα με το μικρότερο από τα δύο αυτά στοιχεία (ή με το μοναδικό διαθέσιμο στοιχείο, αν ένα από τα τετράγωνα είναι κενό) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι η κουκίδα να μετακινηθεί σε μια νότια εσωτερική γωνία του  $\lambda/\mu$ , οπότε και διαγράφεται. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει (Άσκηση 2) ότι ο σχηματισμός  $T'$  που προκύπτει είναι επίσης λοξό ταμπλώ, δηλαδή ότι τα στοιχεία στις γραμμές και στήλες του  $T'$  αυξάνουν προς τα δεξιά και προς τα κάτω, αντίστοιχα. Η κίνηση ολίσθησης του λοξού ταμπλώ του Σχήματος 4.8 από το τετράγωνο στην πρώτη γραμμή και τρίτη στήλη απεικονίζεται στο Σχήμα 4.9.

Για το σχήμα  $\lambda/\mu$  ορίζονται με ανάλογο τρόπο οι νότιες εξωτερικές και οι βόρειες εσωτερικές γωνίες (για το παράδειγμα του Σχήματος 4.8 υπάρχουν τρεις βόρειες εσωτερικές γωνίες και τέσσερις νότιες εξωτερικές, μία από τις οποίες είναι το τετράγωνο στην πρώτη γραμμή και πέμπτη στήλη και μία άλλη εκείνο στην πέμπτη γραμμή και πρώτη στήλη). Με διαδικασία ανάλογη αυτής που περιγράψαμε για την κίνηση ολίσθησης, η *αντίστροφη κίνηση ολίσθησης* (reverse slide) του  $T$  από μια νότια εξωτερική γωνία  $y$  του  $\lambda/\mu$  κατασκευάζει ένα νέο λοξό ταμπλώ  $T''$  ως εξής: Τοποθετούμε



Σχήμα 4.9: Μια κίνηση ολίσθησης.

μια μαύρη κουκίδα στο τετράγωνο  $y$  και θεωρούμε τα στοιχεία του  $T$  στα δύο τετράγωνα που βρίσκονται ακριβώς επάνω και αριστερά του  $y$ . Ανταλλάσσουμε την κουκίδα με το μεγαλύτερο από τα δύο αυτά στοιχεία (ή με το μοναδικό διαθέσιμο στοιχείο, αν ένα από τα τετράγωνα είναι άδειο) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι η κουκίδα να μετακινηθεί σε μια βόρεια εσωτερική γωνία του  $\lambda/\mu$ , οπότε και διαγράφεται. Αφήνεται και πάλι στον αναγνώστη να δείξει (Άσκηση 2) ότι ο σχηματισμός  $T''$  που προκύπτει είναι επίσης λοξό ταμπλώ. Η αντίστροφη κίνηση ολίσθησης του λοξού ταμπλώ του Σχήματος 4.8 από το τετράγωνο στην τρίτη γραμμή και τέταρτη στήλη απεικονίζεται στο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10: Μια αντίστροφη κίνηση ολίσθησης.



**Ορισμός 4.5.2** Δύο λοξά ταμπλώ λέγονται *ισοδύναμα* αν είναι δυνατόν να προκύψει το ένα από αυτά από το άλλο με πεπερασμένου πλήθους κινήσεις ολίσθησης και αντίστροφες κινήσεις ολίσθησης.

Το ακόλουθο θεώρημα συνδέει την έννοια της ισοδυναμίας για λοξά ταμπλώ με εκείνη της ισοδυναμίας κατά Knuth για λέξεις.

**Θεώρημα 4.5.2** Δύο λοξά ταμπλώ είναι *ισοδύναμα* αν και μόνο αν οι λέξεις των γραμμών τους είναι *ισοδύναμες* κατά Knuth.

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε πρώτα ότι αν ένα λοξό ταμπλώ  $T$  προκύπτει από ένα λοξό ταμπλώ  $S$  με μια κίνηση ολίσθησης ή αντίστροφη κίνηση ολίσθησης, τότε  $w_{\text{row}}(T) \equiv w_{\text{row}}(S)$ . Φυσικά αρκεί να δείξουμε το συμπέρασμα αν το  $T$  προκύπτει από το  $S$  με μια μόνο κίνηση της κουκίδας. Αν αυτή είναι οριζόντια, τότε  $w_{\text{row}}(T) = w_{\text{row}}(S)$  και το ζητούμενο είναι φανερό. Έστω ότι η κίνηση της κουκίδας είναι κάθετη. Αφού η κίνηση αυτή επηρεάζει μόνο το τμήμα των λέξεων  $w_{\text{row}}(S)$  και  $w_{\text{row}}(T)$  που αποτελείται από τα στοιχεία των δύο εμπλεκόμενων διαδοχικών γραμμών των  $S$  και  $T$ , μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι καθένα από τα  $S$  και  $T$  έχει δύο μόνο γραμμές, όπως δείχνει το Σχήμα 4.11. Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι οι λέξεις

$$a'_1 a'_2 \cdots a'_r \ b'_1 b'_2 \cdots b'_s \ a_1 a_2 \cdots a_r \ c \ b_1 b_2 \cdots b_s$$

και

$$a'_1 a'_2 \cdots a'_r \ c \ b'_1 b'_2 \cdots b'_s \ a_1 a_2 \cdots a_r \ b_1 b_2 \cdots b_s$$

είναι ισοδύναμες κατά Knuth. Με δεδομένο το ότι τα  $S$  και  $T$  έχουν αύξουσες γραμμές και στήλες, βρίσκουμε εύκολα ότι οι δύο αυτές λέξεις έχουν ίσα  $P$ -ταμπλώ (συγκεκριμένα, ίσα με το ταμπλώ του Σχήματος 4.12). Το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα 4.3.1.

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & \dots & a_r & c & b_1 & \dots & b_s \\ \hline a'_1 & \dots & a'_r & \bullet & b'_1 & \dots & b'_s \\ \hline \end{array}$$
  

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & \dots & a_r & \bullet & b_1 & \dots & b_s \\ \hline a'_1 & \dots & a'_r & c & b'_1 & \dots & b'_s \\ \hline \end{array}$$

Σχήμα 4.11: Κάθετη κίνηση της κουκίδας στο jeu de taquin.

Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι αν δύο λοξά ταμπλώ είναι ισοδύναμα, τότε οι λέξεις των γραμμών τους είναι ισοδύναμες κατά Knuth. Για να δείξουμε το αντίστροφο,

υποθέτουμε ότι για δύο λοξά ταμπλώ  $S$  και  $T$  ισχύει  $w_{\text{row}}(S) \equiv w_{\text{row}}(T)$ . Έχοντας το λοξό ταμπλώ  $S$  ως αφετηρία, επιλέγουμε διαδοχικά βόρειες εξωτερικές γωνίες με τυχαίο τρόπο και εφαρμόζουμε τις αντίστοιχες κινήσεις ολίσθησης έως ότου προκύψει ένα σύννηθες ταμπλώ, έστω  $j(S)$ . Από την κατασκευή του, το  $j(S)$  είναι ισοδύναμο με το  $S$ . Ομοίως κατασκευάζεται ένα σύννηθες ταμπλώ  $j(T)$  ισοδύναμο με το  $T$ . Όπως δείξαμε προηγουμένως, οι λέξεις των γραμμών των  $S$  και  $j(S)$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth και το ίδιο ισχύει για τα  $T$  και  $j(T)$ . Από την υπόθεσή μας συμπεραίνουμε ότι οι λέξεις των γραμμών των  $j(S)$  και  $j(T)$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth και, από το Θεώρημα 4.3.2, ότι  $j(S) = j(T)$ . Αφού καθένα από τα  $S$  και  $T$  είναι ισοδύναμο με το  $j(S) = j(T)$ , τα  $S$  και  $T$  είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.  $\square$

$a_1$	$\dots$	$a_r$	$c$	$b_1$	$\dots$	$b_s$
$a'_1$	$\dots$	$a'_r$	$b'_1$	$\dots$	$b'_s$	

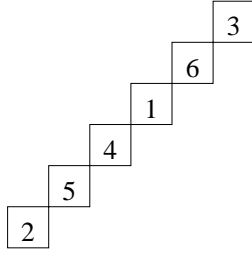
Σχήμα 4.12: Ένα  $P$ -ταμπλώ

Η διαδικασία με την οποία ξεκινά κανείς από ένα δοσμένο λοξό ταμπλώ  $T$  και καταλήγει σε ένα σύννηθες ταμπλώ  $j(T)$  ισοδύναμο με το  $T$ , επιλέγοντας διαδοχικά βόρειες εξωτερικές γωνίες με τυχαίο τρόπο και εφαρμόζοντας τις αντίστοιχες κινήσεις ολίσθησης, λέγεται *jeu de taquin*. Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.2 δείχνει ότι το ταμπλώ  $j(T)$ , στο οποίο καταλήγει η διαδικασία, εξαρτάται μόνο από το  $T$  (ακριβέστερα, μόνο από την κλάση ισοδυναμίας κατά Knuth της λέξης των γραμμών του  $T$ ) και όχι από τη σειρά με την οποία επιλέγονται οι βόρειες εξωτερικές γωνίες για να πραγματοποιηθούν οι αντίστοιχες κινήσεις ολίσθησης. Το γεγονός αυτό εκφράζεται στο ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 4.5.1** Δοσμένου τυχαίου λοξού ταμπλώ  $T$  με λέξη γραμμών  $w = w_{\text{row}}(T)$ , υπάρχει μοναδικό (σύννηθες) ταμπλώ  $P$  το οποίο είναι ισοδύναμο με το  $T$ . Για το ταμπλώ αυτό ισχύει  $P = P(w)$ .

*Απόδειξη.* Όπως εξηγήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.2, ένα τέτοιο ταμπλώ  $P$  μπορεί να κατασκευαστεί από το  $T$  με διαδοχικές κινήσεις ολίσθησης. Από το Θεώρημα 4.5.2 γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε ταμπλώ  $P$  ισοδύναμο με το  $T$  ισχύει  $w_{\text{row}}(P) \equiv w$ . Από τη σχέση αυτή και το Θεώρημα 4.3.2 προκύπτει ότι  $P = P(w)$ .  $\square$

Για παράδειγμα, για το λοξό ταμπλώ  $T$  του Σχήματος 4.8, το  $j(T)$  συμπίπτει με το ταμπλώ  $P(w)$  του Σχήματος 4.6.



Σχήμα 4.13: Ένα λοξό ταμπλώ με λέξη γραμμών  $(2, 5, 4, 1, 6, 3)$ .

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο αυτή με την εξής παρατήρηση. Για κάθε μετάθεση  $w \in \mathcal{S}(\Theta)$  μήκους  $n$ , υπάρχει λοξό ταμπλώ  $T_w$  τέτοιο ώστε  $w_{\text{row}}(T_w) = w$ . Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε τέτοιο ταμπλώ  $T_w$  σχήματος  $\lambda/\mu$ , όπου  $\lambda = (n, n-1, \dots, 1)$  και  $\mu = (n-1, n-2, \dots, 1)$ , όπως στο Σχήμα 4.13. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.5.1 έχουμε  $j(T_w) = P(w)$  και συνεπώς το παιχνίδι jeu de taquin παρέχει ένα νέο τρόπο κατασκευής του  $P$ -ταμπλώ της  $w$ . Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι το ταμπλώ  $j(T_w)$  για το παράδειγμα του Σχήματος 4.13 συμπίπτει με το  $P$ -ταμπλώ του Σχήματος 4.4.

### 4.5.3 Το ταμπλώ εκκένωσης

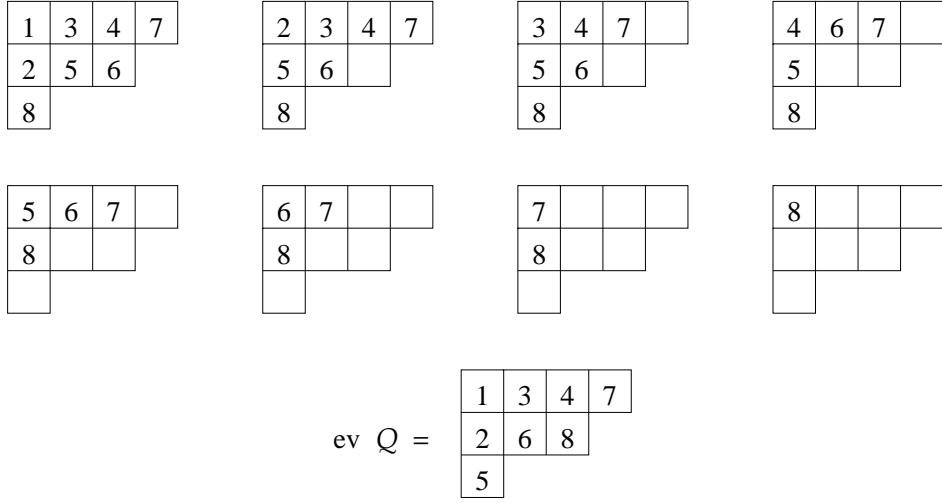
Έστω λοξό ταμπλώ  $T$  με ελάχιστο στοιχείο  $m$ . Διαγράφοντας το  $m$  από το  $T$  και εκτελώντας την κίνηση ολίσθησης από το τετράγωνο το οποίο κατείχε το  $m$  στο  $T$  προκύπτει ένα νέο λοξό ταμπλώ, το οποίο συμβολίζουμε με  $\Delta(T)$ . Θέτουμε  $\Delta^0(T) = T$  και  $\Delta^j(T) = \Delta(\Delta^{j-1}(T))$  για θετικούς ακεραίους  $j$ .

**Ορισμός 4.5.3** Έστω λοξό ταμπλώ  $T$  σχήματος  $\lambda/\mu \vdash n$  και για  $1 \leq i \leq n$ , έστω  $x_i$  το τετράγωνο του διαγράμματος Young του σχήματος του  $\Delta^{n-i}(T)$  που δεν ανήκει σε εκείνο του  $\Delta^{n-i+1}(T)$ .

Το ταμπλώ εκκένωσης (evacuation tableau) του  $T$  είναι το λοξό Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda/\mu$  στο οποίο το  $i \in [n]$  κατέχει το τετράγωνο  $x_i$ . Το ταμπλώ εκκένωσης του  $T$  συμβολίζεται με  $\text{ev}T$ .

Στο Σχήμα 4.14 απεικονίζονται τα ταμπλώ  $\Delta^j(Q)$  για  $j \in \{0, 1, \dots, 7\}$  και  $\text{ev}Q$  για το  $Q$ -ταμπλώ του Σχήματος 4.6. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι το ταμπλώ εκκένωσης  $\text{ev}T$  είναι πράγματι λοξό Young ταμπλώ για κάθε λοξό ταμπλώ  $T$ . Από τον ορισμό της κίνησης ολίσθησης προκύπτει ότι για το ανάστροφο ταμπλώ  $T^t$  ισχύει  $\Delta(T^t) = (\Delta(T))^t$  και συνεπώς ότι

$$\text{ev}T^t = (\text{ev}T)^t \quad (4.7)$$



Σχήμα 4.14: Κατασκευή του  $\text{ev } Q$  για το  $Q$ -ταμπλώ του Σχήματος 4.6.

για κάθε λοξό ταμπλώ  $T$ . Αφήνεται επίσης στον αναγνώστη να επαληθεύσει το ακόλουθο θεώρημα για τη μετάθεση  $w = (5, 1, 7, 8, 2, 4, 6, 3)$  του Σχήματος 4.6.

**Θεώρημα 4.5.3** Για κάθε μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  ισχύει  $Q(w^t) = \text{ev } Q(w)^t$ .

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ορισμένες βοηθητικές προτάσεις. Σε ότι ακολουθεί θα συμβολίζουμε με  $u_\bullet$  τη λέξη που προκύπτει διαγράφοντας το ελάχιστο στοιχείο της  $u \in \mathcal{S}(\Theta)$ .

**Λήμμα 4.5.2** Για κάθε  $u \in \mathcal{S}(\Theta)$  ισχύει  $P(u_\bullet) = \Delta(P(u))$ .

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το χαρακτηρισμό του  $P$ -ταμπλώ που παρέχει το Θεώρημα 4.3.2, αρκεί να δείξουμε ότι η λέξη των γραμμών του  $\Delta(P(u))$  είναι ισοδύναμη κατά Knuth με τη  $u_\bullet$ . Πράγματι, από τον ορισμό του  $\Delta$ , το  $\Delta(P(u))$  είναι ισοδύναμο με το ταμπλώ που προκύπτει διαγράφοντας το ελάχιστο στοιχείο του  $P(u)$ . Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα 4.5.2 προκύπτει ότι  $w_{\text{row}}(\Delta(P(u))) \equiv w_{\text{row}}(P(u))_\bullet$ . Επίσης έχουμε  $w_{\text{row}}(P(u)) \equiv u$  από την Πρόταση 4.3.1, άρα  $w_{\text{row}}(P(u))_\bullet \equiv u_\bullet$  (η απόδειξη του τελευταίου συμπεράσματος είναι παρόμοια με εκείνη του Λήμματος 4.3.5). Από τα προηγούμενα έπεται ότι  $w_{\text{row}}(\Delta(P(u))) \equiv u_\bullet$ , όπως το θέλαμε.  $\square$

**Λήμμα 4.5.3** Αν  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$  και  $\bar{w} = (w_2, \dots, w_n)$ , τότε το  $Q(\bar{w})$  είναι ίσο με το ταμπλώ που προκύπτει από το  $\Delta(Q(w))$  αντικαθιστώντας το  $i$  με το  $i - 1$  για κάθε  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

*Απόδειξη.* Θέτουμε  $u = w^{-1} \in \mathcal{S}_n$  και ορίζουμε τη  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}) \in \mathcal{S}_{n-1}$  έτσι ώστε να ισχύει  $w_{\bar{u}_1+1} < w_{\bar{u}_2+1} < \dots < w_{\bar{u}_{n-1}+1}$ . Από το Θεώρημα 4.4.1 παίρνουμε  $Q(w) = P(u)$  και  $Q(\bar{w}) = P(\bar{u})$  και από το Λήμμα 4.5.2 συνάγουμε ότι  $\Delta(Q(w)) = P(u_\bullet)$ . Παρατηρούμε τέλος ότι η λέξη  $\bar{u}$  προκύπτει από τη  $u_\bullet$  αντικαθιστώντας το  $i$  με το  $i-1$  για κάθε  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Επομένως, το  $Q(\bar{w}) = P(\bar{u})$  προκύπτει από το  $\Delta(Q(w)) = P(u_\bullet)$  με τον ίδιο τρόπο.  $\square$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.3.* Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο  $n$ , όπου η περίπτωση  $n = 1$  είναι τετριμμένη. Έστω  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ,  $\lambda = \lambda(w)$  και  $\lambda'$  η συζυγής διαμέριση της  $\lambda$ . Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2, συμβολίζουμε με  $T_\circ$  το ταμπλώ που προκύπτει από το  $T$  διαγράφοντας το μέγιστο στοιχείο του και το τετράγωνο που το περιέχει. Από τη σχέση (4.7) έχουμε  $\text{ev } Q(w)^t = (\text{ev } Q(w))^t$  και από το Θεώρημα 4.5.1 προκύπτει ότι τα δύο Young ταμπλώ  $Q(w^t)$  και  $(\text{ev } Q(w))^t$  έχουν το ίδιο σχήμα  $\lambda'$ . Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι  $Q(w^t)_\circ = (\text{ev } Q(w))^t_\circ$ . Θέτοντας  $\bar{w} = (w_2, \dots, w_n)$ , έχουμε

$$\begin{aligned} Q(w^t)_\circ &= Q(\bar{w}^t) \\ &= (\text{ev } Q(\bar{w}))^t \\ &= (\text{ev } \Delta(Q(w)))^t \\ &= (\text{ev } Q(w))^t_\circ, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα οφείλεται στην υπόθεση της επαγωγής, η τρίτη στο Λήμμα 4.5.3 και η τέταρτη στους ορισμούς των  $\Delta(T)$  και  $\text{ev } T$ . Οι ισότητες αυτές δίνουν το ζητούμενο.  $\square$

## 4.6 Το πλήθος των Young ταμπλώ

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε δύο τύπους για το πλήθος  $f^\lambda$  των Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$ . Ο πρώτος τύπος (4.8) που θα εξετάσουμε εκφράζει το  $f^\lambda$  ως γινόμενο κάποιων ρητών αριθμών οι οποίοι ορίζονται με απλό τρόπο από το διάγραμμα Young της διαμέρισης  $\lambda$ . Ο δεύτερος τύπος (4.10) εκφράζει το  $f^\lambda$  με χρήση της ορίζουσας ενός πίνακα που καθορίζεται επίσης με απλό τρόπο από τα μέρη της  $\lambda$ .

Έστω διαμέριση  $\lambda$  του  $n$ . Για τετράγωνο  $x$  του διαγράμματος  $Y_\lambda$  συμβολίζουμε με  $h(x)$  το πλήθος των τετραγώνων του  $Y_\lambda$  που βρίσκονται στην ίδια γραμμή με το  $x$  αλλά όχι δυτικά του  $x$ , ή στην ίδια στήλη με το  $x$  αλλά όχι βόρεια του  $x$ . Οι αριθμοί  $h(x)$  απεικονίζονται στο Σχήμα 4.15 για  $\lambda = (4, 4, 3, 1)$ . Το ακόλουθο θεώρημα ανακαλύφθηκε από τους Frame, Robinson και Thrall [5] το 1954. Γράφουμε  $x \in Y_\lambda$  αν το  $x$  είναι τετράγωνο του  $Y_\lambda$ .

7	5	4	2
6	4	3	1
4	2	1	
1			

Σχήμα 4.15: Οι αριθμοί  $h(x)$  για  $\lambda = (4, 4, 3, 1)$ .

**Θεώρημα 4.6.1** (Hook Length Formula) Για κάθε διαμέριση  $\lambda$  θετικού ακεραίου  $n$  ισχύει

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in Y_\lambda} h(x)}. \quad (4.8)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η ορίζουσα ενός  $r \times r$  πίνακα  $U = (u_{ij})$ , με στοιχεία  $u_{ij}$  σε έναν μεταθετικό δακτύλιο, δίνεται από τον τύπο

$$\det(U) = \sum_{w \in \mathcal{S}_r} \epsilon(w) u_{1w(1)} u_{2w(2)} \cdots u_{rw(r)}, \quad (4.9)$$

όπου  $\epsilon(w) = (-1)^{\text{inv}(w)}$  είναι το πρόσημο της μετάθεσης  $w$ . Ο τύπος για το  $f^\lambda$  του ακόλουθου θεωρήματος είναι προγενέστερος του (4.8).

**Θεώρημα 4.6.2** Για κάθε διαμέριση  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  θετικού ακεραίου  $n$  ισχύει

$$f^\lambda = n! \det \left( \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right)_{1 \leq i, j \leq r} \quad (4.10)$$

όπου έχουμε  $1/m! = 0$  κατά σύμβαση για κάθε αρνητικό ακέραιο  $m$ .

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου στην ορίζουσα του δεξιού μέλους της (4.10) είναι οι αριθμοί  $\frac{1}{\lambda_i!}$ . Για παράδειγμα, έστω  $\lambda = (4, 4, 3, 1)$ . Με τη βοήθεια του Σχήματος 4.15, από τον τύπο (4.8) βρίσκουμε ότι

$$f^\lambda = \frac{12!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^3 \cdot 3 \cdot 2^2} = 2970$$

ενώ ο τύπος (4.10) γράφεται

$$f^\lambda = 12! \det \begin{pmatrix} 1/4! & 1/5! & 1/6! & 1/7! \\ 1/3! & 1/4! & 1/5! & 1/6! \\ 1/1! & 1/2! & 1/3! & 1/4! \\ 0 & 0 & 1/0! & 1/1! \end{pmatrix}.$$

**Παράδειγμα 4.6.1** Αν  $\lambda = (m, m)$ , τότε  $n = 2m$  και  $\prod_{x \in Y_\lambda} h(x) = m!(m+1)!$ . Συνεπώς από τους τύπους (4.8) και (4.10) προκύπτει ότι

$$f^{(m,m)} = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$$

και

$$\begin{aligned} f^{(m,m)} &= (2m)! \det \begin{pmatrix} \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!} \\ \frac{1}{(m-1)!} & \frac{1}{m!} \end{pmatrix} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!} \\ &= \binom{2m}{m} - \frac{m}{m+1} \binom{2m}{m} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} \end{aligned}$$

αντίστοιχα, σε συμφωνία με το αποτέλεσμα του Πορίσματος 1.3.1 (β).  $\square$

Για τα Θεωρήματα 4.6.1 και 4.6.2 υπάρχει πλήθος διαφορετικών αποδείξεων (βλέπε π.χ. τις Παραγράφους 3.10, 3.11 και 4.2 του [10]), πολλές από τις οποίες χρησιμοποιούν ενδιαφέρουσες μαθηματικές θεωρίες. Οι αποδείξεις που επιλέγουμε να δώσουμε σε αυτήν την παράγραφο οφείλονται στον Linial [8] και χρησιμοποιούν τον αναγωγικό τύπο του ακόλουθου λήμματος για το  $f^\lambda$ .

**Λήμμα 4.6.1** Για κάθε διαμέριση  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  θετικού ακεραίου  $n$  ισχύει

$$f^\lambda = \sum_{\mu} f^{\mu}, \quad (4.11)$$

όπου στο άθροισμα του δεξιού μέλους το  $\mu$  διατρέχει όλες τις διαμερίσεις του  $n-1$  της μορφής  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$  για κάποιο δείκτη  $1 \leq i \leq r$ .

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι σε κάθε Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$ , ο ακεραίος  $n$  καταλαμβάνει μία νότια εσωτερική γωνία του διαγράμματος  $Y_\lambda$ , δηλαδή το τελευταίο τετράγωνο κάποιας γραμμής  $1 \leq i \leq r$  του  $Y_\lambda$  για την οποία το διάνυσμα  $\mu_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$  είναι διαμέριση (επιτρέποντας την περίπτωση  $i = r$  και  $\lambda_r = 1$ ). Ακόμη, το σύνολο των Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$  στα οποία το  $n$  εμφανίζεται στη γραμμή  $i$  βρίσκεται σε εμφανή 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των Young ταμπλώ σχήματος  $\mu_i$ . Το ζητούμενο έπεται από την προσθετική αρχή.  $\square$

Για παράδειγμα, έχουμε  $f^{(4,4,3,1)} = f^{(4,3,3,1)} + f^{(4,4,2,1)} + f^{(4,4,3)}$ . Σε ότι ακολουθεί, θεωρούμε ότι ο πολυωνυμικός συντελεστής στο αριστερό μέλος της (1.27) είναι ίσος με μηδέν αν  $n_i < 0$  για κάποιο δείκτη  $1 \leq i \leq r$ . Το επόμενο λήμμα γενικεύει τη σχέση (1.25).

**Λήμμα 4.6.2** Για θετικό ακέραιο  $n$  και ακεραίους  $n_1, n_2, \dots, n_r$  με άθροισμα  $n$  ισχύει

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \sum_{i=1}^r \binom{n-1}{n_1, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_r}. \quad (4.12)$$

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $n_i \geq 0$  για κάθε  $i$ . Γνωρίζουμε ότι το αριστερό μέλος της (4.12) είναι ίσο με τον πληθάρημο του συνόλου  $\mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r)$  των αναδιατάξεων  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  της συλλογής που αποτελείται από  $n_i$  αντίτυπα του  $i$ , για  $1 \leq i \leq r$  (βλέπε Παράγραφο 2.3). Παρατηρώντας ότι ο πολυωνυμικός συντελεστής στο δεξιό μέλος της (4.12) είναι ίσος με το πλήθος εκείνων των αναδιατάξεων  $\sigma \in \mathcal{A}(n_1, n_2, \dots, n_r)$  με  $\sigma_n = i$ , η ζητούμενη ισότητα έπεται από την προσθετική αρχή.  $\square$

Όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, η ακόλουθη πρόταση είναι αναδιατύπωση του Θεωρήματος 4.6.2.

**Πρόταση 4.6.1** Για κάθε διαμέριση  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  θετικού ακεραίου  $n$  ισχύει

$$f^\lambda = \sum_{w \in \mathcal{S}_r} \epsilon(w) \binom{n}{\lambda_1 + w(1) - 1, \dots, \lambda_r + w(r) - r}, \quad (4.13)$$

όπου  $\epsilon(w) = (-1)^{\text{inv}(w)}$  είναι το πρόσημο της μετάθεσης  $w$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $A$  το σύνολο των διανυσμάτων  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  με τυχαίο μήκος  $k \geq 0$  και στοιχεία μη αρνητικούς ακεραίους, τέτοιους ώστε  $a_{i-1} \geq a_i - 1$  για  $2 \leq i \leq k$ . Έστω επίσης  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}$  η συνάρτηση που ορίζεται μονοσήμαντα από τη σχέση  $\varphi(\emptyset) = 1$  και τις

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^k \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_k) \quad (4.14)$$

αν  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$ ,

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0 \quad (4.15)$$

αν  $a_{i-1} = a_i - 1$  για κάποιο  $2 \leq i \leq k$  και

$$\varphi(a_1, \dots, a_{k-1}, 0) = \varphi(a_1, \dots, a_{k-1}). \quad (4.16)$$

Από το Λήμμα 4.6.1 προκύπτει με επαγωγή στο άθροισμα των μερών της  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  ότι  $f^\lambda = \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  για κάθε διαμέριση  $\lambda$ . Επομένως, αρκεί



να δείξουμε ότι η  $\varphi$  ταυτίζεται με τη συνάρτηση  $\psi : A \rightarrow \mathbb{Z}$  που ορίζεται θέτοντας  $\psi(\emptyset) = 1$  και

$$\psi(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{w \in \mathcal{S}_k} \epsilon(w) \binom{n}{a_1 + w(1) - 1, \dots, a_k + w(k) - k} \quad (4.17)$$

αν  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A$  και  $k \geq 1$ , όπου  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ . Για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι η  $\psi$  επαληθεύει τις σχέσεις (4.14)–(4.16). Αυτό προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 4.6.2 για την (4.14). Για την (4.16) αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι αν  $a_k = 0$ , τότε ο πολυωνυμικός συντελεστής στο δεξιό μέλος της (4.17) είναι μη μηδενικός μόνο όταν  $w(k) = k$  και ότι, κατά συνέπεια, το δεξιό μέλος της (4.17) ανάγεται στο αντίστοιχο άθροισμα πάνω στις μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_{k-1}$ .

Ερχόμαστε τέλος στην (4.15) και υποθέτουμε ότι  $a_{i-1} = a_i - 1$  για κάποιο δείκτη  $i$  με  $2 \leq i \leq k$ . Έστω  $t = (i-1\ i) \in \mathcal{S}_k$  η μετάθεση που ανταλλάσσει τα  $i-1$  και  $i$  και αφήνει τα υπόλοιπα στοιχεία του  $[k]$  σταθερά. Για  $w \in \mathcal{S}_k$  συμβολίζουμε με  $w(w)$  το γενικό όρο του αθροίσματος στο δεξιό μέλος της (4.17) και θέτουμε  $\tau(w) = wt$ . Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση  $\tau : \mathcal{S}_k \rightarrow \mathcal{S}_k$  είναι αυτοαντίστροφη (αφού  $\tau^2(w) = \tau(wt) = wt^2 = w$  για  $w \in \mathcal{S}_k$ ) χωρίς σταθερά σημεία. Παρατηρούμε επίσης ότι  $\epsilon(wt) = \epsilon(w)\epsilon(t) = -\epsilon(w)$  (βλέπε Άσκηση 4 του Κεφαλαίου 2) και ότι για  $1 \leq j \leq k$  έχουμε

$$wt(j) = \begin{cases} w(i), & \text{αν } j = i-1 \\ w(i-1), & \text{αν } j = i \\ w(j), & \text{αν } j \neq i-1, i. \end{cases}$$

Από την υπόθεση  $a_{i-1} = a_i - 1$  προκύπτει ότι  $w(wt) = -w(w)$  για  $w \in \mathcal{S}_k$  και συνεπώς, από την Πρόταση 1.3.1, ότι  $\psi(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{w \in \mathcal{S}_k} w(w) = 0$ . Συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\psi$  ταυτίζονται και επομένως ότι ισχύει η (4.13).  $\square$

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο αυτή με τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 4.6.1 και 4.6.2.

*Απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.2.* Ο τύπος (4.10) προκύπτει από τη σχέση (4.13), αφού χρησιμοποιώντας τους τύπους (1.27) και (4.9) για τους πολυωνυμικούς συντελεστές και την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα, αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} n! \det \left( \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right)_{1 \leq i, j \leq r} &= \sum_{w \in \mathcal{S}_r} \epsilon(w) \frac{n!}{\prod_{i=1}^r (\lambda_i - i + w(i))!} \\ &= \sum_{w \in \mathcal{S}_r} \epsilon(w) \binom{n}{\lambda_1 + w(1) - 1, \dots, \lambda_r + w(r) - r}. \end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.1. Έστω  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ . Θέτουμε  $\mu_i = \lambda_i + r - i$  για  $1 \leq i \leq r$  και παρατηρούμε (Άσκηση 12) ότι

$$\prod_{x \in Y_\lambda} h(x) = \frac{\prod_{i=1}^r \mu_i!}{\prod_{i < j} (\mu_i - \mu_j)}. \quad (4.18)$$

Αναπτύσσοντας το γινόμενο στον παρονομαστή του δεξιού μέλους της (4.18) κατά την ορίζουσα του Vandermonde, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} (\mu_i - \mu_j) &= \det \begin{pmatrix} \mu_1^{r-1} & \cdots & \mu_1^2 & \mu_1 & 1 \\ \mu_2^{r-1} & \cdots & \mu_2^2 & \mu_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_r^{r-1} & \cdots & \mu_r^2 & \mu_r & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mu_1(\mu_1 - 1) \cdots (\mu_1 - r + 2) & \cdots & \mu_1(\mu_1 - 1) & \mu_1 & 1 \\ \mu_2(\mu_2 - 1) \cdots (\mu_2 - r + 2) & \cdots & \mu_2(\mu_2 - 1) & \mu_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_r(\mu_r - 1) \cdots (\mu_r - r + 2) & \cdots & \mu_r(\mu_r - 1) & \mu_r & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε επανειλημμένα το γεγονός ότι η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  μένει αμετάβλητη αν αφαιρέσουμε ένα οποιοδήποτε πολλαπλάσιο μιας στήλης του  $A$  από μια άλλη στήλη του. Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα σύμφωνα με τον τύπο (4.9), συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{n!}{\prod_{x \in Y_\lambda} h(x)} &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^r \mu_i!} \sum_{w \in \mathcal{S}_r} \epsilon(w) \prod_{i=1}^r \mu_i(\mu_i - 1) \cdots (\mu_i - r + w(i) + 1) \\ &= n! \sum_{w \in \mathcal{S}_r} \epsilon(w) \prod_{i=1}^r \frac{1}{(\mu_i - r + w(i))!} \\ &= n! \sum_{w \in \mathcal{S}_r} \epsilon(w) \prod_{i=1}^r \frac{1}{(\lambda_i + w(i) - i)!} = f^\lambda, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι ταυτόσημη με την (4.13). □

## 4.7 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

$$f^{(n-k,k)} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$$

για  $0 \leq k \leq n/2$ . Συνάγετε ότι το συνολικό πλήθος των Young ταμπλώ με  $n$  τετράγωνα και δύο το πολύ γραμμές είναι ίσο με  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

2. Δείξτε τα ακόλουθα:

- (α) Το αποτέλεσμα  $T \leftarrow a$  της διαδικασίας της εισαγωγής του  $a$  στις γραμμές του ταμπλώ  $T$  (όπως ορίστηκε στην Παράγραφο 4.2) είναι επίσης ταμπλώ.
- (β) Για κάθε μετάθεση  $w$ , το  $Q(w)$  (όπως ορίστηκε στην Παράγραφο 4.2) είναι Young ταμπλώ.
- (γ) Η απεικόνιση  $RS^* : \Delta_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  που ορίστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 είναι καλά ορισμένη και είναι η αντίστροφη της απεικόνισης  $RS$ .
- (δ) Μια κίνηση ολίσθησης, ή αντίστροφη κίνηση ολίσθησης, ενός λοξού ταμπλώ καταλήγει επίσης σε λοξό ταμπλώ.

3. Για  $1 \leq k \leq n$  γράφουμε  $(k, 1^{n-k}) = (k, 1, \dots, 1) \vdash n$ .

- (α) Δείξτε ότι

$$f^{(k, 1^{n-k})} = \binom{n-1}{k-1}$$

για  $1 \leq k \leq n$ .

- (β) Συνάγετε ότι το συνολικό πλήθος των Young ταμπλώ με  $n$  τετράγωνα και μία το πολύ γραμμή μήκους μεγαλύτερου του ένα είναι ίσο με  $2^{n-1}$ .
- (γ) Υπολογίστε το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  το σχήμα των οποίων έχει το πολύ ένα μέρος μεγαλύτερο του ένα.

4. Δείξτε ότι για τυχαία διαμέριση  $\mu$  του  $n-1$  ισχύει

$$\sum_{\lambda} f^{\lambda} = n f^{\mu},$$

όπου στο άθροισμα του αριστερού μέλους το  $\lambda$  διατρέχει όλες τις διαμερίσεις του  $n$ , το διάγραμμα Young των οποίων περιέχει εκείνο της  $\mu$ .

5. Έστω  $T$  ένα Young ταμπλώ με  $n$  τετράγωνα. Ένας ακέραιος  $i \in [n-1]$  λέγεται *κάθοδος* του  $T$  αν το  $i+1$  εμφανίζεται στο  $T$  σε χαμηλότερη γραμμή από εκείνη στην οποία εμφανίζεται το  $i$ .

- (α) Δείξτε ότι το σύνολο των καθόδων της  $w \in \mathcal{S}_n$  είναι ίσο με το σύνολο των καθόδων του  $Q(w)$ .
- (β) Συνάγετε ότι

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} x^{\text{des}(w)} = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \left( \sum_{\text{sh}(Q)=\lambda} x^{\text{des}(Q)} \right),$$

όπου το  $Q$  διατρέχει το σύνολο των Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$  και με  $\text{des}(Q)$  συμβολίζουμε το σύνολο των καθόδων του  $Q$ .

- (γ) Δείξτε ότι το σύνολο των καθόδων της  $w^{-1}$  είναι ίσο με το σύνολο των καθόδων του  $P(w)$ .

6. Έστω  $w \in \mathcal{S}_n$ .

- (α) Πόσες μεταθέσεις είναι ισοδύναμες κατά Knuth με τη  $w$ ;
- (β) Ποιες κλάσεις της σχέσης ισοδυναμίας του Knuth της  $\mathcal{S}_n$  έχουν μόνο ένα στοιχείο;
- (γ) Πόσες είναι οι κλάσεις της σχέσης ισοδυναμίας του Knuth στην  $\mathcal{S}_n$ ;

7. Έστω η μετάθεση  $w = (n+1, n+2, \dots, 2n, 1, 2, \dots, n) \in \mathcal{S}_{2n}$ .

- (α) Πόσες μεταθέσεις της  $\mathcal{S}_{2n}$  είναι ισοδύναμες κατά Knuth με τη  $w$ ;
- (β) Περιγράψτε όλες τις μεταθέσεις της  $\mathcal{S}_{2n}$  οι οποίες είναι ισοδύναμες κατά Knuth με τη  $w$ .

8. Έστω θετικοί ακέραιοι  $p, q$  και  $n$  με  $n \geq pq + 1$ .

- (α) Δείξτε ότι κάθε μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  έχει αύξουσα υποακολουθία μήκους  $p+1$  ή φθίνουσα υποακολουθία μήκους  $q+1$ .
- (β) Δείξτε ότι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_{pq}$  οι οποίες δεν έχουν ούτε αύξουσα υποακολουθία μήκους  $p+1$  ούτε φθίνουσα υποακολουθία μήκους  $q+1$  είναι ίσο με το τετράγωνο της παράστασης

$$(pq)! \cdot \frac{F_p F_q}{F_{p+q}},$$

όπου  $F_k = \prod_{i=0}^{k-1} i!$  για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ .

9. Έστω μετάθεση  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{S}_n$ . Για  $1 \leq i \leq n$  συμβολίζουμε με  $\ell_i$  το μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας αύξουσας υποακολουθίας της  $w$  με τελευταίο όρο ίσο με  $w_i$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 6$  και  $w = (3, 5, 1, 6, 4, 2)$ , τότε  $\ell_1 = 1$ ,

$l_2 = 2, l_3 = 1, l_4 = 3, l_5 = 2$  και  $l_6 = 2$ . Έστω ότι  $a_1 < a_2 < \dots < a_r$  είναι τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του  $P(w)$  και  $1 \leq k \leq r$ . Δείξτε ότι το  $a_k$  είναι ίσο με  $w_i$  όπου  $i \in [n]$  είναι ο μέγιστος δείκτης με  $l_i = k$ .

10. Έστω μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $w^{-1} = w$ .

(α) Δείξτε ότι το πλήθος των σταθερών σημείων της  $w$  είναι ίσο με το πλήθος των στηλών περιττού μήκους του  $P(w)$ .

(β) Συνάγετε ότι

$$\sum_{\lambda} f^{\lambda} = \begin{cases} \binom{n}{k} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-k-1)), & \text{αν ο } n-k \text{ είναι άρτιος} \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου το άθροισμα στο αριστερό μέλος διατρέχει όλες τις διαμερίσεις  $\lambda$  του  $n$  για τις οποίες ακριβώς  $k$  από τα μέρη της συζυγούς διαμέρισης  $\lambda'$  της  $\lambda$  είναι περιττοί αριθμοί.

(γ) Συνάγετε ότι

$$\sum_{\lambda} f^{\lambda} = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1), & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου το άθροισμα στο αριστερό μέλος διατρέχει όλες τις διαμερίσεις  $\lambda$  του  $n$  για τις οποίες κάθε μέρος της συζυγούς διαμέρισης  $\lambda'$  είναι άρτιος αριθμός.

11. Δείξτε ότι  $j(\Delta(T)) = \Delta(j(T))$  για κάθε λοξό ταμπλώ  $T$ , όπου οι τελεστές  $j$  και  $\Delta$  ορίστηκαν στις Παραγράφους 4.5.2 και 4.5.3, αντίστοιχα.

12. Αποδείξτε την ισότητα (4.18) που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.1.

13. Έστω διαμέριση ακεραίου  $\lambda$ . Δείξτε ότι ο ακέραιος

$$\sum_{x \in Y_{\lambda}} (-1)^{h(x)-1}$$

είναι τριγωνικός αριθμός (δηλαδή φυσικός αριθμός της μορφής  $k(k+1)/2$  για κάποιο  $k \in \mathbb{N}$ ), όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 4.6.1.

## Υποδείξεις - Λύσεις

- 1.
2. Η λύση αφήνεται στον αναγνώστη.
3. Για το (α) περιγράψτε μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των Young ταμπλώ σχήματος  $(k, 1^{n-k})$  στο σύνολο των  $(k-1)$ -υποσυνόλων του  $[n-1]$ . Για το (γ) συνάγετε από το Θεώρημα 4.2.1 και το (α) ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$\sum_{k=1}^n (f^{(k, 1^{n-k})})^2 = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}^2 = \binom{2n-2}{n-1}.$$

4. Χρησιμοποιήστε εισαγωγή στις γραμμές του  $T$  για να ορίσετε μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των ζευγών  $(T, i)$ , όπου  $i \in [n]$  και  $T$  είναι ταμπλώ με σχήμα  $\mu$  και περιεχόμενο  $[n] \setminus \{i\}$ , στο σύνολο των Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda \vdash n$  με  $\lambda \supset \mu$ .
5. Έστω διακεκριμένοι θετικοί ακέραιοι  $a, b$  οι οποίοι δεν είναι στοιχεία ενός ταμπλώ  $T$  και εισάγονται διαδοχικά σε αυτό. Χρησιμοποιώντας εισαγωγή στο πλήθος των γραμμών του  $T$ , δείξτε το εξής: η διαδικασία της εισαγωγής του  $b$  στο  $T \leftarrow a$  καταλήγει σε τετράγωνο χαμηλότερης γραμμής από το τετράγωνο στο οποίο καταλήγει η εισαγωγή του  $a$  στο  $T$  αν και μόνο αν  $b < a$ . Το (α) είναι άμεση συνέπεια αυτής της πρότασης. Τα (β) και (γ) προκύπτουν από το (α) και από τα Θεωρήματα 4.2.1 και 4.4.1, αντίστοιχα.
6. Για το (α) συμπεράνετε από τα Θεωρήματα 4.3.1 και 4.2.1 ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με το πλήθος  $f^{\lambda(w)}$  των Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda(w)$ . Συνάγετε από αυτό (ή από τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας του Knuth) ότι τα μόνα στοιχεία της  $\mathcal{S}_n$  με την ιδιότητα στο (β) ερώτημα είναι η ταυτοτική μετάθεση και η ανάστροφη της. Για το (γ) συμπεράνετε από το Θεώρημα 4.3.1 ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με το πλήθος των Young ταμπλώ τυχαίου σχήματος με  $n$  τετράγωνα και συνεπώς ότι είναι ίσο με καθένα από τα δύο μέλη της (4.5).
7. Παρατηρούμε ότι  $\lambda(w) = (n, n)$ . Όπως βρήκαμε στη λύση της Άσκησης 6 (α), από τα Θεωρήματα 4.2.1 και 4.3.1 και το Παράδειγμα 4.6.1 προκύπτει ότι το ζητούμενο πλήθος στο (α) είναι ίσο με  $f^{\lambda(w)} = \binom{2n}{n}/(n+1)$ . Για το (β) θεωρήστε το σύνολο  $U_n$  των μεταθέσεων  $u \in \mathcal{S}_{2n}$  για τις οποίες ισχύουν τα εξής:
  - $u^{-1}(1) < u^{-1}(2) < \dots < u^{-1}(n)$ ,
  - $u^{-1}(n+1) < u^{-1}(n+2) < \dots < u^{-1}(2n)$  και
  - για  $1 \leq i \leq 2n$ , τουλάχιστον τα μισά στοιχεία του  $\{u(1), u(2), \dots, u(i)\}$  είναι μεγαλύτερα του  $n$ .

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 4.3.1, δείξτε πρώτα ότι κάθε μετάθεση στο σύνολο  $U_n$  είναι ισοδύναμη κατά Knuth με τη  $w$ . Δείξτε έπειτα το αντίστροφο χρησιμοποιώντας το (α) και το γεγονός (Παράδειγμα 1.3.1) ότι το πλήθος των στοιχείων του  $U_n$  είναι ίσο με τον αριθμό Catalan  $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$ .

8. Για το (α) παρατηρήστε ότι το  $P(w)$  πρέπει να έχει πρώτη γραμμή μήκους τουλάχιστον  $p+1$  ή πρώτη στήλη μήκους τουλάχιστον  $q+1$  και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.3.3. Για το (β) δείξτε ότι μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_{pq}$  έχει τη δοσμένη ιδιότητα αν και μόνο αν  $\lambda(w) = \lambda$ , όπου  $\lambda = (p, \dots, p)$  είναι η διαμέριση του  $pq$  με  $q$  μέρη, καθένα από τα οποία είναι ίσο με  $p$ . Δείξτε επίσης, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.6.1, ότι η δοσμένη παράσταση είναι ίση με  $f^\lambda$ .
- 9.
10. Θέτουμε  $w_i = w(i)$  για  $1 \leq i \leq n$  και συμβολίζουμε με  $k$  το πλήθος των σταθερών σημείων της  $w$  (ισοδύναμα, το πλήθος των σημείων  $(i, w_i)$  πάνω στην ευθεία  $x = y$  του  $\mathbb{R}^2$ ), με  $m$  το πλήθος των στηλών του  $P(w)$  (ισοδύναμα, το πλήθος των σκιών της  $w$ ) και με  $R(w)$  το ταμπλώ που προκύπτει διαγράφοντας την πρώτη γραμμή του  $P(w)$ . Από την υπόθεση  $w^{-1} = w$  γνωρίζουμε ότι οι σκιές της  $w$  είναι συμμετρικές ως προς την ορθογώνια ανάκλαση του  $\mathbb{R}^2$  στην ευθεία  $x = y$ . Κατά συνέπεια, μια οποιαδήποτε σκιά της  $w$  τέμνει την ευθεία  $x = y$  είτε σε ένα σημείο της μορφής  $(i, w_i)$  είτε σε μια εσωτερική γωνία της  $w$ , οπότε το πλήθος των εσωτερικών γωνιών της  $w$  που βρίσκονται πάνω στην ευθεία  $x = y$  είναι ίσο με  $m - k$ . Εφαρμόζοντας επαγωγή στο πλήθος των γραμμών του  $P(w)$ , συμπεράνετε ότι το πλήθος των στηλών περιττού μήκους του  $R(w)$  είναι ίσο με  $m - k$ . Από αυτό έπεται ότι το πλήθος των στηλών περιττού μήκους του  $P(w)$  είναι ίσο με  $k$ , δηλαδή το ζητούμενο του (α). Για το (β) εργασθείτε όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 4.4.2 και χρησιμοποιήστε το (α), αφού δείξετε ότι το δεξιό μέλος της ζητούμενης ισότητας είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με  $w^{-1} = w$  που έχουν ακριβώς  $k$  σταθερά σημεία. Το (γ) είναι η ειδική περίπτωση  $k = 0$  του (β).
11. Δείξτε ότι η λέξη των γραμμών του  $\Delta(j(T))$  είναι ισοδύναμη κατά Knuth με εκείνη του  $\Delta(T)$  και εφαρμόστε το Θεώρημα 4.3.2.
12. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των ακεραίων  $h(x)$ , όπου το  $x$  διατρέχει τα τετράγωνα της  $i$  γραμμής του  $Y_\lambda$ , είναι ίσο με  $\{1, 2, \dots, \mu_i\} \setminus \{\mu_i - \mu_j : i < j \leq r\}$ . Εφαρμόζουμε επαγωγή στο  $r - i$ . Για  $i = r$  ο ισχυρισμός μας είναι φανερός, αφού για την τελευταία γραμμή το σύνολο των ακεραίων  $h(x)$  είναι το  $\{1, 2, \dots, \lambda_r\}$  και ισχύει  $\mu_r = \lambda_r$ . Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για  $i = 1$ , υποθέτοντας ότι ισχύει για  $i = 2$ . Θέτουμε  $p = \mu_1 - \mu_2 = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$  και συμβολίζουμε με  $h_1, h_2, \dots, h_s$  τους ακεραίους  $h(x)$  για τα τετράγωνα της δεύτερης γραμμής, οπότε

$$\{h_1, h_2, \dots, h_s\} = \{1, 2, \dots, \mu_2\} \setminus \{\mu_2 - \mu_j : 2 < j \leq r\}.$$

Το επιθυμητό συμπέρασμα προκύπτει παρατηρώντας ότι το σύνολο των ακεραίων  $h(x)$  για την πρώτη γραμμή είναι το  $\{h_1 + p, h_2 + p, \dots, h_s + p\} \cup \{1, 2, \dots, p - 1\}$  και ότι  $\{\mu_1 - \mu_j : 1 < j \leq r\} = \{p\} \cup \{p + \mu_2 - \mu_j : 2 < j \leq r\}$ .

13. Έστω  $H(\lambda)$  το δοσμένο άθροισμα και έστω ότι  $\lambda \vdash n$ . Το ζητούμενο είναι φανερό αν  $\lambda = (k, k - 1, \dots, 1)$  για κάποιο  $k \in \mathbb{N}$ , αφού τότε το  $h(x)$  είναι περιττός αριθμός για κάθε  $x \in Y_\lambda$ . Διαφορετικά υπάρχει τετράγωνο  $x \in Y_\lambda$  με  $h(x) = 2$ . Διαγράφοντας το  $x$  και το τετράγωνο του  $Y_\lambda$  στα δεξιά ή κάτω του  $x$  προκύπτει διαμέριση  $\mu \vdash n - 2$  με  $H(\mu) = H(\lambda)$  (εξηγήστε γιατί). Το αποτέλεσμα προκύπτει με επαγωγή στο  $n$ .





# Κεφάλαιο 5

## Γραμμική άλγεβρα και συνδυαστική

Ένας από τους κύριους στόχους της αλγεβρικής συνδυαστικής είναι η επίλυση δύσκολων συνδυαστικών προβλημάτων με χρήση εργαλείων της άλγεβρας και συναφών κλάδων των θεωρητικών μαθηματικών. Σκοπός μας στο παρόν κεφάλαιο είναι να δείξουμε, μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα, πώς στοιχειώδεις έννοιες και εργαλεία της γραμμικής άλγεβρας μπορούν να εφαρμοστούν επιτυχώς προς αυτή την κατεύθυνση. Οι εφαρμογές που θα δώσουμε περιλαμβάνουν μια νέα απόδειξη της ταυτότητας (4.1) και σχετικά προβλήματα απαρίθμησης περιπάτων στο γράφημα του Young, το Θεώρημα του Sperner, το πρόβλημα της μονοτροπίας των  $q$ -διωνυμικών πολυωνύμων και την απαρίθμηση δένδρων σε γράφηματα.

### 5.1 Γραφήματα

Στην παράγραφο αυτή θα συνοψίσουμε χρήσιμη ορολογία από τη θεωρία γραφημάτων και θα εισάγουμε κάποια βασικά εργαλεία από τη γραμμική άλγεβρα, τα οποία έχουμε προσαρμόσει κατάλληλα. Ένα *κατευθυνόμενο γράφημα* ορίζεται ως μία τριάδα  $\mathcal{G} = (N, E, \varphi)$ , όπου  $N$  και  $E$  είναι σύνολα τα στοιχεία των οποίων λέγονται *κορυφές* και *ακμές*, αντίστοιχα, και

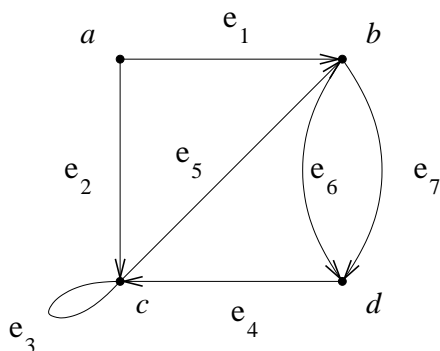
$$\varphi : E \rightarrow \{(a, b) : a, b \in N\} \quad (5.1)$$

είναι μια απεικόνιση. Αν  $e \in E$  και  $\varphi(e) = (a, b)$ , τότε λέμε ότι η ακμή  $e$  έχει *αρχή*  $a$  και *πέρας*  $b$  και σχεδιάζουμε (ή φανταζόμαστε) την  $e$  σαν ένα τόξο που κατευθύνεται από την κορυφή  $a$  προς την κορυφή  $b$ .

**Παράδειγμα 5.1.1** (α) Στο Σχήμα 5.1 απεικονίζεται ένα κατευθυνόμενο γράφημα στο σύνολο κορυφών  $\{a, b, c, d\}$ . Παρατηρούμε ότι η ακμή  $e_3$  έχει αρχή και πέρας

$c$ , δηλαδή ότι  $\varphi(e_3) = (c, c)$  (μια ακμή της οποίας η αρχή και το πέρας ταυτίζονται λέγεται βρόχος ή θυλιά) και ότι υπάρχουν δύο ακμές, συγκεκριμένα οι  $e_6$  και  $e_7$ , με αρχή  $b$  και πέρας  $d$ .

(β) Στο σύνολο κορυφών  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ορίζεται το κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  για το οποίο υπάρχει μία ακμή με αρχή  $(a_1, a_2)$  και πέρας  $(b_1, b_2)$  αν είτε  $b_1 = a_1$  και  $b_2 = a_2 + 1$ , είτε  $b_1 = a_1 + 1$  και  $b_2 = a_2$ , ενώ διαφορετικά δεν υπάρχει ακμή με αρχή  $(a_1, a_2)$  και πέρας  $(b_1, b_2)$ .  $\square$



Σχήμα 5.1: Ένα κατευθυνόμενο γράφημα.

**Σύμβαση:** Ενώ επιτρέπουμε το σύνολο  $N$  των κορυφών του  $\mathcal{G}$  να είναι άπειρο, στο κεφάλαιο αυτό θα υποθέτουμε πάντοτε ότι για κάθε  $a \in N$ , το σύνολο των ακμών του  $\mathcal{G}$  με αρχή ή πέρας  $a$  είναι πεπερασμένο.

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα ορίζεται ομοίως, με τη διαφορά ότι η απεικόνιση  $\varphi$  της (5.1) παίρνει τιμές στο σύνολο των υποσυνόλων του  $N$  που έχουν ένα ή δύο στοιχεία. Τα στοιχεία του  $\varphi(e)$  λέγονται άκρα της ακμής  $e$ . Από κάθε κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G} = (N, E, \varphi)$  προκύπτει ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (N, E, \bar{\varphi})$  αν αγνοήσουμε την κατεύθυνση κάθε ακμής, δηλαδή αν θέσουμε  $\bar{\varphi}(e) = \{a, b\}$  για  $e \in E$  με  $\varphi(e) = (a, b)$ .

### 5.1.1 Περίπατοι

Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G} = (N, E, \varphi)$ .

**Ορισμός 5.1.1** *Περίπατος μήκους  $n$  στο γράφημα  $\mathcal{G}$  λέγεται μια ακολουθία  $w = (a_0, e_1, a_1, e_2, \dots, a_{n-1}, e_n, a_n)$  κορυφών και ακμών, τέτοια ώστε η  $e_i$  να είναι ακμή του  $\mathcal{G}$  με αρχή  $a_{i-1}$  και πέρας  $a_i$  για κάθε  $1 \leq i \leq n$ . Η κορυφή  $a_0$  λέγεται αρχή και η  $a_n$  λέγεται πέρας του  $w$ . Ο περίπατος  $w$  λέγεται κλειστός αν  $a_0 = a_n$ .*

**Παράδειγμα 5.1.2** (α) Η ακολουθία  $(a, e_2, c, e_3, c, e_5, b, e_6, d, e_4, c)$  είναι περίπατος μήκους 5 στο κατευθυνόμενο γράφημα του Σχήματος 5.1 με αρχή  $a$  και πέρασ  $c$ .

(β) Κάθε περίπατος στο κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  του Παραδείγματος 5.1.1 (β) με αρχή  $(0, 0)$  και πέρασ  $(m, n)$  έχει μήκος  $m + n$ . Το πλήθος αυτών των περιπάτων είναι ίσο με  $\binom{m+n}{n}$  (εξηγήστε γιατί).  $\square$

Για μη κατευθυνόμενα γραφήματα  $G$ , η έννοια του περιπάτου ορίζεται ομοίως ως μια ακολουθία  $w = (a_0, e_1, a_1, e_2, \dots, a_{n-1}, e_n, a_n)$  κορυφών και ακμών, τέτοια ώστε η  $e_i$  να είναι ακμή του  $G$  με άκρα  $a_{i-1}$  και  $a_i$  για κάθε  $1 \leq i \leq n$ . Η κορυφή  $a_0$  λέγεται *αρχή* και η  $a_n$  λέγεται *πέρασ* του  $w$  (οι κορυφές  $a_0$  και  $a_n$  λέγονται και *άκρα* του  $w$ ). Ο περίπατος  $w$  λέγεται *κλειστός* αν  $a_0 = a_n$ . Ένα γράφημα  $G$  με πεπερασμένο σύνολο κορυφών λέγεται *συνεκτικό* αν για οποιοσδήποτε κορυφές  $a$  και  $b$  του  $G$  υπάρχει περίπατος στο  $G$  με άκρα  $a$  και  $b$ .

### 5.1.2 Γραμμικές απεικονίσεις

Σε ένα τυχαίο σύνολο  $N$  μπορεί να αντιστοιχίσει κανείς ένα  $\mathbb{C}$ -διανυσματικό χώρο  $\mathbb{C}N$ , μια βάση του οποίου είναι το σύνολο  $N$ . Τα στοιχεία του  $\mathbb{C}N$  ορίζονται ως οι (τυπικοί) γραμμικοί συνδυασμοί

$$\sum_{a \in N} \lambda_a a$$

του  $N$  με συντελεστές μιγαδικούς αριθμούς  $\lambda_a \in \mathbb{C}$ , οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε μόνο για πεπερασμένου πλήθους  $a \in N$  να ισχύει  $\lambda_a \neq 0$ . Ως συνέπεια αυτού του ορισμού, στο σύνολο  $\mathbb{C}N$  έχουμε  $\sum_{a \in N} \lambda_a a = \sum_{a \in N} \mu_a a$  αν και μόνο αν ισχύει  $\lambda_a = \mu_a$  για κάθε  $a \in N$ . Η δομή του  $\mathbb{C}$ -διανυσματικού χώρου στο  $\mathbb{C}N$  ορίζεται από τις πράξεις

$$\left( \sum_{a \in N} \lambda_a a \right) + \left( \sum_{a \in N} \mu_a a \right) = \sum_{a \in N} (\lambda_a + \mu_a) a$$

της πρόσθεσης και

$$\lambda \left( \sum_{a \in N} \lambda_a a \right) = \sum_{a \in N} (\lambda \lambda_a) a$$

του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, αντίστοιχα, όπου  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $\lambda_a, \mu_a \in \mathbb{C}$  για κάθε  $a \in N$ . Για παράδειγμα αν  $N = \{a, b, c, d\}$ , τότε τα  $u = a + b - c$  και  $v = a - b - 2c + d$  είναι στοιχεία του  $\mathbb{C}N$  και  $2u - v = a + 3b - d$ .

Έστω τώρα ότι το  $N$  είναι το σύνολο κορυφών ενός κατευθυνόμενου γραφήματος  $\mathcal{G} = (N, E, \varphi)$ . Για  $x, y \in N$ , θα συμβολίζουμε με  $m_{\mathcal{G}}(x, y)$  το πλήθος των ακμών του  $\mathcal{G}$  με αρχή  $x$  και πέρασ  $y$ . Ορίζουμε δύο γραμμικούς ενδομορφισμούς  $U, D : \mathbb{C}N \rightarrow$

$\mathbb{C}N$  του  $\mathbb{C}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathbb{C}N$  θέτοντας

$$U(x) = \sum_{y \in N} m_{\mathcal{G}}(x, y) \cdot y \quad (5.2)$$

για  $x \in N$  και

$$D(y) = \sum_{x \in N} m_{\mathcal{G}}(x, y) \cdot x \quad (5.3)$$

για  $y \in N$  και επεκτείνοντας τους ορισμούς αυτούς γραμμικά στα στοιχεία του  $\mathbb{C}N$  σύμφωνα με τις σχέσεις  $U(\sum_{a \in N} \lambda_a a) = \sum_{a \in N} \lambda_a U(a)$  και  $D(\sum_{a \in N} \lambda_a a) = \sum_{a \in N} \lambda_a D(a)$ . Το άθροισμα στο δεξιό μέλος της (5.2) (αντίστοιχα, της (5.3)) είναι στοιχείο του  $\mathbb{C}N$  διότι, όπως έχουμε υποθέσει εξαρχής, για δοσμένο  $x \in N$  (αντίστοιχα,  $y \in N$ ), εκτός από πεπερασμένου πλήθους  $y \in N$  (αντίστοιχα,  $x \in N$ ) ισχύει  $m_{\mathcal{G}}(x, y) = 0$ . Για παράδειγμα, για το γράφημα του Σχήματος 5.1 έχουμε  $U(a) = b + c$ ,  $U(b) = 2d$ ,  $U(c) = b + c$  και  $U(d) = c$ , οπότε  $U(a + d) = b + 2c$ . Ομοίως ισχύουν  $D(a) = 0$ ,  $D(b) = a + c$ ,  $D(c) = a + c + d$  και  $D(d) = 2b$ , οπότε  $D(b - c) = -d$ . Θα γράφουμε  $U_{\mathcal{G}}$  και  $D_{\mathcal{G}}$  αντί για  $U$  και  $D$ , αντίστοιχα, όταν θέλουμε να τονίσουμε την εξάρτηση των ενδομορφισμών  $U$  και  $D$  από το  $\mathcal{G}$ .

Υπενθυμίζουμε ότι για  $n \in \mathbb{N}$ , η δύναμη  $T^n$  ενός ενδομορφισμού  $T : V \rightarrow V$  του διανυσματικού χώρου  $V$  ορίζεται από τις σχέσεις  $T^0 = I_V$  (όπου  $I_V$  είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός του  $V$ ) και  $T^k = T \circ T^{k-1}$  για  $k \geq 1$ . Η σχέση των ενδομορφισμών  $U$  και  $D$  του  $\mathbb{C}N$  με την έννοια του περίπατου στο γράφημα  $\mathcal{G}$  γίνεται σαφής με την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 5.1.1** Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  στο σύνολο κορυφών  $N$ . Για τους ενδομορφισμούς  $U, D : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$  που ορίζονται από τις (5.2) και (5.3) και τυχαίο  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε τα εξής:

(α) Για κάθε  $x \in N$  ισχύει

$$U^n(x) = \sum_{y \in N} c_{\mathcal{G}}(x, y; n) \cdot y, \quad (5.4)$$

όπου  $c_{\mathcal{G}}(x, y; n)$  είναι το πλήθος των περιπάτων μήκους  $n$  στο  $\mathcal{G}$  με αρχή  $x$  και πέρας  $y$ .

(β) Για κάθε  $y \in N$  ισχύει

$$D^n(y) = \sum_{x \in N} c_{\mathcal{G}}(x, y; n) \cdot x, \quad (5.5)$$

όπου  $c_{\mathcal{G}}(x, y; n)$  είναι το πλήθος των περιπάτων μήκους  $n$  στο  $\mathcal{G}$  με αρχή  $x$  και πέρας  $y$ .

*Απόδειξη.* Το (β) προκύπτει εφαρμόζοντας το (α) στο γράφημα που προκύπτει από το  $\mathcal{G}$  αλλάζοντας την κατεύθυνση κάθε ακμής που δεν είναι βρόχος. Επομένως αρκεί να δείξουμε το (α). Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο  $n$ . Παρατηρώντας ότι για  $x, y \in N$  ισχύει

$$c_{\mathcal{G}}(x, y; n) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 0 \text{ και } x \neq y, \\ 1, & \text{αν } n = 0 \text{ και } x = y, \\ m_{\mathcal{G}}(x, y), & \text{αν } n = 1 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η (5.4) ισχύει για  $n = 0$  και  $n = 1$ . Υποθέτοντας ότι  $n \geq 2$  και ότι η (5.4) ισχύει για το  $n - 1$ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} U^n(x) &= U(U^{n-1}(x)) = U\left(\sum_{z \in N} c_{\mathcal{G}}(x, z; n-1) \cdot z\right) \\ &= \sum_{z \in N} c_{\mathcal{G}}(x, z; n-1) \cdot U(z) \\ &= \sum_{z \in N} c_{\mathcal{G}}(x, z; n-1) \sum_{y \in N} m_{\mathcal{G}}(z, y) \cdot y \\ &= \sum_{y \in N} \left(\sum_{z \in N} c_{\mathcal{G}}(x, z; n-1) m_{\mathcal{G}}(z, y)\right) \cdot y \\ &= \sum_{y \in N} c_{\mathcal{G}}(x, y; n) \cdot y \end{aligned}$$

για  $x \in N$ , όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό του περιπάτου μήκους  $n$  στο  $\mathcal{G}$ . Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη της πρότασης.  $\square$

Για παράδειγμα, για το γράφημα  $\mathcal{G}$  του Σχήματος 5.1 έχουμε  $U^2(a) = b + c + 2d$  και πράγματι, το πλήθος των περιπάτων στο  $\mathcal{G}$  με αρχή  $a$  και πέρας  $a, b, c$  ή  $d$  είναι ίσο με  $0, 1, 1$  ή  $2$ , αντίστοιχα.

Για πεπερασμένα γραφήματα  $\mathcal{G}$ , το συνολικό πλήθος των κλειστών περιπάτων δοσμένου μήκους στο  $\mathcal{G}$  μπορεί να υπολογιστεί από τον ενδομορφισμό  $U$  με τον εξής ιδιαίτερα κομψό τρόπο.

**Πόρισμα 5.1.1** Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G} = (N, E, \varphi)$  με  $p$  κορυφές. Αν  $\omega(\mathcal{G}, n)$  είναι το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους  $n$  στο  $\mathcal{G}$  και  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$  είναι οι ιδιοτιμές του ενδομορφισμού  $U : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$ , τότε

$$\omega(\mathcal{G}, n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_p^n. \quad (5.6)$$

Απόδειξη. Με το συμβολισμό της Πρότασης 5.1.1, έχουμε

$$\omega(\mathcal{G}, n) = \sum_{x \in N} c_{\mathcal{G}}(x, x; n).$$

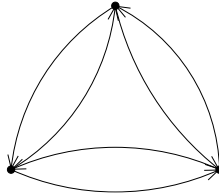
Από την Πρόταση 5.1.1 προκύπτει ότι οι ακέραιοι  $c_{\mathcal{G}}(x, x; n)$ , για  $x \in N$ , αποτελούν τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα του ενδομορφισμού  $U^n : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$  ως προς τη βάση  $N$  του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{C}N$ . Κατά συνέπεια έχουμε

$$\omega(\mathcal{G}, n) = \text{tr } U^n,$$

όπου με  $\text{tr } T$  συμβολίζουμε το ίχνος ενός γραμμικού ενδομορφισμού  $T : V \rightarrow V$ . Παρατηρούμε τέλος ότι ο  $U^n : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_p^n$  και συνεπώς ισχύει

$$\text{tr } U^n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_p^n.$$

Η ζητούμενη σχέση (5.6) έπεται από τις δύο προηγούμενες ισότητες.  $\square$



Σχήμα 5.2: Το γράφημα του Παραδείγματος 5.1.3 για  $p = 3$ .

**Παράδειγμα 5.1.3** Έστω  $\mathcal{G}$  το κατευθυνόμενο γράφημα με  $p$  κορυφές το οποίο έχει μία ακμή με αρχή  $x$  και πέρας  $y$ , αν  $(x, y)$  είναι διατεταγμένο ζεύγος διακεκριμένων κορυφών του  $\mathcal{G}$ , και καμία τέτοια ακμή αν  $x = y$ . Το γράφημα αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2 για  $p = 3$ . Εύκολα υπολογίζεται (πώς;) ότι οι ιδιοτιμές του  $U$  είναι οι  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = -1$  και  $\lambda_p = p-1$  και συνεπώς  $\omega(\mathcal{G}, n) = (p-1)(-1)^n + (p-1)^n$ .  $\square$

Αν  $G$  είναι μη κατευθυνόμενο γράφημα στο σύνολο κορυφών  $N$ , τότε ορίζουμε τον ενδομορφισμό  $U_G = D_G : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$  από τη σχέση

$$U_G(x) = \sum_{y \in N} m_G(x, y) \cdot y \quad (5.7)$$

για  $x \in N$ , όπου  $m_G(x, y)$  είναι το πλήθος των ακμών του  $G$  με άκρα  $x$  και  $y$ , και επεκτείνοντας γραμμικά στα στοιχεία του  $\mathbb{C}N$ . Το ακόλουθο πόρισμα είναι το ανάλογο της Πρότασης 5.1.1 και του Πορίσματος 5.1.1 στην περίπτωση αυτή. Παρατηρούμε ότι, για πεπερασμένα γραφήματα  $G$ , ο ενδομορφισμός  $U_G$  είναι ερμιτιανός και συνεπώς όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές.

**Πόρισμα 5.1.2** Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  στο σύνολο κορυφών  $N$ .

(α) Για τον ενδομορφισμό  $U_G : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$  που ορίζεται από την (5.7) και τυχαία  $x \in N$  και  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$U_G^n(x) = \sum_{y \in N} c_G(x, y; n) \cdot y, \quad (5.8)$$

όπου  $c_G(x, y; n)$  είναι το πλήθος των περιπάτων μήκους  $n$  στο  $G$  με αρχή  $x$  και πέρας  $y$ .

(β) Αν το πλήθος των κορυφών του  $G$  είναι ίσο με  $p$  και  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  είναι οι ιδιοτιμές του  $U_G : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$ , τότε το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους  $n$  στο  $G$  είναι ίσο με  $\lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_p^n$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  στο σύνολο κορυφών  $N$  που προκύπτει από το  $G$  αντικαθιστώντας κάθε ακμή του  $G$ , έστω με άκρα  $x$  και  $y$ , με ένα ζεύγος ακμών, η μία από τις οποίες έχει αρχή  $x$  και πέρας  $y$  και η άλλη αρχή  $y$  και πέρας  $x$ . Προφανώς έχουμε  $U_{\mathcal{G}} = U_G$  και  $c_{\mathcal{G}}(x, y; n) = c_G(x, y; n)$  για όλα τα  $x, y \in N$  και  $n \in \mathbb{N}$ . Συνεπώς το ζητούμενο προκύπτει εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.1.1 και το Πόρισμα 5.1.1 στο γράφημα  $\mathcal{G}$ .  $\square$

**Παρατήρηση 5.1.1** Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  στο σύνολο κορυφών  $N$  και έστω  $G$  το αντίστοιχο μη κατευθυνόμενο γράφημα στο ίδιο σύνολο κορυφών (ώστε το  $G$  προκύπτει από το  $\mathcal{G}$  αγνοώντας την κατεύθυνση των ακμών). Για  $x, y \in N$  ισχύει  $m_G(x, y) = m_{\mathcal{G}}(x, y) + m_{\mathcal{G}}(y, x)$ , όπου  $m_G(x, y)$  είναι το πλήθος των ακμών του  $G$  με άκρα  $x$  και  $y$ . Συνεπώς, αν  $U, D : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$  είναι οι ενδομορφισμοί που ορίζονται για το  $\mathcal{G}$  από τις (5.2) και (5.3), τότε ο  $D + U$  ταυτίζεται με τον ενδομορφισμό  $U_G$  της (5.7). Από το Πόρισμα 5.1.2 (α) έπεται ότι

$$(D + U)^n(x) = \sum_{y \in N} c_G(x, y; n) \cdot y,$$

όπου το  $c_G(x, y; n)$  είναι όπως στην (5.8).  $\square$

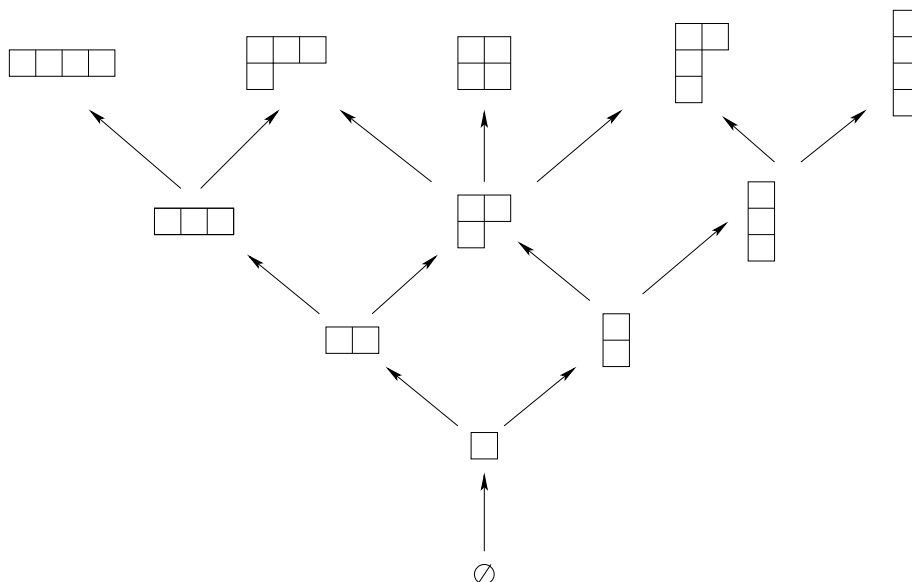
### 5.1.3 Γραφήματα με βάρη

## 5.2 Εφαρμογές

### 5.2.1 Περίπατοι στο γράφημα του Young

Συμβολίζουμε με  $\Lambda$  το σύνολο των διαμερίσεων ακεραίων, το οποίο θεωρούμε ότι περιέχει την κενή διαμέριση  $\emptyset$ . Όπως στο Κεφάλαιο 4, με  $Y_\lambda$  συμβολίζουμε το διάγραμμα

Young της διαμέρισης  $\lambda$ . Για διαμερίσεις  $\mu, \lambda \in \Lambda$  θα γράφουμε  $\mu \rightarrow \lambda$  αν  $\mu \subseteq \lambda$  και το άθροισμα των μερών της  $\lambda$  υπερβαίνει κατά ένα του αθροίσματος των μερών της  $\mu$  (ισοδύναμα, αν το  $Y_\lambda$  προκύπτει από το  $Y_\mu$  προσθέτοντας ένα τετράγωνο).



Σχήμα 5.3: Μέρος του κατευθυνόμενου γραφήματος του Young.

Το γράφημα του Young ορίζεται ως το κατευθυνόμενο γράφημα  $\Upsilon$  στο σύνολο κορυφών  $\Lambda$ , στο οποίο υπάρχει μία ακμή με αρχή  $\mu$  και πέρας  $\lambda$  αν  $\mu \rightarrow \lambda$  και καμία τέτοια ακμή διαφορετικά. Μέρος του γραφήματος αυτού απεικονίζεται στο Σχήμα 5.3, όπου μια κορυφή  $\lambda$  παριστάνεται με το διάγραμμα  $Y_\lambda$ . Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία της Παραγράφου 5.1.2 για να μελετήσουμε κάποια ενδιαφέροντα προβλήματα απαρίθμησης που σχετίζονται με περίπατους στο γράφημα του Young. Θα συμβολίζουμε ως  $\lambda^0 \rightarrow \lambda^1 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^n$  το (μοναδικό, αν υπάρχει) περίπατο στο  $\Upsilon$  με διαδοχικές κορυφές  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^n$ . Για παράδειγμα, ένας τέτοιος περίπατος είναι ο  $(2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 2, 1) \rightarrow (4, 2, 1)$ .

Το ακόλουθο λήμμα συνδέει την έννοια του Young ταμπλώ με εκείνη του περίπατου στο γράφημα  $\Upsilon$ .

**Λήμμα 5.2.1** Έστω διαμέριση  $\lambda \vdash n$ . Το πλήθος των περιπάτων μήκους  $n$  στο  $\Upsilon$  με αρχή  $\emptyset$  και πέρας  $\lambda$  είναι ίσο με το πλήθος  $f^\lambda$  των Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $T$  ένα Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda \vdash n$ . Από τον ορισμό του Young ταμπλώ προκύπτει ότι για  $1 \leq i \leq n$ , τα τετράγωνα του  $T$  που περιέχουν τους



ακεραίους  $1, 2, \dots, i$  σχηματίζουν επίσης ένα Young ταμπλώ, το οποίο συμβολίζουμε με  $T(i)$ . Προφανώς έχουμε  $T(n) = T$  και αν  $\lambda^i$  είναι το σχήμα του  $T(i)$  για  $1 \leq i \leq n$  και  $\lambda^0 = \emptyset$ , τότε  $\lambda^n = \lambda$  και

$$\lambda^0 \rightarrow \lambda^1 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^n \quad (5.9)$$

είναι περίπατος μήκους  $n$  στο γράφημα  $\Upsilon$  με αρχή  $\emptyset$  και πέρασ  $\lambda$ . Συμβολίζουμε τον περίπατο αυτό με  $\varphi(T)$ . Για παράδειγμα αν  $n = 6$ ,  $\lambda = (3, 3)$  και  $T$  είναι το δεύτερο από αριστερά ταμπλώ του Σχήματος 4.2, τότε  $\varphi(T)$  είναι ο περίπατος  $\emptyset \rightarrow (1) \rightarrow (2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ .

Αντιστρόφως, αν  $w$  είναι ένας περίπατος μήκους  $n$  στο  $\Upsilon$ , όπως στην (5.9), με αρχή  $\lambda^0 = \emptyset$  και πέρασ  $\lambda^n = \lambda$ , τότε υπάρχει (γιατί;) μοναδικό Young ταμπλώ  $\psi(w)$  σχήματος  $\lambda$  με την ιδιότητα ότι για κάθε  $i \in [n]$ , το στοιχείο  $i$  του  $T$  καταλαμβάνει το μοναδικό τετράγωνο του διαγράμματος Young του  $\lambda^i/\lambda^{i-1}$ . Για παράδειγμα αν  $n = 6$ ,  $\lambda = (3, 3)$  και  $w$  είναι ο περίπατος  $\emptyset \rightarrow (1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ , τότε το  $\psi(w)$  είναι το πρώτο από δεξιά ταμπλώ του Σχήματος 4.2. Αφήνουμε στον αναγνώστη να βεβαιωθεί ότι η  $\varphi$  είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο των Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$  στο σύνολο των περιπάτων μήκους  $n$  στο  $\Upsilon$  με αρχή  $\emptyset$  και πέρασ  $\lambda$ , με αντίστροφη απεικόνιση την  $\psi$ . Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 1.1.1.  $\square$

Θεωρούμε τώρα τους ενδομορφισμούς  $U, D : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  του  $\mathbb{C}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathbb{C}\Lambda$  που ορίζονται για το γράφημα  $\Upsilon$  όπως στην Παράγραφο 5.1.2. Για παράδειγμα, αν  $\mu = (3, 1)$  και  $\lambda = (2, 2, 1)$ , τότε  $U(\mu) = (4, 1) + (3, 2) + (3, 1, 1)$  και  $D(\lambda) = (2, 1, 1) + (2, 2)$ . Η θεμελιώδης σχέση μεταξύ των ενδομορφισμών αυτών που περιγράφει η ακόλουθη πρόταση θα παίξει σημαντικό ρόλο για τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου.

**Πρόταση 5.2.1** Για τους ενδομορφισμούς  $U, D : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  ισχύει  $DU - UD = I$ , όπου  $I : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

*Απόδειξη.* Εξαιτίας της γραμμικότητας των απεικονίσεων  $U$  και  $D$ , αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει  $DU(\mu) - UD(\mu) = \mu$  για κάθε στοιχείο  $\mu$  της βάσης  $\Lambda$  του  $\mathbb{C}\Lambda$ . Έστω λοιπόν τυχαία διαμέριση  $\mu \in \Lambda$ . Έστω επίσης  $r$  το πλήθος των ακμών του  $\Upsilon$  με αρχή  $\mu$  και  $s$  το πλήθος των ακμών του  $\Upsilon$  με πέρασ  $\mu$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} DU(\mu) &= D\left(\sum_{\mu \rightarrow \lambda} \lambda\right) = \sum_{\mu \rightarrow \lambda} D(\lambda) \\ &= \sum_{\mu \rightarrow \lambda} \left(\mu + \sum_{\nu \rightarrow \lambda, \nu \neq \mu} \nu\right) \end{aligned}$$

$$= r\mu + \sum \nu,$$

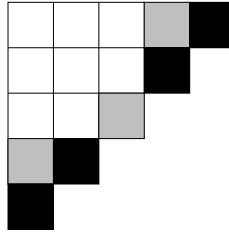
όπου στο τελευταίο άθροισμα, το  $\nu$  διατρέχει όλες τις διαμερίσεις το διάγραμμα Young των οποίων προκύπτει από εκείνο της  $\mu$  προσθέτοντας αρχικά ένα τετράγωνο και διαγράφοντας έπειτα ένα άλλο. Ακριβώς ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$UD(\mu) = s\mu + \sum \nu,$$

όπου στο άθροισμα του δεξιού μέλους, το  $\nu$  διατρέχει όλες τις διαμερίσεις το διάγραμμα Young των οποίων προκύπτει από εκείνο της  $\mu$  διαγράφοντας αρχικά ένα τετράγωνο και προσθέτοντας έπειτα ένα άλλο. Παρατηρούμε ότι τα δύο άθροισματα στις παραπάνω εκφράσεις για τα  $DU(\mu)$  και  $UD(\mu)$  ταυτίζονται. Από τα προηγούμενα συνάγουμε ότι

$$DU(\mu) - UD(\mu) = (r - s)\mu$$

και συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι  $r = s + 1$ . Πράγματι, από τον ορισμό του γραφήματος  $\Upsilon$  έχουμε ότι το  $r$  (αντίστοιχα,  $s$ ) είναι ίσο με το πλήθος των (νότιων) εξωτερικών (αντίστοιχα, εσωτερικών) γωνιών της  $\mu$ . Στο Σχήμα 5.4 απεικονίζονται με μαύρο χρώμα οι εξωτερικές γωνίες και με γκρι χρώμα οι εσωτερικές γωνίες της διαμέρισης  $(4, 3, 3, 1)$ . Έστω  $\tilde{\mu}$  η διαμέριση που προκύπτει προσθέτοντας στο  $Y_\mu$  τις εξωτερικές γωνίες της  $\mu$ . Παρατηρώντας ότι μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαδοχικών εξωτερικών γωνιών της  $\mu$  στο νοτιοδυτικό σύνορο του  $Y_\mu$  υπάρχει ακριβώς μία εσωτερική γωνία της  $\mu$ , προκύπτει το ζητούμενο.  $\square$



Σχήμα 5.4: Οι διαμερίσεις  $\mu = (4, 3, 3, 1)$  και  $\tilde{\mu} = (5, 4, 3, 2, 1)$ .

Ως μια πρώτη εφαρμογή της θεωρίας που έχουμε αναπτύξει ως τώρα, θα δώσουμε μια νέα απόδειξη της ταυτότητας (4.1) που συνδέει τους αριθμούς  $f^\lambda$  για  $\lambda \vdash n$ . Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.1.1 στο γράφημα του Young και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.1 βρίσκουμε ότι

$$U^n(\emptyset) = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \cdot \lambda \quad (5.10)$$

και ότι

$$D^n(\lambda) = f^\lambda \cdot \emptyset \quad (5.11)$$

για κάθε  $\lambda \vdash n$ . Από τις δύο αυτές ισότητες συμπεραίνουμε ότι

$$D^n U^n(\emptyset) = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda D^n(\lambda) = \left( \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 \right) \cdot \emptyset. \quad (5.12)$$

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι ισχύει  $D^n U^n(\emptyset) = n! \cdot \emptyset$ . Θα δώσουμε δύο αποδείξεις της σχέσης αυτής. Για την πρώτη απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 5.2.2** Για τους ενδομορφισμούς  $U, D : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  και τυχαίο θετικό ακέραιο  $n$  ισχύει

$$D^n U^n = (UD + I)(UD + 2I) \cdots (UD + nI),$$

όπου  $I : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε επαγωγή στο  $n$ . Για  $n = 1$  το ζητούμενο ισοδυναμεί με τη σχέση  $DU - UD = I$  της Πρότασης 5.2.1. Υποθέτοντας ότι  $n \geq 2$  και ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για το  $n - 1$ , βρίσκουμε

$$\begin{aligned} D^n U^n &= D(D^{n-1} U^{n-1})U \\ &= D(UD + I) \cdots (UD + (n-1)I)U \\ &= D(UD + I) \cdots (UDU + (n-1)U) \\ &= D(UD + I) \cdots U(DU + (n-1)I) \\ &= \cdots \\ &= DU(DU + I) \cdots (DU + (n-1)I) \\ &= (UD + I)(UD + 2I) \cdots (UD + nI), \end{aligned}$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε και πάλι τη σχέση  $DU = UD + I$  της Πρότασης 5.2.1. Συνεπώς ολοκληρώθηκε το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη του λήμματος.  $\square$

**Πόρισμα 5.2.1** Για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!.$$

*Πρώτη απόδειξη.* Από το Λήμμα 5.2.2 και τη σχέση  $D(\emptyset) = 0$  προκύπτει ότι

$$D^n U^n(\emptyset) = (UD + I)(UD + 2I) \cdots (UD + nI)(\emptyset) = n! \cdot \emptyset.$$

Όπως ήδη έχουμε επισημάνει, η ζητούμενη ταυτότητα έπεται από τη σχέση αυτή και την (5.12).  $\square$

**Λήμμα 5.2.3** Για τους ενδομορφισμούς  $U, D : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  ισχύει

$$Dp(U) = p'(U) + p(U)D$$

για κάθε πολυώνυμο  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ .

*Απόδειξη.* Λόγω της γραμμικότητας των  $U$  και  $D$ , μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $p(x) = x^m$  για κάποιο  $m \in \mathbb{N}$ . Έχουμε δηλαδή να δείξουμε ότι

$$DU^m = mU^{m-1} + U^m D, \quad (5.13)$$

όπου και τα δύο μέλη της ισότητας αυτής είναι ίσα με  $D$  για  $m = 0$ . Η σχέση (5.13) ισοδυναμεί με τη σχέση  $DU - UD = I$  της Πρότασης 5.2.1 για  $m = 1$ . Εφαρμόζοντας επαγωγή στο  $m$  και υποθέτοντας ότι η (5.13) ισχύει για το  $m$ , βρίσκουμε

$$\begin{aligned} DU^{m+1} &= DU^m U = (mU^{m-1} + U^m D)U \\ &= mU^m + U^m DU = mU^m + U^m(UD + I) \\ &= (m+1)U^m + U^{m+1}D, \end{aligned}$$

δηλαδή ότι η (5.13) ισχύει και για το  $m+1$ . □

*Δεύτερη απόδειξη του Πορίσματος 5.2.1.* Με χρήση της (5.13) και της  $D(\emptyset) = 0$  βρίσκουμε

$$\begin{aligned} D^n U^n(\emptyset) &= D^{n-1} \cdot DU^n(\emptyset) = D^{n-1}(nU^{n-1} + U^n D)(\emptyset) \\ &= nD^{n-1}U^{n-1}(\emptyset) + D^{n-1}U^n \cdot D(\emptyset) \\ &= nD^{n-1}U^{n-1}(\emptyset), \end{aligned}$$

οπότε με επαγωγή στο  $n$  προκύπτει ότι  $D^n U^n(\emptyset) = n! \cdot \emptyset$ . Όπως παρατηρήσαμε και στην πρώτη απόδειξη, η τελευταία σχέση και η (5.12) δίνουν το ζητούμενο. □

Ακολούθως δίνουμε μια αλγεβρική απόδειξη του αποτελέσματος της Άσκησης 4 του Κεφαλαίου 4.

**Πόρισμα 5.2.2** Για κάθε διαμέριση  $\mu$  του  $n-1$  ισχύει  $\sum_{\mu \rightarrow \lambda} f^\lambda = n f^\mu$ .

*Απόδειξη.* Από τις σχέσεις (5.10) και (5.13), καθώς και από την  $D(\emptyset) = 0$ , προκύπτει ότι

$$DU^n(\emptyset) = (nU^{n-1} + U^n D)(\emptyset) = nU^{n-1}(\emptyset) = n \sum_{\mu \vdash n-1} f^\mu \cdot \mu.$$

Επίσης, από την (5.10) και τον ορισμό του ενδομορφισμού  $D$  προκύπτει ότι

$$DU^n(\emptyset) = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \cdot D(\lambda) = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \sum_{\mu \rightarrow \lambda} \mu.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του  $\mu$  στις δύο εκφράσεις για το  $DU^n(\emptyset)$  στις οποίες καταλήξαμε, προκύπτει το ζητούμενο.  $\square$

Με χρήση της (5.13) βρίσκουμε ότι  $(D+U)^2 = U^2 + UD + DU + D^2 = U^2 + 2UD + D^2 + I$  και, εργαζόμενοι παρόμοια, ότι  $(D+U)^3 = U^3 + 3U^2D + 3UD^2 + D^3 + 3U + 3D$ . Οι παρατηρήσεις αυτές γενικεύονται από την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 5.2.2** Για τους ενδομορφισμούς  $U, D : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  και τυχαίο  $m \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$(D + U)^m = \sum_{\substack{i+j+2k=m \\ (i,j,k) \in \mathbb{N}^3}} \frac{m!}{2^k i! j! k!} U^i D^j. \quad (5.14)$$

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο  $m$ . Η ζητούμενη σχέση επαληθεύεται εύκολα για  $m = 0$  ή  $1$ . Έστω ότι ισχύει για τον ακέραιο  $m \geq 1$ . Πολλαπλασιάζοντας (με την έννοια της σύνθεσης γραμμικών απεικονίσεων) την (5.14) από αριστερά με  $D + U$ , παίρνουμε

$$(D + U)^{m+1} = \sum_{i+j+2k=m} \frac{m!}{2^k i! j! k!} (D + U) U^i D^j.$$

Σύμφωνα με την (5.13) έχουμε

$$(D + U) U^i D^j = U^{i+1} D^j + D U^i D^j = U^{i+1} D^j + U^i D^{j+1} + i U^{i-1} D^j$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} (D + U)^{m+1} &= \sum_{i+j+2k=m} \frac{m!}{2^k i! j! k!} (U^{i+1} D^j + U^i D^{j+1} + i U^{i-1} D^j) \\ &= \sum_{i+j+2k=m+1} \frac{m!}{2^k (i-1)! j! k!} U^i D^j + \\ &\quad \sum_{i+j+2k=m+1} \frac{m!}{2^k i! (j-1)! k!} U^i D^j + \\ &\quad \sum_{i+j+2k=m+1} \frac{m!}{2^{k-1} i! j! (k-1)!} U^i D^j \\ &= \sum_{i+j+2k=m+1} (i+j+2k) \frac{m!}{2^k i! j! k!} U^i D^j \\ &= \sum_{i+j+2k=m+1} \frac{(m+1)!}{2^k i! j! k!} U^i D^j. \end{aligned}$$

Επομένως η (5.14) ισχύει και για τον ακέραιο  $m+1$  και η επαγωγή, άρα και η απόδειξη της πρότασης, είναι πλήρης.  $\square$

Έστω  $Y$  το μη κατευθυνόμενο γράφημα που αντιστοιχεί στο  $\Upsilon$ . Το ακόλουθο πόρισμα της Πρότασης 5.2.2 αφορά περιπάτους στο  $Y$ . Για παράδειγμα, υπάρχουν τρεις τέτοιοι περίπατοι μήκους 4 με αρχή και πέρασ  $\emptyset$ .

**Πόρισμα 5.2.3** Για κάθε διαμέριση  $\lambda$  του  $n$  και ακέραιο  $m \geq n$ , το πλήθος των περιπάτων μήκους  $m$  στο μη κατευθυνόμενο γράφημα  $Y$  του Young με αρχή  $\emptyset$  και πέρασ  $\lambda$  είναι ίσο με

$$\begin{cases} \binom{m}{n} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-n-1)) f^\lambda, & \text{αν } m \equiv n \pmod{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εδிகότερα, το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους  $2k$  στο  $Y$  με αρχή (και πέρασ)  $\emptyset$  είναι ίσο με  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$ .

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 5.1.1 συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με το συντελεστή  $c_\lambda$  της  $\lambda$  στο ανάπτυγμα

$$(D+U)^m(\emptyset) = \sum_{\mu} c_{\mu} \cdot \mu.$$

Από την Πρόταση 5.2.2 προκύπτει ότι

$$(D+U)^m(\emptyset) = \sum_{i+2k=m} \frac{m!}{2^k i! k!} U^i(\emptyset) = \sum_{i+2k=m} \frac{m!}{2^k i! k!} \sum_{\mu \vdash i} f^{\mu} \cdot \mu.$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι αν δεν υπάρχει  $k \in \mathbb{N}$  με  $n+2k=m$ , τότε  $c_\lambda = 0$  ενώ αν  $n+2k=m$ , τότε

$$c_\lambda = \frac{m!}{2^k n! k!} f^\lambda = \binom{m}{n} \frac{(2k)!}{2^k k!} f^\lambda = \binom{m}{n} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)) f^\lambda.$$

Η τελευταία πρόταση στη διατύπωση του πορίσματος είναι η ειδική περίπτωση  $\lambda = \emptyset$  (οπότε  $n=0$ ) και  $m=2k$ .  $\square$

## 5.2.2 Το Θεώρημα του Sperner

## 5.2.3 Μονοτροπία των $q$ -διωνυμικών συντελεστών

## 5.3 Απαρίθμηση δένδρων

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της απαρίθμησης ορισμένων δένδρων που είναι υπογραφήματα ενός δοθέντος (κατευθυνόμενου ή μη) γραφήματος

σε ένα πεπερασμένο σύνολο κορυφών. Το κύριο εργαλείο μας θα είναι ο πίνακας μιας παραλλαγής του ενδομορφισμού  $U$  της Παραγράφου 5.1.2 (πίνακας Laplace).

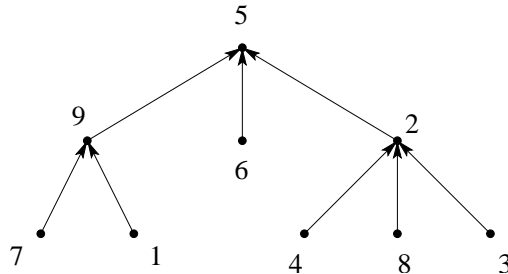
Θα συμβολίζουμε με  $\mathcal{G}$  (αντίστοιχα,  $G$ ) ένα κατευθυνόμενο (αντίστοιχα, μη κατευθυνόμενο) γράφημα  $(N, E, \varphi)$ , για το οποίο θα υποθέτουμε πάντοτε ότι είναι πεπερασμένο (δηλαδή ότι τα  $N$  και  $E$  είναι πεπερασμένα σύνολα).

### 5.3.1 Παράγοντα δένδρα

Έστω (πεπερασμένο) κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G} = (N, E, \varphi)$ . Υπογράφημα του  $\mathcal{G}$  λέγεται ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{H} = (M, D, \psi)$  όπου  $M \subseteq N$ ,  $D \subseteq E$  και  $\psi$  είναι ο περιορισμός της  $\varphi$  στο σύνολο  $D$  (δηλαδή, το  $\mathcal{H}$  είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει από το  $\mathcal{G}$  διαγράφοντας κάποιες από τις κορυφές και ακμές αυτού). Αν  $M = N$ , τότε το  $\mathcal{H}$  λέγεται παράγον υπογράφημα του  $\mathcal{G}$  (και προκύπτει από το  $\mathcal{G}$  διαγράφοντας κάποιες από τις ακμές αυτού).

**Ορισμός 5.3.1** Έστω πεπερασμένο σύνολο  $M$  και  $v \in M$ . Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{T}$  στο σύνολο κορυφών  $M$  λέγεται προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα  $v$ , αν για κάθε  $u \in M$  υπάρχει μοναδικός περίπατος στο  $\mathcal{T}$  με αρχή  $u$  και πέρας  $v$ .

Αν επιπλέον το  $\mathcal{T}$  είναι παράγον υπογράφημα του  $\mathcal{G}$  (οπότε  $M = N$ ), τότε το  $\mathcal{T}$  λέγεται παράγον προσανατολισμένο δένδρο του  $\mathcal{G}$  με ρίζα  $v$ .



Σχήμα 5.5: Ένα ένα προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα.

Στο Σχήμα 5.5 απεικονίζεται ένα προσανατολισμένο δένδρο στο σύνολο κορυφών  $[9]$  με ρίζα το 5. Στην Άσκηση 3 δίνονται διάφοροι χαρακτηρισμοί των προσανατολισμένων δένδρων με ρίζα, οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του κύριου αποτελέσματος (Θεώρημα 5.3.1) αυτής της παραγράφου. Θα συμβολίζουμε με  $\tau(v, \mathcal{G})$  το πλήθος των παραγόντων προσανατολισμένων δένδρων του  $\mathcal{G}$  με ρίζα  $v$ . Για παράδειγμα, για το γράφημα  $\mathcal{G}$  του Σχήματος 5.1 έχουμε  $\tau(a, \mathcal{G}) = 0$ ,  $\tau(b, \mathcal{G}) = 2$  και  $\tau(c, \mathcal{G}) = \tau(d, \mathcal{G}) = 4$ . Τα δύο παράγοντα προσανατολισμένα δένδρα του  $\mathcal{G}$  με ρίζα  $b$  έχουν σύνολα ακμών  $\{e_1, e_4, e_5\}$  και  $\{e_2, e_4, e_5\}$ .

Για ένα (πεπερασμένο) μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (N, E, \varphi)$ , η έννοια του παράγοντος υπογραφήματος ορίζεται ακριβώς όπως και για κατευθυνόμενα γραφήματα. Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $T$  λέγεται δένδρο (βλέπε Σχήμα 3.2 του Κεφαλαίου 3) αν για κάθε ζεύγος  $(u, v)$  κορυφών του  $T$  (πιθανώς με  $u = v$ ), υπάρχει μοναδικός περίπατος (πιθανώς μήκους μηδέν) στο  $T$  με αρχή  $u$  και πέρας  $v$ . Για βασικές ιδιότητες των δένδρων παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 3 του [1]. Ένα δένδρο το οποίο είναι παράγον υπογράφημα του  $G$  λέγεται παράγον δένδρο του  $G$ .

### 5.3.2 Ο πίνακας Laplace

Για κορυφή  $u$  του  $\mathcal{G}$ , συμβολίζουμε με  $\deg_{\mathcal{G}}(u)$  το πλήθος των ακμών του  $\mathcal{G}$  που δεν είναι βρόχοι και έχουν αρχή  $u$ . Ο πίνακας Laplace ενός κατευθυνόμενου γραφήματος ορίζεται ως εξής.

**Ορισμός 5.3.2** Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  με κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_p$ . Ο πίνακας Laplace του  $\mathcal{G}$  είναι ο  $p \times p$  πίνακας  $L = L(\mathcal{G})$  με στοιχεία

$$L_{ij} = \begin{cases} \deg_{\mathcal{G}}(v_i), & \text{αν } i = j \\ -m_{ij}, & \text{αν } i \neq j, \end{cases} \quad (5.15)$$

όπου  $m_{ij} = m_{\mathcal{G}}(v_i, v_j)$  είναι το πλήθος των ακμών του  $\mathcal{G}$  με αρχή  $v_i$  και πέρας  $v_j$ .

Για παράδειγμα, για την αρίθμηση  $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (a, b, c, d)$  των κορυφών του γραφήματος  $\mathcal{G}$  του Σχήματος 5.1 έχουμε

$$L(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

**Παρατήρηση 5.3.1** (α) Ο πίνακας  $L(\mathcal{G})$  εξαρτάται από την αρίθμηση (αναδιάταξη)  $v_1, v_2, \dots, v_p$  των κορυφών του  $\mathcal{G}$  που επιλέξαμε, όχι όμως κατά ουσιαστικό τρόπο. Κάθε άλλη αρίθμηση των κορυφών αντιστοιχεί σε μια μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_p$  και μεταβάλλει τον πίνακα  $L(\mathcal{G})$  μεταθέτοντας τις γραμμές του και τις στήλες του σύμφωνα με τη  $w$ . Αυτό, για παράδειγμα, δε μεταβάλλει τις τιμές των πρωτεύουσών υποοριζουσών του  $L(\mathcal{G})$  δοσμένου μεγέθους, για τις οποίες κυρίως θα ενδιαφερθούμε.

(β) Με το συμβολισμό του Ορισμού 5.3.2 έχουμε

$$\deg_{\mathcal{G}}(v_i) = \sum_{j \neq i} m_{ij}$$

για  $1 \leq i \leq p$ , δηλαδή οι στήλες του πίνακα  $L(\mathcal{G})$  αθροίζουν στο μηδενικό διάνυσμα. Κατά συνέπεια οι στήλες του  $L(\mathcal{G})$  είναι γραμμικώς εξαρτημένες, οπότε ισχύει  $\det L(\mathcal{G}) = 0$ .  $\square$



Ο πίνακας Laplace  $L(G)$  ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  με κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_p$  ορίζεται ανάλογα, θέτοντας

$$L_{ij} = \begin{cases} \sum_{j \neq i} m_{ij}, & \text{αν } i = j \\ -m_{ij}, & \text{αν } i \neq j, \end{cases}$$

όπου  $m_{ij} = m_G(v_i, v_j)$  είναι το πλήθος των ακμών του  $G$  με άκρα  $v_i$  και  $v_j$ . Στην περίπτωση αυτή ο  $L(G)$  είναι συμμετρικός πίνακας. Το άθροισμα των στηλών (άρα και των γραμμών) του  $L(G)$  είναι ίσο με μηδέν και συνεπώς ισχύει και πάλι  $\det L(G) = 0$ .

### 5.3.3 Το Θεώρημα Πίνακα–Δένδρου

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.3.1** Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  με κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_p$ . Αν  $1 \leq i \leq p$  και  $L_i(\mathcal{G})$  είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον  $L(\mathcal{G})$  διαγράφοντας την  $i$  γραμμή και την  $i$  στήλη αυτού, τότε  $\det L_i(\mathcal{G}) = \tau(v_i, \mathcal{G})$ .

Για παράδειγμα, για το γράφημα  $\mathcal{G}$  του Σχήματος 5.1 υπολογίζουμε ότι

$$\tau(a, \mathcal{G}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

και

$$\tau(d, \mathcal{G}) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1 θα συνάγουμε ως πόρισμα την ανάλογη πρόταση για μη κατευθυνόμενα γραφήματα (γνωστή ως **Θεώρημα Πίνακα-Δένδρου**) και θα περιγράψουμε δύο εφαρμογές.

**Πόρισμα 5.3.1** (Θεώρημα Πίνακα-Δένδρου) Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  με κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_p$ . Αν  $1 \leq i \leq p$  και  $L_i(G)$  είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον  $L(G)$  διαγράφοντας την  $i$  γραμμή και την  $i$  στήλη αυτού, τότε η ορίζουσα  $\det L_i(G)$  είναι ίση με το πλήθος των παραγόντων δένδρων του  $G$  (και συνεπώς ανεξάρτητη του  $i$ ).

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  στο σύνολο κορυφών του  $G$  που προκύπτει αντικαθιστώντας κάθε ακμή του  $G$  με ένα ζεύγος ακμών, όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 5.1.2. Χρησιμοποιώντας την ίδια αρίθμηση  $v_1, v_2, \dots, v_p$

για τις κορυφές του  $\mathcal{G}$ , έχουμε  $L(\mathcal{G}) = L(G)$ . Επίσης, για κάθε δείκτη  $i$  υπάρχει μια εμφανής 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των προσανατολισμένων παραγόντων δένδρων του  $\mathcal{G}$  με ρίζα  $v_i$  στο σύνολο των παραγόντων δένδρων του  $G$ . Επομένως, το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.1.  $\square$

Όπως συνηθίζεται στη βιβλιογραφία, θα συμβολίζουμε με  $L_0(\mathcal{G})$  (αντίστοιχα,  $L_0(G)$ ) τον πίνακα που προκύπτει διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και στήλη του  $L(\mathcal{G})$  (αντίστοιχα,  $L(G)$ ), όταν το πλήθος  $p$  των κορυφών του  $\mathcal{G}$  (αντίστοιχα,  $G$ ) δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο.

**Παράδειγμα 5.3.1** (Τύπος του Cayley) Έστω  $t(p)$  το πλήθος των δένδρων στο σύνολο κορυφών  $[p]$ , όπου το σύνολο των ακμών ενός τέτοιου δένδρου  $([p], E, \varphi)$  ταυτίζεται με το  $\varphi(E) \subseteq \binom{[p]}{2}$ . Για παράδειγμα έχουμε  $t_1 = t_2 = 1$ ,  $t_3 = 3$  και  $t_4 = 16$ , όπου τα τρία δένδρα στο σύνολο κορυφών  $\{1, 2, 3\}$  είναι αυτά με σύνολα ακμών  $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ ,  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$  και  $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ .

Θα δείξουμε ότι ισχύει  $t(p) = p^{p-2}$  για κάθε θετικό ακέραιο  $p$ . Έστω  $G$  το (μη κατευθυνόμενο) γράφημα στο σύνολο κορυφών  $[p]$  το οποίο έχει  $\binom{p}{2}$  ακμές, μία με άκρα  $i$  και  $j$  για κάθε ζεύγος κορυφών  $1 \leq i < j \leq p$ . Ο πίνακας Laplace του  $G$  είναι ο  $p \times p$  πίνακας

$$L(G) = \begin{pmatrix} p-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & p-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & p-1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Παρατηρούμε ότι τα δένδρα στο σύνολο κορυφών  $[p]$  είναι ακριβώς τα παράγοντα δένδρα του  $G$ . Επομένως, από το Πρόσθημα 5.3.1 προκύπτει ότι  $t(p) = \det L_0(G)$ , όπου  $L_0(G)$  είναι ο  $(p-1) \times (p-1)$  πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και στήλη του  $L(G)$ . Προσθέτοντας όλες τις γραμμές του  $L_0(G)$  εκτός της πρώτης στην πρώτη γραμμή και προσθέτοντας έπειτα την πρώτη γραμμή του πίνακα που προκύπτει σε καθεμιά από τις υπόλοιπες γραμμές, βρίσκουμε ότι

$$t(p) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p \end{pmatrix} = p^{p-2},$$

όπως το υποσχεθήκαμε.  $\square$

**Παράδειγμα 5.3.2** Έστω  $G$  το μη κατευθυνόμενο γράφημα στο σύνολο κορυφών  $\{1, 2, \dots, p, 1', 2', \dots, q'\}$ , το οποίο έχει μία ακμή με άκρα  $i$  και  $j'$  για κάθε ζεύγος

κορυφών  $1 \leq i \leq p$  και  $1 \leq j \leq q$  (ώστε το πλήθος των ακμών του  $G$  είναι ίσο με  $pq$ ). Στο Σχήμα 5.6 απεικονίζεται το γράφημα  $G$  και ένα παράγον δένδρο του για  $p = 3$  και  $q = 4$ . Ο πίνακας Laplace του  $G$  είναι ο  $(p + q) \times (p + q)$  πίνακας

$$L(G) = \begin{pmatrix} qI_p & -J \\ -J & pI_q \end{pmatrix},$$

όπου με  $I_k$  συμβολίζουμε τον  $k \times k$  ταυτοτικό πίνακα και με  $J$  τον πίνακα καταλλήλων διαστάσεων, κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1. Έστω  $t(p, q)$  το πλήθος των παραγόντων δένδρων του  $G$ . Από το Πρόσιμα 5.3.1 παίρνουμε  $t(p, q) = \det L_0(G)$ , όπου  $L_0(G)$  είναι ο  $(p + q - 1) \times (p + q - 1)$  πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη του  $L(G)$ . Προσθέτοντας όλες τις γραμμές του  $L_0(G)$  εκτός της πρώτης στην πρώτη γραμμή, βρίσκουμε ότι

$$t(p, q) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & p & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & p \end{pmatrix}.$$

Αφαιρώντας την πρώτη στήλη του πίνακα του δεξιού μέλους από καθεμία από τις στήλες  $2, \dots, p$  και αναπτύσσοντας την ορίζουσα που προκύπτει κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, καταλήγουμε στον τύπο

$$t(p, q) = p^{q-1}q^{p-1}$$

για το πλήθος των παραγόντων δένδρων του  $G$ . □

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1. Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  στο σύνολο κορυφών  $N = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ .

**Λήμμα 5.3.1** *Αν το μη κατευθυνόμενο γράφημα που αντιστοιχεί στο  $\mathcal{G}$  δεν είναι συνεκτικό, τότε  $\det L_i(\mathcal{G}) = 0$  για κάθε  $1 \leq i \leq p$ .*

*Απόδειξη.* Μεταθέτοντας κατάλληλα τις κορυφές του  $\mathcal{G}$ , μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ακέραιος  $1 \leq k < p$  τέτοιος ώστε καμιά ακμή του  $\mathcal{G}$  να μην έχει αρχή



Σχήμα 5.6: Ένα γράφημα και ένα παράγον δένδρο.

σε ένα από τα σύνολα  $\{v_1, \dots, v_k\}$  και  $\{v_{k+1}, \dots, v_p\}$  και πέρασ στο άλλο. Με την υπόθεση αυτή έχουμε

$$L(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} L(\mathcal{H}_1) & O \\ O & L(\mathcal{H}_2) \end{pmatrix},$$

όπου  $\mathcal{H}_1$  και  $\mathcal{H}_2$  είναι υπογραφήματα του  $\mathcal{G}$  στα σύνολα κορυφών  $\{v_1, \dots, v_k\}$  και  $\{v_{k+1}, \dots, v_p\}$  και με  $O$  συμβολίζεται ο μηδενικός πίνακας καταλλήλων διαστάσεων. Συνεπώς ο πίνακας  $L_i(\mathcal{G})$  έχει μπλοκ διαγώνια μορφή, με ένα από τα διαγώνια μπλοκ ίσο με  $L(\mathcal{H}_1)$  ή  $L(\mathcal{H}_2)$ . Αφού από την Παρατήρηση 5.3.1 (β) έχουμε  $\det L(\mathcal{H}_1) = \det L(\mathcal{H}_2) = 0$ , έπεται ότι  $\det L_i(\mathcal{G}) = 0$ .  $\square$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1.* Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $i = p$  (οπότε θέλουμε να δείξουμε ότι  $\det L_0(\mathcal{G}) = \tau(v_p, \mathcal{G})$ ) και ότι δεν υπάρχει ακμή του  $\mathcal{G}$  με αρχή  $v_p$  (τέτοιες ακμές δεν επηρεάζουν τον πίνακα  $L_0(\mathcal{G})$  ή τον ακέραιο  $\tau(v_p, \mathcal{G})$ ). Εφαρμόζουμε επαγωγή στο πλήθος, έστω  $m$ , των ακμών του  $\mathcal{G}$ , διακρίνοντας δύο περιπτώσεις.

Υποθέτουμε πρώτα ότι  $m \leq p - 1$ . Αν το  $\mathcal{G}$  δεν είναι το ίδιο προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα  $v_p$ , τότε από την Άσκηση 3 (α) προκύπτει ότι  $\tau(v_p, \mathcal{G}) = 0$  και ότι είτε  $\deg_{\mathcal{G}}(v_i) = 0$  για κάποιο  $i \in [p - 1]$ , είτε το μη κατευθυνόμενο γράφημα που αντιστοιχεί στο  $\mathcal{G}$  δεν είναι συνεκτικό. Σε κάθε περίπτωση ισχύει  $\det L_0(\mathcal{G}) = 0$  (άρα και η ζητούμενη ισότητα): στην πρώτη επειδή η  $i$  γραμμή του  $L_0(\mathcal{G})$  είναι μηδενική και στη δεύτερη λόγω του Λήμματος 5.3.1. Έστω ότι το  $\mathcal{G}$  είναι προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα  $v_p$ , οπότε  $\tau(v_p, \mathcal{G}) = 1$ . Θα δείξουμε ότι  $\det L_0(\mathcal{G}) = 1$  με επαγωγή στο  $p$ , όπου η ισότητα αυτή επαληθεύεται εύκολα για  $p = 2$ . Από την Άσκηση 3 (α) προκύπτει (εξηγήστε πώς) ότι υπάρχει  $i \in [p - 1]$ , τέτοιο ώστε η κορυφή  $v_i$  να μην είναι πέρασ ακμής του  $\mathcal{G}$ . Διαγράφοντας από το  $\mathcal{G}$  τη  $v_i$  και τη μοναδική ακμή του  $\mathcal{G}$  με αρχή την κορυφή αυτή, προκύπτει ένα προσανατολισμένο δένδρο  $\mathcal{T}$  με  $p - 1$  κορυφές και ρίζα  $v_p$ . Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του  $L_0(\mathcal{G})$  κατά τα στοιχεία της στήλης  $i$  (η οποία έχει στοιχείο ίσο με 1 πάνω στην κύρια διαγώνιο και τα υπόλοιπα στοιχεία της ίσα με 0), βρίσκουμε ότι  $\det L_0(\mathcal{G}) = \det L_0(\mathcal{T})$ . Η υπόθεση της επαγωγής ολοκληρώνει την απόδειξη στην περίπτωση αυτή.

Έστω τώρα ότι  $m \geq p$ . Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο τουλάχιστον ακμές του  $\mathcal{G}$  με κοινή αρχή, έστω  $v_i$  για κάποιο  $i \in [p-1]$ . Έστω  $e$  μια ακμή του  $\mathcal{G}$  με αρχή  $v_i$  και έστω  $\mathcal{H}_1$  (αντίστοιχα,  $\mathcal{H}_2$ ) το γράφημα στο σύνολο κορυφών  $N$  που προκύπτει από το  $\mathcal{G}$  διαγράφοντας την ακμή  $e$  (αντίστοιχα, όλες τις ακμές του  $\mathcal{G}$  με αρχή  $v_i$  εκτός της  $e$ ). Από την κατασκευή των γραφημάτων αυτών, οι πίνακες  $L_0(\mathcal{G})$ ,  $L_0(\mathcal{H}_1)$  και  $L_0(\mathcal{H}_2)$  διαφέρουν μόνο ως προς τη γραμμή  $i$ . Επίσης, η γραμμή  $i$  του  $L_0(\mathcal{G})$  είναι ίση με το άθροισμα των γραμμών  $i$  των  $L_0(\mathcal{H}_1)$  και  $L_0(\mathcal{H}_2)$ . Από την ιδιότητα της πολυγραμμικότητας των οριζουσών προκύπτει ότι

$$\det L_0(\mathcal{G}) = \det L_0(\mathcal{H}_1) + \det L_0(\mathcal{H}_2).$$

Επίσης, ως συνέπεια της Άσκησης 3 (α) έχουμε

$$\tau(v_p, \mathcal{G}) = \tau(v_p, \mathcal{H}_1) + \tau(v_p, \mathcal{H}_2).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι το πλήθος των ακμών καθενός από τα  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  είναι μικρότερο του  $m$ . Κατά συνέπεια, από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε  $\det L_0(\mathcal{H}_1) = \tau(v_p, \mathcal{H}_1)$  και  $\det L_0(\mathcal{H}_2) = \tau(v_p, \mathcal{H}_2)$ . Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι  $\det L_0(\mathcal{G}) = \tau(v_p, \mathcal{G})$ .  $\square$

### 5.3.4 Το Θεώρημα Πίνακα–Δάσους

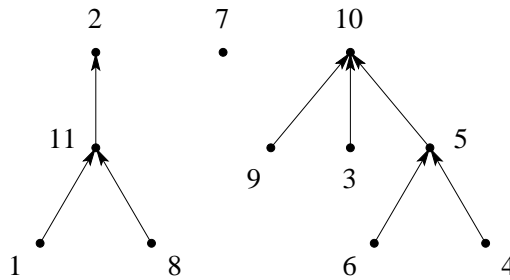
Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μια γενίκευση του Θεωρήματος 5.3.1. Θεωρούμε τυχαίο (πεπερασμένο) κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  σε ένα σύνολο κορυφών  $N$ .

**Ορισμός 5.3.3** Έστω πεπερασμένο σύνολο  $M$  και μη κενό υποσύνολό του  $S$ . Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{F}$  στο σύνολο κορυφών  $M$  λέγεται προσανατολισμένο δάσος με σύνολο ριζών  $S$ , αν για κάθε  $u \in M$  υπάρχει μοναδικός περίπατος στο  $\mathcal{F}$  με αρχή  $u$ , το πέρας του οποίου ανήκει στο  $S$ .

Αν επιπλέον το  $\mathcal{F}$  είναι παράγον υπογράφημα του  $\mathcal{G}$  (οπότε  $M = N$ ), τότε το  $\mathcal{F}$  λέγεται παράγον προσανατολισμένο δάσος του  $\mathcal{G}$  με σύνολο ριζών  $S$ .

Ισοδύναμα, το  $\mathcal{F}$  είναι προσανατολισμένο δάσος στο σύνολο κορυφών  $M$  με σύνολο ριζών  $S$  αν υπάρχει διαμέριση  $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$  του  $M$ , όπου  $k$  είναι το πλήθος των στοιχείων του  $S$  και, για κάθε  $1 \leq i \leq k$ , προσανατολισμένο δένδρο  $\mathcal{T}_i$  στο σύνολο κορυφών  $M_i$  με ρίζα στοιχείο του  $S$ , έτσι ώστε το  $\mathcal{F}$  να είναι η ένωση των  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_k$ . Στο Σχήμα 5.7 απεικονίζεται ένα προσανατολισμένο δάσος στο σύνολο κορυφών  $[11]$  με σύνολο ριζών  $\{2, 7, 10\}$ .

Θα συμβολίζουμε με  $\tau(S, \mathcal{G})$  το πλήθος των παραγόντων προσανατολισμένων δασών του  $\mathcal{G}$  με σύνολο ριζών  $S$ . Για παράδειγμα, για το γράφημα  $\mathcal{G}$  του Σχήματος 5.1 και  $S = \{c, d\}$  έχουμε  $\tau(S, \mathcal{G}) = 4$ , όπου τα αντίστοιχα δάση έχουν σύνολα



Σχήμα 5.7: Ένα ένα προσανατολισμένο δάσος με ρίζες 2, 7 και 10.

ακμών  $\{e_i, e_j\}$  με  $i \in \{1, 2\}$  και  $j \in \{6, 7\}$ . Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα του  $2 \times 2$  πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα Laplace (5.16) του  $\mathcal{G}$  διαγράφοντας τις δύο τελευταίες γραμμές και τις δύο τελευταίες στήλες, είναι επίσης ίση με 4. Το γεγονός αυτό εξηγείται από το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο ταυτίζεται με το Θεώρημα 5.3.1 στην ειδική περίπτωση στην οποία το  $S$  έχει ένα μόνο στοιχείο.

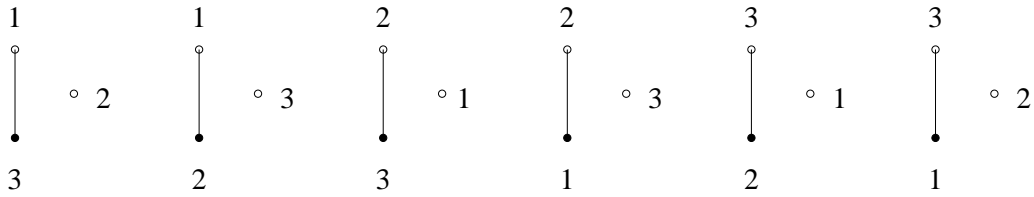
**Θεώρημα 5.3.2** Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  με κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_p$  και μη κενό σύνολο  $S \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ . Αν  $L_S(\mathcal{G})$  είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον  $L(\mathcal{G})$  διαγράφοντας την  $i$  γραμμή και την  $i$  στήλη για κάθε δείκτη  $i$  με  $v_i \in S$ , τότε  $\det L_S(\mathcal{G}) = \tau(S, \mathcal{G})$ .

Απόδειξη. Μιμούμαστε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1, εφαρμόζοντας επαγωγή στο πλήθος  $m$  των ακμών του  $\mathcal{G}$ , διακρίνοντας τις περιπτώσεις  $m \leq p-k$  και  $m > p-k$  και χρησιμοποιώντας το μέρος (β) της Άσκησης 3 αντί του (α). Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.  $\square$

Έστω (πεπερασμένο) μη κατευθυνόμενο γράφημα  $F$  σε ένα σύνολο κορυφών  $M$  και μη κενό σύνολο  $S \subseteq M$  με  $k$  στοιχεία. Το ζεύγος  $(F, S)$  λέγεται δάσος με σύνολο ριζών  $S$  αν για κάθε  $u \in M$  υπάρχει μοναδικός περίπατος στο  $F$  με αρχή  $u$ , το πέρας του οποίου ανήκει στο  $S$ . Ισοδύναμα, υπάρχει διαμέριση  $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$  του  $M$  και, για  $1 \leq i \leq k$ , δένδρο  $T_i$  στο σύνολο κορυφών  $M_i$  με μια διακεκριμένη κορυφή (ρίζα) που ανήκει στο  $S$ , έτσι ώστε το  $F$  να είναι η ένωση των  $T_1, T_2, \dots, T_k$ . Αν το  $F$  είναι παράγον υπογράφημα ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$ , τότε το  $(F, S)$  λέγεται παράγον δάσος του  $G$  με σύνολο ριζών  $S$ . Οι ρίζες των δασών που απεικονίζονται στο Σχήμα 5.8 παριστάνονται με άσπρες κουκίδες.

Το ακόλουθο θεώρημα (γνωστό ως Θεώρημα Πίνακα-Δάσους) αποτελεί το ανάλογο του Θεωρήματος 5.3.2 για μη κατευθυνόμενα γραφήματα και γενικεύει το Πρόβλημα 5.3.1.

**Πόρισμα 5.3.2** (Θεώρημα Πίνακα-Δάσους) Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  με κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_p$  και μη κενό σύνολο  $S \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ . Αν  $L_S(G)$  είναι



Σχήμα 5.8: Τα δάση στο σύνολο κορυφών  $\{1, 2, 3\}$  με δύο ρίζες.

ο πίνακας που προκύπτει από τον  $L(G)$  διαγράφοντας την  $i$  γραμμή και την  $i$  στήλη για κάθε δείκτη  $i$  με  $v_i \in S$ , τότε το πλήθος των παραγόντων δασών του  $G$  με σύνολο ριζών  $S$  είναι ίσο με  $\det L_S(G)$ .

Απόδειξη. Προκύπτει από το Θεώρημα 5.3.2 ακριβώς όπως προέκυψε το Πρόρισμα 5.3.1 από το Θεώρημα 5.3.1.  $\square$

**Παράδειγμα 5.3.3** Έστω  $f_k(p)$  το πλήθος των δασών στο σύνολο κορυφών  $[p]$  με  $k$  ρίζες, όπου το σύνολο των ακμών ενός τέτοιου δάσους  $(F, S)$ , με  $F = ([p], E, \varphi)$ , ταυτίζεται με το  $\varphi(E) \subseteq \binom{[p]}{2}$ . Για παράδειγμα έχουμε  $f_2(3) = 6$ , όπου τα αντίστοιχα δάση απεικονίζονται στο Σχήμα 5.8. Χρησιμοποιώντας το Πρόρισμα 5.3.2, θα δείξουμε ότι ισχύει

$$f_k(p) = k \binom{p}{k} p^{p-k-1} = \binom{p-1}{k-1} p^{p-k} \quad (5.18)$$

για  $1 \leq k \leq p$ . Παρατηρούμε ότι το  $f_k(p)$  είναι ίσο με το πλήθος των παραγόντων δασών του γραφήματος  $G$  του Παραδείγματος 5.3.1 με  $k$  ρίζες. Υπάρχουν  $\binom{p}{k}$  επιλογές για το σύνολο  $S$  των ριζών ενός τέτοιου δάσους και  $\det L_S(G)$  επιλογές για το δάσος, για συγκεκριμένο σύνολο  $S$ . Από τα παραπάνω και την (5.17) συμπεραίνουμε ότι

$$f_k(p) = \binom{p}{k} \det L_S(G) = \binom{p}{k} \det \begin{pmatrix} p-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & p-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & p-1 \end{pmatrix},$$

όπου η ορίζουσα που εμφανίζεται στην προηγούμενη σχέση έχει διάσταση  $p - k$ . Υπολογίζοντας την ορίζουσα αυτή όπως το πράξαμε στο Παράδειγμα 5.3.1 για την περίπτωση  $k = 1$ , προκύπτει ο τύπος (5.18) για το  $f_k(p)$ .  $\square$

## 5.4 Ασκήσεις

1. Έστω πεπερασμένο κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{G}$  στο σύνολο κορυφών  $N$  και  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \in \mathbb{C}$ , όπου  $p = \#N$ . Αν για το πλήθος  $\omega(\mathcal{G}, n)$  των κλειστών

περιπάτων μήκους  $n$  στο  $\mathcal{G}$  ισχύει

$$\omega(\mathcal{G}, n) = \mu_1^n + \mu_2^n + \cdots + \mu_p^n$$

για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ , δείξτε ότι  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  είναι οι ιδιοτιμές του ενδομορφισμού  $U_{\mathcal{G}} : \mathbb{C}N \rightarrow \mathbb{C}N$ .

2. Δείξτε ότι για τους ενδομορφισμούς  $U, D : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  της Παραγράφου 5.2.1 και τυχαίους μη αρνητικούς ακεραίους  $m, n$  ισχύει

$$D^n U^{m+n} = U^m (UD + (m+1)I) (UD + (m+2)I) \cdots (UD + (m+n)I),$$

όπου  $I : \mathbb{C}\Lambda \rightarrow \mathbb{C}\Lambda$  είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

3. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται *άκυκλο* αν κάθε κλειστός περίπατος στο γράφημα αυτό είναι τετριμμένος (δηλαδή, έχει μήκος μηδέν).

(α) Έστω  $\mathcal{T}$  κατευθυνόμενο γράφημα στο σύνολο κορυφών  $M$  και  $v \in M$ . Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το  $\mathcal{T}$  είναι προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα  $v$ .
- (ii) Το  $\mathcal{T}$  είναι άκυκλο και ισχύει

$$\deg_{\mathcal{T}}(u) = \begin{cases} 0, & \text{αν } u = v \\ 1, & \text{αν } u \in M \setminus \{v\}. \end{cases} \quad (5.19)$$

- (iii) Το μη κατευθυνόμενο γράφημα που αντιστοιχεί στο  $\mathcal{T}$  είναι συνεκτικό και ισχύει η (5.19).

Ειδικότερα, το πλήθος των ακμών οποιουδήποτε προσανατολισμένου δένδρου με  $p$  κορυφές είναι ίσο με  $p - 1$ .

(β) Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $\mathcal{F}$  στο σύνολο κορυφών  $M$  και μη κενό σύνολο  $S \subseteq M$  με  $k$  στοιχεία. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το  $\mathcal{F}$  είναι προσανατολισμένο δάσος με σύνολο ριζών  $S$ .
- (ii) Το  $\mathcal{F}$  είναι άκυκλο και ισχύει

$$\deg_{\mathcal{F}}(u) = \begin{cases} 0, & \text{αν } u \in S \\ 1, & \text{αν } u \in M \setminus S. \end{cases} \quad (5.20)$$

- (iii) Το μη κατευθυνόμενο γράφημα που αντιστοιχεί στο  $\mathcal{F}$  έχει ακριβώς  $k$  συνεκτικές συνιστώσες και ισχύει η (5.20).

Ειδικότερα, το πλήθος των ακμών οποιουδήποτε προσανατολισμένου δάσους με  $p$  κορυφές και  $k$  ρίζες είναι ίσο με  $p - k$ .



4. (α) Έστω  $A$  ένας  $p \times p$  πίνακας, το άθροισμα των γραμμών και το άθροισμα των στηλών του οποίου είναι ίσα με το μηδενικό διάνυσμα. Αν  $A_{ij}$  είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον  $A$  διαγράφοντας την  $i$  γραμμή και τη  $j$  στήλη αυτού, δείξτε ότι ο συντελεστής του  $x$  στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\det(A - xI_p)$  του  $A$  είναι ίσος με  $(-1)^{i+j-1} p \det(A_{ij})$ .
- (β) Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  με  $p$  κορυφές και έστω  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  οι ιδιοτιμές του  $L(G)$ , όπου  $\mu_p = 0$ . Δείξτε ότι το πλήθος των παραγόντων δένδρων του  $G$  είναι ίσο με  $\frac{1}{p} \mu_1 \cdots \mu_{p-1}$ .
5. Δείξτε ότι το πλήθος των  $p \times p$  πινάκων με στοιχεία 0 ή 1, όλες οι ιδιοτιμές των οποίων είναι ίσες με 1, είναι ίσο με το πλήθος των απλών, άκυκλων κατευθυνόμενων γραφημάτων στο σύνολο κορυφών  $[p]$ .

## Υποδείξεις - Λύσεις

- 1.
2. Εφαρμόστε επαγωγή στο  $m$  και μιμηθείτε την απόδειξη του Λήμματος 5.2.2.
- 3.
- 4.
- 5.

# Βιβλιογραφία

- [1] Χρήστος Α. Αθανασιάδης, *Διακριτά Μαθηματικά: Σημειώσεις*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007, διαθέσιμες στο <http://www.math.uoa.gr/~caath>.
- [2] Desiré André, *Developements de sex  $x$  et de tang  $x$* , C.R. Acad. Sci. Paris **88** (1879), 965–967.
- [3] George Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley, 1976; δεύτερη εκτύπωση, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1984.
- [4] Aryeh Dvoretzky and Theodore S. Motzkin, *A problem of arrangements*, Duke Math. J. **14** (1947), 305–313.
- [5] James S. Frame, Gilbert de B. Robinson and Robert M. Thrall, *The hook graphs of the symmetric group*, Canad. J. Math. **6** (1954), 316–325.
- [6] William Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [7] Adriano M. Garsia and Stephen C. Milne, *Method for constructing bijections for classical partition identities*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **78** (1981), 226–228.
- [8] Nati Linial, *A new derivation of the counting formula for Young tableaux*, J. Combin. Theory Series A **33** (1982), 340–342.
- [9] Percy A. MacMahon, *Combinatorial Analysis* (δύο τόμοι), Cambridge University Press, 1915 και 1916.
- [10] Bruce E. Sagan, *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Graduate Texts in Mathematics **203**, Springer-Verlag, New York, 2001.

- [11] Marcel-Paul Schützenberger, *Quelques remarques sur une construction de Schensted*, Math. Scand. **12** (1963), 117–128.
- [12] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 1, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1986; δεύτερη εκτύπωση, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [13] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [14] Xavier Viennot, *Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted*, in *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique* (D. Foata, ed.), Lecture Notes in Mathematics **579**, Springer-Verlag, New York, 1977, pp. 29–58.