Αριθμοί Fibonacci

A_n = Το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$ που δεν περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς

$A_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$ $\quad |A_1| = 2$

$A_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ $\quad |A_2| = 3$

$A_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ $\quad |A_3| = 5$

$A_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$ $\quad |A_4| = 8$

Οι αριθμοί Fibonacci ορίζονται ως εξής:

$f_0 = f_1 = 1$ και $f_{n+1} = |A_n|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

Βασική αναδρομική σχέση

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geq 1$$

Απόδειξη • Τα υποσύνολα του A_n διαμερίζονται σ' αυτά που περιέχουν το n και σ' αυτά που δεν το περιέχουν

- Αυτά που δεν περιέχουν το n ανήκουν στο A_{n-1}
- Αυτά που περιέχουν το n δεν περιέχουν το $n-1$, άρα αν αφαιρέσουμε το n από αυτά, θα προκύψουν τα στοιχεία του A_{n-2}

Αναγωγική εξίσωση

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ για } n \geq 1.$$

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathcal{A}_n$ διαμερίζεται σε δύο υποσύνολα, σε αυτό που τα σύνολά του **δεν περιέχουν το** n και σε αυτό που τα σύνολά του **περιέχουν το** n

Παράδειγμα για $n = 4$

$\mathcal{A}_4 = \underbrace{\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}}_{A_3} \bigcup \underbrace{\{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}}_{\equiv A_2}$

Δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1} \cup \mathcal{B}_n$$

όπου $\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{A}_n : n \in A\}$.

Κάθε $A \in \mathcal{B}_n$ δεν περιέχει το $n-1$ όποτε ισχύει $A \in \mathcal{B}_n \Leftrightarrow A \setminus \{n\} \in \mathcal{A}_{n-2}$.

Άρα $|B_n| = |\mathcal{A}_{n-2}|$ και επομένως

$$\begin{aligned} f_{n+1} = |\mathcal{A}_n| &= |\mathcal{A}_{n-1}| + |\mathcal{B}_n| \\ &= |\mathcal{A}_{n-1}| + |\mathcal{A}_{n-2}| \\ &= f_n + f_{n-1}. \end{aligned}$$

Άλλοι τύποι και ταυτότητες

① $$f_{n+1} = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n-m+1}{m}$$

λογος χρυσής τομής

② $$\varphi^{n-1} \le f_n \le \varphi^{n}, \quad \text{όπου} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.6183$$

③ $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Υπάρχουν πάρα πολλοί τύποι και ταυτότητες.

Περιοδικό: Fibonacci Quarterly (1963 – σήμερα)

Μερικές τιμές (A000045 στην OEIS)

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

```
In[23]:= Fibonacci[3]

Out[23]= 2

In[25]:= U[n_] := ((1 + Sqrt[5]) / 2) ^ (n - 1)
         L[n_] := ((1 + Sqrt[5]) / 2) ^n

In[24]:= MatrixForm[N[Table[{U[n], Fibonacci[n + 1], L[n]}, {n, 20}]]]

Out[24]//MatrixForm=
```

1.	1.	1.61803
1.61803	2.	2.61803
2.61803	3.	4.23607
4.23607	5.	6.8541
6.8541	8.	11.0902
11.0902	13.	17.9443
17.9443	21.	29.0344
29.0344	34.	46.9787
46.9787	55.	76.0132
76.0132	89.	122.992
122.992	144.	199.005
199.005	233.	321.997
321.997	377.	521.002
521.002	610.	842.999
842.999	987.	1364.
1364.	1597.	2207.
2207.	2584.	3571.
3571.	4181.	5778.
5778.	6765.	9349.
9349.	10 946.	15 127.

$$\varphi^{n-1} \le f_n \le \varphi^{n}$$

Άσκηση

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n που δεν περιέχουν δυο διαδοχικά 1 ισούται με τον (n+1)-οστό αριθμό Fibonacci.

Λύση Έστω A_n το σύνολο αυτών των λέξεων

$A_1 = \{0, 1\}$ $\quad |A_1| = 2 = f_2$

$A_2 = \{00, 01, 10\}$ $\quad |A_2| = 3 = f_3$

$A_3 = \{000, 001, 010, 100, 101\}$ $\quad |A_3| = 5 = f_4$

$A_4 = \{0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010\}$ $\quad |A_4| = 8 = f_5$

1ος τρόπος λύσης

Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $|A_n|$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\overset{f_{n+1}}{|A_n|} = \overset{f_n}{|A_{n-1}|} + \overset{f_{n-1}}{|A_{n-2}|} \quad \text{για} \quad n \geq 2$$

(Ήδη ελέγξαμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι σωστές δηλαδή $|A_1| = f_2 = 2$ και $|A_2| = f_3 = 3$)

Το σύνολο A_n διαμερίζεται σε δυο υποσύνολα: Σ' αυτό που περιέχει τις λέξεις που τελειώνουν με 1 και σ' αυτό που περιέχει τις λέξεις που τελειώνουν με 0

έστω E_n

έστω M_n

Δηλαδή

$$A_n = E_n \cup M_n \quad \text{και} \quad |A_n| = |E_n| + |M_n|$$

Αν σε κάθε λέξη του M_n (τελειώνει σε 0) σβήσουμε το τελευταίο 0 προκύπτει μια λέξη μήκους $n-1$ η οποία δεν περιέχει δυο διαδοχικά 1 (και αντιστρόφως)

Άρα

$$|M_n| = |A_{n-1}|$$

Κάθε λέξη του E_n (τελειώνει σε 1) υποχρεωτικά τελειώνει σε 01. Αν σβήσουμε την κατάληξη 01 στις λέξεις του E_n προκύπτουν λέξεις μήκους $n-2$ οι οποίες δεν περιέχουν δυο διαδοχικά 1 (και αντιστρόφως)

Άρα

$$|E_n| = |A_{n-2}|$$

οπότε (για $n \geq 2$)

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|$$

2ος τρόπος λύσης

Αρκεί να βρούμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των δυαδικών λέξεων μήκους n που δεν περιέχουν διαδοχικούς 1 και των υποσυνόλων του $[n]$ που δεν περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς. (για τα οποία γνωρίζουμε ότι μετρώνται από το f_{n+1})

Θεωρούμε την παρακάτω απλή απεικόνιση:
Σε κάθε υποσύνολο A του $[n]$ αντιστοιχίζουμε την δυαδική λέξη $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ όπου

$$\omega_i=\begin{cases}1 & \text{αν } i\in A\\ 0 & \text{αν } i\notin A\end{cases}$$

Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη

<u>Παράδειγμα</u> $\{1,3,7\}\subseteq[8]$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 & \omega_8\end{array}$$

Στην δυαδική λέξη μήκους 8 $\begin{array}{cccccccc}0&1&0&1&0&0&1&1\\ {\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 3}&{\scriptstyle 4}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 8}\end{array}$

αντιστοιχεί το υποσύνολο $\{2,4,7,8\}$ του $[8]$

Η απεικονιση αυτη ειναι αμφιμονοσήμαντη μεταξυ των συνολων ολων των υποσυνόλων του [n] και ολων των δυαδικών λεξεων μήκους n (Τα σύνολα αυτα περιεχουν 2^n στοιχεια)

Αν θεωρησουμε τον περιορισμο της απεικόνισης στα υποσυνολα του [n] χωρις διαδοχικους αριθμούς προκυπτουν δυαδικες λεξεις χωρις διαδοχικους 1, (και αντιστροφως)

Άρα, τα δυο σύνολα ειναι ισοπληθικα, δηλαδη

$$|A_n| = f_{n+1}$$

Οι αριθμοί Fibonacci αντιστοιχούν στην χειρότερη (από πλευράς μεγέθους και πλήθους διαιρέσεων) περίπτωση εκτέλεσης του αλγορίθμου του Ευκλείδη

$gcd(f_{12}, f_{11}) = ;$ $\quad f_{12} = 233, \quad f_{11} = 144$

1 $233 = 144 + 89$

2 $144 = 89 + 55$

3 $89 = 55 + 34$

4 $55 = 34 + 21$

5 $34 = 21 + 13$

6 $21 = 13 + 8$

7 $13 = 8 + 5$

8 $8 = 5 + 3$

9 $5 = 3 + 2$

10 $3 = 2 + 1$

Παρόλα, αυτά δεν χρειάζεται να κάνουμε τις διαιρέσεις διότι αποδεικνύεται ότι

$$gcd(f_m, f_n) = f_{gcd(m,n)}$$

Διακριτά Μαθηματικά -9- Δευτέρα 6.4.2020

Με αυτή την περιγραφή, ο υπολογισμός του μκδ των 2520 και 154 προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}2520 &= 16 \cdot 154 + 56,\\ 154 &= 2 \cdot 56 + 42,\\ 56 &= 1 \cdot 42 + 14,\\ 42 &= 3 \cdot 14 + 0.\end{aligned}$$

Άρα, $\gcd(2520, 154) = 14$.

Τέλος, ο υπολογισμός του $\gcd(a, b)$ για τους φυσικούς αριθμούς a, b, με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις

$$\begin{aligned}\gcd(a, 0) &= a,\\ \gcd(a, b) &= gcd(b, \upsilon), \text{ όπου } \upsilon \text{ το υπόλοιπο της διαίρεσης του } a \text{ με το } b.\end{aligned}$$

Προφανώς αν $b > a$, δηλαδή αν το πρώτο όρισμα είναι μικρότερο από το δεύτερο, τότε $a = 0 \cdot b + a$, οπότε $\gcd(a, b) = \gcd(b, a)$, δηλαδή ο αλγόριθμος εκτελείται σωστά για το ζεύγος b, a με κόστος μια επιπλέον αναδρομική κλήση.

Ποιά είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου του Ευκλείδη;

Το κόστος εκτέλεσης του αλγορίθμου του Ευκλείδη είναι ανάλογο του αριθμού των διαιρέσεων που απαιτούνται για την εύρεση των υπολοίπων κάθε ενδιαμέσου ζεύγους. Ένα φράγμα για το κόστος του αλγορίθμου του Ευκλείδη δίδεται στην Πρόταση 5.8. Για την απόδειξή της, θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.7. *Έστω $a, b \in \mathbb{N}^*$ με $a > b$ και $a = \pi b + \upsilon$, όπου $0 \leq \upsilon < b$. Τότε $\upsilon < a/2$.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $b \leq a/2$, τότε $\upsilon < b \leq a/2$.

Αν $a > b > a/2$, τότε $a = 1 \cdot b + (a - b)$, οπότε $\upsilon = a - b < a - a/2 = a/2$. □

Πρόταση 5.8 (Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου του Ευκλείδη). *Έστω $a, b \in \mathbb{N}^*$ με $a > b$. Ο αριθμός των διαιρέσεων $c(a, b)$ που απαιτούνται για τον υπολογισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη των a, b είναι μικρότερος από $2\log_2 a$.*

Απόδειξη. Επειδή $a > b$, έπεται ότι $a \geq 2$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς a.

Για $a = 2$ έπεται ότι $b = 1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $2 = 2 \cdot 1 + 0$ άρα $c(2, 1) = 1$ και $2\log_2 2 = 2$, οπότε ο ισχυρισμός ισχύει.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $a < n$, δηλαδή αν $b < a < n$ τότε $c(a, b) < 2\log_2 a$.

Θα αποδειχθεί ότι ο ισχυρισμός ισχύει και για $a = n$.

Πράγματι, στην περίπτωση όπου $b \mid a$ έχουμε $c(a, b) = 1$, οπότε ο ισχυρισμός ισχύει.

Αν $b \nmid a$, τότε μετά τα δύο πρώτα βήματα του αλγορίθμου του Ευκλείδη

$$a = \pi_1 b + \upsilon_1, \text{ όπου } 0 \leq \upsilon_1 < b,$$

$$b = \pi_2 \upsilon_1 + \upsilon_2, \text{ όπου } 0 \leq \upsilon_2 < \upsilon_1,$$

(που απαιτούν δύο διαιρέσεις), το πρόβλημα υπολογισμού του $\gcd(a, b)$ ανάγεται στο πρόβλημα υπολογισμού του $\gcd(\upsilon_1, \upsilon_2)$.

Διακριτά Μαθηματικά — 9η — Δευτέρα 6.4.2020

Άρα,

$$c(a,b) = c(\upsilon_1, \upsilon_2) + 2.$$

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι $\upsilon_2 < \upsilon_1 < a/2 < a = n$, και επομένως από την υπόθεση της επαγωγής ισχύει ότι

$$c(\upsilon_1, \upsilon_2) < 2\log_2 \upsilon_1 < 2\log_2 a/2.$$

Άρα,

$$c(a,b) < 2\log_2 a/2 + 2 = 2\log_2 a - 2\log_2 2 + 2 = \log_2 a.$$

Δηλαδή, ο ισχυρισμός ισχύει. □

Πόρισμα 5.9. *Για κάθε $a, b \in \mathbb{N}^*$ με $a > b$, η πεπερασμένη ακολουθία (υ_i) με $\upsilon_{-1} = a$, $\upsilon_0 = b$ και*

$$\upsilon_i = \upsilon_{i-2} - \lfloor \frac{\upsilon_{i-2}}{\upsilon_{i-1}} \rfloor \cdot \upsilon_{i-1}, \text{ όπου } \upsilon_{i-1} \neq 0 \text{ και } i \geq 1,$$

έχει μέγιστο δείκτη μικρότερο από $2\log_2 a$.

Παρατήρηση. Η προηγούμενη πρόταση αποδείχθηκε από το Γάλλο μαθηματικό Gabriel Lamé. Μάλιστα, ο Lamé βρήκε ένα καλύτερο φράγμα για τον αριθμό των διαιρέσεων, συγκεκριμένα απέδειξε ότι $c(a,b) < 5\log_{10} a \simeq 1.50515\log_2 a$. **Η πρόταση αυτή θεωρείται το πρώτο αποτέλεσμα σχετικά με τον υπολογισμό της πολυπλοκότητας ενός αλγορίθμου.**

5.1.6 Ο επεκτεταμένος αλγόριθμος του Ευκλείδη

Μια σημαντική εφαρμογή του αλγόριθμου του Ευκλείδη, εκτός της εύρεσης του μκδ των αριθμών a, b, είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση δύο ακεραίων s και t για τους οποίους $\gcd(a,b) = as + bt$.

Για παράδειγμα, από τις σχέσεις

$$2520 = 16 \cdot 154 + 56,$$
$$154 = 2 \cdot 56 + 42,$$
$$56 = 1 \cdot 42 + 14,$$

προκύπτει ότι $\gcd(2520, 154) = 14$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} 14 &= 1 \cdot 56 + (-1) \cdot 42 \\ &= 1 \cdot 56 + (-1) \cdot (1 \cdot 154 + (-2) \cdot 56) = 3 \cdot 56 + (-1) \cdot 154 \\ &= 3 \cdot (1 \cdot 2520 + (-16) \cdot 154) + (-1) \cdot 154 \\ &= 3 \cdot 2520 + (-49) \cdot 154, \end{aligned}$$

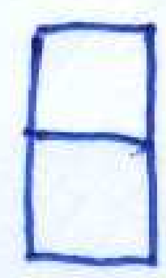
δηλαδή $\gcd(2520, 154) = 3 \cdot 2520 + (-49) \cdot 154$.

Αντίστοιχα, από τις σχέσεις

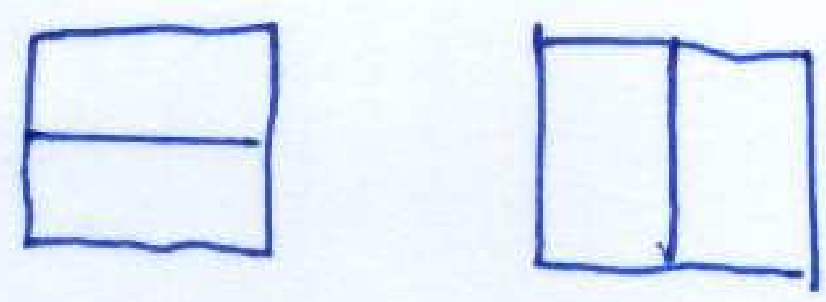
$$168 = 6 \cdot 25 + 18,$$
$$25 = 1 \cdot 18 + 7,$$
$$18 = 2 \cdot 7 + 4,$$
$$7 = 1 \cdot 4 + 3,$$
$$4 = 1 \cdot 3 + 1,$$
$$3 = 3 \cdot 1 + 0,$$

Απαρίθμηση τρόπων πλακοστρώσεων 2xn σκακιέρας με n ντόμινο (2x1 ορθογώνια)

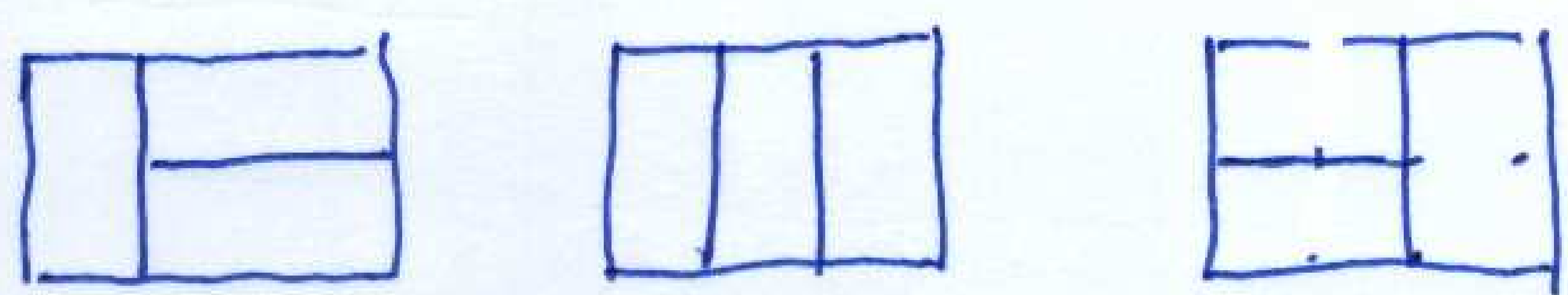
2x1



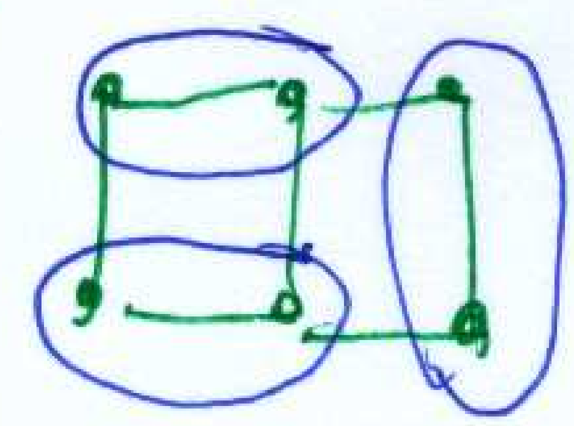
2x2



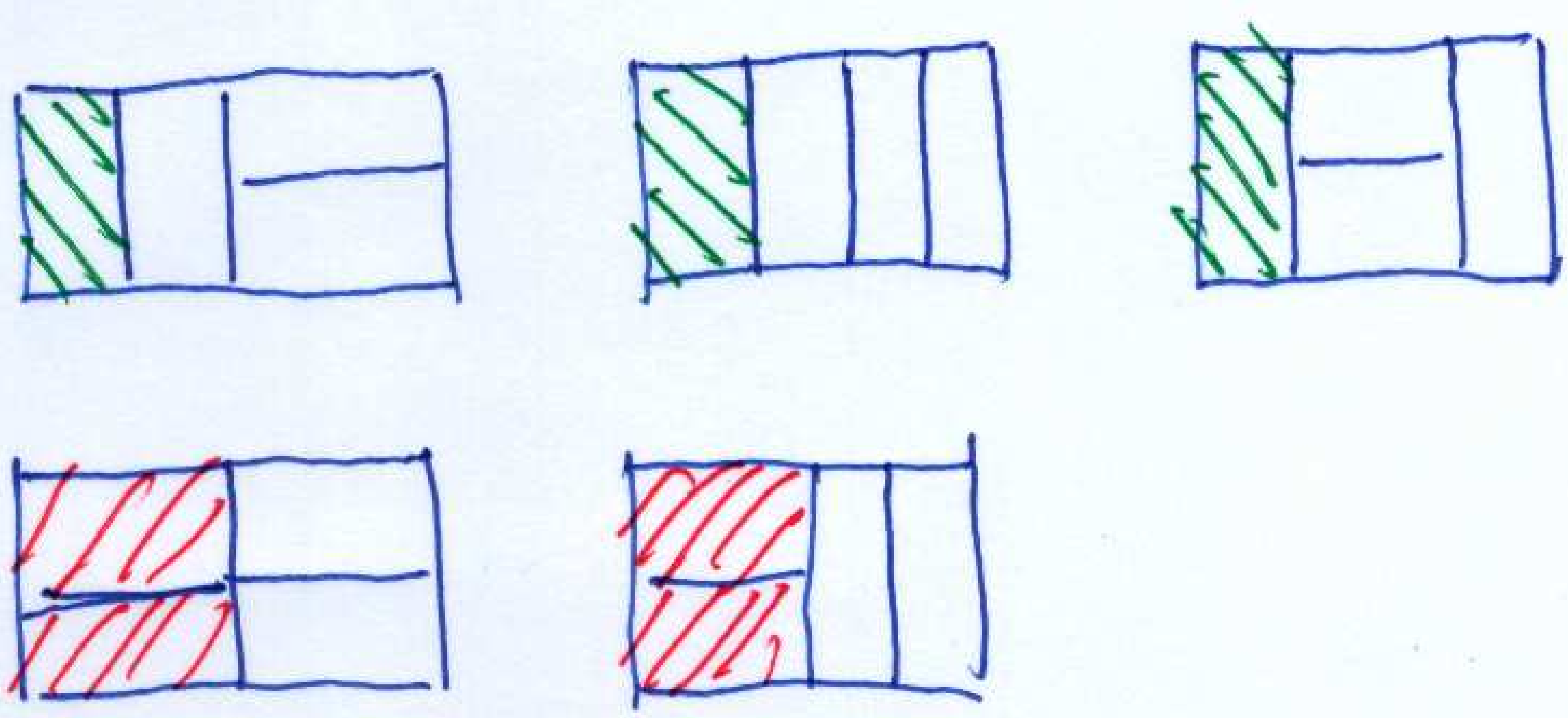
2x3



Τέλειο Ταίριασμα

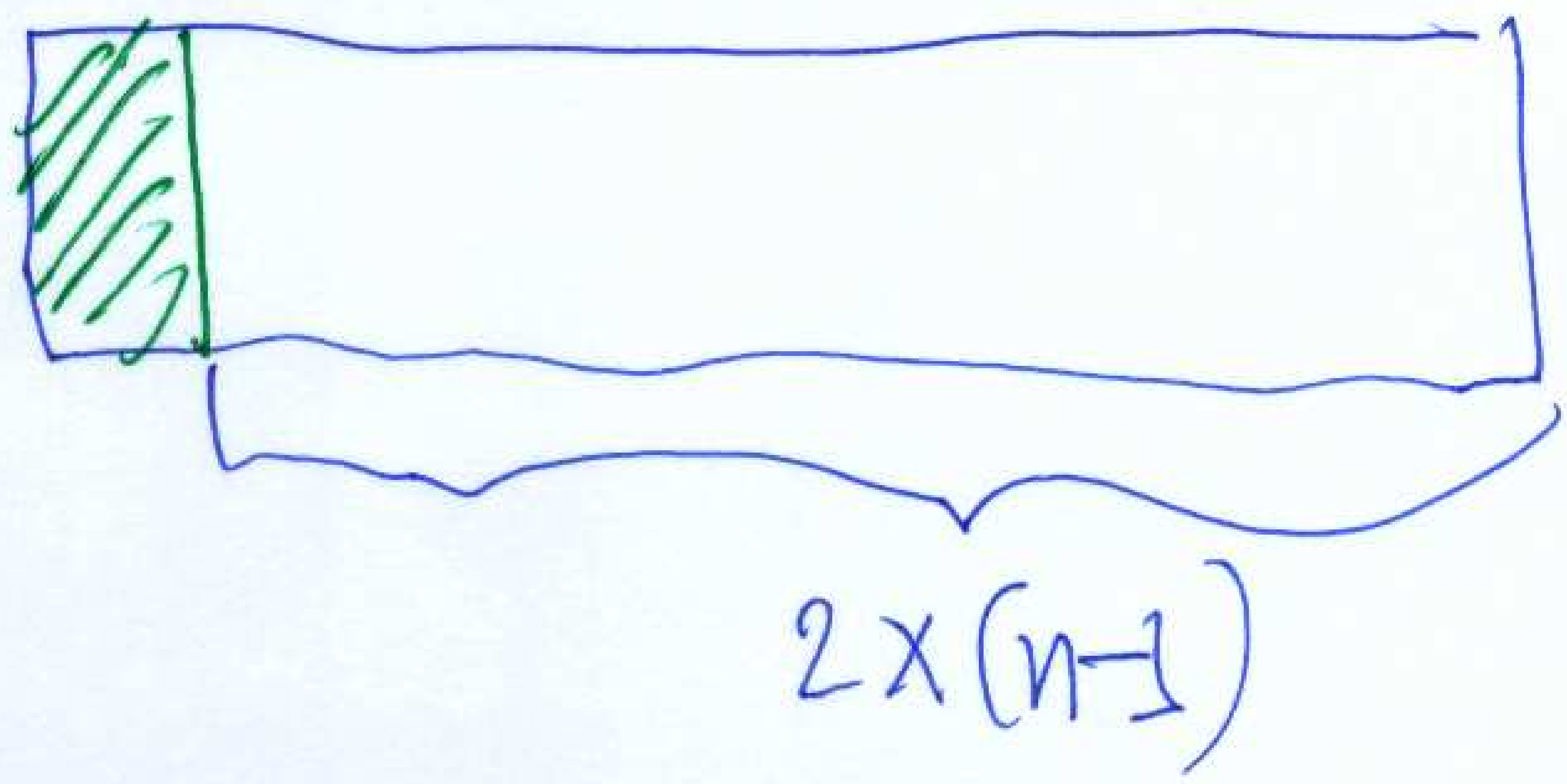


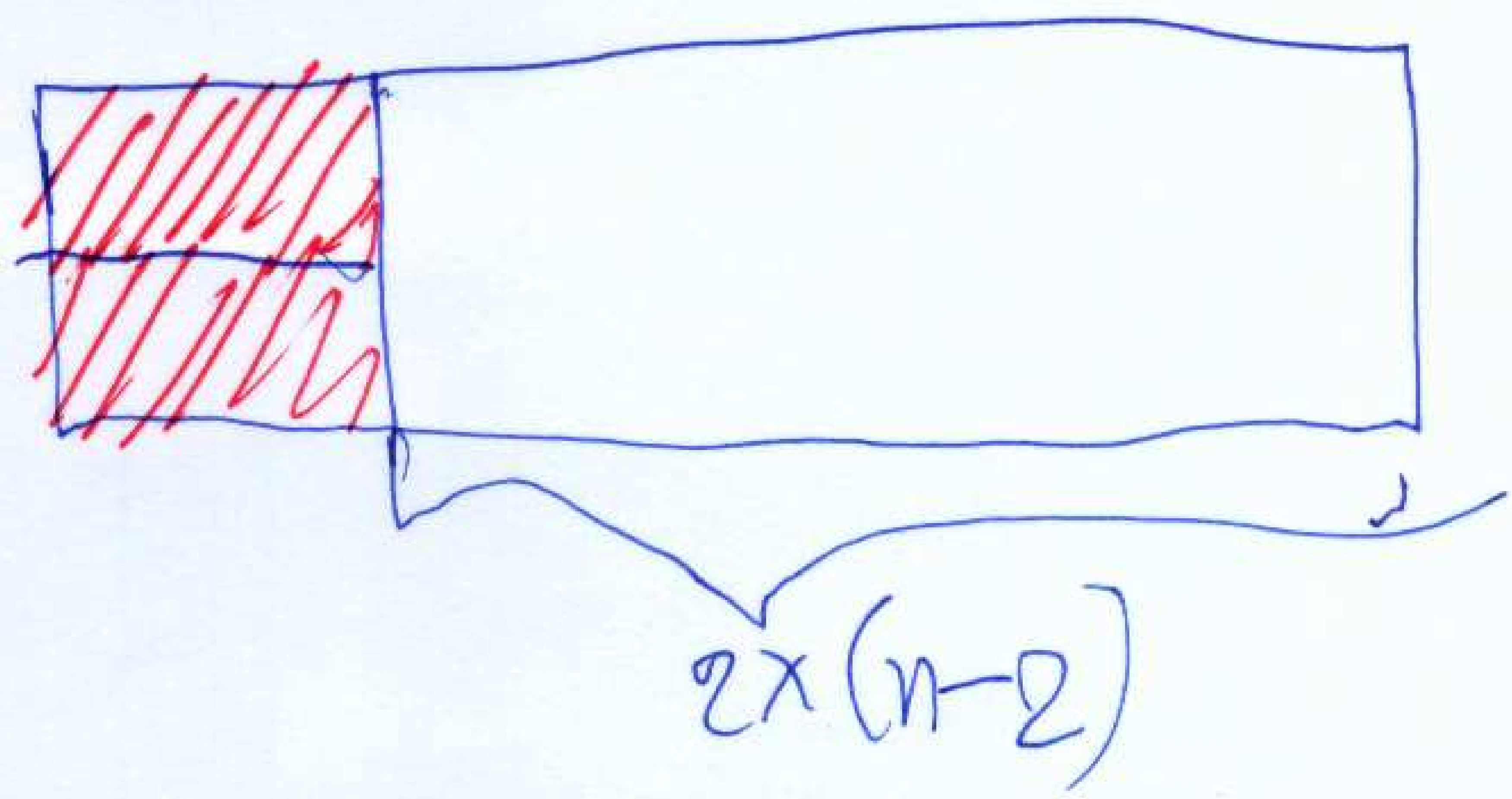
2x4



Να δειχθεί ότι για για 2xn σκακιέρα υπάρχουν f_n τρόποι τοποθέτησης των n ντόμινο σ' αυτή χωρίς επικαλύψεις.

$2 \times n$





Σύστημα αναπαράστασης Fibonacci

Θεώρημα Zeckendorf.
Κάθε θετικός ακέραιος n μπορεί να εκφραστεί, κατά μοναδικό τρόπο, ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci f_k, όπου $k \geq 1$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο άθροισμα και στη συνέχεια, με τη βοήθεια του προηγούμενου λήμματος, θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό.

Για την ύπαρξη θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το n.

Για $n = 1$ έχουμε ότι $1 = f_1$, και για $n = 2$ έχουμε ότι $2 = f_2$, άρα η πρόταση ισχύει για $n = 1, 2$.

Έστω ότι κάθε ακέραιος αριθμός μικρότερος του n, όπου $n \geq 3$, εκφράζεται ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci. Θα δειχθεί ότι και ο n μπορεί να εκφραστεί με τον αυτόν τον τρόπο.

Πράγματι, έστω f_k ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το n.

Αν $f_k = n$, τότε ο n εκφράζεται χρησιμοποιώντας τον αριθμό f_k.

Αν $f_k < n$, τότε $n = f_k + (n - f_k)$. Ισχύει ότι $n - f_k < f_{k-1}$, αλλιώς αν $n - f_k \geq f_{k-1}$ τότε $n \geq f_k + f_{k-1} = f_{k+1}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το f_k είναι ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το n.

Από την υπόθεση της επαγωγής ο αριθμός $n - f_k$ εκφράζεται ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci (που δεν περιέχει τον αριθμό f_{k-1}). Επομένως, ο αριθμός n εκφράζεται ως άθροισμα του f_k και του αντίστοιχου αθροίσματος για τον $n - f_k$. Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι για κάθε n το άθροισμα αυτό είναι μοναδικό.

Έστω n ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ο οποίος εκφράζεται με τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci. Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος αριθμός n. Προφανώς $n > 3$.

Έστω f_k ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το n. Επειδή $n > 3$, έπεται ότι $f_k \geq 1$.

Παρατηρούμε ότι η έκφραση του n ως άθροισμα πρέπει να περιέχει το f_k. Πράγματι, αν ο μέγιστος όρος του αθροίσματος είναι το f_{k-1} τότε από το προηγούμενο λήμμα (*) το άθροισμα θα είναι μικρότερο του f_k, άρα μικρότερο του n, το οποίο είναι άτοπο.

Αν $f_k = n$, η αναπαράσταση είναι μοναδική.

Άν $f_k < n$, τότε $n = f_k + (n - f_k)$. Όμως, επειδή $n - f_k < n$ έπεται ότι υπάρχει μοναδική αναπαράσταση του $(n - f_k)$ ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci, άρα η αναπαράσταση του n είναι και πάλι

(*) Λήμμα 1

μοναδική.

Επομένως, δεν υπάρχει αριθμός n που εκφράζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα με αυτές τις ιδιότητες, άρα η αναπαράσταση είναι μοναδική για κάθε n. □

$$\underline{\underline{53}} = \underset{f_8}{34} + 19$$

$$= \underset{f_8}{34} + \underset{f_6}{13} + 6$$

$$= \underset{f_8}{34} + \underset{f_6}{13} + \underset{f_4}{5} + \underset{f_1}{1}$$

$$= f_8 + f_6 + f_4 + f_1$$

$$17 = 13 + 4$$

$$= 13 + 3 + 1$$

$$= f_6 + f_3 + f_1$$

$$= (10101001)_{fibonacci}$$

$$53 = 1 \cdot f_8 + 0 \cdot f_7 + 1 \cdot f_6 + 0 \cdot f_5$$

$$+ 1 \cdot f_4 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_2 + 1 \cdot f_1$$

$$53 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2$$

$$+ 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$(110101)_2$$

αριθμός είναι ο $2^k - 1$.

Παραδείγματα. Κάθε αριθμός από 1 εώς 20 μπορεί να εκφραστεί μοναδικά ως άθροισμα κάποιων από τους όρους $f_6 = 13$, $f_5 = 8$, $f_4 = 5$, $f_3 = 3$, $f_2 = 2$ και $f_1 = 1$. Ακολουθούν οι εκφράσεις καθώς και οι αντίστοιχες δυαδικές λέξεις μήκους 6 για κάθε έκφραση.

$1 = f_1$	000001
$2 = f_2$	000010
$3 = f_3$	000100
$4 = 3 + 1 = f_3 + f_1$	000101
$5 = f_4$	001000
$6 = 5 + 1 = f_4 + f_1$	001001
$7 = f_4 + f_2$	001010
$8 = f_5$	010000
$9 = 8 + 1 = f_5 + f_1$	010001
$10 = 8 + 2 = f_5 + f_2$	010010
$11 = 8 + 3 = f_5 + f_3$	010100
$12 = 8 + 3 + 1 = f_5 + f_3 + f_1$	010101
$13 = f_6$	100000
$14 = 13 + 1 = f_6 + f_1$	100001
$15 = 13 + 2 = f_6 + f_2$	100010
$16 = 13 + 3 = f_6 + f_3$	100100
$17 = 13 + 3 + 1 = f_6 + f_3 + f_1$	100101
$18 = 13 + 5 = f_6 + f_4$	101000
$19 = 13 + 5 + 1 = f_6 + f_4 + f_1$	101001
$20 = 13 + 5 + 2 = f_6 + f_4 + f_2$	101010

Αριθμοί Bell

Ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου E με n στοιχεία ονομάζεται **αριθμός Bell** και συμβολίζεται με B_n.

Προφανώς ισχύει ότι

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}(n,k).$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω αναγωγικής εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε μερικούς από τους πρώτους όρους της ακολουθίας B_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

Πράγματι, υπάρχουν 15 τρόποι να διαμερίσουμε το σύνολο [4]:$=\{1,2,3,4\}$

{1},{2},{3},{4} {1,2},{3},{4} {1,3},{2},{4} {1},{2,3},{4}
{1,2,3},{4} {1},{2},{3,4} {1,2},{3,4} {1},{2,4},{3}
{1,3},{2,4} {1,4},{2},{3} {1,4},{2,3} {1},{2,3,4}
{1,3,4},{2} {1,2,4},{3} {1,2,3,4}

ή, με ισοδύναμη γραφή

1/2/3/4 12/3/4 13/2/4 1/23/4
123/4 1/2/34 12/34 1/24/3
13/24 14/2/3 14/23 1/234
134/2 124/3 1234

Επιπλέον ισχύει η αναγωγική εξίσωση

$$B_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu$$

όπου $B_0 = 1$.

Συνδυαστική απόδειξη. Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι ότι οι διαμερίσεις του $[n+1]$ διαμερίζονται ως προς το μέγεθος του υποσυνόλου το οποίο περιέχει το στοιχείο $n+1$.

Έστω $\mathcal{A}_{n+1,k}$ το σύνολο των διαμερίσεων του $[n+1]$ στις οποίες το υποσύνολο που περιέχει το στοιχείο $n+1$ έχει μέγεθος k.

Τα σύνολα $\mathcal{A}_{n+1,1}$, $\mathcal{A}_{n+1,2}$, ..., $\mathcal{A}_{n+1,n+1}$ αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου των διαμερίσεων του $[n+1]$.

Επομένως,

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} |\mathcal{A}_{n+1,k}|. \qquad (1)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι ο αριθμός των διαμερίσεων του συνόλου $\mathcal{A}_{n+1,k}$ είναι ίσος με $\binom{n}{k-1}B_{n-k+1}$. Πράγματι, για κάθε διαμέριση του $\mathcal{A}_{n+1,k}$ υπάρχουν $\binom{n}{k-1}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα $k-1$ στοιχεία του $[n]$ που βρίσκονται στο ίδιο υποσύνολο με το $n+1$ και για τα υπόλοιπα $n-k+1$ στοιχεία του $[n]$ υπάρχουν B_{n-k+1} τρόποι καθορισμού των υπολοίπων υποσύνολων της διαμέρισης. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι

$$|\mathcal{A}_{n+1,k}| = \binom{n}{k-1}B_{n-k+1}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$\boxed{B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}B_{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}$$
$$\overset{1}{=} \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{n-\nu}B_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}B_{\nu}. \qquad \square$$

[1] Θέτουμε $\nu = n-k$.