Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

- $\alpha_n y_{x+n} + \alpha_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + \alpha_1 y_{x+1} + \alpha_0 y_x = b(x)$

όπου

Συμβολισμός: $y(x) \to y_x$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ σταθερές

$b(x)$ γνωστή συνάρτηση (π.χ. πολυώνυμο ή εκθετική)

- Αποδεικνύεται ότι η λύση της εξίσωσης έχει την μορφή

$$\boxed{y_x = y_x^0 + \psi_x}$$

όπου

y_x^0 είναι η λύση όταν $b(x) = 0$ (λύση της ομογενούς)

ψ_x είναι <u>μία</u> (μερική) λύση

- Η λύση της ομογενούς αποτελείται από γραμμικούς συνδυασμούς εκθετικών συναρτήσεων των οποίων οι βάσεις υπολογίζονται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

Ασκηση 1

Να βρεθει η λύση y_x^0 της ομογενους εξισωσης στις παρακατω περιπτωσεις οπου η χαρακτηριστικη εξισωση εχει ριζες

α) $2, -3, -3, -3, 4, 4$

$$y_x^0 = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot (-3)^x + c_3 \cdot x(-3)^x + c_4 \cdot x^2 \cdot (-3)^x + c_5 \cdot 4^x + c_6 \cdot x \cdot 4^x$$

β) 4-πλη ρίζα το $\frac{1}{3}$

$$y_x^0 = c_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_2 x \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_3 x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_4 x^3 \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

γ) $2, 3, 3$ και $-5 \pm \sqrt{75}\, i$

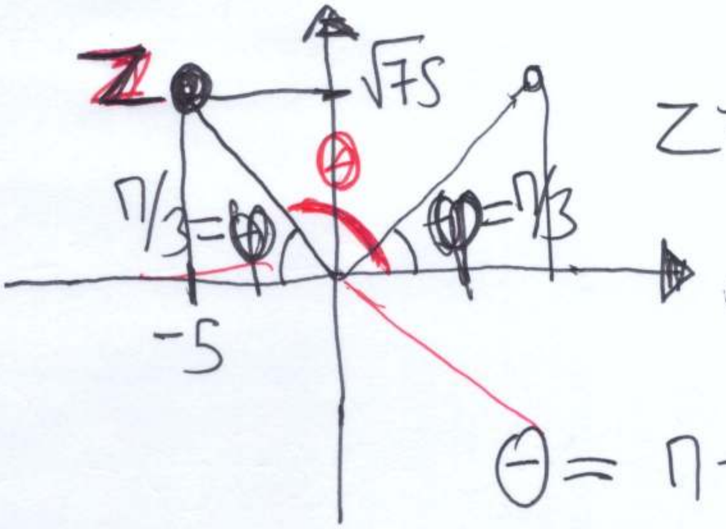
Θα εκφράσουμε σε τριγωνομετρική μορφη τον μιγαδικό αριθμο $-5+\sqrt{75}\, i$

$$z = \alpha + bi \longrightarrow z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

οπου $\rho = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha}$

$$\rho = \sqrt{(-5)^2 + (\sqrt{75})^2} = \sqrt{25+75} = \sqrt{100} = 10$$

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{75}}{-5} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{75}}{-\sqrt{25}} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$$



$z = -5 + \sqrt{75}\, i$

Δεύτερο τεταρτημόριο

$$\Theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

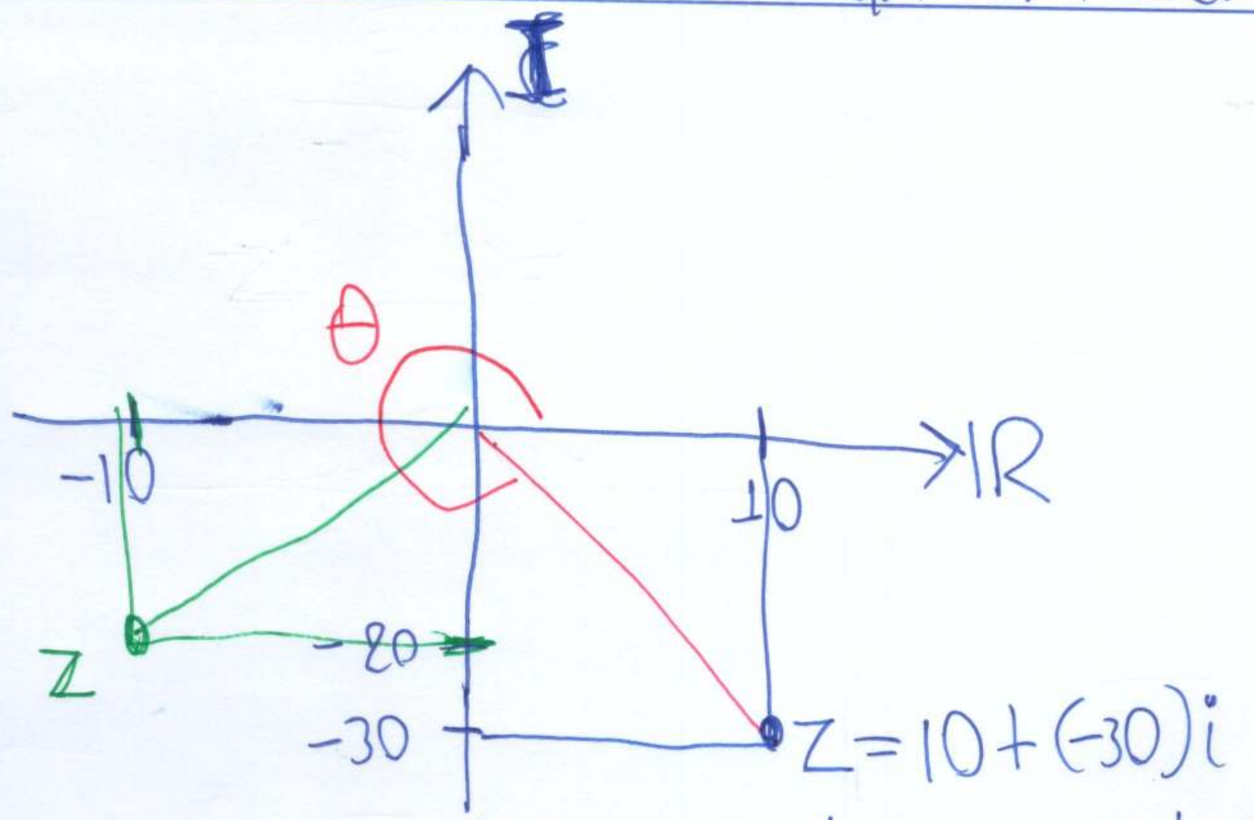
Άρα $\quad -5 + \sqrt{75}\, i = 10\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$10 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

Άρα

$$y_x^{0} = c_1 \cdot 2^x + c_2 3^x + c_3 \cdot x \cdot 3^x$$
$$c_4 \cdot 10^x \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + c_5 \cdot 10^x \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\phi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\phi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\operatorname{ctg}\phi$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$z = 10 + (-30)i \rightarrow$ 4ο τεταρτημόριο

$z = -10 + (-20)i \rightarrow$ 3ο τεταρτημόριο

Άσκηση 2

Να βρέθουν οι μερικές λύσεις των παρακάτω εξισώσεων

α) $y_{x+3} + y_x = 5 \cdot 3^x$

Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^3 + 1 = 0$

Το 3 δεν είναι ρίζα της χαρ. εξ.

Η μερική λύση θα έχει την μορφή

$$\boxed{\psi_x = \boxed{A}\, 3^x}$$

Αντικαθίσουμε στην εξίσωση και έχουμε

$$\psi_{x+3} + \psi_x = 5 \cdot 3^x$$

$$A \cdot 3^{x+3} + A \cdot 3^x = 5 \cdot 3^x$$

$$27A \cdot 3^x + A \cdot 3^x = 5 \cdot 3^x$$

$$28A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{28}$$

Άρα, η μερική λύση είναι

$$\boxed{\psi_x = \frac{5}{28} \cdot 3^x}$$

β) $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 7\cdot 2^x + 6\cdot 3^x$

όπου η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 4\lambda^1 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = 0$$

έχει διπλή ρίζα το 2

Το 2 είναι διπλή ρίζα, ενώ το 3 δεν είναι ρίζα. Άρα, η μερική λύση έχει τη μορφή

$$\boxed{\psi_x = \underline{\underline{A}}\cdot x^2\cdot 2^x + \underline{\underline{B}}\cdot 3^x}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση

$$\psi_{x+2} - 4\psi_{x+1} + 4\psi_x = 7\cdot 2^x + 6\cdot 3^x$$

$$\left(A(x+2)^2 2^{x+2} + B\cdot 3^{x+2}\right) +$$

$$-4\left(A(x+1)^2 2^{x+1} + B\cdot 3^{x+1}\right) +$$

$$4\left(A\cdot x^2 2^x + B\cdot 3^x\right) = 7\cdot 2^x + 6\cdot 3^x$$

$$\left(9B\cdot 3^x - 18B\cdot 3^x + 4B\cdot 3^x\right) +$$

$$\left(16A\cdot 2^x - 8A\cdot 2^x\right) = 7\cdot 2^x + 6\cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$\underline{B}\cdot 3^x + \underline{8A}\cdot 2^x = \underline{7}\cdot 2^x + \underline{6}\cdot 3^x$$

Άρα $B = 6$ και $8A = 7 \Leftrightarrow A = \frac{7}{8}$

οπότε

$$\boxed{\psi_x = \frac{7}{8}\cdot 2^x + 6\cdot 3^x}$$

← πολυωνυμο βαθμου 1

γ) $y_{x+3} - y_x = 2x+3$

Η γενική λυση της εξισωσης εχει τη μορφη

$$\psi_x = x^k (Ax+B)$$

οπου το k ειναι ο ελαχιστος φυσικος για τον οποιο η συναρτηση $y_x = x^k$ δεν ειναι λυση της ομογενους.

Για $k=0$, $\boxed{y_x = x^0 = 1}$

Αντικαθιστουμε

$$y_{x+3} - y_x = 1 - 1 = 0$$ αρα ειναι λύση

Για $k=1$ $y_x = x^1 = x$

Αντικαθιστουμε

$$(x+3) - x = 3 \neq 0$$ αρα δεν ειναι λυση

Δηλαδη $\boxed{k=1}$

Οποτε η γενική λύση έχει την μορφη

$$\psi_x = x^1(Ax+B) = Ax^2 + Bx$$

Αντικαθιστούμε για να βρούμε τα A, B

$$\psi_{x+3} - \psi_x = 2x+3 \iff$$

$$A(x+3)^2 + B(x+3) - Ax^2 - Bx = 2x+3$$

$$(9A+3B) + 6Ax + \cancel{Bx} - \cancel{Bx} = 2x+3$$

σταθ. όρος

Άρα $\begin{cases} 9A+3B=3 \\ 6A=2 \end{cases} \iff \begin{matrix} B=0 \\ A=\frac{1}{3} \end{matrix}$

Άρα

$$\psi_x = x\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}x^2$$

Επιβεβαίωση:

$$\frac{1}{3}(x+3)^2 - \frac{1}{3}x^2 = \cdots = 2x+3$$

Ασκηση 3

Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση

$$y_{x+3} + y_x = 2x + 3$$

Υπενθύμιση: Μερική λυση $\psi_x = \frac{1}{3}x^2$

Θα βρουμε την λυση y_x^o της ομογενους

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3 + 1 = 0$

Μια ρίζα ειναι το -1.

Άρα, το πολυωνυμο λ^3+1 διαιρείται απο $\lambda+1$.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 + 1 & \lambda+1 \\ \hline -(\lambda^3+\lambda^2) & \lambda^2-\lambda+1 \\ \hline -\lambda^2+1 & \\ -(-\lambda^2-\lambda) & \\ \hline \lambda+1 & \\ -(\lambda+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

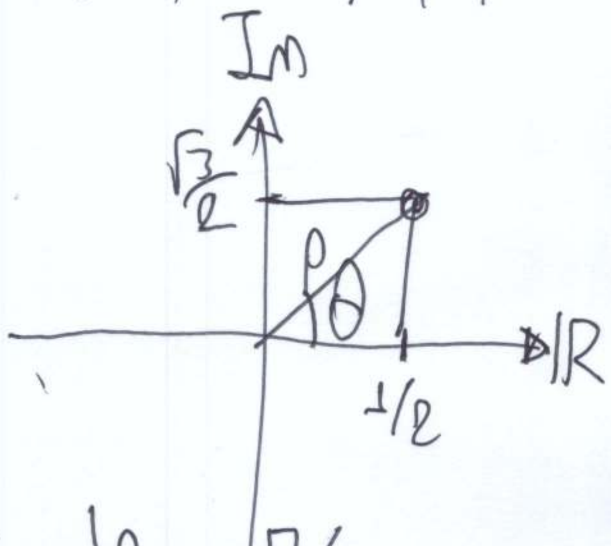
Άρα

$$\lambda^3+1 = (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$$

Ρίζες $\dfrac{1\pm\sqrt{1^2-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Επομένως, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες $-1, \ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Θα γράψουμε σε τριγωνομετρική μορφή τον $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$



$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} \underset{\text{τεταρτ.}}{\overset{1ο}{=}} \pi/3$$

Άρα,

$$y_x^0 = c_1 (-1)^x + c_2 \cdot 1^x \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) + c_3 \cdot 1^x \sin\left(\frac{\pi}{3} x\right)$$

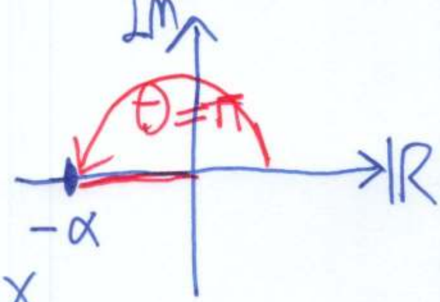
Τελικά, η λύση της εξίσωσης είναι

$$y_x = y_x^0 + \psi_x$$
$$= c_1 (-1)^x + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) + c_3 \sin\left(\frac{\pi}{3} x\right) + \frac{1}{3} x^2$$

<u>Παρατήρηση</u> Για $\alpha > 0$ η συνάρτηση $(-\alpha)^x$ λαμβανει και μη πραγματικές τιμές (μιγαδικές τιμές) π.χ. για $x = \frac{1}{2}$ ή $x = \frac{2k+1}{\lambda}$, $k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$

Επειδή ψαχνουμε μόνο πραγματικές λύσεις θα εκφράσουμε το $-\alpha$ σε τριγωνομετρική μορφη

$$-\alpha = |\alpha|(\cos\pi + i\sin\pi)$$



Άρα, αντι για την συνάρτηση $(-\alpha)^x$ θα γράφουμε

$$|\alpha|^x \cos(\pi x) + |\alpha|^x \sin(\pi x)$$

Για παράδειγμα αντι για $(-1)^x$ γράφουμε

$$1^x \cdot (\cos \pi x) + 1^x \sin(\pi x)$$