Γεννήτριες συναρτήσεις

Για κάθε ακολουθία $f(n)$ οι συναρτήσεις

$$f^{*}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^{n} \quad \text{και} \quad f^{**}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{x^{n}}{n!}$$

ονομάζονται αντίστοιχα

(συνήθως) γεννήτρια συνάρτηση και

εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της

ακολουθίας $f(n)$.

- Οι συναρτήσεις $f^{*}(x)$, $f^{**}(x)$ είναι μοναδικές για κάθε ακολουθία $f(n)$ δηλαδή

$$f(n)=g(n)\ \forall n \iff f^{*}(x)=g^{*}(x) \quad \forall x$$

- Το ανάπτυγμα της $f^{*}(x)$ σε δυναμοσειρά του x έχει την ιδιότητα ότι ο συντελεστής του x^{n} ισούται με $f(n)$. (Στις εκθετικές ισούται με $\frac{f(n)}{n!}$)
- Συνήθως ο συντελεστής του x^{n} συμβολίζεται

$$[x^{n}]f^{*}(x) = f(n)$$

Βασική μεθοδολογία

① Προσπαθούμε να βρούμε κάποιες (αναγωγική) σχέσεις για μια ακολουθία $f(n)$ που μας ενδιαφέρει.

② Βρίσκουμε την $f^*(x)$.

③ Ανάπτυγμα (Αντίστροφη) της $f^*(x)$ σε σειρά του x και ανάκτηση ενός (απλούστερου) τύπου για την $f(n)$.

Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις

$$f^*(x) = (f(n))^* = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

- $(a^n)^* = \dfrac{1}{1-ax}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Ειδικά, $(1)^* = \dfrac{1}{1-x}$.
- $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)^* = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Ειδικά, $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^* = e^x$.
- $\left(\binom{a}{n}\right)^* = (1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$.

1. $(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n))^* = c_1 f_1^*(x) + c_2 f_2^*(x)$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $(a^n \phi(n))^* = \phi^*(ax)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.
3. $(\phi(n+k))^* = \frac{\phi^*(x)}{x^k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\phi(i)}{x^{k-i}}$ όπου $k \in \mathbb{N}^*$.
4. $(F_k(n)\phi(n))^* = x^k(\phi^*(x))^{(k)}$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$.

Συνέλιξη:

$$(f \circledast g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k).$$

$$((f \circledast g)(n))^* = (f(n))^*(g(n))^*.$$

Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

$$f^{**}(x) = (f(n))^{**} = \left(\frac{f(n)}{n!}\right)^{*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n$$

- $(n!)^{**} = \dfrac{1}{1-x}$
- $(a^n)^{**} = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Ειδικά, $(1)^{**} = e^x$

1. $(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n))^{**} = c_1 f_1^{**}(x) + c_2 f_2^{**}(x)$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $(a^n \phi(n))^{**} = \phi^{**}(ax)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.
3. $(\phi(n+k))^{**} = (\phi^{**}(x))^{(k)}$ όπου $k \in \mathbb{N}$.
4. $(F_k(n)\phi(n))^{**} = x^k (\phi^{**}(x))^{(k)}$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$.

Αν

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) g(n-k)$$

τότε

$$h^{**}(x) = (f(n))^{**} (g(n))^{**}.$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί ένας απλούστερος τύπος για την ακολουθία $f(n)$ όπου

$$f(n) = 8f(n-1) + 10^{n-1} \quad n \geq 1$$

$$f(0) = 9$$

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, x^n$$

Λύση

Θεωρούμε την γεννήτρια συνάρτηση

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, x^n$$

1 $$= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, x^n$$

2 $$= 9 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(8f(n-1) + 10^{n-1}\right) x^n$$

3 $$= 9 + 8\sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^n$$

4 $$= 9 + 8x \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)\, x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^{n-1}$$

$$f(0)x^0 + f(1)x^1 + f(2)x^2 + \cdots$$

5 $$= 9 + 8x \sum_{m=0}^{\infty} f(m) x^{m} + x \sum_{k=0}^{\infty} 10^{k} x^{k}$$

6 $$= 9 + 8x f^{*}(x) + x \sum_{k=0}^{\infty} (10x)^{k}$$

Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^{n} = \frac{1}{1-\alpha x}$$

$$\boxed{f^{*}(x) = 9 + 8x f^{*}(x) + \frac{x}{1-10x}} \iff$$

$$f^{*}(x)(1-8x) = \frac{9-89x}{1-10x} \iff$$

$$\boxed{f^{*}(x) = \frac{9-89x}{(1-8x)(1-10x)}}$$

Για να βρούμε ένα τύπο για την $f(n)$ θα βρούμε το ανάπτυγμα της $f^{*}(x)$ σε σειρά του x

Η $f^{*}(x)$ είναι ρητή: θα κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$f^*(x) = \frac{A}{1-8x} + \frac{B}{1-10x}$$

Για τα A, B:

$$A(1-10x) + B(1-8x) = 9 - 89x \iff$$

$$(A+B) - (10A+8B)x = 9 - 89x \iff$$

$$\begin{cases} A+B=9 \\ 10A+8B=89 \end{cases} \iff \begin{cases} A=17/2 \\ B=1/2 \end{cases}$$

Άρα

$$f^*(x) = \frac{17}{2}\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-10x}$$

$$= \frac{17}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{17}{2}8^n + \frac{1}{2}10^n\right)x^n$$

Άρα $\boxed{f(n) = \frac{17 \cdot 8^n + 10^n}{2}}$

$$f(n) = \frac{17}{2} \cdot 8^n + \frac{1}{2} 10^n \Rightarrow$$

$$\frac{f(n)}{10^n} = \frac{17}{2}\left(\frac{8}{10}\right)^n + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{10^n} = \frac{17}{2} \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{8}{10}\right)^n + \frac{1}{2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή η $f(n)$ συμπεριφέρεται όπως η 10^n (αυξάνει με τον ίδιο ρυθμό)

Άσκηση 2

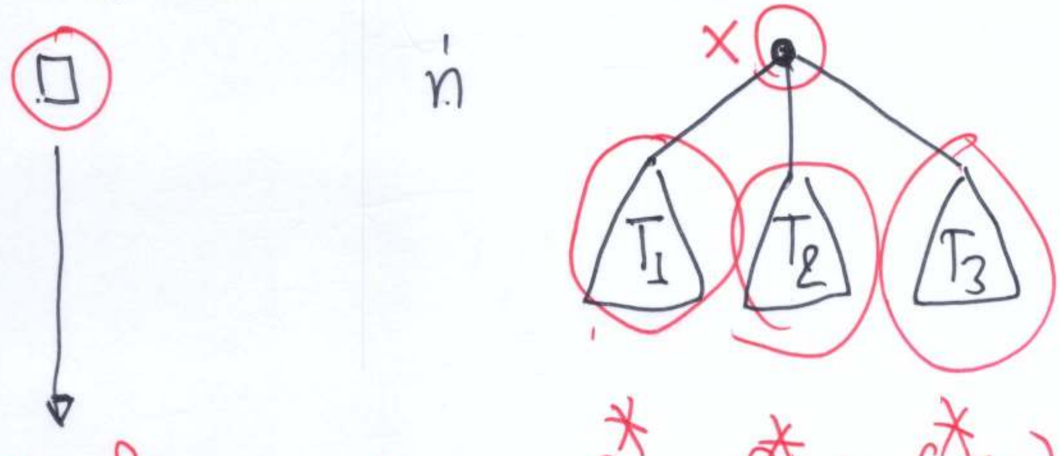
Να βρεθεί η ακολουθία $f(n)$ όταν

α) $f^*(x) = 1 + x\left(f^*(x)\right)^3$

3-αδικά δένδρα (καθε κορυφη εχει 0 ή 1 ή 2 ή 3 παιδια)

με n κορυφες

κενό τριαδικο ή μη κενό



T_1, T_2, T_3 τριαδικα (μπορεί και κενα)

$$f^*(x) = 1\cdot x^0 + x f^*(x) f^*(x) f^*(x)$$

Το x μετράει τον αριθμο των κορυφών

Ο συντελεστής του x^n ειναι το πληθος των δενδρων

Υπενθύμιση

Αν για την $f^*(x)$ ισχύει

$$\boxed{f^*(x) = 1 + x\,H(f^*(x))}$$

όπου $\boxed{H(\lambda)}$ είναι πολυώνυμο ή δυναμοσειρά του $\boxed{\lambda}$

Τότε

$$n f(n) = [\lambda^{n-1}]\, H^n(1+\lambda) \qquad n \geq 1$$

Ισχύει ότι

$$f^*(x) = 1 + x\,H(f^*(x))$$

όπου $H(\lambda) = \lambda^3$

Άρα, από το Θ.Α. Lagrange

$$n f(n) = [\lambda^{n-1}]\, H^n(1+\lambda)$$

$$H(\lambda+1) = (\lambda+1)^3$$

$$H^n(\lambda+1) = (\lambda+1)^{3n}$$

$$(\alpha+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k b^{n-k}$$

Άρα

$$H^n(\lambda+1) = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \lambda^k$$

$$\Leftarrow \binom{3n}{0}\lambda^0 + \binom{3n}{1}\lambda^1 + \cdots + \binom{3n}{k}\lambda^k + \cdots + \binom{3n}{3n}\lambda^{3n}$$

Άρα

$$[\lambda^{n-1}]\, H^n(\lambda+1) = \binom{3n}{n-1}$$

οπότε τελικά

$$n f(n) = \binom{3n}{n-1} \Leftrightarrow \boxed{f(n) = \frac{1}{n}\binom{3n}{n-1} \quad n \geq 1}$$

β) $f^*(x) = 1 + x\left(f^*(x)\right)^2 + x\left(f^*(x)\right)^4$

$$f^*(x) = 1 + x\left(\left(f^*(x)\right)^2 + \left(f^*(x)\right)^4\right)$$

Άρα

$$f^*(x) = 1 + x\,H\left(f^*(x)\right) \quad \text{όπου}$$

$$H(\lambda) = \lambda^2 + \lambda^4 = \lambda^2(1+\lambda^2)$$

$$H^n(\lambda+1) = (\lambda+1)^{2n}\underline{\left(1+(\lambda+1)^2\right)^n}$$

$$= (\lambda+1)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda+1)^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda+1)^{2n+2k}$$

$2n+2k \geq \mu$

$\boxed{k \geq \frac{\mu-2n}{2}}$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{\mu=0}^{2n+2k}\binom{2n+2k}{\mu}\lambda^{\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{4n}\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n+2k}{\mu}}\lambda^{\mu}$$

Άρα, από Θ.Α. Lagrange

$$n f(n) = [\lambda^{n-1}]\, H^{n}(1+\lambda)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n+2k}{n-1}$$

Άρα

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n+2k}{n-1} \qquad \underline{n \geq 1}$$