

$$F(x, y) = \sum_{\alpha \in A} x^{p(\alpha)} y^{q(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} y^k \right) x^n$$

όπου $\alpha_{n,k} = \left| \left\{ \alpha \in A : p(\alpha) = n \text{ και } q(\alpha) = k \right\} \right|$

p : βασική παράμετρος

q : δευτερεύουσα παράμετρος

$$\begin{aligned} \frac{dF(x, y)}{dy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} y^k \right)' x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_{n,k} y^{k-1} \right) x^n \end{aligned}$$

Θετώντας $y=1$ προκύπτει η συνάρτηση

$$\left. \frac{dF(x, y)}{dy} \right|_{y=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_{n,k} \right) x^n$$

όπου το άθροισμα $\sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_{n,k}$ ισούται με το
 συνολικό άθροισμα των τιμών της παραμέτρου q
 σε όλα τα α με $p(\alpha) = n$.

Μέσος βαθμός Ρίζας σε Διατεταγμένα
Δένδρα με n δεσμούς

$$F(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{p(T)} y^{q(T)} = \frac{1}{1 - xy C^*(x)}$$

Θα βρούμε το άθροισμα όλων των βαθμών ρίζας σε όλα τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς :

$$\frac{dF(x, y)}{dy} = \frac{x C^*(x)}{(1 - xy C^*(x))^2}$$

Θέτουμε $y=1$ προκύπτει ότι η αντίστοιχη γεννήτρια είναι

$$\frac{x C^*(x)}{(1 - x C^*(x))^2}$$

Υπενθύμιση:

$$C^*(x) = 1 + x(C^*(x))^2 \Leftrightarrow C^*(x) = \frac{1}{1 - xC^*(x)}$$

Απικαθιστώνας προκύπτει ότι

$$\frac{x C^*(x)}{(1 - x C^*(x))^2} = x (C^*(x))^3$$

Άρα, το συνολικό άθροισμα όλων των βαθμών
πίτας στα, δένδρα με n δεσμούς ισούται με
διατεταγμένα

$$\alpha_n = [x^n] x (C^*(x))^3 = [x^{n-1}] (C^*(x))^3$$

Υπενθύμιση:

$$[x^n] (C^*(x))^s = \frac{s}{n+s} \binom{2n+s-1}{n}$$

οπότε

$$\alpha_n = \frac{3}{n-1+3} \binom{2(n-1)+3-1}{n-1} = \frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1}$$

Άρα, ο μέσος βαθμός ρίζας ισούται με

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{\frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1}}{\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}} = \frac{\frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1}}{\frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!}}$$

$$= \frac{3n!}{(n+2)(n-1)!}$$

$$= \frac{3n}{n+2}.$$

Άρα μέσος βαθμός ρίζας στα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς

$$\frac{3n}{n+2}$$

Για μεγάλα n το πηλίκο αυτό ισούται περίπου με 3.

Ένα "μέσο" διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς έχει την γομφή

