

Ασκήσεις στις ασυμπτωτικές ισοδυναμίες

- $f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$

- **Τύπος του Stirling:** $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$

- **Λήμμα του Stolz:** Αν $(a_n), (A_n)$ είναι ακολουθίες αριθμών και (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = l.$$

- Χρήσιμοι τύποι:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ και $(n + a)^{n+b} \sim e^a n^{n+b}$

- $\binom{2n-r}{n-s} \sim \frac{4^n}{2^r \sqrt{\pi n}}$ και $C_n \sim \frac{4^n}{n \sqrt{\pi n}}$

Άσκηση 1. Να βρεθούν ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις επόμενες εκφράσεις:

i) $(5n)!$

Λύση. Από τον τύπο του Stirling ισχύει ότι

$$(5n)! \sim \sqrt{2\pi 5n} \left(\frac{5n}{e}\right)^{5n} = \sqrt{10\pi n} \left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}$$

□

ii) $\sqrt{(3n+7)(5n+2)}$

Λύση. Θα δείξουμε ότι

$$\sqrt{(3n+7)(5n+2)} \sim \sqrt{15n}.$$

□

(1ος τρόπος)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(3n+7)(5n+2)}}{\sqrt{15n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n\left(1+\frac{7}{3n}\right)5n\left(1+\frac{2}{5n}\right)}}{\sqrt{15n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1+\frac{7}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{5n}\right)} = 1 \end{aligned}$$

iii) $(5n + 3)!$

Λύση. Από τον τύπο του Stirling έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (5n + 3)! &\sim \sqrt{2\pi(5n + 3)} \left(\frac{5n + 3}{e}\right)^{5n+3} \\ &\sim \sqrt{2\pi 5n} \left(\frac{5n + 3}{e}\right)^{5n+3} \\ &\sim \sqrt{10\pi n} \left(\frac{5n + 3}{e}\right)^{5n+3} \end{aligned}$$

Από τον τύπο $(n + a)^{n+b} \sim e^a n^{n+b}$

Άρα,

$$\begin{aligned} (5n + 3)! &\sim \sqrt{10\pi n e^3} \left(\frac{5n}{e}\right)^{5n+3} \\ &= \sqrt{10\pi n n^3} \left(\frac{5n}{e}\right)^{5n} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: $(5n + 3)! \sim (5n)!n^3$

□

iv) $\binom{7n}{2n}$

Λύση. Από τον τύπο του Stirling έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \binom{7n}{2n} &= \frac{(7n)!}{(2n)!(5n)!} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi(7n)} \left(\frac{7n}{e}\right)^{7n}}{\sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi(5n)} \left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}} \\ &= \frac{\sqrt{7} \cdot 7^{7n}}{\sqrt{2} \cdot 2^{2n} \sqrt{2\pi(5n)} \cdot 5^{5n}} \\ &= \sqrt{\frac{7}{20\pi n}} \left(\frac{7^7}{2^2 \cdot 5^5}\right)^n \\ &= \sqrt{\frac{7}{20\pi n}} \left(\frac{823543}{125000}\right)^n = \sqrt{\frac{7}{20\pi n}} (65.8834)^n \end{aligned}$$

□

v) $(n + a)^{n+b}$

Λύση.

$$\begin{aligned}(n + a)^{n+b} &= n^{n+b} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} \\ &= n^{n+b} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^b \\ &\sim n^{n+b} e^a \cdot 1 \\ &= e^a n^{n+b}\end{aligned}$$

□

Άσκηση 2. Να βρεθούν ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τα παρακάτω αθροίσματα:

$$i) \sum_{k=0}^n \binom{3k}{2k}$$

Λύση. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Stolz.

$$\text{Θέτουμε } a_n = \sum_{k=0}^n \binom{3k}{2k}.$$

$$\text{Θέτουμε } A_n = a_{n+1} - a_n = \binom{3(n+1)}{2(n+1)} = \binom{3n+3}{2n+2}.$$

Η A_n είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη.

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1} - A_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{A_{n+1}}{A_n} - 1} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} - 1} \end{aligned}$$

□

Πρέπει να βρούμε το όριο

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{3n+6}{2n+4}}{\binom{3n+3}{2n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+6)!}{(2n+4)!(n+2)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+4)(3n+5)(3n+6)}{(2n+3)(2n+4)(n+2)} \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{1}{\frac{27}{4} - 1} = \frac{4}{23}$$

Οπότε, από το Λήμμα του Stolz ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \frac{4}{23}$$

Άρα,

$$a_n \sim \frac{4}{23} A_n$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^n \binom{3k}{2k} \sim \frac{4}{23} \binom{3n+3}{2n+2}$$

Τέλος, από τον τύπο του *Stirling* προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 & \binom{3n+3}{2n+2} \\
 & \sim \frac{\sqrt{2\pi(3n+3)} \left(\frac{3n+3}{e}\right)^{3n+3}}{\sqrt{2\pi(2n+2)} \left(\frac{2n+2}{e}\right)^{2n+2} \sqrt{2\pi(n+1)} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} \\
 & = \frac{\sqrt{3} \cdot (3n+3)^{3n+3}}{\sqrt{2} \cdot (2n+2)^{2n+2} \sqrt{2\pi(n+1)} (n+1)^{n+1}} \\
 & = \frac{\sqrt{3} \cdot 3^{3n+3} (n+1)^{3n+3}}{\sqrt{2} \cdot 2^{2n+2} \cdot (n+1)^{2n+2} \sqrt{2\pi(n+1)} (n+1)^{n+1}} \\
 & = \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \frac{3^{3n+3}}{2^{2n+2}} \\
 & = \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{3^3}{2^2}\right)^{n+1} \\
 & \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}
 \end{aligned}$$

άρα καταλήγουμε ότι

$$\sum_{k=0}^n \binom{3k}{2k} \sim \frac{4}{23} \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1} = \frac{27\sqrt{3}}{46\sqrt{\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n$$

$$\text{ii) } \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}$$

Λύση.



$$\text{iii) } \sum_{k=0}^n \binom{2k-1}{k-1}.$$

Λύση.



$$\text{iv) } \sum_{k=0}^n \sqrt{k}.$$

Λύση.

