4.6 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 4.1. *Να βρεθεί η γενική λύση y_x^0 της ομογενούς εξίσωσης στις παρακάτω περιπτώσεις που η χαρακτηριστική της εξίσωση έχει ρίζες:*

i) $2, -3, -3, -3, 4, 4$

Λύση. $y_x^0 = c_1 2^x + c_2(-3)^x + c_3 x(-3)^x + c_4 x^2(-3)^x + c_5 4^x + c_6 x 4^x$ □

ii) *4-πλη ρίζα το* $\dfrac{1}{3}$

Λύση. $y_x^0 = c_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + c_2 x\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + c_3 x^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + c_4 x^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ □

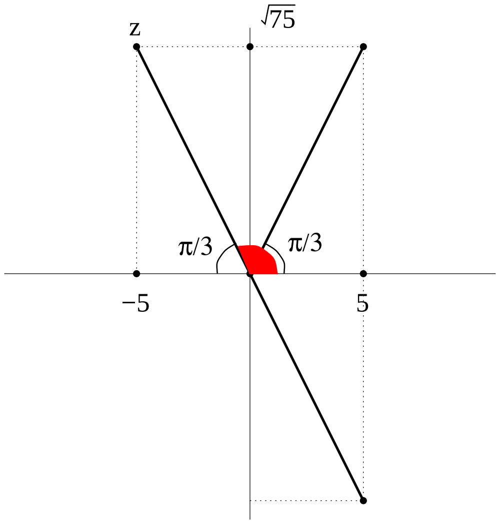
iii) $2, 3, 3, -5 \pm \sqrt{75}i$.

Λύση. Θα εκφράσουμε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό αριθμό $-5 + \sqrt{75}i$.

Αν $z = a + bi$, τότε $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ όπου $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ και $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$.

Οπότε, $\rho = \sqrt{(-5)^2 + \sqrt{75}^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10$.

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{75}}{-5} = \dfrac{\sqrt{75}}{-\sqrt{25}} = -\sqrt{3}$.



Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\phi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\phi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{tg}\phi$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\phi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Γνωρίζουμε ότι $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ οπότε $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$ όταν $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$ ή όταν $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3}$.
Επειδή το $z = -5 + 75i$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο, έπεται ότι $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Άρα, $-5 + \sqrt{75}i = 10\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Επομένως, $y_x^0 = c_1 2^x + c_2 3^x + c_3 x 3^x + c_4 10^x \cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) + c_5 10^x \sin\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)$ □

Άσκηση 4.2. *Να βρεθούν οι μερικές λύσεις ψ_x των παρακάτω αναγωγικών εξισώσεων*

i) $y_{x+3} + y_x = 5 \cdot 3^x$

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3 + 1 = 0$.

Το 3 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε η μερική λύση θα έχει την μορφή

$$\psi_x = A \cdot 3^x$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
\psi_{x+3} + \psi_x &= 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\
A3^{x+3} + A3^x &= 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\
27A3^x + A3^x &= 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\
28A = 5 \Leftrightarrow A &= \frac{5}{28}
\end{aligned}$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = \frac{5}{28}3^x$. □

ii) $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x$

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$, άρα το 2 είναι διπλή ρίζα.

Το 3 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε η μερική λύση θα έχει την μορφή

$$\psi_x = Ax^2 \cdot 2^x + B3^x$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
\psi_{x+2} - 4\psi_{x+1} + 4\psi_x &= 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\
(A(x+2)^2 2^{x+2} + B3^{x+2}) - 4(A(x+1)^2 2^{x+1} + B3^{x+1}) + 4(Ax^2 2^x + B3^x) &= 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\
(9B3^x - 12B3^x + 4B3^x) + (16A2^x - 8A2^x) &= 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\
B3^x + 8A2^x &= 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\
A = \frac{7}{8}, B &= 6
\end{aligned}$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = \frac{7}{8}x^2 2^x + 6 \cdot 3^x$. □

iii) $y_{x+3} - y_x = 2x + 3$

Λύση. Επειδή το $2x+3$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού, η μερική λύση της εξίσωσης έχει την μορφή

$$\psi_x = x^k(Ax+B)$$

όπου k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση $y_x = x^k$ **δεν** είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

Για $k=0$, $y_x = x^0 = 1$.

Αντικαθιστούμε την $y_x = 1$ στην ομογενή εξίσωση

$$y_{x+3} - y_x = 1 - 1 = 0$$

άρα είναι λύση της ομογενούς.

Για $k=1$, $y_x = x^1 = x$.

Αντικαθιστούμε την $y_x = x$ στην ομογενή εξίσωση

$$y_{x+3} - y_x = x + 3 - x = 3$$

άρα δεν είναι λύση της ομογενούς.

Επομένως, $k=1$ και η μερική λύση έχει την μορφή

$$\psi_x = x^1(Ax+B) = Ax^2 + Bx.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση για να βρούμε τα A, B. :

$$\begin{aligned}\psi_{x+3} - \psi_x &= 2x+3 \Leftrightarrow\\ A(x+3)^2 + B(x+3) - (Ax^2+Bx) &= 2x+3 \Leftrightarrow\\ (9A+3B) + 6Ax + Bx - Bx &= 2x+3 \Leftrightarrow\\ \begin{cases} 9A+3B = 3 \\ 6A = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow A = \frac{1}{3}, B = 0\end{aligned}$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = x\left(\dfrac{1}{3}x\right) = \dfrac{1}{3}x^2$.

(**Επιβεβαίωση**: $\dfrac{1}{3}(x+3)^2 - \dfrac{1}{3}x^2 = \cdots = 2x+3$) □

Άσκηση 4.3. *Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση*
$y_{x+3} - y_x = 2x+3$.

Λύση. Από την προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι η μερική λύση της είναι $\psi = \dfrac{1}{3}x^2$.

Θα βρούμε την γενική λύση y_x^0 της ομογενούς.

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3 - 1 = 0$. Μια ρίζα είναι το 1. Άρα, το πολυώνυμο λ^3+1 διαιρείται με το $\lambda - 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης

1	0	0	-1	1
	1	1	1	
1	1	1	0	

Άρα, $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Επομένως, οι άλλες δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Θα εκφράσουμε τον $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ και $\operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$.

Επειδή $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο έπεται ότι $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Άρα, $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ και επομένως

$$y_x^0 = c_1 1^x + c_2 1^x \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + c_3 1^x \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$$

Τελικά, η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y_x = y_x^0 + \psi_x = c_1 + c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + \frac{1}{3}x^2$$

□

Παρατήρηση: Για $a > 0$, η συνάρτηση $(-a)^x$ λαμβάνει και μη πραγματικές τιμές (μιγαδικές τιμές), όταν για παράδειγμα $x = \frac{1}{2}$ ή $x = \frac{2k+1}{2\lambda}$, $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$. Επειδή ψάχνουμε μόνο πραγματικές λύσεις θα εκφράσουμε το $-a$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$$-a = |a|\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$

Άρα, αντί για την συνάρτηση $(-a)^x$ μπορούμε να γράφουμε

$$|a|^x\cos(\pi x) + |a|^x\sin(\pi x).$$

Για παράδειγμα, αντί για $(-1)^x$ γράφουμε

$$1^x\cos(\pi x) + 1^x\sin(\pi x)$$

Άσκηση 4.4. *Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση*
$y_{x+2} + y_{x+1} + y_x = 0$, *όπου* $y_0 = 0$, $y_1 = 2$.

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Leftarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Θα εκφράσουμε τον $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ σε τριγωνομετρική μορφή: $\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ και $\operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{3}2}{1/2} = -\sqrt{3}$. Επειδή $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο έπεται ότι $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Άρα, $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ και επομένως

$$y_x = y_x^0 = c_1 1^x\cos\frac{2\pi x}{3} + c_2 1^x\sin\frac{2\pi x}{3}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι

$$y_0 = 0 \Leftrightarrow c_1\cos 0 + c_2\sin 0 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$y_1 = 2 \Leftrightarrow c_2\sin\frac{2\pi}{3} = 2 \Leftrightarrow c_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Επομένως, η λύση της εξίσωσης είναι η συνάρτηση $y_x = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2\pi x}{3}$

□

Άσκηση 4.5. *Να λυθεί η μη γραμμική αναγωγική εξίσωση*
$$a_n = \frac{1}{1+6a_{n-1}}$$

Λύση. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε γραμμική αν θέσουμε

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

Τότε
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{1+6\dfrac{b_{n-1}}{b_n}} \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_n}{b_n+6b_{n-1}} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + 6b_{n-1}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της b_n είναι $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ή $\lambda = -2$.

Επομένως, η γενική μορφή της ακολουθίας b_n είναι

$$b_n = c_1 3^n + c_2(-2)^n$$

Άρα, η ακολουθία a_n έχει την μορφή

$$a_n = \frac{c_1 3^n + c_2(-2)^n}{c_1 3^{n+1} + c_2(-2)^{n+1}}$$ □

Άσκηση 4.6. *Να λυθεί η μη γραμμική αναγωγική εξίσωση*
$a_n = a_{n-1}^3/a_{n-2}$, *όπου* $a_n > 0$.

Λύση. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε γραμμική αν λάβουμε τον λογάριθμο κάθε μέλους.
$$a_n = a_{n-1}^3/a_{n-2} \Leftrightarrow \ln a_n = 3\ln a_{n-1} - \ln a_{n-2}$$
Θέτουμε $b_n = \ln a_n$ οπότε προκύπτει η αναγωγική εξίσωση

$$b_n - 3b_{n-1} + b_{n-2} = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 3\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Επομένως, $b_n = c_1\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Άρα, η ακολουθία a_n έχει την μορφή

$$a_n = e^{b_n} = e^{c_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$ □