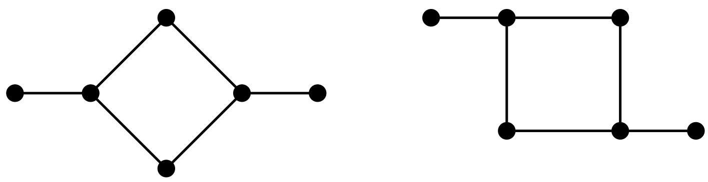
Ασκήσεις στα γραφήματα

Παρατηρήσεις στο πρόβλημα του ισομορφισμού:

- Για να αποδείξουμε ότι δυο γραφήματα είναι ισόμορφα υπάρχει μόνο ένας τρόπος. Να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των κορυφών τους (δηλαδή μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που διατηρεί την σχέση γειτνίασης).

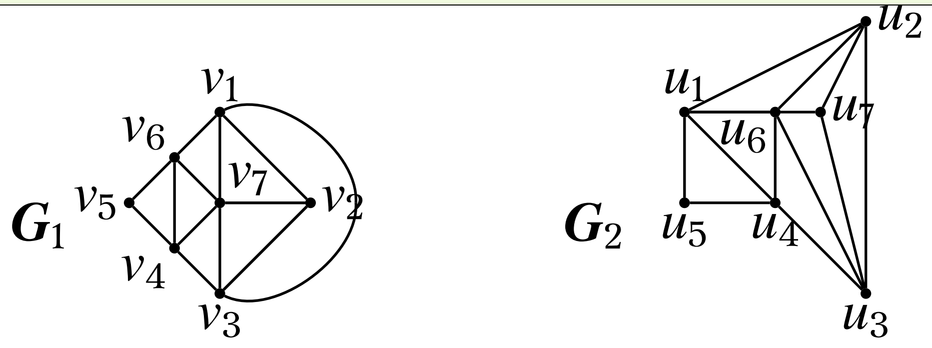
  Μπορεί να υπάρχουν πολλοί τέτοιοι ισομορφισμοί (ανάλογα με τις συμμετρίες που έχει ένα γράφημα). Για παράδειγμα, τα παρακάτω γραφήματα έχουν 4 διαφορετικούς ισομορφισμούς.

- Για να αποδείξουμε ότι δύο γραφήματα **δεν** είναι ισόμορφα υπάρχουν πολλοί τρόποι. Αρκεί να βρούμε ένα χαρακτηριστικό που έχει το ένα από τα δύο γραφήματα και δεν το έχει το άλλο (ενώ θα έπρεπε να το είχε αν ήταν ισόμορφα). Π.χ. κύκλους, αποστάσεις, εκκεντρότητες, κλίκες, μονοπάτια, κ.λπ.

Άσκηση 1. *Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων.*

(i)



Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= u_2 \\
f(v_2) &= u_7 \\
f(v_3) &= u_3 \\
f(v_4) &= u_4 \\
f(v_5) &= u_5 \\
f(v_6) &= u_1 \\
f(v_7) &= u_6
\end{aligned}
$$

□

Μπορούμε να ελέγξουμε αν τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα χρησιμοποιώντας την μέθοδο `GraphMatcher` της βιβλιοθήκης networkx.

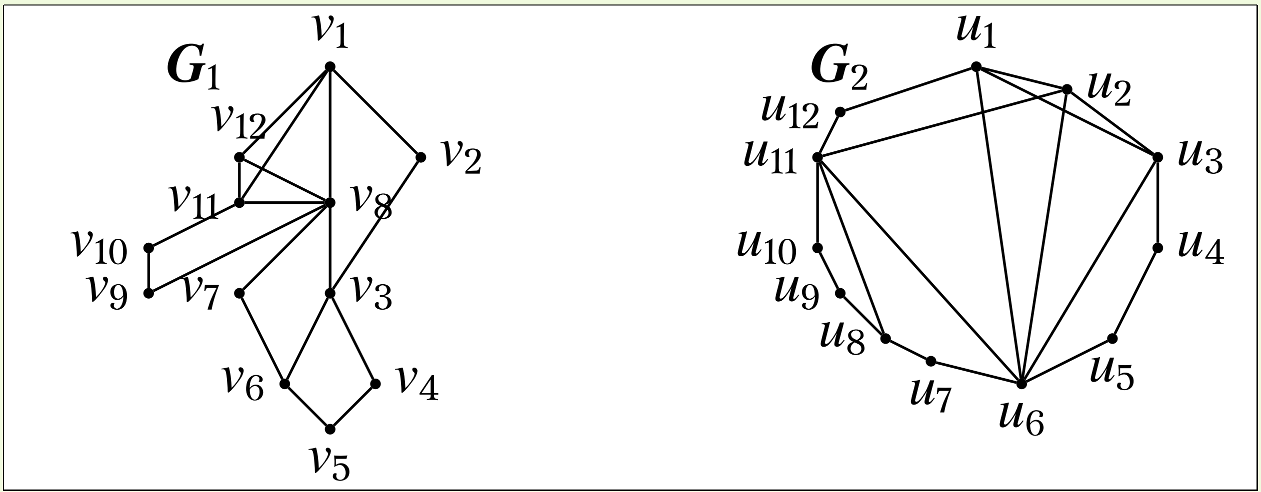
```
import networkx as nx
G1   nx.Graph()
G1.add_nodes_from(range(1,8))
G1.add_edges_from([[1,2],[1,3],[1,6],[1,7],[2,3],[2,7],
                   [3,4],[3,7],[4,5],[4,6],[4,7],[5,6],[6,7]])
G2   nx.Graph()
G2.add_nodes_from(range(1,8))
G2.add_edges_from([[1,2],[1,5],[1,4],[1,6],[2,3],[2,6],
                   [2,7],[3,4],[3,6],[3,7],[4,5],[4,6],[6,7]])
#Test whether the graphs are isomorphic
GM   nx.isomorphism.GraphMatcher(G1,G2)
if GM.is_isomorphic():  #If G1, G2 are isomorphic
    print("The graphs are isomorphic")
    print("An isomorphism between them is the following:")
    for i in G1:
        print("v",i,"->","u",GM.mapping[i])
    print(GM.mapping)
else:
    print("The graphs are not isomorphic")
```

Output:

```
The graphs are isomorphic
An isomorphism between them is the following:
v 1 -> u 3
v 2 -> u 7
v 3 -> u 2
v 4 -> u 1
v 5 -> u 5
v 6 -> u 4
v 7 -> u 6
{4: 1, 3: 2, 1: 3, 6: 4, 5: 5, 7: 6, 2: 7}
```

Παρατήρηση: *Παρατηρήστε ότι ο αλγόριθμος ανακάλυψε έναν διαφορετικό ισομορφισμό από αυτόν που δίνεται στην λύση της άσκησης.*

(ii)



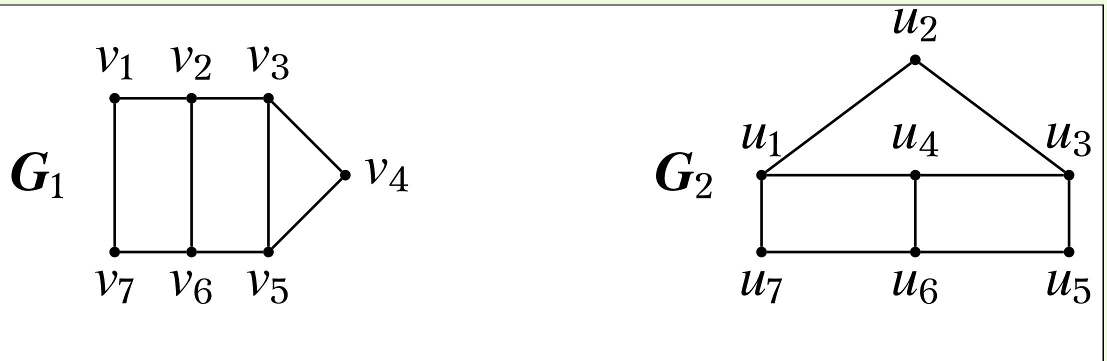
Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι έχουν διαφορετικές ακολουθίες βαθμών.

Ακολουθία βαθμών του G_1: $(6,4,4,4,3,3,2,2,2,2,2,2)$.

Ακολουθία βαθμών του G_2: $(6,5,4,4,4,3,2,2,2,2,2,2)$.

$\square$

(iii)



Λύση. Δεν είναι ισόμορφα. Μερικοί λόγοι είναι οι ακόλουθοι:

α) Το G_1 περιέχει κύκλο μήκους 3 ενώ το G_2 όχι.

β) Το G_2 περιέχει κορυφή βαθμού 3 που συνδέεται με 3 κορυφές βαθμού 3, ενώ το G_1 όχι.

γ) Το G_1 περιέχει κορυφές βαθμού 2 που απέχουν απόσταση 1, ενώ το G_2 όχι.

δ) Το G_1 είναι γράφημα Hamilton, ενώ το G_2 όχι. □

Μπορούμε να ελέγξουμε αν τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα χρησιμοποιώντας την μέθοδο `GraphMatcher` *της βιβλιοθήκης networkx.*

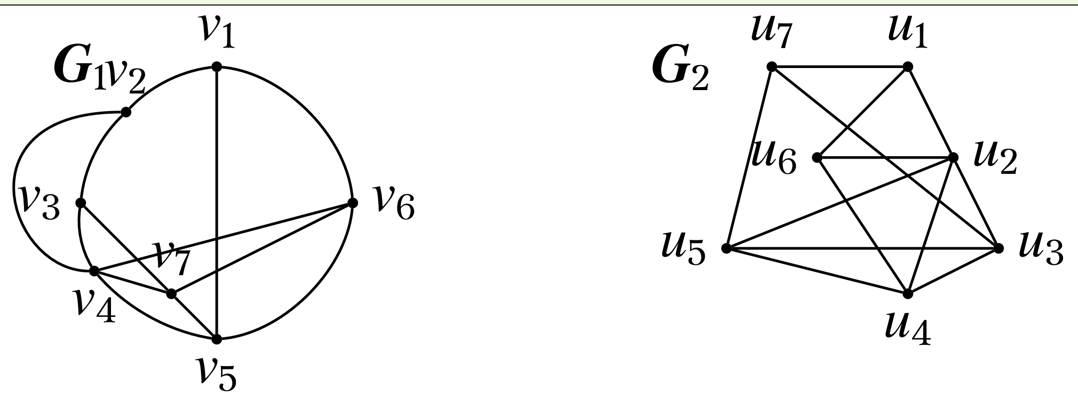
```
import networkx as nx
G1    nx.Graph()
G1.add_nodes_from(range(1,8))
G1.add_edges_from
    ([[1,2],[1,7],[2,3],[2,6],[3,4],[3,5],[4,5],[5,6],[6,7]])
G2    nx.Graph()
G2.add_nodes_from(range(1,8))
G2.add_edges_from
    ([[1,2],[1,4],[1,7],[2,3],[3,4],[3,5],[4,6],[5,6],[6,7]])
#Test whether the graphs are isomorphic
GM    nx.isomorphism.GraphMatcher(G1,G2)
if GM.is_isomorphic():  #If G1, G2 isomorphic? then
    print("The␣graphs␣are␣isomorphic")
    print("An␣isomorphism␣between␣them␣is␣the␣following:")
    for i in G1:
        print("v",i,"->","u",GM.mapping[i])
    print(GM.mapping)
else:
    print("The␣graphs␣are␣not␣isomorphic")
    print("Degree␣sequence␣of␣G1:",sorted((d for n, d in G1.degree()),
        reverse True))
    print("Degree␣sequence␣of␣G2:",sorted((d for n, d in G2.degree()),
        reverse True))
```

Output:

```
The graphs are not isomorphic
Degree sequence of G1: [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2]
Degree sequence of G2: [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2]
```

Παρατήρηση: *Παρατηρήστε ότι παρόλο που τα γραφήματα είναι μη ισόμορφα έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών. Στην περίπτωση όπου τα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα, η μέθοδος* `GraphMatcher` *δεν μας δίνει κάποια εξήγηση γιατί συμβαίνει αυτό.*

(iv)

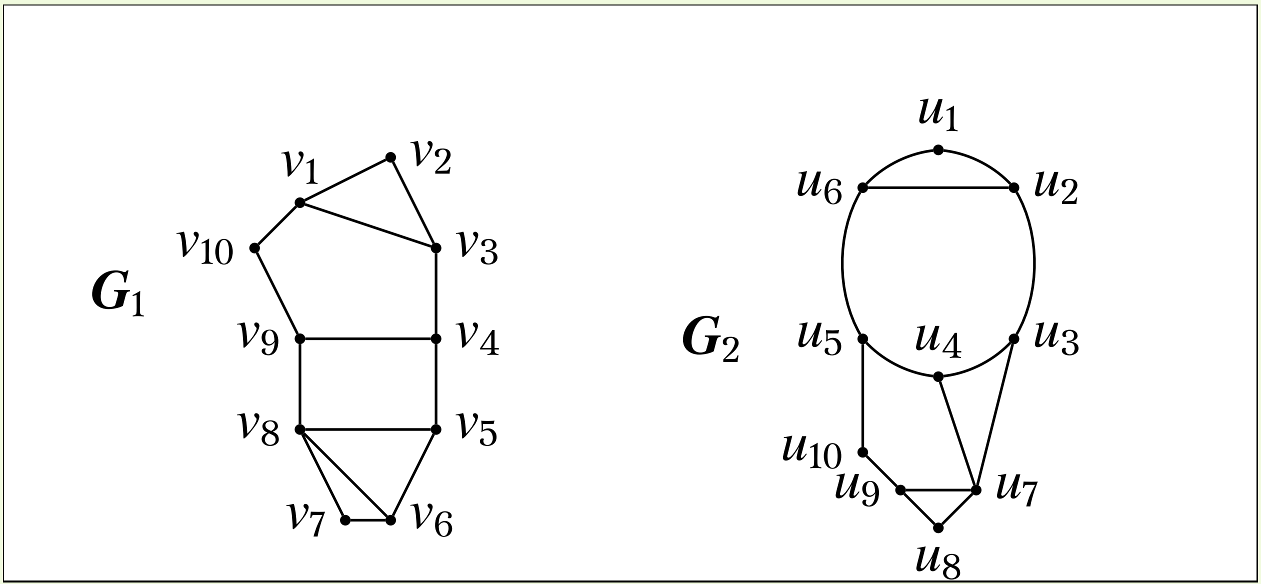


Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= u_7 \\
f(v_2) &= u_1 \\
f(v_3) &= u_6 \\
f(v_4) &= u_2 \\
f(v_5) &= u_5 \\
f(v_6) &= u_3 \\
f(v_7) &= u_4
\end{aligned}
$$

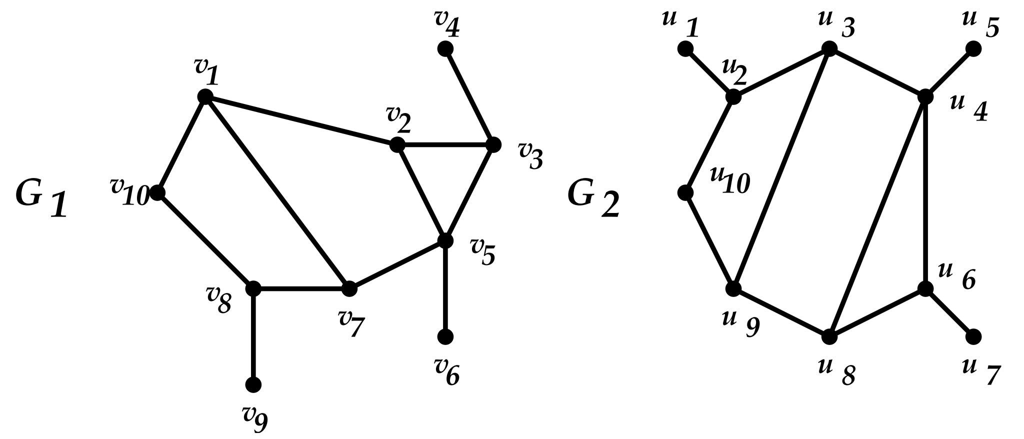
□

(v)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι το G_1 περιέχει κύκλο μήκους 4 ενώ το G_2 όχι. □

(vi)

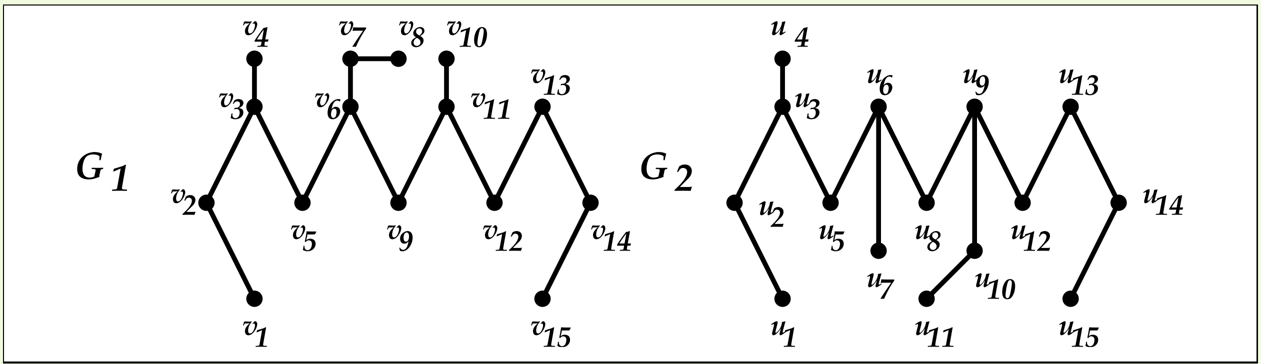


Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= u_9\\
f(v_2) &= u_8\\
f(v_3) &= u_6\\
f(v_4) &= u_7\\
f(v_5) &= u_4\\
f(v_6) &= u_5\\
f(v_7) &= u_3\\
f(v_8) &= u_2\\
f(v_9) &= u_1\\
f(v_{10}) &= u_{10}
\end{aligned}
$$

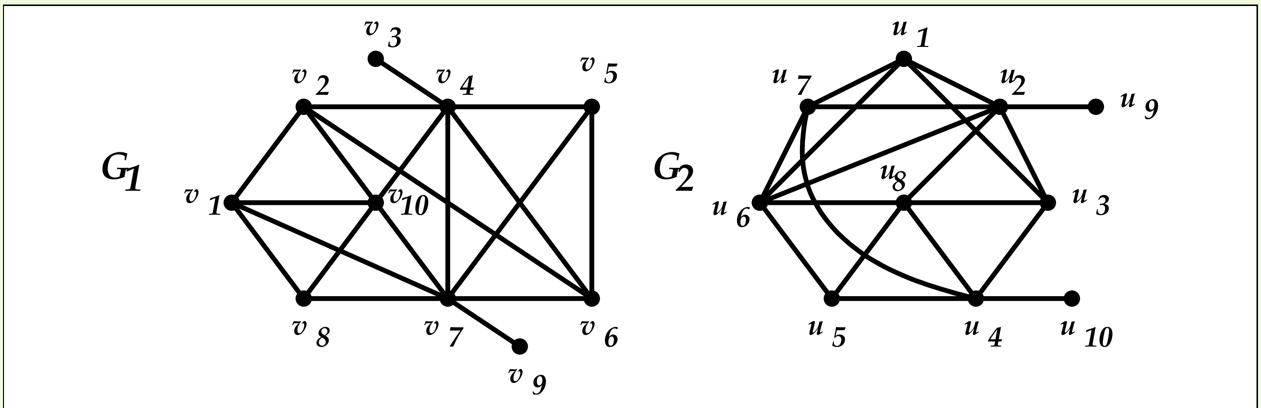
□

(vii)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχουν κορυφές βαθμού 1 που απέχουν απόσταση 4 (οι u_4 και u_7) ενώ στο G_1 όχι. □

(viii)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχει κορυφή βαθμού 1 η οποία συνδέεται με κορυφή βαθμού 5, ενώ στο G_1 δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές. □

Παρατηρήσεις στις ακολουθίες βαθμών:

- **Θεώρημα Havel - Hakimi** Η φθίνουσα ακολουθία $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ είναι γραφική αν και μόνο αν η ακολουθία $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ είναι γραφική.
- **Λήμμα χειραψίας** Σε κάθε απλό γράφημα δεσμών ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) = 2|E|$.

  Επομένως, το άθροισμα των βαθμών είναι άρτιος αριθμός.
- Σε κάθε γράφημα με n κορυφές ο μέγιστος βαθμός είναι το πολύ $n - 1 - k$ όπου k ο αριθμός των κορυφών με βαθμό 0.

Άσκηση 2. *Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.*

(i) $(4, 4, 3, 3, 2, 2, 1)$.

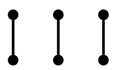
Λύση. Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός. $\square$

(ii) $(5, 3, 2, 2, 2)$.

Λύση. Δεν υπάρχει σε ένα γράφημα με 5 κορυφές ο μέγιστος βαθμός είναι το πολύ 4. $\square$

(iii) $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



$\square$

(iv) $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Λύση. Υπάρχει. Για παράδειγμα ο C_7. $\square$

(v) $(7,7,5,5,3,3,2,2,1,1)$

Λύση. Από το θεώρημα Havel - Hakimi έχουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα αν και μόνο αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών:

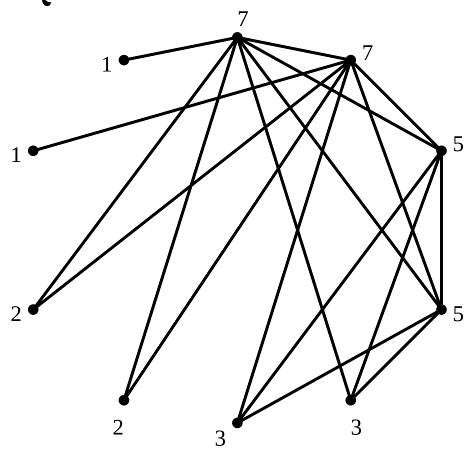
$(7-1,5-1,5-1,3-1,3-1,2-1,2-1,1,1) = (6,4,4,2,2,1,1,1,1)$

$(4-1,4-1,2-1,2-1,1-1,1-1,1,1,1) = (3,3,1,1,0,0,1,1) = (3,3,1,1,1,1,0,0)$

$(3-1,1-1,1-1,1,1,0,0) = (2,0,0,1,1,0,0) = (2,1,1,0,0,0,0)$

$(1-1,1-1,0,0,0,0) = (0,0,0,0,0,0)$, (μηδενικό γράφημα με 6 κορυφές)

Επομένως, υπάρχει γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών. Ένα τέτοιο γράφημα μπορεί κατασκευασθεί με τον αλγόριθμο των Havel - Hakimi και είναι το επόμενο:



$\square$

(vi) $(7, 7, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$

Λύση. Από το θεώρημα Havel - Hakimi έχουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα αν και μόνο αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών:

$(7-1, 7-1, 3-1, 3-1, 2-1, 1-1, 1-1, 1) = (6, 6, 2, 2, 1, 0, 0, 1) = (6, 6, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$

$(6-1, 2-1-2-1, 1-1, 1-1, 0-1, 0, 0) = (5, 1, 1, 0, 0, -1, 0)$

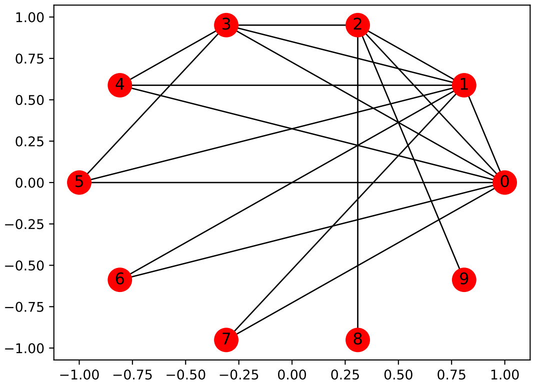
Επομένως, δεν υπάρχει γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών. □

Για τον έλεγχο ύπαρξης και κατασκευής ενός γραφήματος με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους `is_graphical` *και* `havel_hakimi_graph` *της βιβλιοθήκης networkx.*

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def Graph_Check(Seq):
    if nx.is_graphical(Seq):
        print("The␣sequence",Seq,"is␣graphical")
        G   nx.havel_hakimi_graph(Seq)
        print("The␣adjacency␣matrix␣of␣graph␣having␣this␣degree␣sequence
            ␣is:")
        print(nx.adjacency_matrix(G).todense())
        pos   nx.circular_layout(G)
        nx.draw_networkx(G,pos)
        plt.show()
    else:
        print("The␣sequence",Seq,"is␣NOT␣graphical")
    print("")

Seq1   [7,7,5,5,3,3,2,2,1,1]
Seq2   [7,7,7,3,3,2,1,1,1]

Graph_Check(Seq1)
Graph_Check(Seq2)
```

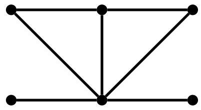
Output:

```
The sequence [7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1] is graphical
The adjacency matrix of graph having this degree sequence is:
[[0 1 1 1 1 1 1 1 0 0]
 [1 0 1 1 1 1 1 1 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 1 1]
 [1 1 1 0 1 1 0 0 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
 [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]]
```



The sequence [7, 7, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 1] is ***NOT*** *graphical* *(vii)* $(5, 3, 2, 2, 1, 1)$.

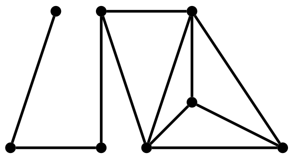
Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



□

(viii) $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$.

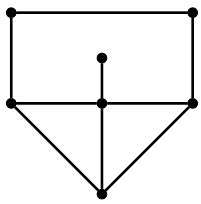
Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

(ix) $(4, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$.

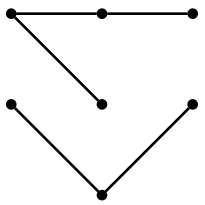
Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

(x) $(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



$\square$

Άσκηση 3.

i) Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του K_n (πλήρες γράφημα με n κορυφές).

Λύση. Το K_n περιέχει n κορυφές και ο βαθμός κάθε κορυφής του K_n ισούται με $n-1$. Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

$$2|E(K_n)| = \sum_{i=1}^{n}(n-1) = n(n-1) \Leftrightarrow |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Παρατήρηση: Ο αριθμός των δεσμών του K_n ισούται με τον αριθμό των ζευγών των κορυφών του. Υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζεύγη κορυφών, οπότε $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. □

ii) *Έστω* $G = (V, E)$ *ένα* d*-κανονικό γράφημα με* $|V| = n$*. Να βρεθεί το* $|E|$*.*

Λύση. Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

$$2|E| = \sum_{i=1}^{n} d = nd \Leftrightarrow |E| = \frac{dn}{2}$$

□

iii) Έστω $G = (V, E)$ με $|V| = n$ και $|E| = k$. Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του G^c (συμπλήρωμα του G).

Λύση. Έστω $G^c = (V, E^c)$. Για κάθε $v, u \in V$ με $v \neq u$ ισχύει ότι

$$\text{ή } \{v, u\} \in E \text{ ή } \{v, u\} \in E^c$$

Επομένως, επειδή υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζεύγη κορυφών του V έπεται ότι

$$\sum_{\substack{v,u \in V \\ v \neq u}} 1 = \binom{n}{2}$$

$$\sum_{\{v,u\} \in E} 1 + \sum_{\{v,u\} \in E^c} 1 = \binom{n}{2}$$

$$|E| + |E^c| = \binom{n}{2}$$

Άρα,

$$|E^c| = \binom{n}{2} - |E| = \binom{n}{2} - k \qquad \square$$

iv) *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται* ***αυτοσυμπληρωματικό*** *αν $G \simeq G^c$. Να δειχθεί ότι $|V| \equiv 0 \pmod 4$ ή $|V| = 1 \pmod 4$.*

Λύση. Αν $G \simeq G^c$ έπεται ότι $|E(G)| = |E(G^c)| = |E|$. Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |E(G^c)| &= \binom{|V|}{2} - |E(G)| \\ \Leftrightarrow |E| &= \binom{|V|}{2} - |E| \\ \Leftrightarrow 2|E| &= \frac{|V|(|V|-1)}{2} \\ \Leftrightarrow 4|E| &= |V|(|V|-1) \\ \Leftrightarrow |V|(|V|-1) &\equiv 0 \pmod 4 \end{aligned}$$

Άρα, ή $|V| \equiv 0 \pmod 4$, ή $(|V|-1) \equiv 0 \pmod 4$. Ισοδύναμα

$$\text{ή } |V| \equiv 0 \pmod 4, \text{ ή } |V| \equiv 1 \pmod 4 \qquad \square$$

Άσκηση 4. *Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών, με $|V| \geqslant 2$. Να δειχθεί ότι αν $|V| > |E|$, τότε το G θα περιέχει τουλάχιστον ένα κόμβο βαθμού* 1.

Λύση. Επειδή το G είναι συνεκτικό $d(v) \geqslant 1$ για κάθε $v \in V$.

Έστω ότι δεν υπάρχει $v \in V$ με $d(v) = 1$, τότε $d(v) \geqslant 2$ για κάθε $v \in V$.

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geqslant \sum_{v \in V} 2 = 2|V| > 2|E|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, υπάρχει $v \in G$ με $d(v) = 1$. $\square$

Άσκηση 5. *Να αποδειχθεί ότι σε κάθε γράφημα δεσμών $G = (V, E)$, με $|V| \geqslant 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο κόμβοι με τον ίδιο βαθμό.*

Λύση. Για κάθε $v \in V$ ισχύει ότι $0 \leqslant d(v) \leqslant |V| - 1$.

Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν ταυτόχρονα κόμβοι $v, v' \in V$ με $d(v) = 0$ και $d(v') = |V| - 1$.

Άρα, είτε $0 \leqslant d(v) \leqslant |V| - 2$ για κάθε $v \in V$, είτε $1 \leqslant d(v) \leqslant |V| - 1$ για κάθε $v \in V$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν $|V| - 1$ δυνατές τιμές βαθμών κόμβων για τους $|V|$ κόμβους του γραφήματος G, οπότε από την αρχή του περιστερεώνα έπεται το ζητούμενο. □

Άσκηση 6. *Να δειχθεί ότι αν ένα γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ έχει $|V| = 2n$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και όλοι οι κόμβοι του είναι βαθμού n, τότε είναι συνεκτικό.*

Λύση. Έστω ότι το G είναι μη συνεκτικό. Υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορυφές v_1, v_2 που ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2 του G.

Επειδή $d(v_1) = d(v_2) = n$ έπεται ότι $|V(G_1)|, |V(G_2)| \geqslant n+1$ όπου $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$. (Κάθε συνιστώσα περιέχει την κορυφή και τους γείτονές της).

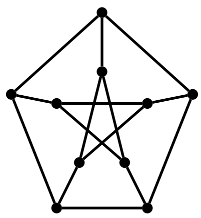
Επομένως $|V| \geqslant |V(G_1)| + |V(G_2)| \geqslant n+1+n+1 = 2n+2$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το G είναι συνεκτικό. $\square$

Άσκηση 7. *Να σχεδιασθεί ένα κυβικό γράφημα* (V, E) *με* $|V| = 2n$ *(για κάποιο* $n \geqslant 3$*), το οποίο να μην περιέχει τρίγωνα.*

Λύση. Ένας κύβος με 8 κορυφές. □

Άσκηση 8. *Να σχεδιασθεί ένα κυβικό γράφημα* (V, E) *με* 10 *κορυφές το οποίο δεν περιέχει τρίγωνα και κύκλους μήκους* 4.

Λύση. Το γράφημα του Petersen:



□

Άσκηση 9. *Να δειχθεί ότι σε ένα απλό γράφημα δεσμών με ακριβώς δύο κόμβους περιττού βαθμού, υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους αυτούς.*

Λύση. Έστω ότι οι κόμβοι δεν συνδέονται με μονοπάτι, τότε ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω G_1 η μια από αυτές τις συνιστώσες. Η G_1 είναι γράφημα.

Ο βαθμός κάθε κόμβου της G_1 είναι άρτιος αριθμός εκτός από τον κόμβο που έχει βαθμό περιττό. Αυτό είναι άτοπο, διότι το άθροισμα των βαθμών των κόμβων της G_1 θα ήταν περιττός αριθμός.

Άρα, οι δύο κόμβοι περιττού βαθμού δηλαδή βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα δηλαδή συνδέονται με μονοπάτι. □

Άσκηση 10. *Να δειχθεί ότι αν το G είναι μη συνεκτικό απλό γράφημα δεσμών, τότε το συμπλήρωμά του G^c είναι συνεκτικό.*

Λύση.

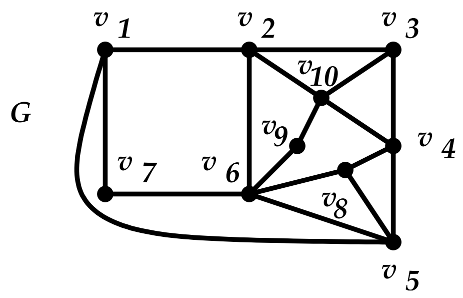
Υπενθύμιση: Ένα γράφημα είναι συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος κορυφών του υπάρχει μονοπάτι που τους συνδέει.

Έστω $x, y \in V$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

Αν οι x, y δεν συνδέονται στο G, τότε οι x, y συνδέονται με δεσμό στο G^c.

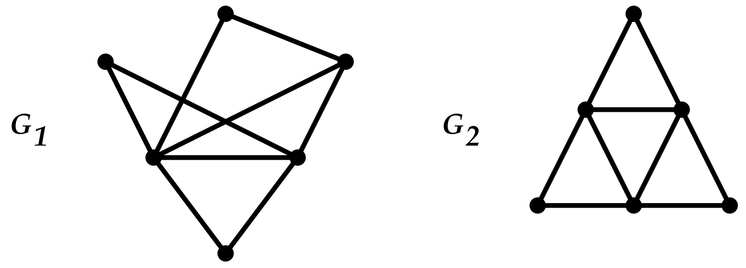
Αν οι x, y συνδέονται στο G, τότε επειδή το G είναι μη συνεκτικό υπάρχει κόμβος z που δεν συνδέεται με κανένα από τους x, y. (Αλλιώς, αν κάθε κόμβος z του G συνδέονταν με το x ή/και y, το γράφημα θα ήταν συνεκτικό.) Άρα, οι x, z και y, z συνδέονται με δεσμό στο G^c. Άρα, οι x, y ενώνονται στο G^c με το μονοπάτι x, z, y. □

Άσκηση 11. *Να βρεθεί (αν υπάρχει) ένας κύκλος Hamilton στο παρακάτω γράφημα:*



Απάντηση. Το G περιέχει κύκλο Hamilton. Για παράδειγμα υπάρχει ο κύκλος $(v_{10}, v_9, v_6, v_7, v_1, v_5, v_8, v_4, v_3, v_2, v_{10})$. □

Άσκηση 12. *Να εξετασθεί αν καθένα από τα παρακάτω γραφήματα περιέχει ένα δρόμο Euler ή είναι γράφημα Euler.*

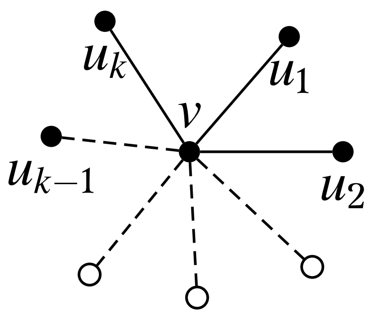


Απάντηση. Το G_1 περιέχει δρόμο Euler αλλά δεν είναι γράφημα Euler. Το G_2 είναι γράφημα Euler. □

Άσκηση 13. *Να αποδειχθεί ότι σε κάθε συνεκτικό γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ με $|V| \geqslant 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές με τον ίδιο βαθμό οι οποίες είναι γειτονικές ή έχουν κοινό γείτονα.*

Λύση. Έστω $\Delta(G) = k$ ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του γραφήματος και έστω $v \in V$ μια κορυφή με βαθμό k.

Η v έχει k γειτονικές κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_k$ και κάθε μία από αυτές έχει βαθμό από 1 μέχρι k.



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν κάποια από τις u_1, u_2, ..., u_k έχει βαθμό k, τότε το γράφημα περιέχει δύο γειτονικές κορυφές με τον ίδιο βαθμό.
- Αν καμία από τις u_1, u_2, ..., u_k δεν έχει βαθμό k, τότε υπάρχουν $k - 1$ δυνατές τιμές βαθμών για τους k γείτονες της v, οπότε από την αρχή του περιστερεώνα, δύο τουλάχιστον από αυτές έχουν τον ίδιο βαθμό και κοινό γείτονα την v. □

Άσκηση 14. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με $|V| = n$ κορυφές. Να δειχθεί ότι αν το G δεν περιέχει τρίγωνα, τότε για κάθε ζεύγος γειτονικών κορυφών u, v ισχύει ότι $d(v) + d(u) \leqslant n$.*

Λύση. Έστω $N(u)$, $N(v) \subseteq V$ οι γειτονικές κορυφές των u, v αντίστοιχα. Προφανώς,

$$d(u) = |N(u)| \text{ και } d(v) = |N(v)|$$

Αφού το G δεν περιέχει τρίγωνα, οι u, v δεν έχουν κοινές γειτονικές κορυφές (δηλαδή $N(u) \cap N(v) = \emptyset$).

Επομένως

$$\begin{aligned} d(u) + d(v) &= |N(u)| + |N(v)| \\ &= |N(u) \cup N(v)| + |N(u) \cap N(v)| \leqslant |V| = n. \square \end{aligned}$$

Άσκηση 15. *Έστω G ένα γράφημα με μέγιστο βαθμό κορυφών $\Delta(G) = k$.*

i) Να δειχθεί ότι για κάθε κορυφή v με βαθμό $d(v) = q$ υπάρχουν το πολύ $q(k-1)^{m-1}$ μονοπάτια μήκους m, όπου $m \geqslant 1$, με αρχή την v.

Λύση. Κάθε μονοπάτι P μήκους m με αρχή την v έχει την μορφή

$$P = (v, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Για την u_1 υπάρχουν q επιλογές.
Για την u_2 πρέπει να επιλέξουμε κάποιον από τους γείτονες της u_1, άρα υπάρχουν το πολύ $k-1$ επιλογές. (Δεν μπορούμε να επιλέξουμε ξανά την v.)
Για την u_3 πρέπει να επιλέξουμε κάποιον από τους γείτονες της u_2, άρα υπάρχουν το πολύ $k-1$ επιλογές. (Δεν μπορούμε να επιλέξουμε ξανά την u_1.), κ.ο.κ. Για την u_ν πρέπει να επιλέξουμε κάποιον από τους γείτονες της $u_{\nu-1}$, άρα υπάρχουν το πολύ $k-1$ επιλογές. (Δεν μπορούμε να επιλέξουμε ξανά την $u_{\nu-2}$).

Άρα, από την αρχή του γινομένου, υπάρχουν **το πολύ** $q \cdot \underbrace{(k-1)\cdot(k-1)\cdots(k-1)}_{m-1 \text{ φορές}} = q\cdot(k-1)^{m-1}$ διαφορετικά μονοπάτια με αρχή την κορυφή v. $\square$

ii) Να δειχθεί ότι για κάθε κορυφή v με βαθμό $d(v) = q$ υπάρχουν το πολύ $1 + \frac{q}{k-2}\left((k-1)^m - 1\right)$ κορυφές του G σε απόσταση από την v μικρότερη ή ίση από m.

Λύση. Οι κορυφές του G που βρίσκονται από την v σε απόσταση μικρότερη ή ίση από m διαμερίζονται με βάση την απόσταση l που απέχουν από την v, όπου $l = 0, 1, \ldots, m$.

Για κάθε κορυφή u που βρίσκεται από την v σε απόσταση l υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι μήκους l με αρχή την v και τέλος την u. Άρα, το πλήθος τους είναι μικρότερο ή ίσο από τον αριθμό των μονοπατιών μήκους l με αρχή την v, δηλαδή μικρότερο ή ίσο από $q \cdot (k-1)^{m-1}$.

Επομένως, το συνολικό πλήθος των κορυφών ισούται με το άθροισμα

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{l=1}^{m} q \cdot (k-1)^{m-1} &= 1 + q\frac{(k-1)^m - 1}{k-1-1} \\ &= 1 + \frac{q}{k-2}\left((k-1)^m - 1\right) \square \end{aligned}$$

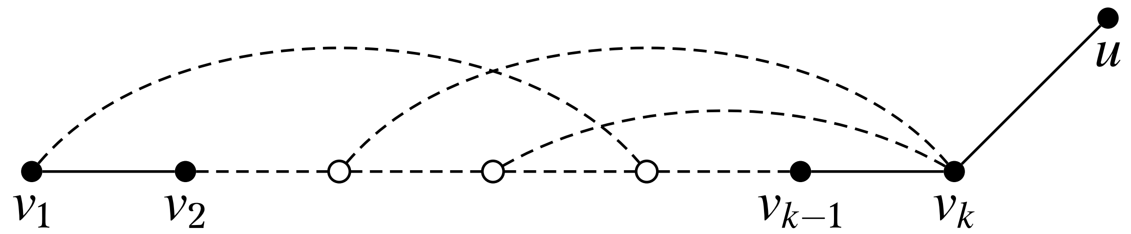
iii) Να δειχθεί ότι αν το G έχει ακτίνα $r(G) = r$, τότε περιέχει το πολύ $1 + \dfrac{k}{k-2}\left((k-1)^r - 1\right)$ κορυφές.

Λύση. Έστω v μια κορυφή που ανήκει στο κέντρο του G (δηλαδή έχει εκκεντρότητα r). Ο βαθμός q της v είναι μικρότερος ή ίσος του k.

Από το προηγούμενο ερώτημα υπάρχουν το πολύ $1 + \dfrac{q}{k-2}\left((k-1)^r - 1\right) \leqslant 1 + \dfrac{k}{k-2}\left((k-1)^r - 1\right)$ κορυφές του G σε απόσταση από την v μικρότερη ή ίση του r. Όμως, κάθε κορυφή του G απέχει απόσταση το πολύ r από την v, επομένως το G περιέχει το πολύ $1 + \dfrac{k}{k-2}\left((k-1)^r - 1\right)$ κορυφές. $\square$

Άσκηση 16. *i) Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και P ένα μονοπάτι στο G με μέγιστο μήκος. Να δειχθεί ότι τα άκρα του P μπορούν να συνδέονται μόνο με κορυφές του P.*

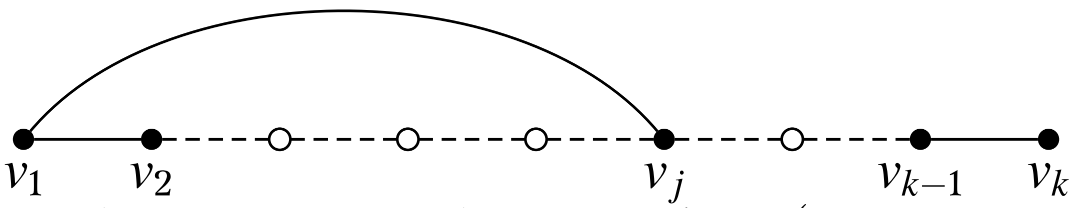
Έστω $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ένα μονοπάτι στο G με μέγιστο μήκος. Αν κάποιο από τα άκρα του, π.χ. η v_k, συνδέεται και με κάποια κορυφή u εκτός του P,



τότε το μονοπάτι $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k, u)$ έχει μεγαλύτερο μήκος από το P, άτοπο. Ομοίως και για το άλλο άκρο, την v_1.

ii) *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών του είναι 2. Να δειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.*

Έστω $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ένα μονοπάτι στο G με μέγιστο μήκος. Τότε τα άκρα του v_1 και v_k συνδέονται μόνο με κορυφές του P. Επειδή ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 2, η v_1 συνδέεται με την v_2 και τουλάχιστον μια ακόμη κορυφή v_j που ανήκει στο P.



Επομένως, το G περιέχει τον κύκλο $(v_1, v_2, \ldots, v_j, v_1)$.