ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: Μέχρι και την Τετάρτη 15 Μαΐου 2024

Να λυθούν οι ασκήσεις **1.1, 1.2, 1.3** και **15 επιπλέον ασκήσεις** από την ενότητα **Γραφήματα**

Σημειώστε τις ασκήσεις για τις οποίες έχετε παραδώσει λύση:

Γραφήματα:

1.1	**1.2**	**1.3**	1.4	1.5	1.6
1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18
1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30

Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στις ασκήσεις που θα παραδώσετε. Συμπληρώστε το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ και σημειώστε με Χ τις ασκήσεις που λύσατε.
Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τις λύσεις σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Τα παραδοτέα της σειράς ασκήσεων είναι **ένα αρχείο 7z** που περιέχει τα αρχεία κώδικα των προγραμμάτων, τα screenshots εκτέλεσης τους και ένα αρχείο σε μορφή pdf με τις λύσεις των ασκήσεων. Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ στο email **jtas@unipi.gr.**
Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι diakrita_askhseis1_pX.7z, όπου Χ ο αριθμός μητρώου σας.
Η σειρά ασκήσεων είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

1.1 Γραφήματα

Άσκηση 1.1 (*Αλγόριθμος Havel - Hakimi*). *Να γραφεί πρόγραμμα που χρησιμοποιεί την βιβλιοθήκη networkx της Python και κατασκευάζει, αν υπάρχει, ένα γράφημα με δοσμένη ακολουθία βαθμών. Ο κώδικάς σας να μην χρησιμοποιεί την μέθοδο havel_hakimi_graph() της βιβλιοθήκης networkx αλλά να υλοποιήσετε την εκδοχή του αλγόριθμού Havel - Hakimi που περιέχεται στις σημειώσεις. (Συγκεκριμένα, στην κατασκευή να επιλέγεται τυχαία η επόμενη κορυφή που θα συνδεθεί με τις υπόλοιπες, αντί για την κορυφή με τον μέγιστο βαθμό).*

Το παραδοτέο της άσκησης αποτελείται από το αρχείο του κώδικα με όνομα hh.py και από screenshots εκτέλεσης του προγράμματος για τις ακολουθίες βαθμών $5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$ *και* $6, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$.

Άσκηση 1.2. *(Κώδικας Prüfer) Να γραφεί πρόγραμμα που δέχεται ως είσοδο μια ακολουθία* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ *μήκους* $n-2$ *με στοιχεία* $a_i \in [n]$, $i \in [n-2]$ *και χρησιμοποιώντας μεθόδους της βιβλιοθήκης networkx κατασκευάζει ένα δένδρο ζεύξης* T *με σύνολο κορυφών* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *του οποίου η κωδικοποίηση Prüfer είναι η* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$. *Για την υλοποίηση να μην χρησιμοποιηθεί η έτοιμη συνάρτηση που διαθέτει η βιβλιοθήκη για τους κώδικες Prüfer αλλά να κάνετε την δική σας υλοποίηση.*

Το παραδοτέο που αφορά το πρόγραμμα αποτελείται από το αρχείο του κώδικα με όνομα p12345_prufer.py και από screenshots εκτέλεσης του προγράμματος για ακολουθίες μήκους 15 *που κατασκευάζουν δένδρα με* 17 *κορυφές (όπου p12345 είναι ο αριθμός μητρώου σας).*

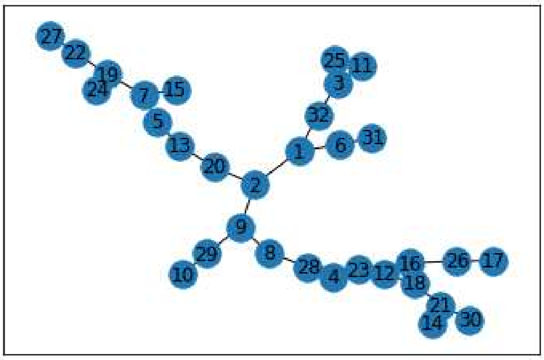
Άσκηση 1.3 (Τυχαία δένδρα ζεύξης). *α) Να γραφεί πρόγραμμα που λαμβάνει ως είσοδο έναν ακέραιο* $n \geq 3$ *και κατασκευάζει μια τυχαία ακολουθία* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ *όπου* $a_i \in [n]$ *για κάθε* $i \in [n]$.

Με τον όρο τυχαία εννοούμε ότι κάθε μια από τις n^{n-2} *ακολουθίες* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ *παράγεται με ίση πιθανότητα.*

β) Έστω $ST(n)$ *το σύνολο όλων των δένδρων ζεύξης που ενώνουν n κορυφές.*

Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του ερωτήματος α) και την κωδικοποίηση Prüfer να γραφεί πρόγραμμα που κατασκευάζει ένα τυχαίο δένδρο ζεύξης του $ST(n)$. *Με τον όρο τυχαίο εννοούμε ότι κάθε ένα από τα* $|ST(n)| = n^{n-2}$ *δένδρα ζεύξης του* $ST(n)$ *παράγεται με ίση πιθανότητα.*

Για παράδειγμα, ένα τυχαίο δένδρο του $ST(30)$ *(περιέχει* $30^{28} \approx 2.28 \cdot 10^{41}$ *δένδρα ζεύξης) είναι το επόμενο:*



γ) Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του ερωτήματος β) να εκτιμήσετε την μέση διάμετρο $\overline{diameter}(30)$ *των δένδρων ζεύξης που ενώνουν το σύνολο των κορυφών* $[30]$.

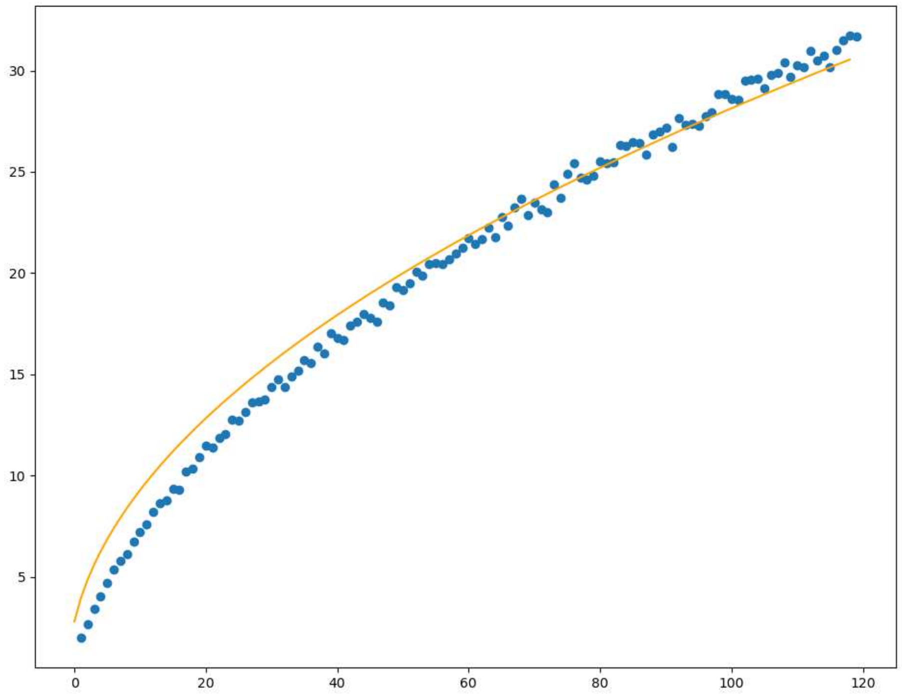
Η πραγματική μέση διάμετρος $\overline{diameter}(n)$ *των δένδρων ζεύξης που ενώνουν το σύνολο των κορυφών* $[n]$ *ισούται με* $\frac{1}{|ST_n|} \sum_{T \in ST_n} diam(T)$ *(δηλαδή το άθροισμα των διαμέτρων όλων των δένδρων* T *του* ST_n *προς το πλήθος των στοιχείων του* ST_n*).*

Η εκτίμηση της διαμέτρου μπορεί να γίνει εμπειρικά κατασκευάζοντας πολλά τυχαία δένδρα $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *του* ST_n *και υπολογίζοντας την μέση διάμετρο αυτών των τυχαίων δένδρων.*

δ) Να εκτιμήσετε την μέση διάμετρο των δένδρων ζεύξης του ST_n *συναρτήσει του n. Η εικασία σας να βασιστεί στις εμπειρικές εκτιμήσεις των μέσων διαμέτρων των δένδρων ζεύξης του* ST_n *για διάφορες τιμές του n (πχ. για* $n = 2, 3, \ldots, 100$.*)*

Η απάντησή σας να έχει την μορφή $\overline{diameter}(n) = an^b$ *όπου* a, b *είναι σταθερές που πρέπει να προσδιορίσετε.*

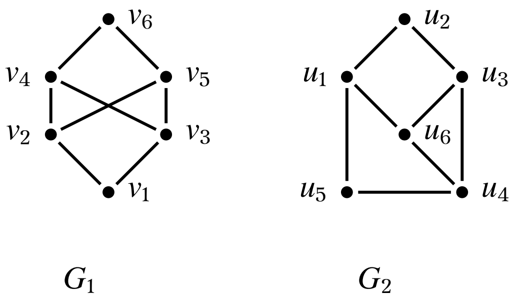
Για παράδειγμα, αν τα μπλε σημεία αντιστοιχεί στις εμπειρικές εκτιμήσεις των μέσων διαμέτρων των δένδρων ζεύξης, αυτό που ζητείται είναι να βρεθεί η εξίσωση $\overline{diameter}(n) = an^b$ *της πορτοκαλί καμπύλης η οποία παρεμβάλλει αυτά τα εμπειρικά δεδομένα.*



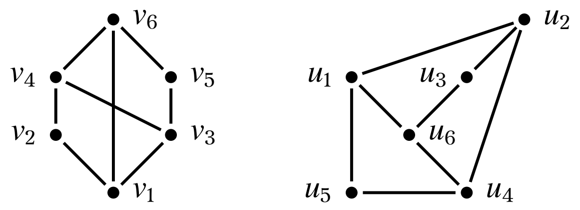
Για τους υπολογισμούς στα ερωτήματα γ) και δ) επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε μέθοδο της βιβλιοθήκης networkx καθώς και όποιες άλλες βιβλιοθήκες επιθυμείτε.

Το παραδοτέο της άσκησης αποτελείται από το αρχείο του κώδικα με όνομα p12345_randtree.py και από screenshots εκτέλεσης του προγράμματος για κάθε ένα από τα επιμέρους ερωτήματα (όπου p12345 είναι ο αριθμός μητρώου σας.)

Άσκηση 1.4 (Πρόβλημα ισομορφισμού –1). *Να εξετασθεί αν τα παρακάτω γραφήματα είναι ισόμορφα. (Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις)*

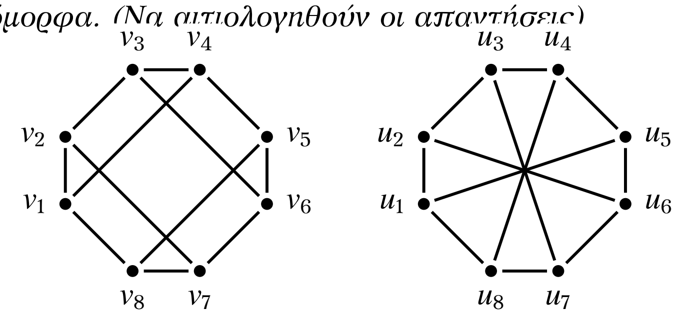


Άσκηση 1.5 (Πρόβλημα ισομορφισμού –2). *Να εξετασθεί αν τα παρακάτω γραφήματα είναι ισόμορφα. (Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις)*



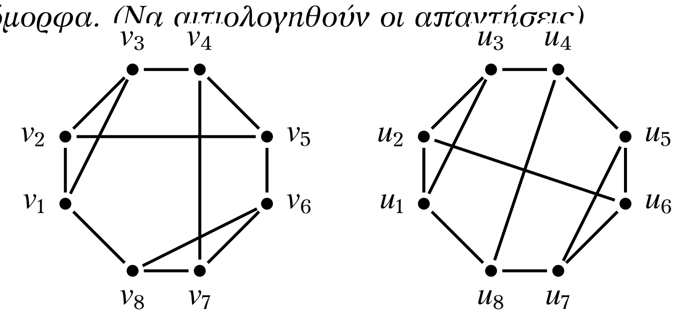
G_3 G_4

Άσκηση 1.6 (Πρόβλημα ισομορφισμού –3). *Να εξετασθεί αν τα παρακάτω γραφήματα είναι ισόμορφα. (Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις)*



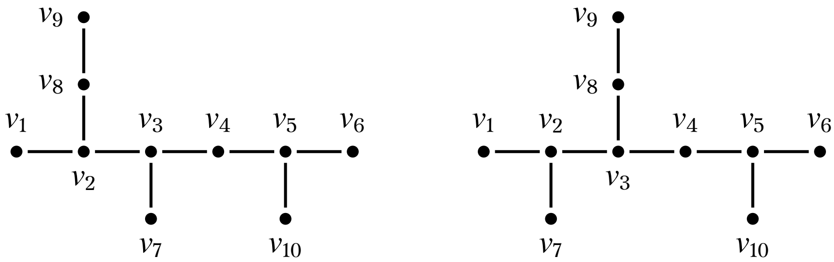
G_5 G_6

Άσκηση 1.7 (Πρόβλημα ισομορφισμού –4). *Να εξετασθεί αν τα παρακάτω γραφήματα είναι ισόμορφα. (Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις)*



G_7 G_8

Άσκηση 1.8 (Πρόβλημα ισομορφισμού –5). *Να εξετασθεί αν τα παρακάτω γραφήματα είναι ισόμορφα. (Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις)*



G_9 G_{10}

Άσκηση 1.9 (*Ακολουθίες βαθμών*). *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει γράφημα δεσμών G με $2n$ κορυφές και ακολουθία βαθμών $(n, n, n-1, n-1, \ldots, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$.*

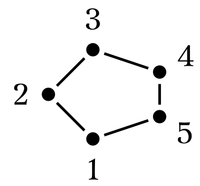
Άσκηση 1.10 (*Ακολουθίες βαθμών δένδρων*). *Έστω δένδρο στο οποίο υπάρχουν n_1 κορυφές βαθμού 1, n_2 κορυφές βαθμού 2, n_3 κορυφές βαθμού 3, …, n_k κορυφές βαθμού k, όπου k είναι ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του. Να δειχθεί ότι*

$$n_1 = (3-2)n_3 + (4-2)n_4 + \cdots + (k-2)n_k + 2.$$

Άσκηση 1.11 (*Διάμετρος συμπληρωματικού γραφήματος*). *Να δειχθεί ότι αν ένα γράφημα G είναι μη συνεκτικό, τότε το συμπλήρωμά του G^c έχει διάμετρο το πολύ 2. Πότε έχει διάμετρο 1; Πότε έχει διάμετρο 2;*

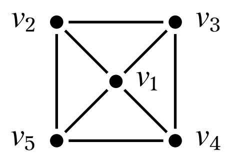
Άσκηση 1.12 (Αριθμός διαδρομών σε κύκλο). *Να βρεθεί το πλήθος των διαδρομών μήκους n με αρχή και τέλος την κορυφή 1 στον κύκλο C_5.*

C_5



Άσκηση 1.13 (*Αριθμός διαδρομών*). *Να δειχθεί ότι ο αριθμός a_n των διαδρομών μήκους n με αρχή την κορυφή 1 και τέλος την κορυφή 2 στο γράφημα W_4*

W_4

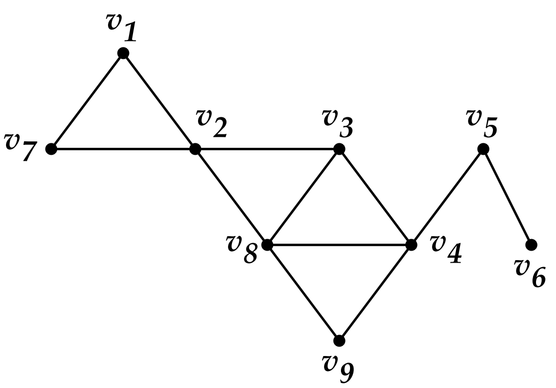


ικανοποιεί την αναγωγική σχέση $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2}$, για $n \geq 2$, όπου $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$.

Παρατήρηση: *Οι αριθμοί των διαδρομών μήκους n με αρχή την κορυφή 1 και τέλος οποιαδήποτε από τις κορυφές 2, 3, 4, 5 είναι ίσοι μεταξύ τους.*

Άσκηση 1.14 (*Εκκεντρότητες*). *Δίδεται το γράφημα G*

G



Να ευρεθούν:

i) *Ο εκκεντρότητες των κορυφών του.*

ii) *Η διάμετρος $d(G)$.*

iii) *Η ακτίνα $r(G)$.*

iv) *Το κέντρο του G.*

v) *Το περιφερειακό σύνολο του G.*

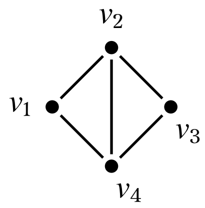
Άσκηση 1.15 (*Διμερή γραφήματα*). *Σε μια αθλητική συνάντηση συμμετείχαν ορισμένοι αθλητές. Κάθε αθλητής αγωνίστηκε σε ακριβώς 6 παιχνίδια και σε κάθε παιχνίδι συμμετείχαν ακριβώς 8 αθλητές. Αν ο αριθμός των παιχνιδιών είναι 15, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που έλαβαν μέρος.*

Άσκηση 1.16 (*Κανονικά γραφήματα*). *Να δειχθεί ότι αν ο αριθμός των κορυφών ενός γραφήματος δεσμών G είναι πολλαπλάσιο του 4 και ο αριθμός των δεσμών του είναι περιττός, τότε το γράφημα G δεν είναι κανονικό (δηλαδή έχει τουλάχιστον δύο κορυφές με διαφορετικούς βαθμούς).*

Άσκηση 1.17 (*Αριθμός γενετικών δένδρων*). *Να βρεθεί ο αριθμός των γενετικών δένδρων των παρακάτω γραφημάτων*

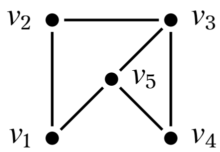
i)

G_1



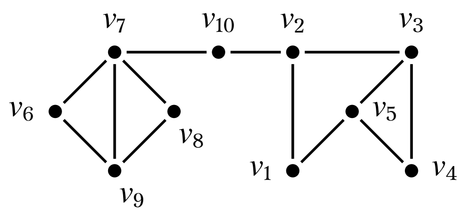
ii)

G_2



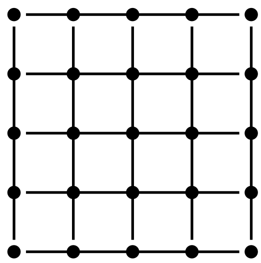
iii)

G_3

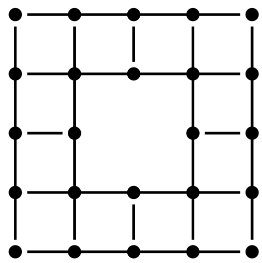


Άσκηση 1.18 (*Κύκλος Hamilton*). *Να εξετασθεί αν κάποιο από τα παρακάτω γραφήματα περιέχει κύκλο Hamilton:*

G_1

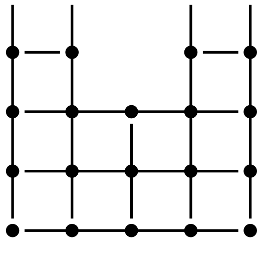


G_2

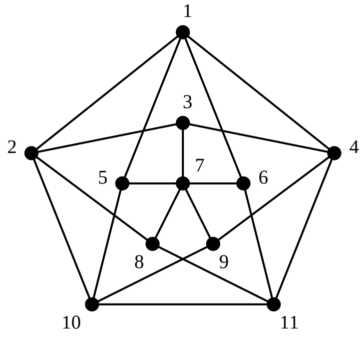


Άσκηση 1.19 (*Κύκλος Hamilton*). *Να εξετασθεί αν κάποιο από τα παρακάτω γραφήματα περιέχει κύκλο Hamilton:*

G_3



$G4$

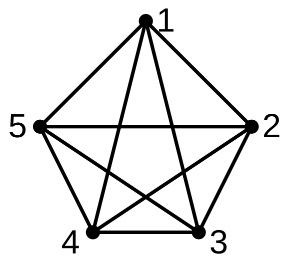


Άσκηση 1.20 (*Κύκλος Hamilton*). *Εστω G ένα κανονικό γράφημα με άρτιο αριθμό κορυφών. Να δειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα G, G^c είναι γράφημα Hamilton.*

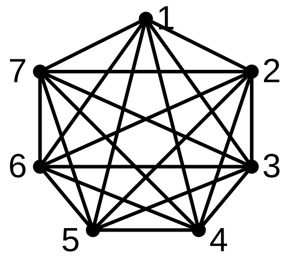
Άσκηση 1.21 (*Κλειστοί δρόμοι Euler στο K_n*).

i) Για ποια $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι το γράφημα K_n να είναι γράφημα Euler;

ii) Να βρεθεί ένας κλειστός δρόμος Euler για το γράφημα K_5:



iii) Να βρεθεί ένας κλειστός δρόμος Euler για το γράφημα K_7:



Άσκηση 1.22 (*Κλειστοί δρόμοι Euler στο K_n*). *Να γραφεί πρόγραμμα σε Python που δέχεται ως είσοδο ένα φυσικό αριθμό n και εκτυπώνει, αν υπάρχει, ένα κλειστό δρόμο Euler για το γράφημα K_n.*

Το παραδοτέο αποτελείται από το αρχείο του κώδικα με όνομα p12345_euler.py και από screenshots εκτέλεσης του προγράμματος για $n = 9$ και $n = 13$, όπου p12345 είναι ο αριθμός μητρώου σας.

Άσκηση 1.23 (*Μονοπάτια μεγίστου μήκους*). *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός των κόμβων του είναι k. Να δειχθεί ότι το G περιέχει μονοπάτι μήκους (τουλάχιστον) k.*

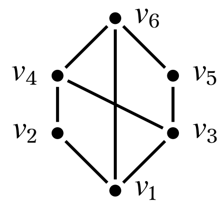
Άσκηση 1.24 (*Μονοπάτια μεγίστου μήκους*). *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός των κόμβων του είναι 4. Να δειχθεί ότι το G περιέχει δύο τουλάχιστον κύκλους που αποτελούνται από διαφορετικούς δεσμούς.*

Άσκηση 1.25 (*Γράφημα τομών υποσυνόλων*). *Έστω S ένα σύνολο και C ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του S. Ορίζουμε το γράφημα $I(C)$ ως εξής: Οι κορυφές του $I(C)$ είναι τα στοιχεία του C, ενώ οι δεσμοί του αποτελούνται από τα ζεύγη $A, B \in C$ με $A \cap B \neq \emptyset$.*

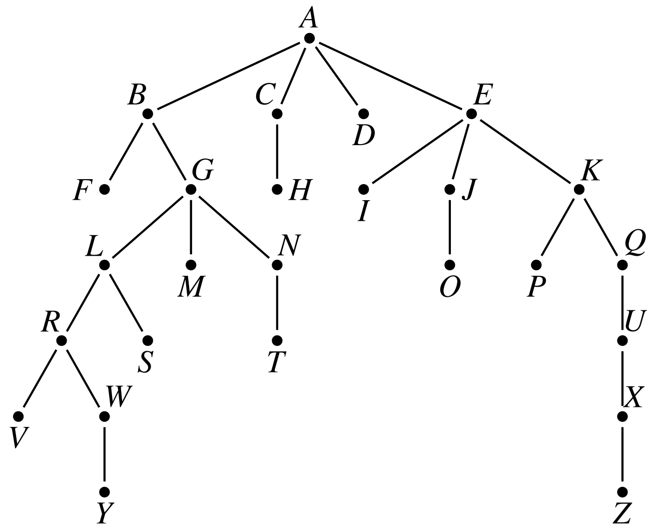
i) Έστω $S = [7]$ και $C = \{\{2,3\},\{3,5\},\{2,3,4\},\{4,5,6\},\{6,7\}\}$. Να σχεδιασθεί το γράφημα $I(C)$.

ii) Έστω $S = [5]$ και C το σύνολο υποσυνόλων του $[5]$ που περιέχουν ακριβώς 2 στοιχεία. Να σχεδιασθεί το γράφημα $I(C)$.

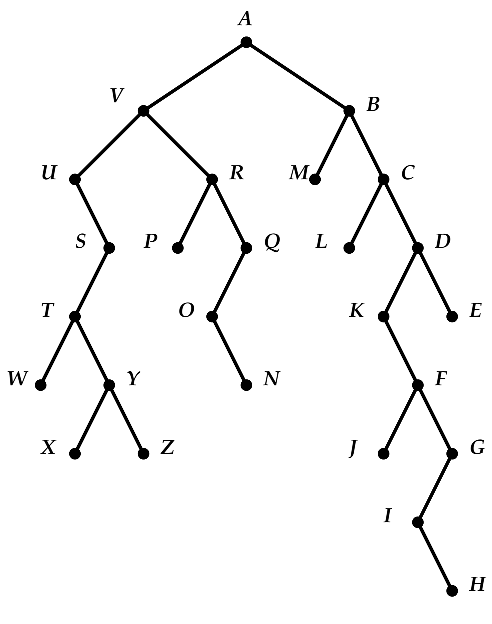
iii) Να βρεθούν 6 υποσύνολα του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε το γράφημα τομών υποσυνόλων που ορίζουν να είναι ισόμορφο με το επόμενο γράφημα:



Άσκηση 1.26 (*Διατρέξεις δένδρων*). *Να γίνει διάτρεξη σε προδιάταξη, ενδοδιάταξη και μεταδιάταξη στο διατεταγμένο δένδρο (με ρίζα A).*



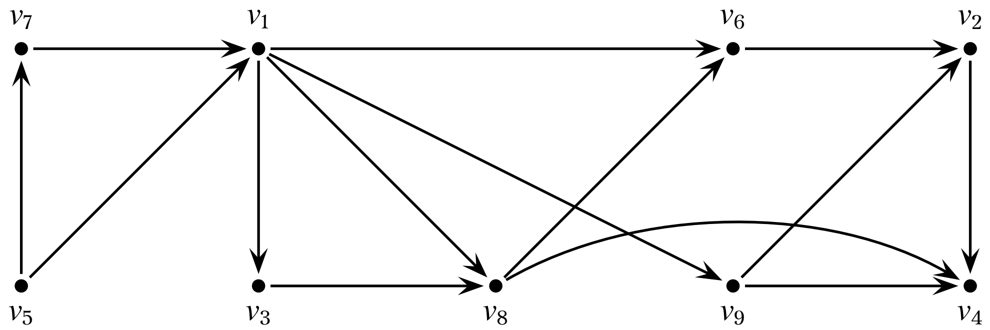
Άσκηση 1.27 (*Διατρέξεις δένδρων*). *Να γίνει διάτρεξη σε προδιάταξη, μεταδιάταξη και ενδοδιάταξη στο δυαδικό δένδρο (με ρίζα A).*



Άσκηση 1.28 (*Διατρέξεις δένδρων*). *Να βρεθεί το δυαδικό δένδρο για το οποίο γνωρίζουμε ότι οι διασχίσεις του ως προς την προδιάταξη και ενδοδιάταξη είναι αντίστοιχα: A B C D E F G H I J K L M N O P Q και B D C F E G A I H K M O N P L J Q.*

Άσκηση 1.29 (*Κίβδηλα νομίσματα*). *Να λυθεί το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων για $n = 7$.*

Άσκηση 1.30 (Συνάρτηση Grundy - Sprague). *Να υπολογισθούν οι τιμές της συνάρτησης Grundy - Sprague για τις κορυφές του επόμενου γραφήματος τόξων.*



v_7
v_1
v_6
v_2
v_5
v_3
v_8
v_9
v_4