

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

3η σειρά ασκήσεων

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: Μέχρι και την Τετάρτη 17 Ιουλίου 2024

Να λυθούν **τουλάχιστον 6 ασκήσεις** από τις επόμενες ενότητες.

Σημειώστε τις ασκήσεις για τις οποίες έχετε παραδώσει λύση:

Συνδυαστικοί αριθμοί – Γεννήτριες συναρτήσεις:

3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	
-----	-----	-----	-----	-----	--

Ασυμπτωτικές ισοδυναμίες:

3.6	3.7	3.8			
-----	-----	-----	--	--	--

Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στις ασκήσεις που θα παραδώσετε. Συμπληρώστε το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ και σημειώστε με X τις ασκήσεις που λύσατε.

Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τις λύσεις σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ στο email jtas@unipi.gr.

Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι **diakrita_askhseis3_pXXXXX.pdf**, όπου XXXXX ο αριθμός μητρώου σας.

Η σειρά ασκήσεων είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

Συνδυαστικοί αριθμοί - Γεννήτριες συναρτήσεις

3.1) (Απαριθμήσεις διατεταγμένων δένδρων) Να υπολογισθεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με 12 δεσμούς

- i) χωρίς περιορισμό.
- ii) που έχουν 4 φύλλα.
- iii) που έχουν βαθμό ρίζας ίσο με 5.
- iv) που το πρώτο υποδένδρο της ρίζας τους έχει 6 φύλλα.
- v) που το πρώτο υποδένδρο της ρίζας τους έχει βαθμό ρίζας ίσο με 5.
- vi) που έχουν ρίζα βαθμού 3 με το πρώτο υποδένδρο της να έχει 3 φύλλα.
- vii) που έχουν 5 φύλλα, 2 από τα οποία είναι φύλλα του πρώτου υποδένδρου.
- viii) που έχουν ρίζα βαθμού 4 με το πρώτο υποδένδρο της να έχει βαθμό ρίζας 2.

Στις απαντήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συντομεύσεις τα σύμβολα για τους αριθμούς Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, Narayana $N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$ και Riordan $R(n, k) = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n}$.

3.2) (Αριθμός επί απεικονίσεων)

- i) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των επί απεικονίσεων από το $[n]$ στο $[k]$ ισούται με $k! \bar{S}(n, k)$.
- ii) Να βρεθεί ο αριθμός των απεικονίσεων $f : A \rightarrow B$ με $|A| = n$, $|B| = k$ και $f(A) = m$, όπου $m \leq k$.

3.3) (Αναθέσεις διαφορετικών εργασιών σε διαφορετικούς ανθρώπους) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να αναθέσουμε 20 διαφορετικές εργασίες σε 15 διαφορετικούς ανθρώπους έτσι ώστε κάθε άνθρωπος να αναλάβει τουλάχιστον μια εργασία.

Στις απαντήσεις σας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συντόμευση το σύμβολο $\bar{S}(n, k)$ των αριθμών Stirling δευτέρου είδους.

3.4) (Γεννήτρια συνάρτηση γραμμικής αναγωγικής σχέσης) Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας f/\mathbb{N} όπου $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, και για $n \geq 3$ ισχύει ότι

$$f(n) = 4f(n-1) - 2f(n-2) + f(n-3).$$

3.5) (Γεννήτριες συνάρτησεις γραμμικού συστήματος αναγωγικών σχέσεων) Να βρεθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών $f, g/\mathbb{N}$ όπου $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$ και για $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(n-1) + 3g(n-2) \\ g(n) &= 4g(n-1) + g(n-2) - 7f(n-2) \end{aligned}$$

Ασυμπτωτικές ισοδυναμίες

3.6) Να δειχθεί ότι $\binom{7n}{5n} \sim \sqrt{\frac{7}{20\pi n}} \left(\frac{7^7}{5^5 \cdot 2^2}\right)^n$.

3.7) Να δειχθεί ότι $\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \sim \frac{4^{n+1}}{3\sqrt{\pi n}}$.

3.8) Να δειχθεί ότι $\sum_{k=0}^n C_k \sim \frac{1}{3} C_{n+1}$.