

Περιεχόμενα

1	Γραφήματα	5
1.1	Εισαγωγή – ιστορικό	5
1.2	Γραφήματα δεσμών	6
1.2.1	Βασικοί ορισμοί	6
1.2.2	Μήτρα και λίστα γειτονικότητας	20
1.2.3	Γραφήματα με συνάρτηση κόστους	22
1.2.4	Ισόμορφα γραφήματα	24
1.2.5	Βασικά αποτελέσματα	25
1.2.6	Συνεκτικότητα	26
1.2.7	Γραφήματα Euler και Hamilton	40
1.2.8	Διμερή γραφήματα	44
1.2.9	Επίπεδα γραφήματα	45
1.3	Δένδρα	51
1.3.1	Βασικοί ορισμοί - Βασικά αποτελέσματα	51
1.3.2	Δένδρα ζεύξης	53
1.3.3	Δένδρα με ρίζα	56
1.3.4	Διατεταγμένα δένδρα	58
1.3.5	Δυαδικά δένδρα	59
1.3.6	Δένδρα αποφάσεων	60
1.4	Διάσχιση δένδρων	62
1.4.1	Διάσχιση δυαδικών δένδρων	62
1.4.2	Διάσχιση διατεταγμένων δένδρων	66
1.5	Γραφήματα τόξων	69
1.5.1	Βασικοί ορισμοί	69
1.5.2	Μήτρα γραφήματος τόξων	73
1.5.3	Τοπολογική διάταξη	73
1.5.4	Συνάρτηση Grundy - Sprague	76
1.6	Λυμένες ασκήσεις	81
1.7	Ασκήσεις προς επίλυση	103
2	Τυπικές Γλώσσες - Αυτόματα	119
2.1	Τυπικές γλώσσες	119
2.1.1	Ορισμοί	119
2.1.2	Πράξεις	120
2.1.3	Λεξικογραφική διάταξη	122
2.2	Αυτόματα	123
2.2.1	<i>D</i> -αυτόματα	123
2.2.2	Λέξεις και αυτόματα	124
2.3	Κανονικές εκφράσεις και κανονικές γλώσσες	125
2.3.1	Κανονικές εκφράσεις	125

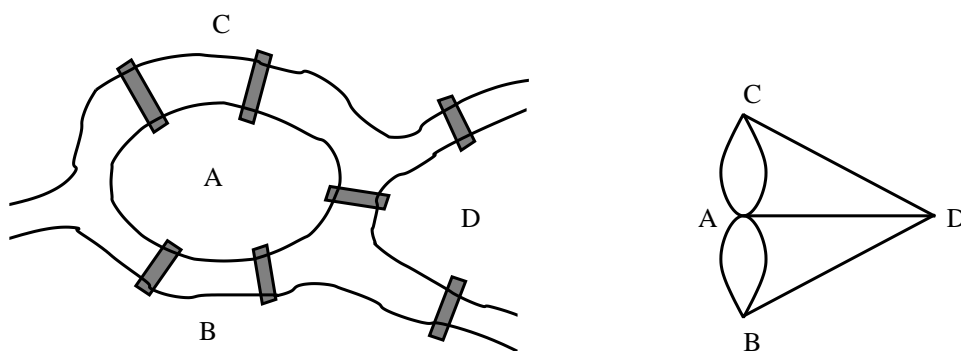
2.3.2	Κανονικές γλώσσες	126
2.3.3	Pumping lemma	127
2.4	Το πρόβλημα των λέξεων	128
2.4.1	Αντικατάσταση	128
2.5	Ασκήσεις	130
3	Βασικοί αριθμοί	135
3.1	Αριθμοί Fibonacci	136
3.1.1	Υποσύνολα του $[n]$ χωρίς διαδοχικούς αριθμούς	137
3.1.2	Το θεώρημα Zeckendorf	140
3.2	Αριθμοί Stirling	144
3.2.1	Αριθμοί Stirling πρώτου είδους	144
3.2.2	Αριθμοί Stirling δεύτερου είδους	148
3.2.3	Σχέσεις αριθμών Stirling πρώτου και δεύτερου είδους	152
3.2.4	Εφαρμογή των αριθμών Stirling δεύτερου είδους	153
3.3	Αριθμοί Bell	155
3.4	Αριθμοί Catalan	159
3.4.1	Δυαδικά δένδρα	159
3.4.2	Λέξεις και μονοπάτια Dyck	162
3.4.3	Τριγωνοποιήσεις κυρτού πολυγώνου	172
3.4.4	Υπολογισμός γινομένου	174
3.4.5	Διατεταγμένα δένδρα	175
3.4.6	Αριθμοί Narayana και αριθμοί Riordan	177
3.4.7	Tableaux Young	181
3.5	Συνδυαστικές κατασκευές	184
3.5.1	Η τεχνική της ανάτρεξης	185
3.5.2	Η αναδρομική και λεξικογραφική τεχνική	191
3.5.3	Λεξικογραφική κατασκευή των μεταθέσεων του $[n]$	193
3.5.4	Λεξικογραφική κατασκευή των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία	200
3.6	Λυμένες ασκήσεις	203
3.7	Ασκήσεις προς επίλυση	216
4	Αναγωγικές εξισώσεις	221
4.1	Εξισώσεις Διαφορών	221
4.2	Αναγωγικές εξισώσεις	221
4.3	Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	222
4.4	Γραμμικές μη ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	227
4.5	Άλλες κατηγορίες γραμμικών αναγωγικών εξισώσεων	231
4.6	Λυμένες ασκήσεις	232
4.7	Ασκήσεις προς επίλυση	241
5	Γεννήτριες συναρτήσεις	243
5.1	Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις	243
5.1.1	Παραδείγματα εύρεσης γεννήτριας συνάρτησης	247
5.1.2	Ο συμβολισμός $[x^n]f^*(x)$	248
5.2	Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις	249
5.2.1	Παραδείγματα εύρεσης εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης	251
5.3	Αντιστροφή	256
5.3.1	Το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange	258
5.4	Εφαρμογές	261
5.4.1	Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	261

5.4.2	Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με πολυωνυμικούς συντελεστές	264
5.4.3	Αριθμοί Fibonacci	267
5.4.4	Αριθμοί Catalan	268
5.4.5	Αριθμοί Motzkin	269
5.4.6	Αριθμοί Fine	272
5.5	Γεννήτριες συναρτήσεις συνόλων	276
5.5.1	Ισοδύναμες παράμετροι	283
5.6	Γεννήτριες συναρτήσεις δύο μεταβλητών	287
5.7	Διμεταβλητές γεννήτριες συναρτήσεις συνόλων	294
5.8	Λυμένες ασκήσεις	299
5.9	Ασκήσεις προς επίλυση	310
6	Ασυμπτωτική ανάλυση	317
6.1	Σύγκριση ακολουθιών με τη βοήθεια ορίων	317
6.1.1	Ασυμπτωτική ισοδυναμία	317
6.1.2	Μια ιεραρχία	321
6.1.3	Ο συμβολισμός o	322
6.1.4	Λυμένες ασκήσεις	323
6.1.5	Ασκήσεις προς επίλυση	328
6.2	Σύγκριση ακολουθιών με τη βοήθεια φραγμάτων	330
6.2.1	Οι συμβολισμοί O , Ω και Θ	330
6.2.2	Γενίκευση των συμβολισμών O , Ω και Θ	333
6.2.3	Δυναμοσειρές	334
6.2.4	Ασκήσεις προς επίλυση	338
6.2.5	Ασυμπτωτικά σφάλματα	338
6.2.6	Ασυμπτωτική προσέγγιση του $n!$	339
6.3	Ασυμπτωτική προσέγγιση με τη βοήθεια των γεννητριών	344
6.3.1	Άσκήσεις προς επίλυση	348

Κεφάλαιο 1

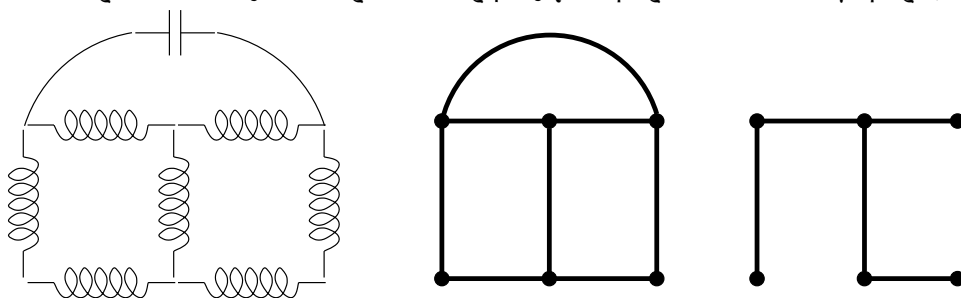
Γραφήματα

1.1 Εισαγωγή - ιστορικό

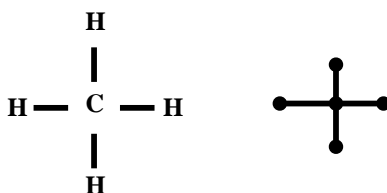


Euler (1736): Γέφυρες του Königsberg

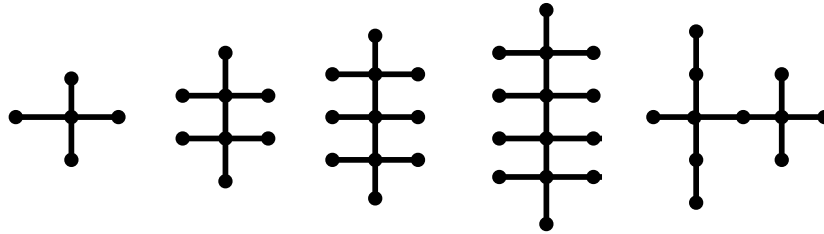
Μπορεί κάποιος να περάσει ακριβώς μια φορά από κάθε γέφυρα;



Kirchhoff (1847): Γενετικό δένδρο



Cayley (1857): Πλήθος κορεσμένων υδρογονάνθρακων C_nH_{2n+2}



Μερικές από τις εφαρμογές της Θεωρίας Γραφημάτων :

Πληροφορική (Δένδρα, Δυαδικά δένδρα, Διατεταγμένα δένδρα, Διάτρεξη (διάσχιση) δένδρων, Προγραμματισμός, Συνδεσμολογία κ.λπ.).

Αλγόριθμοι (Αλγόριθμοι γραφημάτων, Αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος, Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος, Τοπολογική διάταξη, Κατάταξη έργων με προθεσμίες κ.λπ.).

Διοίκηση Επιχειρήσεων (Οργανογράμματα, Κεντρικά σημεία κ.λπ.).

Οδοποιΐα (Οδικά δίκτυα - χωρητικότητα - μέγιστη ροή, Σηματοδότηση δρόμων).

Υδραυλικά (Δίκτυα - χωρητικότητα -μέγιστη ροή).

Ιστορία - Κοινωνιολογία (Γενεαλογικά δένδρα, Φιλία (γραφήματα δεσμών), Έρωτας (γραφήματα τόξων)).

1.2 Γραφήματα δεσμών

1.2.1 Βασικοί ορισμοί

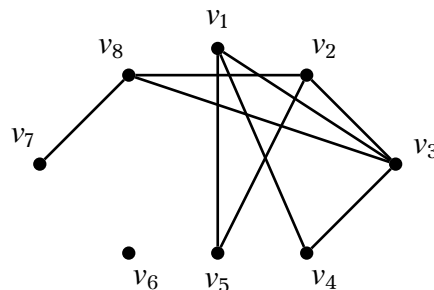
Κάθε δυάδα $G = (V(G), E(G))$, ή (V, E) όπου V είναι ένα μη κενό σύνολο και E είναι ένα σύνολο από (μη διατεταγμένα) ζεύγη $\{v, u\}$, με $v, u \in V$ ονομάζεται **γράφημα δεσμών**, ή **απροσανατόλιστο γράφημα**.

Τα στοιχεία του V καλούνται **κορυφές**, ή **σημεία**, ή **κόμβοι** (vertices, points), ενώ τα στοιχεία του E καλούνται **δεσμοί**, ή **γραμμές**, ή **χορδές**, ή **πλευρές**, ή **ακμές** (edges, lines). Αν $v, u \in V$, με $\{v, u\} \in E$, τότε τα v, u ονομάζονται **άκρα** του δεσμού $\{v, u\}$ και είναι **γειτονικά**. Λέμε επίσης τότε ότι τα v, u **ανήκουν** στο $\{v, u\}$, ή ότι ο $\{v, u\}$ **ενώνει** ή **περιέχει** τα v, u .

Θα ασχοληθούμε εδώ με **πεπερασμένα γραφήματα**, (δηλαδή $|V| \in \mathbb{N}^*$). Το E μπορεί να είναι \emptyset . Συχνά γράφουμε $|V| = n$ και $|E| = m$. Ο πληθάρηθος $|V|$ (αντ. $|E|$) ονομάζεται **τάξη** (order) (αντ. **μέγεθος** (size)) του γραφήματος.

Παράδειγμα:

Η δυάδα $G = (V, E)$ όπου $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ και $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_8\}, \{v_7, v_8\}\}$ είναι ένα γράφημα δεσμών. Η γραφική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:



Στο επόμενο πρόγραμμα χρησιμοποιούμε την βιβλιοθήκη networkx της Python για να ορίσουμε το γράφημα G του πρώτου παραδείγματος.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph() #Create an empty graph

V = [1,2,3,4,5,6,7,8] #V is the set of vertices of G
E = [[1,3],[1,4],[1,5],[2,3],[2,5],[2,8],[3,4],[3,8],[7,8]] #E is the set of edges of G

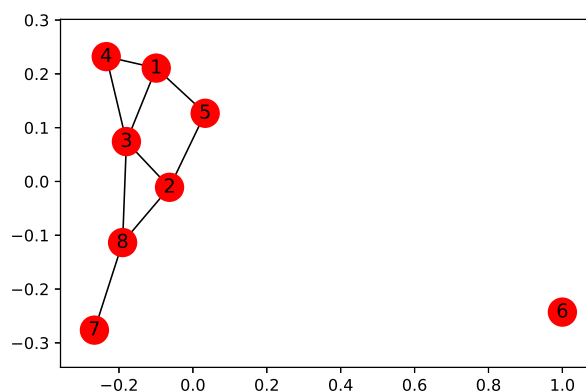
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

print("G has order |V(G)|=",G.order(),"and size |E(G)|=",G.size())
print("V(G):",G.nodes()) #Print the nodes of G
print("E(G):", G.edges()) #Print the edges of G
for v in G:
    print("The neighbors of", v, "are:", list(G.neighbors(v)))

nx.draw_networkx(G) #Draw the graph G
plt.savefig("lect01a.eps") #Save the drawing of G
plt.show() #Show the drawing of G on screen
```

Output:

```
G has order |V(G)|= 8 and size |E(G)|= 9
V(G): [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
E(G): [(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 8), (3, 4), (3, 8), (7, 8)]
The neighbors of 1 are: [3, 4, 5]
The neighbors of 2 are: [3, 5, 8]
The neighbors of 3 are: [1, 2, 4, 8]
The neighbors of 4 are: [1, 3]
The neighbors of 5 are: [1, 2]
The neighbors of 6 are: []
The neighbors of 7 are: [8]
The neighbors of 8 are: [2, 3, 7]
```



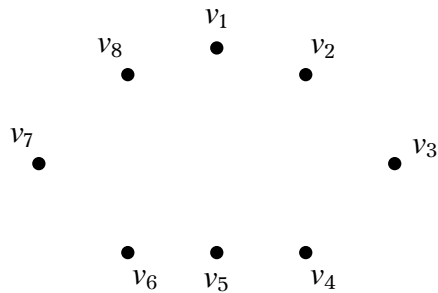
Αν οι v, u ταυτίζονται έχουμε ένα **βρόχο**.

Παρατήρηση: Δεδομένου ότι σε ένα σύνολο επιτρέπεται μια μόνο εμφάνιση κάθε στοιχείου του, από τον ορισμό του γραφήματος δεσμών προκύπτει ότι σε αυτό δεν επιτρέπονται ούτε βρόχοι ούτε πολλαπλοί δεσμοί που να συνδέουν το ίδιο ζεύγος κορυφών. Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται **απλά γραφήματα** και με τέτοια θα ασχοληθούμε, εκτός αν αναφερθεί ρητά το αντίθετο.

Μορφές γραφημάτων

1) **Μηδενικό γράφημα** ονομάζεται ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $E = \emptyset$.

Παράδειγμα:



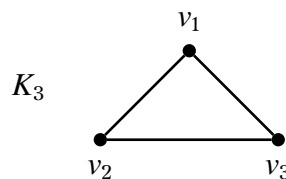
2) **Τετριμμένο γράφημα** ονομάζεται ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $|V| = 1$.



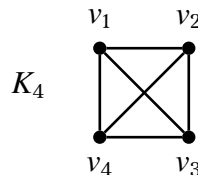
3) **Πλήρες γράφημα** ονομάζεται ένα γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε $\forall u, v \in V$ με $v \neq u$ ισχύει ότι $\{v, u\} \in E$.

Παρατήρηση: Το πλήρες γράφημα με n κόμβους συμβολίζεται με K_n .

Παράδειγμα: Το γράφημα K_3 είναι ένα το



ενώ το γράφημα K_4 είναι το :



Στην βιβλιοθήκη networkx το πλήρες γράφημα με n κορυφές κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο `complete_graph(n)`, ή χρησιμοποιώντας τις επόμενες εντολές:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

n = 7 #number of vertices

Kn = nx.complete_graph(n)
nx.draw_circular(Kn, with_labels=True)
plt.show()

Kn = nx.Graph()
Kn.add_nodes_from(range(1, n+1))
for i in range(1, n+1):
    for j in range(i+1, n+1):
        Kn.add_edge(i, j)
nx.draw_circular(Kn, with_labels=True)
plt.show()
```


- 4) **Τυχαίο γράφημα:** Κάποιες φορές καλούμαστε να δοκιμάσουμε αλγορίθμους ή ιδέες μας πάνω σε διάφορα παραδείγματα γραφημάτων. Μπορούμε να φτιάχνουμε τέτοια “τυχαία” παραδείγματα χρησιμοποιώντας έτοιμες μεθόδους της βιβλιοθήκης networkx ή γράφοντας δικές μας μεθόδους, όπως στα επόμενα παραδείγματα.

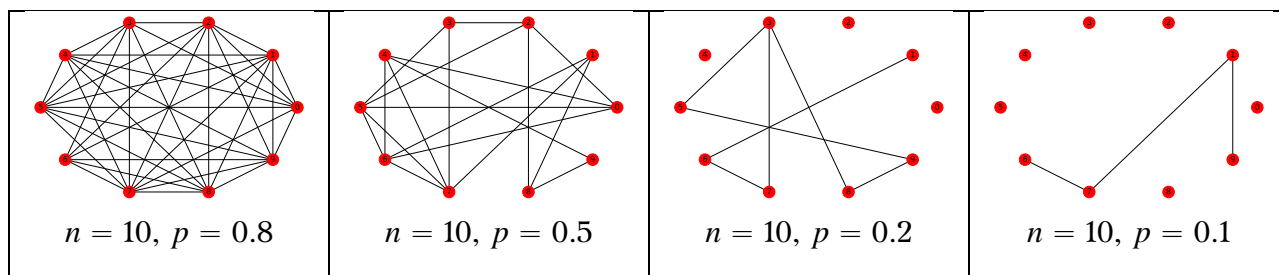
Η πιο απλή ιδέα κατασκευής ενός τυχαίου γραφήματος με n κορυφές είναι το **μοντέλο των Erdős - Renyi** όπου για κάθε ζεύγος κορυφών επιλέγουμε να δημιουργήσουμε τον δεσμό που τις συνδέει με πιθανότητα p .

Ένα τέτοιο γράφημα προκύπτει χρησιμοποιώντας την μέθοδο `gnp_random_graph(n,p)`:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def random_gnp_graph(n,p,name):
    R = nx.gnp_random_graph(n,p)
    nx.draw_circular(R,with_labels=True)
    plt.savefig(name+".eps")
    plt.show()

random_gnp_graph(10,0.8,"R1")
random_gnp_graph(10,0.5,"R2")
random_gnp_graph(10,0.2,"R3")
random_gnp_graph(10,0.1,"R4")
```

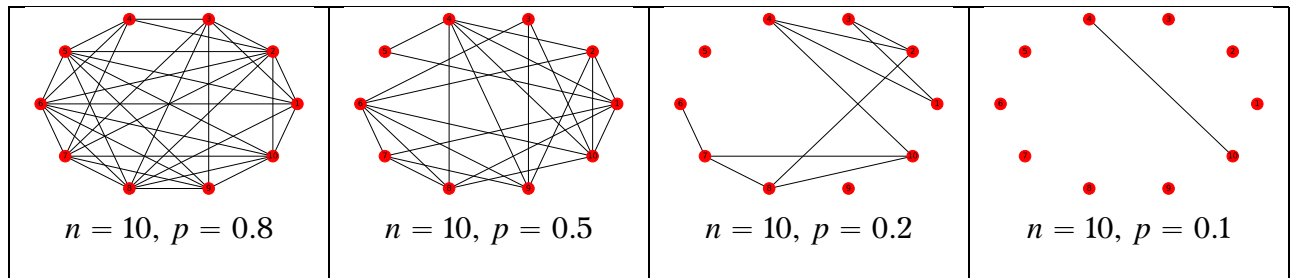


Μια απλή υλοποίηση της μεθόδου `gnp_random_graph(n,p)`:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import random #random numbers

def random_gnp_graph2(n,p,name):
    R = nx.Graph()
    R.add_nodes_from(range(1,n+1))
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(i+1,n+1):
            if random.uniform(0,1) <= p:
                R.add_edge(i,j)
    nx.draw_circular(R,with_labels=True)
    plt.savefig(name+".eps")
    plt.show()

random_gnp_graph2(10,0.8,"R9")
random_gnp_graph2(10,0.5,"R10")
random_gnp_graph2(10,0.2,"R11")
random_gnp_graph2(10,0.1,"R12")
```



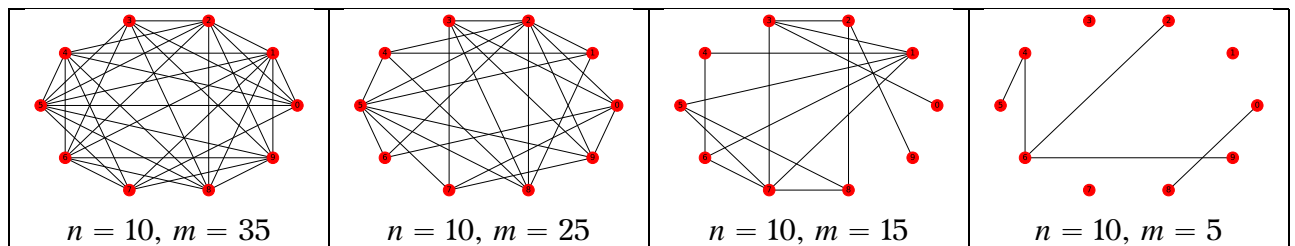
Παρατήρηση: Επειδή κάθε ένας από τους $\binom{n}{2}$ πιθανούς δεσμούς επιλέγεται με πιθανότητα p έπεται ότι το τυχαίο γράφημα που προκύπτει κατά μέσο όρο αναμένεται να έχει $p\binom{n}{2}$ δεσμούς.

Στην περίπτωση όπου θέλουμε το τυχαίο γράφημα να έχει n κορυφές και ακριβώς m δεσμούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο `gnm_random_graph(n,m)`:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def random_gnm_graph(n,m,name):
    R = nx.gnm_random_graph(n,m) #0 <= m <= n(n-1)/2
    nx.draw_circular(R,with_labels=True)
    plt.savefig(name+".eps")
    plt.show()

random_gnm_graph(10,35,"R5")
random_gnm_graph(10,25,"R6")
random_gnm_graph(10,15,"R7")
random_gnm_graph(10,5,"R8")
```



Παρατήρηση (*): Μια υλοποίηση της μεθόδου `gnm_random_graph(n,m)` μπορεί να γίνει κατασκευάζοντας έναν τυχαίο υποσύνολο του $\left[\binom{n}{2}\right]$ με m στοιχεία.

Πηγές ανοιχτών δεδομένων για γραφήματα

Υπάρχουν αρκετοί ιστότοποι με συλλογές ανοιχτών δεδομένων που αφορούν γραφήματα τα οποία εμφανίζονται σε πραγματικές καταστάσεις. Ένας τέτοιος ιστότοπος είναι το Network Repository (<https://networkrepository.com/>):



Network Repository. An Interactive *Scientific* Network Data Repository.
THE FIRST SCIENTIFIC NETWORK DATA REPOSITORY WITH INTERACTIVE VISUAL ANALYTICS.
NEW GraphVis: interactive visual graph mining and machine learning

Home Analytics About Contribute Graph search

First interactive repository, but also the *largest network repository* with thousands of datasets in 30+ domains (from biological to social network data). This large comprehensive collection of network graph data is useful for making significant research findings as well as benchmark network data sets for a wide variety of applications and domains (e.g., network science, bioinformatics, machine learning, data mining, physics, and social science) and includes relational, attributed, heterogeneous, streaming, spatial, and time series network data as well as non-relational machine learning data. All graph data sets are easily downloaded into a standard consistent format. We also have built a multi-level interactive graph analytics engine that allows users to visualize the structure of the network data as well as macro-level graph data statistics as well as important micro-level network properties of the nodes and edges.
Check out GraphVis: the interactive visual network mining and machine learning tool.

GET NETWORK DATA COMPARE GRAPH DATA VISUALIZE NETWORKS

Data & Network Collections. Find and interactively VISUALIZE and EXPLORE hundreds of network data

ANIMAL SOCIAL NETWORKS	418	INTERACTION NETWORKS	25	SCIENTIFIC COMPUTING	11
BIOLOGICAL NETWORKS	27	INFRASTRUCTURE NETWORKS	1	SOCIAL NETWORKS	77
BRAIN NETWORKS	10	LABELLED NETWORKS	100	FACEBOOK NETWORKS	114
COLLABORATION NETWORKS	20	MASSIVE NETWORK DATA	21	TECHNOLOGICAL NETWORKS	12
CHEMIFORMATICS	248	MISCELLANEOUS NETWORKS	2088	WEB GRAPHS	38
CITATION NETWORKS	4	POWER NETWORKS	8	DYNAMIC NETWORKS	115
ECOLOGY NETWORKS	9	PROXIMITY NETWORKS	13	TEMPORAL REACHABILITY	33
ECONOMIC NETWORKS	10	GENERATED GRAPHS	221	BHOSLIB	35
EMAIL NETWORKS	3	RECOMMENDATION NETWORKS	15	DIMACS	78
GRAPH 500	1	ROAD NETWORKS	15	DIMACS10	84
HETEROGENEOUS NETWORKS	15	RETWEET NETWORKS	24	NON-RELATIONAL ML DATA	211

WITH SUPPORT BY

Berkeley Caltech Carnegie Mellon CORNELL Duke Georgia Tech MIT Massachusetts Institute of Technology NOTRE DAME NYU PRINCETON PURDUE STANFORD UNIVERSITY UCLA ILLINOIS UNIVERSITY OF IOWA UNIVERSITY OF MICHIGAN Penn UNC Chapel Hill USC University of Southern California Yale COLUMBIA UNIVERSITY

Συνήθως, τα δεδομένα που αφορούν τα γραφήματα είναι διαθέσιμα σε μορφή αρχείου κειμένου που περιέχει λίστα με δεσμούς του γραφήματος (δύο αριθμοί σε κάθε γραμμή, οι αριθμοί δηλώνουν τις ετικέτες των κορυφών που ενώνει ο δεσμός).

Η βιβλιοθήκη `networkx` έχει την μέθοδο `read_edgelist('filename.edges')` για την ανάγνωση του γραφήματος από το αρχείο `filename.edges` το οποίο περιέχει την λίστα των δεσμών του γραφήματος.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.read_edgelist('realgraphs/email-EU.edges')

print("Number of nodes:", G.order(), "Number of edges:", G.size())
```

Output:

```
Number of nodes: 32430 Number of edges: 54397
```

Επίσης, αρκετά δημοφιλής είναι ο τύπος αρχείου `mtx` (matrix market file) το οποίο εκτός από την λίστα των δεσμών περιέχει το πλήθος των δεσμών και τον συνολικό αριθμό των κορυφών, επίσης μπορεί να περιέχει σχόλια. Για την ανάγνωση αρχείων `mtx` μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος `mmread('filename.mtx')` της βιβλιοθήκης `scipy.io`.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.io import mmread
```

ENRON-ONLY Main > Email Networks > enron-only

enron-only (Email Networks)

Download network data

This network dataset is in the category of Email Networks

EMAIL-ENRON-ONLY .ZIP

.7Z

Visualize email-enron-only's link structure and discover valuable insights using the interactive network data visualization and analytics platform. Compare with hundreds of other network data sets across many different categories and domains.

Tweet
 Share

Network Data Statistics

Nodes	143
Edges	623
Density	0.0613612
Maximum degree	42
Minimum degree	1
Average degree	8
Assortativity	-0.0195359
Number of triangles	2.7K
Average number of triangles	18
Maximum number of triangles	125
Average clustering coefficient	0.433907
Fraction of closed triangles	0.359095
Maximum k-core	10
Lower bound of Maximum Clique	8

[Network Data Preview](#)

Acknowledgements & Citation Policy

Please cite the following if you use the data:

```

@inproceedings{rr,
  title={The Network Data Repository with Interactive Graph Analytics and Visualization},
  author={Ryan A. Rossi and Nesreen K. Ahmed},
  booktitle={AAAI},
  url={https://networkrepository.com},
  year={2019}
}

```

Σχήμα 1.1: Παράδειγμα από το Network Repository

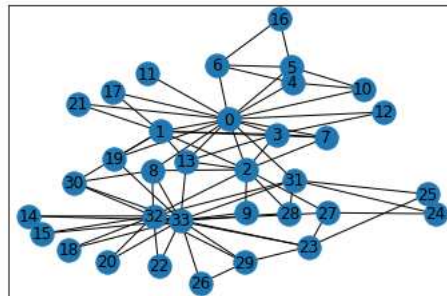
```

a = mmread('realgraphs/soc-karate.mtx')
G = nx.Graph(a)

pos = nx.layout.kamada_kawai_layout(G)
nx.draw_networkx(G, pos)

plt.show()

```

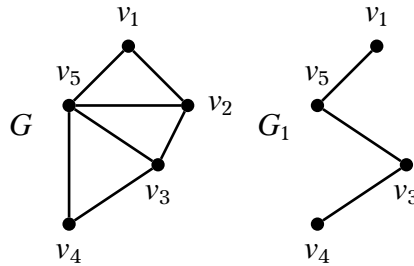


Output:

Υπογραφήματα

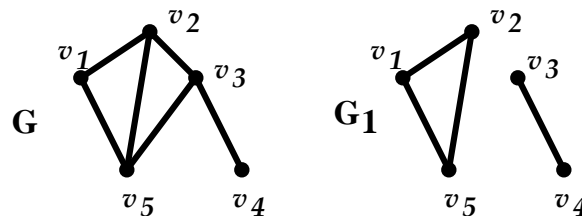
1) **Υπογράφημα** του $G = (V, E)$ ονομάζεται ένα γράφημα $G_1 = (V_1, E_1)$ με $V_1 \subseteq V$ και $E_1 \subseteq E$.

Παράδειγμα:



2) **Γενετικό** (ή **γεννητικό**, ή **μερικό**) **γράφημα**, ή **γράφημα ζεύξης** του $G = (V, E)$ ονομάζεται ένα γράφημα $G_1 = (V_1, E_1)$ με $V_1 = V$ και $E_1 \subseteq E$.

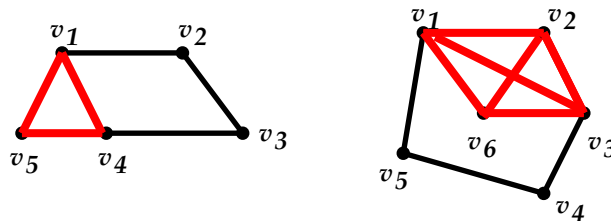
Παράδειγμα:



3) **Κλίκα** ενός γραφήματος ονομάζεται κάθε πλήρες υπογράφημά του.

Μέγιστη κλίκα ενός γραφήματος ονομάζεται κάθε κλίκα του με το μέγιστο δυνατό αριθμό κόμβων.

Παραδείγματα



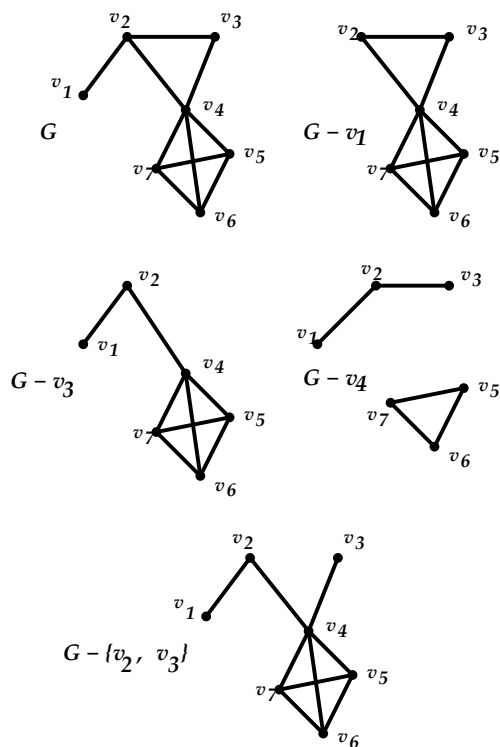
Οι μέγιστες κλίκες των δύο παρακάτω γραφημάτων είναι οι K_3 και K_4 αντίστοιχα.

4) Αν $G = (V, E)$ και $v \in V, e \in E$ ορίζουμε τα υπογραφήματα $G - v, G - e$ ως εξής:

$$V(G - v) = V \setminus \{v\}, E(G - v) = E \setminus \{e_i \in E : v \in e_i\}, \text{ ενώ}$$

$$V(G - e) = V, E(G - e) = E \setminus \{e\}.$$

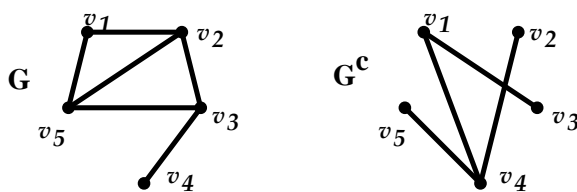
Παραδείγματα



Συμπλήρωμα

Συμπλήρωμα G^c του $G = (V, E)$ με $|V| = n$ ονομάζεται το γράφημα G^c ή \bar{G} ή $G^* = (V, E^c)$ με $E^c = E(K_n) \setminus E(G)$.

Παράδειγμα:



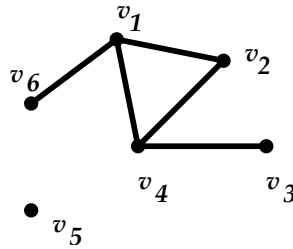
Βαθμός

Αν $G = (V, E)$, για κάθε $v \in V$ ορίζουμε $\Gamma_G(v) = \{u \in V(G) : \{v, u\} \in E(G)\}$.

Τότε $|\Gamma_G(v)|$ ονομάζεται **βαθμός** του κόμβου v και συμβολίζεται με $d_G(v)$, ή $d(v)$, ή $\deg(v)$.

Δηλαδή, βαθμός του v στο G , λέγεται το πλήθος των δεσμών του G των οποίων ο v είναι άκρο.

Παράδειγμα:



Στο παραπάνω γράφημα, οι κόμβοι του έχουν τους ακόλουθους βαθμούς:

$$d(v_1) = d(v_4) = 3,$$

$$d(v_2) = 2,$$

$$d(v_3) = d(v_6) = 1,$$

$$d(v_5) = 0.$$

Κάθε κόμβος βαθμού μηδέν λέγεται **μεμονωμένος** κόμβος.

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται **d -κανονικό** αν $d_G(v) = d$, για κάθε $v \in V$.

Ο **ελάχιστος** (αντ. **μέγιστος**) **βαθμός** των κορυφών ενός γραφήματος G θα συμβολίζεται με $\delta(G)$ (αντ. $\Delta(G)$).

Έστω $G = (V, E)$ με $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Ακολουθία βαθμών του G λέγεται η πεπερασμένη ακολουθία

$$(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)).$$

Παράδειγμα: Η ακολουθία βαθμών του παραπάνω γραφήματος είναι $(3, 3, 2, 1, 1, 0)$.

Παρατήρηση: Συνήθως γράφουμε την ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος σε φθίνουσα σειρά.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph() #Create an empty graph

V = [1,2,3,4,5,6] #V is the set of vertices of G
E = [[1,2],[1,4],[1,6],[2,4],[3,4]] #E is the set of edges of G

G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

DegreeSeq = []
for v in G.nodes:
    DegreeSeq.append(G.degree(v))
    print("Vertex", v, "has degree", G.degree(v))
DegreeSeq.sort(reverse=True)
print("Degree sequence of G:", DegreeSeq)
```

Output:

```
Vertex 1 has degree 3
Vertex 2 has degree 2
Vertex 3 has degree 1
Vertex 4 has degree 3
Vertex 5 has degree 0
Vertex 6 has degree 1
Degree sequence of G: [3, 3, 2, 1, 1, 0]
```

Οι ακολουθίες βαθμών έχουν ορισμένους περιορισμούς, δηλαδή δεν αντιστοιχούν όλες οι ακολουθίες φυσικών αριθμών σε ακολουθίες βαθμών γραφημάτων. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει γράφημα με 5 κορυφές το οποίο έχει ακολουθία βαθμών (6, 4, 4, 4, 4) διότι σε κάθε γράφημα G με 5 κορυφές ισχύει ότι $\Delta(G) \leq 4$.

Μια ακολουθία φυσικών αριθμών (d_1, d_2, \dots, d_n) ονομάζεται **γραφική** (graphical) αν υπάρχει γράφημα G με ακολουθία βαθμών την ακολουθία (d_1, d_2, \dots, d_n) .

Η μηδενική ακολουθία $(0, 0, \dots, 0)$ μήκους n αντιστοιχεί στο μηδενικό γράφημα με n κορυφές.

Πρόταση 1.2.1. Σε κάθε απλό γράφημα δεσμών ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) = 2|E|$.

Απόδειξη. Κάθε δεσμός του γραφήματος συνεισφέρει κατά 2 στο άθροισμα των βαθμών (λόγω των άκρων του). Άρα, οι $|E|$ δεσμοί που περιέχει το γράφημα θα δημιουργούν συνολικό άθροισμα βαθμών $2|E|$. □

Πόρισμα 1.2.2. Σε κάθε απλό γράφημα δεσμών ο αριθμός των κόμβων με περιττό βαθμό είναι άρτιος.

Απόδειξη. Έστω $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ οι (περιττοί σε πλήθος) κόμβοι με περιττό βαθμό. Τότε το άθροισμα των βαθμών των κόμβων αυτών θα ήταν περιττό (έστω Π) ως άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών. Δεδομένου ότι το άθροισμα των βαθμών των κόμβων με άρτιο βαθμό είναι άρτιο (έστω A) ως άθροισμα άρτιων αριθμών, το συνολικό άθροισμα των βαθμών του γραφήματος θα ήταν $\Pi + A$: περιττός, το οποίο σύμφωνα με την Πρόταση 1 είναι άτοπο. Άρα το πλήθος των κόμβων με περιττό βαθμό είναι άρτιο. □

Η επόμενη πρόταση δίνει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για το πότε μια ακολουθία είναι γραφική.

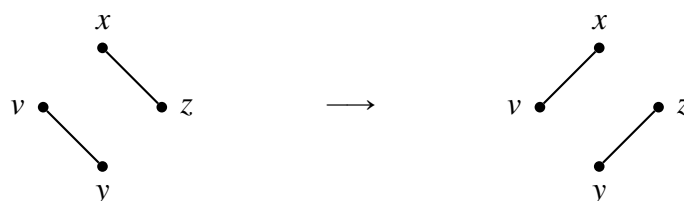
Πρόταση 1.2.3 (Θεώρημα Havel - Hakimi).

Η φθίνουσα ακολουθία (d_1, d_2, \dots, d_n) είναι γραφική αν και μόνο αν n ακολουθία $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n)$ είναι γραφική.

Απόδειξη. Το αντίστροφο είναι προφανές. Πράγματι, δοθέντος ενός γραφήματος με ακολουθία βαθμών d' προσθέτουμε σε αυτό μια νέα κορυφή v η οποία ενώνεται με τις d_1 κορυφές με τον μεγαλύτερο βαθμό, παίρνοντας έτσι ένα γράφημα με ακολουθία βαθμών d .

Για το ευθύ, θεωρούμε ένα γράφημα $G = (V, E)$ με ακολουθία βαθμών d και μια οποιαδήποτε κορυφή v , έστω βαθμού k . Η απόδειξη βασίζεται στην παρατήρηση ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τους δεσμούς του G χωρίς να αλλάξουν οι βαθμοί των κορυφών του, έτσι ώστε η v να συνδέεται με τις (υπόλοιπες) κορυφές που έχουν τους k μεγαλύτερους βαθμούς.

Πράγματι, έστω ότι $x, y \in V$ με $d(x) > d(y)$ και η v έχει γείτονα τον y αλλά όχι τον x .



Επειδή $d(x) > d(y)$ υπάρχει γείτονας z της x που δεν είναι γείτονας της y .

Διαγράφοντας τις ακμές $\{v, y\}$ και $\{x, z\}$ και προσθέτοντας τις ακμές $\{v, x\}$ και $\{y, z\}$ προκύπτει ένα γράφημα G' στο οποίο οι κορυφές διατηρούν τους ίδιους βαθμούς που είχαν στο G και η v συνδέεται με την x .

Επαναλαμβάνοντας αυτόν τον μετασχηματισμό μπορούμε να πετύχουμε την ζητούμενη ιδιότητα.

Τέλος, διαγράφοντας την κορυφή v με τον μέγιστο βαθμό παίρνουμε ένα γράφημα με ακολουθία βαθμών την d' . \square

Παράδειγμα : Σύμφωνα με το θεώρημα Havel - Hakimi η ακολουθία $(6, 6, 4, 4, 2, 2, 2, 2)$ είναι γραφική αν και μόνο αν η ακολουθία

$$(6 - 1, 4 - 1, 4 - 1, 2 - 1, 2 - 1, 2 - 1, 2) = (5, 3, 3, 1, 1, 1, 2)$$

είναι γραφική. Η ακολουθία $(5, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$ είναι γραφική αν η ακολουθία

$$(3 - 1, 3 - 1, 2 - 1, 1 - 1, 1 - 1, 1) = (2, 2, 1, 0, 0, 1)$$

είναι γραφική. Η ακολουθία $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ είναι γραφική αν η ακολουθία

$$(2 - 1, 1 - 1, 1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$$

είναι γραφική. Η ακολουθία $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$ είναι πράγματι γραφική, αφού αντιστοιχεί στο γράφημα,



άρα και η ακολουθία $(6, 6, 4, 4, 2, 2, 2, 2)$ είναι επίσης γραφική.

Το θεώρημα Havel - Hakimi δίνει ένα αναδρομικό κριτήριο για τον έλεγχο του κατά πόσο μια ακολουθία είναι γραφική, και ανάγει το πρόβλημα στον έλεγχο μια ακολουθίας με μήκος ένα λιγότερο από την αρχική. Μπορούμε να εφαρμόσουμε ξανά το θεώρημα στην ακολουθία $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n)$ (αρκεί πρώτα να την διατάξουμε σε φθίνουσα σειρά) και να προκύψει μια ακολουθία με μικρότερο μήκος, μέχρις ότου να καταλήξουμε σε μία ακολουθία για την οποία μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε αν είναι γραφική ή όχι. Οι ακολουθίες που προκύπτουν κατά την αναδρομική εφαρμογή του θεωρήματος Havel - Hakimi είτε είναι όλες γραφικές είτε καμία γραφική.

Για τον έλεγχο ύπαρξης και κατασκευής ενός γραφήματος με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους `is_graphical` και `havel_hakimi_graph` της βιβλιοθήκης `networkx`.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

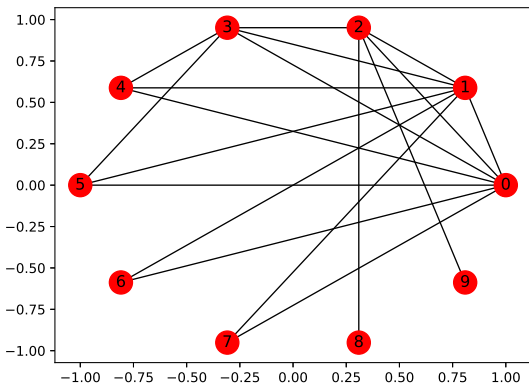
def Graph_Check(Seq):
    if nx.is_graphical(Seq):
        print("The sequence", Seq, "is graphical")
        G = nx.havel_hakimi_graph(Seq)
        nx.draw_circular(G, with_labels=True)
        plt.show()
    else:
        print("The sequence", Seq, "is not graphical")
    print("")

Seq1 = [7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1]
Seq2 = [7, 7, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 1]

Graph_Check(Seq1)
Graph_Check(Seq2)
```

Output:

The sequence [7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1] is graphical



The sequence [7, 7, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 1] is not graphical

Ο αλγόριθμος Havel - Hakimi

Επίσης, το θεώρημα Havel - Hakimi μας προσφέρει μια απλή επαναληπτική μέθοδο για να κατασκευάζουμε γραφήματα με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών.

Συγκεκριμένα, αν (d_1, d_2, \dots, d_n) είναι μια γραφική ακολουθία ο αλγόριθμος κατασκευής χρησιμοποιεί μια βοηθητική ακολουθία (a_1, a_2, \dots, a_n) και λειτουργεί ως εξής:

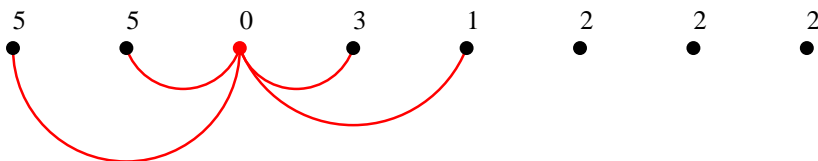
Αρχικά θεωρούμε n κορυφές $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ βαθμού 0 και για κάθε κορυφή σημειώνουμε τον αριθμό a_i των δεσμών που απαιτούνται για να αποκτήσει βαθμό d_i .

Σε κάθε βήμα επιλέγουμε οποιαδήποτε κορυφή, έστω την v_k , με $a_k > 0$, και την συνδέουμε με a_k σε πλήθος κορυφές που έχουν τις μεγαλύτερες δυνατές θετικές τιμές στην ακολουθία (a_1, a_2, \dots, a_n) . Ενημερώνουμε την ακολουθία (a_1, a_2, \dots, a_k) και επαναλαμβάνουμε το βήμα αυτό μέχρις ότου όλα τα a_k γίνουν μηδενικά.

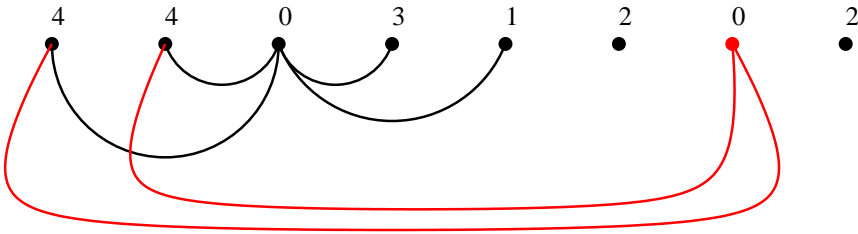
Παράδειγμα : Για να κατασκευάσουμε ένα γράφημα με ακολουθία βαθμών $(6, 6, 4, 4, 2, 2, 2, 2)$ αρχικά θεωρούμε 8 κορυφές βαθμού 0. (Στο σχήμα οι κορυφές v_1, v_2, \dots, v_8 αναπαρίστανται με την σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά και σημειώνονται μόνο οι τιμές της ακολουθίας a_i).



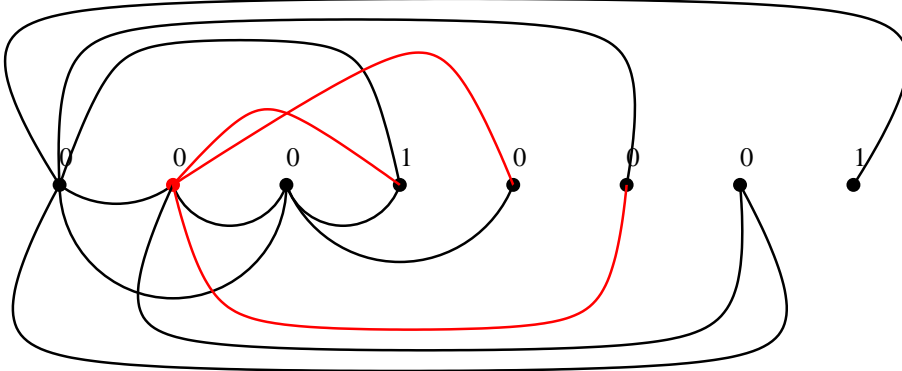
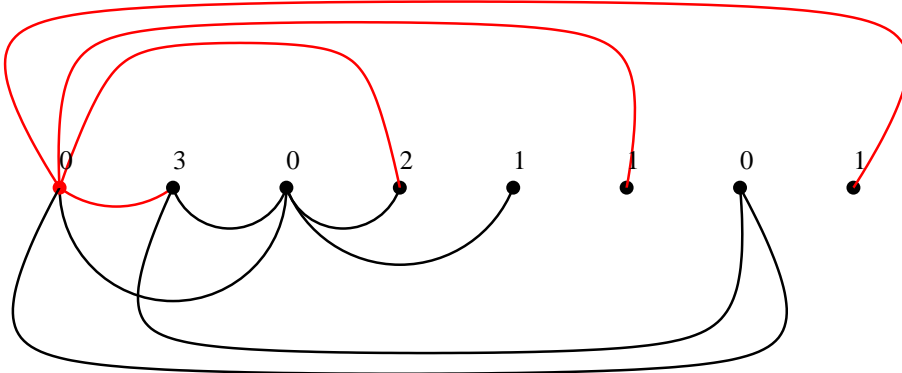
Επιλέγουμε (αυθαίρετα) την κορυφή v_3 (που είναι μαρκαρισμένη με κόκκινο). Η v_3 έχει $a_3 = 4$ οπότε την συνδέουμε με τις 4 κορυφές οι οποίες έχουν τις μεγαλύτερες δυνατές τιμές της ακολουθίας a_i , εδώ είναι οι κορυφές v_1, v_2, v_4 και v_5 , οπότε προκύπτει το επόμενο γράφημα στο οποίο έχουμε ενημερώσει τις αντίστοιχες τιμές των a_i .



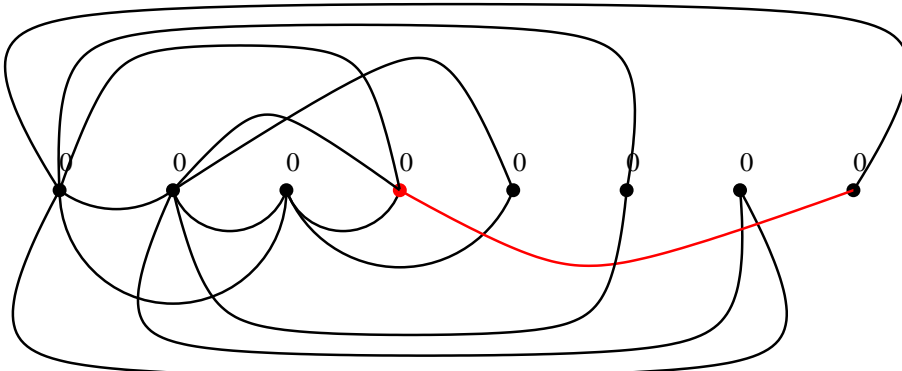
Στην συνέχεια, επιλέγουμε (αυθαίρετα) την κορυφή v_7 για την οποία $a_7 = 2$ και την συνδέουμε με τις 2 κορυφές οι οποίες έχουν τις μεγαλύτερες δυνατές τιμές της ακολουθίας a_i , εδώ είναι οι κορυφές v_1, v_2 , οπότε προκύπτει το επόμενο γράφημα στο οποίο έχουμε ενημερώσει τις αντίστοιχες τιμές των a_i .



Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, επιλέγοντας κορυφές v_k με $a_k > 0$, οπότε προκύπτουν διαδοχικά τα γραφήματα:



και τέλος το γράφημα



το οποίο έχει ακολουθία βαθμών $(6, 6, 4, 4, 2, 2, 2, 2)$.

Παρατηρήσεις : Στην περίπτωση όπου η ακολουθία (d_1, d_2, \dots, d_n) δεν είναι γραφική ο αλγόριθμος θα αποτύχει διότι θα υπάρχουν θετικά a_k αλλά δεν θα υπάρχουν αρκετές διαθέσιμες κορυφές για να συνδεθεί η κορυφή v_k .

1.2.2 Μήτρα και λίστα γειτονικότητας

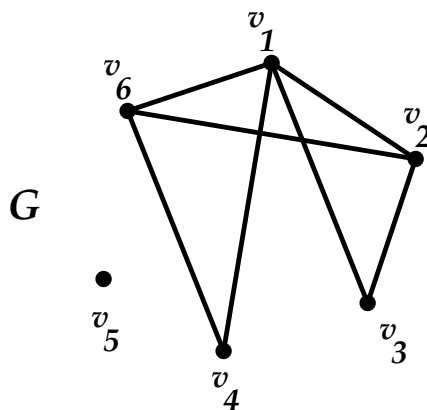
Έστω $G = (V, E)$. Ορίζουμε την $|V| \times |V|$ μήτρα M_G ή M του G ως εξής:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Η μήτρα αυτή ονομάζεται **μήτρα (γειτονικότητας) του γραφήματος δεσμών**.

Παράδειγμα:

Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις

1. Η μήτρα M είναι προφανώς συμμετρική.

2. Ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{|V|} m_{ij} = \sum_{j=1}^{|V|} m_{ji} = d(v_i),$$

(δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης (και με τον βαθμό του κόμβου v_i)).

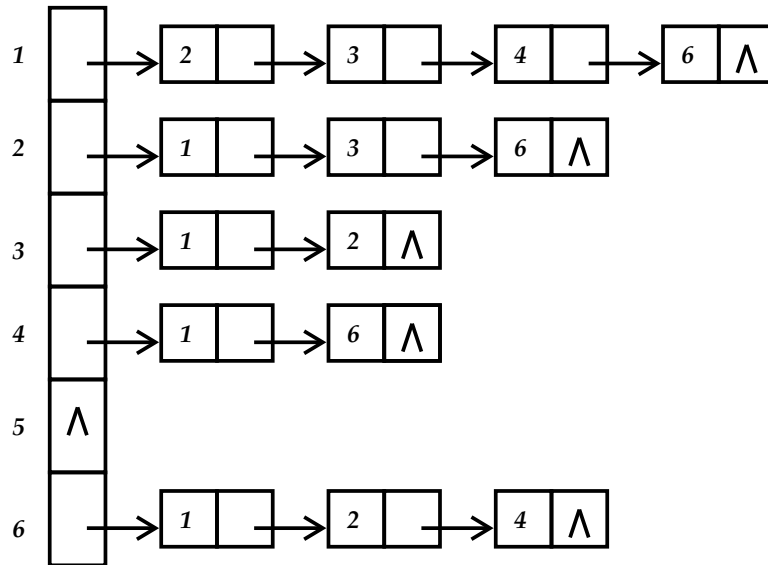
Για να εκφραστούν και να υλοποιηθούν αποδοτικότερα κάποιοι αλγόριθμοι, χρησιμοποιούνται και οι **λίστες γειτονικότητας**.

Σ' αυτές, κάθε γραμμή (λίστα) αντιστοιχεί σε ένα κόμβο $v_i \in V$, ο δείκτης i του οποίου εμφανίζεται ως επικεφαλής δείκτης της λίστας. Τα υπόλοιπα στοιχεία της λίστας έχουν τη μορφή

κόμβος	δείκτης
--------	---------

όπου στην πρώτη θέση εμφανίζεται ο δείκτης ενός κόμβου που συνδέεται με τον v_i , ενώ η δεύτερη θέση συνδέεται με το επόμενο στοιχείο της λίστας (αν υπάρχει και άλλος κόμβος που συνδέεται με τον v_i) ή περιέχει ένα σύμβολο \wedge (αν δεν υπάρχει άλλος κόμβος που συνδέεται με τον v_i).

Παράδειγμα: Για το γράφημα G στην αρχή της παραγράφου, η λίστα γειτονικότητας είναι:



Παρατήρηση: Σε κάθε γραμμή εμφανίζονται όλοι οι κόμβοι που συνδέονται με τον επικεφαλής κόμβο (και όχι κατ' ανάγκη μεταξύ τους).

```

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph()
V = [1,2,3,4,5,6]
E = [[1,2],[1,3],[1,4],[1,6],[2,3],[2,6],[4,6]]
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

print("The (sparse) adjacency matrix of graph G is:")
print(nx.adjacency_matrix(G))
print("The adjacency matrix of graph G is:")
print(nx.adjacency_matrix(G).todense())

pos = nx.circular_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)
plt.show()
  
```

Output:

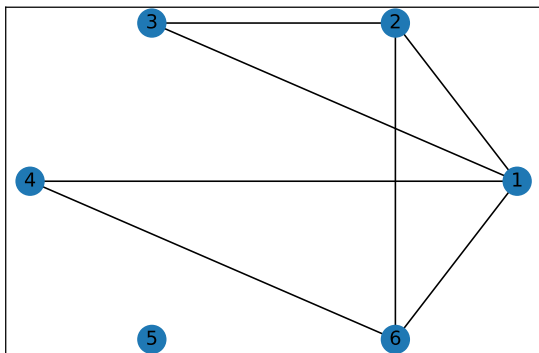
```

The (sparse) adjacency matrix of graph G is:
(0, 1) 1
(0, 2) 1
(0, 3) 1
(0, 5) 1
(1, 0) 1
(1, 2) 1
(1, 5) 1
(2, 0) 1
(2, 1) 1
(3, 0) 1
(3, 5) 1
(5, 0) 1
(5, 1) 1
(5, 3) 1
The adjacency matrix of graph G is:
[[0 1 1 1 0 1]
  
```

```

[1 0 1 0 0 1]
[1 1 0 0 0 0]
[1 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0]
[1 1 0 1 0 0]

```



1.2.3 Γραφήματα με συνάρτηση κόστους

Με ένα γράφημα $G(V, E)$ μπορεί να συσχετισθεί κάποια **συνάρτηση κόστους**, δηλαδή μια συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Οι τιμές $f(\{v_i, v_j\})$ για κάθε $\{v_i, v_j\} \in E$, δίδονται αντίστοιχα και πάνω στο γράφημα.

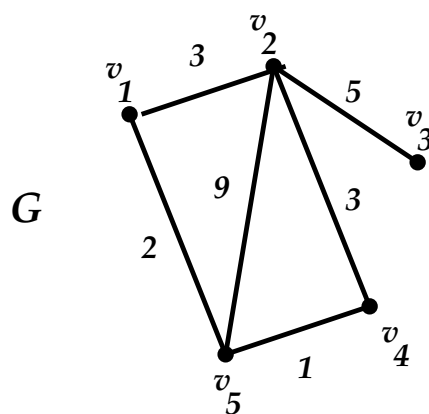
Βασικές έννοιες, όπως ο ισομορφισμός, τα υπογράφηματα κ.λπ. μεταφέρονται κατά προφανή τρόπο στα γραφήματα με συνάρτηση κόστους.

Προφανώς, μπορούμε επίσης να ορίσουμε και την αντίστοιχη μήτρα γειτονικότητας:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} f(\{v_i, v_j\}), & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Παράδειγμα:

Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

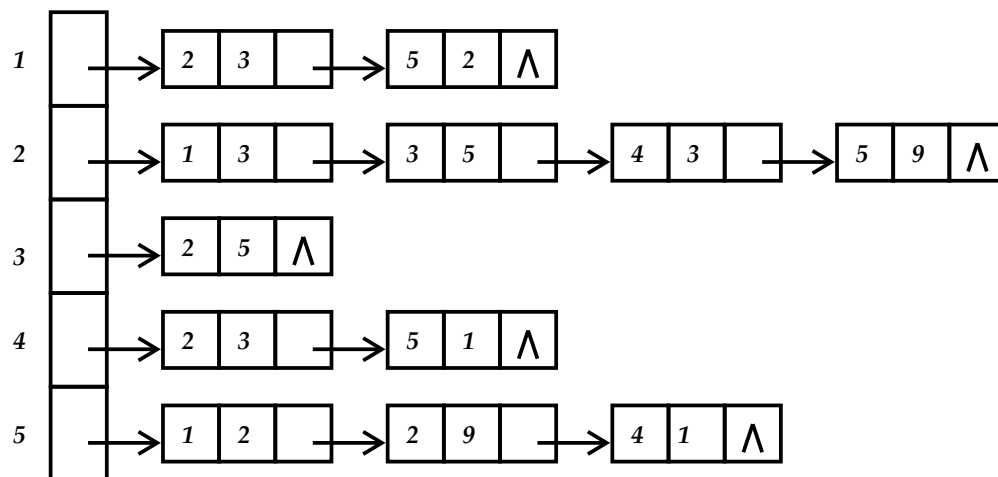
Παρατήρηση: Προφανώς τα γραφήματα χωρίς συνάρτηση κόστους μπορούν να θεωρηθούν σαν ειδική περίπτωση, όπου $f(\{v_i, v_j\}) = 1$, για κάθε $\{v_i, v_j\} \in E$.

Στην περίπτωση που το γράφημα έχει συνάρτηση κόστους, τα στοιχεία της λίστας έχουν την μορφή

κόμβος	κόστος	δείκτης
--------	--------	---------

όπου στη δεύτερη θέση εμφανίζεται το κόστος του αντίστοιχου δεσμού.

Παράδειγμα: Για το γράφημα G η λίστα γειτονικότητας είναι:

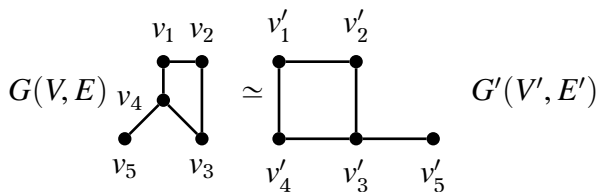


1.2.4 Ισόμορφα γραφήματα

Τα γραφήματα δεσμών $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ ονομάζονται **ισόμορφα** αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : V \rightarrow V'$, με $\{v, u\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(u)\} \in E'$. Αν δύο γραφήματα G και G' είναι ισόμορφα, θα γράφουμε $G \simeq G'$.

Παραδείγματα

Τα επόμενα γραφήματα είναι ισόμορφα



διότι για την $f : V \rightarrow V'$ με

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v'_4, \\ f(v_2) &= v'_1, \\ f(v_3) &= v'_2, \\ f(v_4) &= v'_3, \\ f(v_5) &= v'_5, \end{aligned}$$

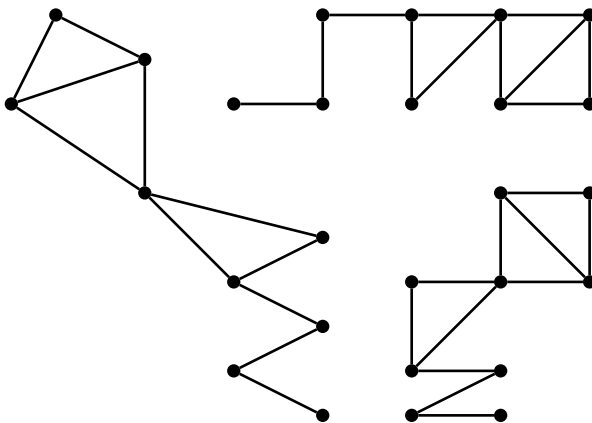
έχουμε πράγματι ότι

$$\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in E',$$

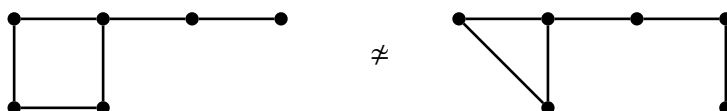
(για παράδειγμα :

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2\} \in E \text{ και } \{v'_4, v'_1\} \in E', \\ \{v_2, v_4\} \notin E \text{ και } \{v'_1, v'_3\} \notin E', \\ \{v_4, v_5\} \in E \text{ και } \{v'_3, v'_5\} \in E, \text{ κ.ο.κ.}). \end{aligned}$$

Τα επόμενα γραφήματα είναι όλα ισόμορφα:



Αντίθετα τα επόμενα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα:



1.2.5 Βασικά αποτελέσματα

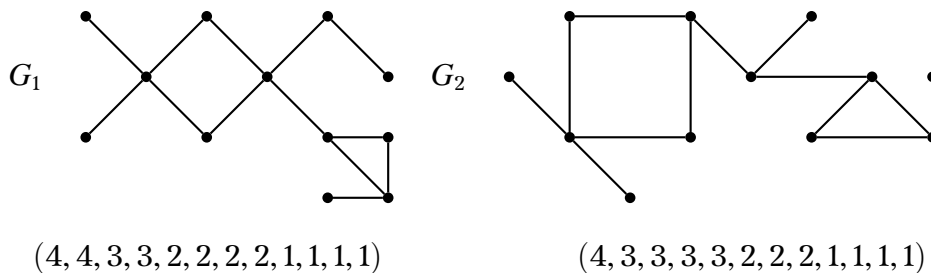
Πρόταση 1.2.4. Αν δύο γραφήματα G, H είναι ισόμορφα, τότε:

i) Έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών, και μάλιστα ισχύει ότι $d_G(v) = d_H(f(v))$, $\forall v \in V(G)$.

ii) Έχουν ισόμορφα υπογραφήματα.

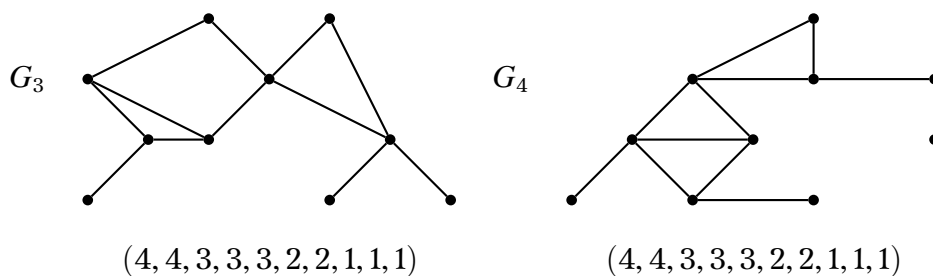
Εφαρμογές

1.



$G_1 \neq G_2$, διότι έχουν διαφορετικές ακολουθίες βαθμών.

2.



$G_3 \neq G_4$, διότι, ενώ έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών, έχουν διαφορετικά υπογραφήματα, (για παράδειγμα, το G_3 περιέχει δύο K_3 , ενώ το G_4 περιέχει τρία K_3).

1.2.6 Συνεκτικότητα

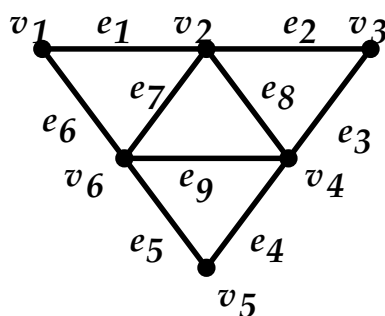
Διαδρομή (walk) που ενώνει τους κόμβους v_i, v_j ενός γραφήματος G (ή $v_i - v_j$ **διαδρομή**) είναι μια ακολουθία της μορφής $(v_i, e_{ik}, v_k, e_{kl}, v_l, \dots, v_r, e_{rj}, v_j)$, όπου e_{st} είναι ο δεσμός του γραφήματος που ενώνει τους κόμβους v_s και v_t . (Συνήθως περιγράφουμε μια διαδρομή μόνο με τους διαδοχικούς κόμβους της: $(v_i, v_k, v_l, \dots, v_r, v_j)$). **Μήκος** μιας διαδρομής ονομάζεται το πλήθος των δεσμών της.

Αν σε μια $v_i - v_j$ διαδρομή του G κάθε δεσμός εμφανίζεται μια μόνο φορά, η διαδρομή λέγεται $v_i - v_j$ **δρόμος** (trail) του G . Αν επιπλέον, σε ένα $v_i - v_j$ δρόμο του G κάθε κόμβος εμφανίζεται μια μόνο φορά, ο δρόμος λέγεται $v_i - v_j$ **μονοπάτι** (path) του G .

Μια $v_i - v_j$ διαδρομή, ή ένας $v_i - v_j$ δρόμος του G , με $v_i = v_j$ λέγεται **κλειστή διαδρομή** του G ή **κλειστός δρόμος** του G . Τέλος, ένας κλειστός δρόμος του G , μήκους n , με n διακεκομμένους κόμβους, λέγεται **κύκλος** του G .

Παράδειγμα:

Για το γράφημα G έχουμε :



$v_1 - v_5$ διαδρομή του G (μήκους 6): $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_9, v_4, e_8, v_2, e_7, v_6, e_5, v_5)$, ή συντομότερα $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ δρόμος του G (μήκους 6): $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ μονοπάτι του G (μήκους 5): $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5)$.

Κλειστή διαδρομή του G (μήκους 7): $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_3, v_2, v_6, v_1)$.

Κλειστός δρόμος του G (μήκους 6): $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1)$.

Κύκλος του G (μήκους 4): $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_1)$.

Πρόταση 1.2.5 (Απαρίθμηση διαδρομών μήκους n). Έστω $G = (V, E)$ γράφημα δεσμών με μήτρα γειννίας M . Ο αριθμός των διαδρομών μήκους n , από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j ισούται με το στοιχείο p_{ij} της μήτρας $M^n = [p_{ij}]$.

Απόδειξη. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n = k$ (και έστω ότι $M = [m_{ij}]$ και $M^k = [p_{ij}]$).

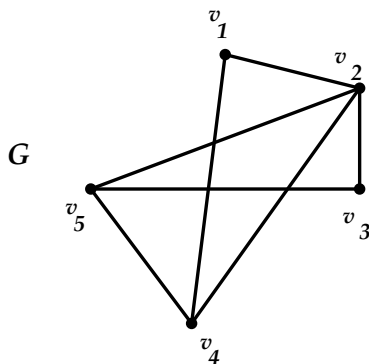
Για $n = k + 1$ θα είναι $M^{k+1} = M^k M = [q_{ij}]$, όπου

$$q_{ij} = \sum_{r=1}^n p_{ir} m_{rj} \quad (1)$$

(όπου $n = |V|$).

Από την υπόθεση της επαγωγής, p_{ir} είναι ο αριθμός των διαδρομών μήκους k από την v_i στην v_r . Επίσης, m_{rj} είναι ο αριθμός των δεσμών (δηλαδή των διαδρομών μήκους 1) από την v_r στην v_j . Τότε το $p_{ir} m_{rj}$ είναι ο αριθμός των διαδρομών μήκους $k + 1$ από την v_i στην v_j , με προτελευταία κορυφή την v_r . Άρα το $\sum_{r=1}^n p_{ir} m_{rj}$ (δηλαδή, λόγω της (1), το q_{ij}) θα είναι ο αριθμός όλων των διαδρομών μήκους $k + 1$ από την v_i στην v_j με προτελευταία κορυφή μιας από τις v_1, v_2, \dots, v_n , δηλαδή θα είναι πράγματι ο αριθμός όλων των διαδρομών μήκους $k + 1$ από την v_i στην v_j . \square

Παράδειγμα: Για το γράφημα



έχουμε

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix},$$

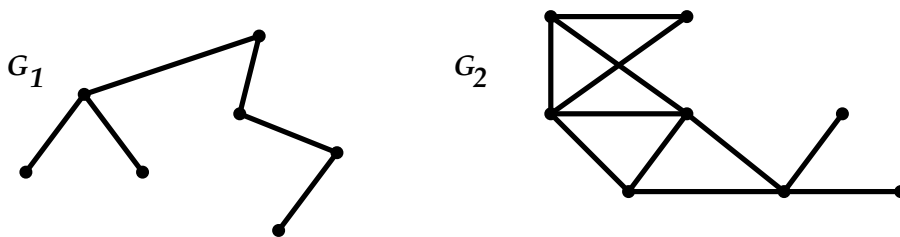
$$M^4 = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 9 & 11 & 14 \\ 13 & 26 & 13 & 19 & 19 \\ 9 & 13 & 11 & 14 & 11 \\ 11 & 19 & 14 & 19 & 14 \\ 14 & 19 & 11 & 14 & 19 \end{bmatrix}, \quad M^5 = \begin{bmatrix} 24 & 45 & 27 & 38 & 33 \\ 45 & 64 & 45 & 58 & 58 \\ 27 & 45 & 24 & 33 & 38 \\ 38 & 58 & 33 & 44 & 52 \\ 33 & 58 & 38 & 52 & 44 \end{bmatrix}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Στην $M^3 = [p_{ij}]$ έχουμε $p_{13} = 3$, άρα υπάρχουν τρεις διαδρομές μήκους 3 από την v_1 ως την v_3 . (Πράγματι, είναι οι (v_1, v_2, v_5, v_3) , (v_1, v_4, v_2, v_3) , (v_1, v_4, v_5, v_3)). Στην $M^4 = [p_{ij}]$ έχουμε $p_{13} = 9$, άρα υπάρχουν εννέα διαδρομές μήκους 4 από την v_1 ως την v_3 .

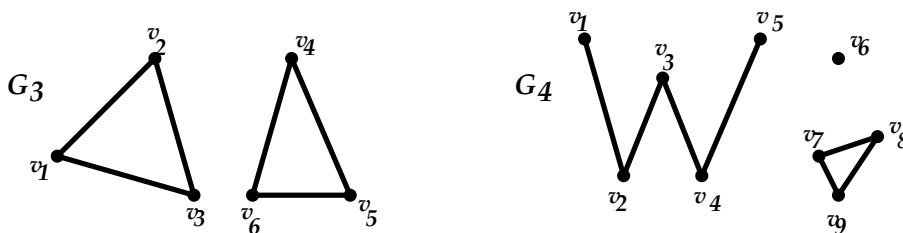
Παρατήρηση: Ο αριθμός των διαδρομών μήκους το πολύ ν από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j είναι ίσο με το στοιχείο a_{ij} της μήτρας $A = \sum_{k=0}^{\nu} M^k = I + M^1 + \dots + M^{\nu}$. (Η μήτρα M^0 είναι η ταυτοτική μήτρα I , και την συμπεριλαμβάνουμε στο άθροισμα διότι κάθε κορυφή θεωρείται διαδρομή μήκους 0 με αρχή και τέλος τον εαυτό της).

Ένα γράφημα λέγεται **συνεκτικό** αν για οποιουσδήποτε δύο κόμβους του, υπάρχει μονοπάτι που τους ενώνει.

Παραδείγματα



Συνεκτικά γραφήματα



Μη συνεκτικά γραφήματα

Συνιστώσα ενός γραφήματος G ονομάζεται κάθε μεγιστικό (maximal) συνεκτικό υπογράφημά του (δηλαδή κάθε συνεκτικό υπογράφημά του που δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου συνεκτικού υπογραφήματος του G).

Προφανώς τα συνεκτικά γραφήματα αποτελούνται από μια μόνο συνιστώσα : τον εαυτό τους.

Παραδείγματα

Στο προηγούμενο σχήμα οι συνιστώσες του G_3 είναι τα δύο τρίγωνα $G_{3,1}$, $G_{3,2}$ με $V(G_{3,1}) = \{v_1, v_2, v_3\}$ και $V(G_{3,2}) = \{v_4, v_5, v_6\}$ αντίστοιχα, ενώ το G_4 έχει προφανώς τρεις συνιστώσες.

Μπορούμε να βρούμε τις συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος με την βοήθεια της μεθόδου `connected_components(G)`. Στο επόμενο πρόγραμμα σχεδιάζουμε με χρώματα τους δεσμούς τους ανάλογα με το μέγεθος κάθε συνιστώσας.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph()
V = [v for v in range(1,10)]
E = [[1,2],[2,3],[3,4],[4,5],[7,8],[7,9],[8,9]]
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

#draw the graph using graphviz layout positioning algorithm
#keep the positions of nodes in order to redraw
pos = nx.drawing.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw(G,pos,with_labels=True)

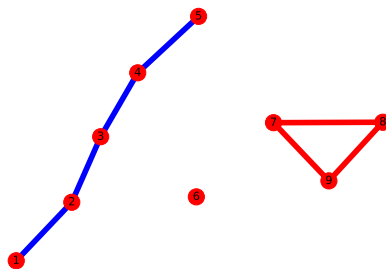
#find the connected components of G
#sort the list from the largest to smaller
Gcc = sorted(nx.connected_components(G), key=len, reverse=True)

#G0 the largest connected components
G0 = G.subgraph(Gcc[0])
#Draw the edges of the largest component
nx.draw_networkx_edges(G0,pos,edge_color='b',width=6.0)

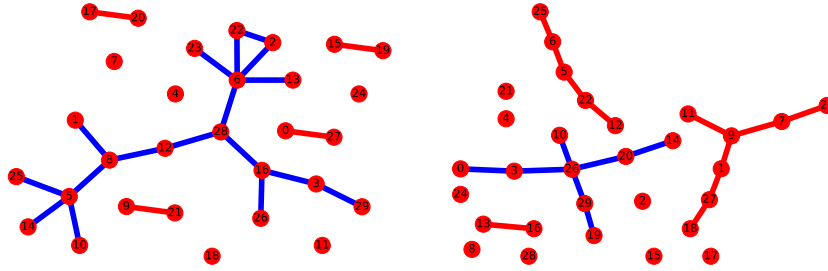
#for every connected components of size > 1 draw its edges
for cc in Gcc[1:]:
    if len(cc) > 1:
        G1 = G.subgraph(cc)
        nx.draw_networkx_edges(G1,pos,edge_color='r', width=6.0)

plt.savefig("lect02a.eps")
plt.show()
```

Output:



Δύο επιπλέον παραδείγματα όπου το γράφημα G έχει κατασκευασθεί με την μέθοδο `nx.gnp_random_graph(30,0.054)`



Απόσταση $d(u, v)$ μεταξύ δύο κορυφών u, v μιας συνιστώσας του G ονομάζεται το ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των διαδρομών που τους συνδέουν.

Μερικοί συγγραφείς επεκτείνουν τον παραπάνω ορισμό, ορίζοντας ως απόσταση μεταξύ δύο κορυφών u, v οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες ενός μη συνεκτικού γραφήματος το ∞ .

Γεωδαιτικό ή **συντομότερο** λέγεται κάθε $u - v$ μονοπάτι ενός γραφήματος G , με μήκος ίσο με $d(u, v)$.

Διάμετρος $d(G)$ ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται το μήκος του μεγαλύτερου γεωδαιτικού του, (δηλαδή η μεγαλύτερη απόσταση ανάμεσα σε όλα τα δυνατά ζεύγη κορυφών). Αν το γράφημα δεν είναι συνεκτικό τότε η διάμετρος του ισούται με ∞ .

Η εύρεση της απόστασης ανάμεσα σε δύο κόμβους u, v ενός γραφήματος μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την αναζήτηση σε πλάτος, ή τους αλγορίθμους του Dijkstra, ή των Bellman - Ford. (Οι δύο τελευταίοι αλγόριθμοι μπορούν να δώσουν απαντήσεις και σε γραφήματα που έχουν βάρη πάνω στους δεσμούς τους.)

Η βιβλιοθήκη networkx έχει τις μεθόδους `shortest_path(G, v, u)` και `shortest_path_length(G, v, u)` που υπολογίζουν ένα γεωδαιτικό μονοπάτι μεταξύ των κορυφών v και u και την απόσταση των v και u αντίστοιχα.

Επιπρόσθετα, υπάρχουν οι μέθοδοι `all_pairs_shortest_path(G)` και `all_pairs_shortest_path_length(G)` που υπολογίζουν ένα γεωδαιτικό μονοπάτι ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη κορυφών και τα αντίστοιχα μήκη τους.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

G = nx.Graph()
V = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
E = [[1, 2], [1, 7], [1, 8], [2, 3], [2, 4], [2, 7], [3, 4], [3, 5], [3, 6],
     [4, 6], [4, 7], [5, 6], [6, 7], [7, 8]]

G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)
pos = nx.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw_networkx(G, pos)

v, u = 1, 4
print("The distance between nodes", v, "and", u, "is:", nx.shortest_path_length(G, v, u))

shortestpaths = dict(nx.all_pairs_shortest_path(G))
for v in G:
    print("A shortest path between", v)
    for u in G:
        print("and", u, "is:", shortestpaths[v][u])

alldistances = dict(nx.all_pairs_shortest_path_length(G))
n = G.order()
D = np.zeros((n, n)) #create a n x n matrix with zero entries
```

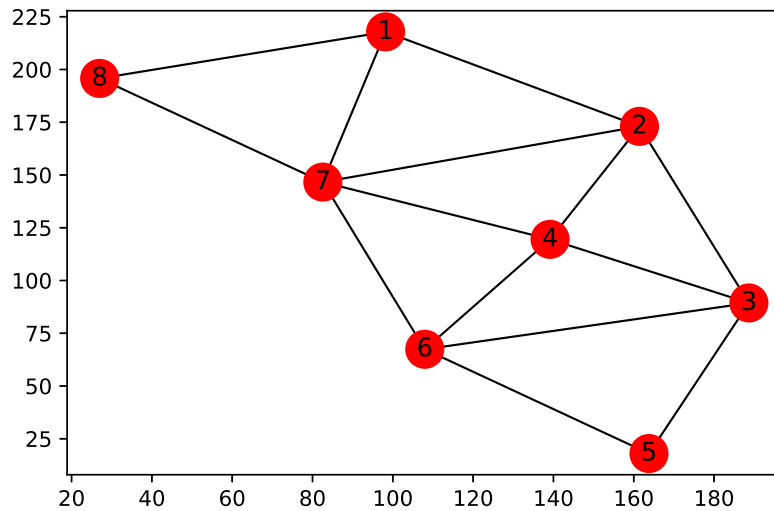
```

for v in G:
    for u in G:
        #D has numbering 0...7 while nodes are numbered 1...8
        D[u-1][v-1] = alldistances[v][u]
print("The distances between all nodes pairs of G are:")
print(D)

plt.show()

```

Output:



```

The distance between nodes
  1 and 4 is: 2
A shortest path between 1
and 1 is: [1]
and 2 is: [1, 2]
and 3 is: [1, 2, 3]
and 4 is: [1, 2, 4]
and 5 is: [1, 2, 3, 5]
and 6 is: [1, 7, 6]
and 7 is: [1, 7]
and 8 is: [1, 8]
A shortest path between 2
and 1 is: [2, 1]
and 2 is: [2]
and 3 is: [2, 3]
and 4 is: [2, 4]
and 5 is: [2, 3, 5]
and 6 is: [2, 3, 6]
and 7 is: [2, 7]
and 8 is: [2, 1, 8]
A shortest path between 3
and 1 is: [3, 2, 1]
and 2 is: [3, 2]
and 3 is: [3]
and 4 is: [3, 4]

```

```

and 5 is: [3, 5]
and 6 is: [3, 6]
and 7 is: [3, 2, 7]
and 8 is: [3, 2, 1, 8]
A shortest path between 4
and 1 is: [4, 2, 1]
and 2 is: [4, 2]
and 3 is: [4, 3]
and 4 is: [4]
and 5 is: [4, 3, 5]
and 6 is: [4, 6]
and 7 is: [4, 7]
and 8 is: [4, 7, 8]
A shortest path between 5
and 1 is: [5, 3, 2, 1]
and 2 is: [5, 3, 2]
and 3 is: [5, 3]
and 4 is: [5, 3, 4]
and 5 is: [5]
and 6 is: [5, 6]
and 7 is: [5, 6, 7]
and 8 is: [5, 6, 7, 8]
A shortest path between 6
and 1 is: [6, 7, 1]
and 2 is: [6, 3, 2]

```

```

and 3 is: [6, 3]
and 4 is: [6, 4]
and 5 is: [6, 5]
and 6 is: [6]
and 7 is: [6, 7]
and 8 is: [6, 7, 8]
A shortest path between 7
and 1 is: [7, 1]
and 2 is: [7, 2]
and 3 is: [7, 2, 3]
and 4 is: [7, 4]
and 5 is: [7, 6, 5]
and 6 is: [7, 6]
and 7 is: [7]
and 8 is: [7, 8]
A shortest path between 8
and 1 is: [8, 1]
and 2 is: [8, 1, 2]
and 3 is: [8, 1, 2, 3]
and 4 is: [8, 7, 4]
and 5 is: [8, 7, 6, 5]
and 6 is: [8, 7, 6]
and 7 is: [8, 7]
and 8 is: [8]

```

```

The distances between all nodes pairs of G are:
[[0. 1. 2. 2. 3. 2. 1. 1.]
 [1. 0. 1. 1. 2. 2. 1. 2.]

```

```
[2. 1. 0. 1. 1. 1. 2. 3.]
[2. 1. 1. 0. 2. 1. 1. 2.]
[3. 2. 1. 2. 0. 1. 2. 3.]
[2. 2. 1. 1. 1. 0. 1. 2.]
[1. 1. 2. 1. 2. 1. 0. 1.]
[1. 2. 3. 2. 3. 2. 1. 0.]]
```

Μερικές φορές θέλουμε να αποκτήσουμε μια συνολική εικόνα για τις πιθανές αποστάσεις που έχουν τα ζεύγη κόμβων του γραφήματος.

Εκκεντρότητα $e(v)$ μιας κορυφή v ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι η μέγιστη απόσταση της v από κάθε άλλη κορυφή u , δηλαδή $e(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v)$

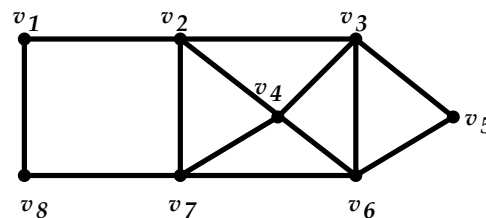
Παρατήρηση : Προφανώς $d(G) = \max_{v \in V(G)} e(v)$ και $e(v) \leq d(G)$.

Ακτίνα $r(G)$ ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι η ελάχιστη εκκεντρότητα, ανάμεσα σε όλους τους κόμβους του G , δηλαδή $r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v)$.

Ο v λέγεται **κεντρικός κόμβος** του συνεκτικού γραφήματος G , αν $e(v) = r(G)$. **Κέντρο** του συνεκτικού γραφήματος ονομάζεται το σύνολο των κεντρικών του κόμβων.

Ο v λέγεται **περιφερειακός κόμβος** του συνεκτικού γραφήματος G , αν $e(v) = d(G)$. **Περιφερειακό σύνολο** του συνεκτικού γραφήματος ονομάζεται το σύνολο των περιφερειακών του κόμβων.

Παράδειγμα:



Οι αποστάσεις μεταξύ της κορυφής v_1 και των κορυφών του γραφήματος G είναι: $d(v_1, v_1) = 0$, $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 2$, $d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_1, v_5) = 3$, $d(v_1, v_6) = 3$, $d(v_1, v_7) = 2$, $d(v_1, v_8) = 1$.

(v_1, v_2, v_4, v_6) : γεωδесικό, (v_1, v_2, v_7, v_6) : γεωδесικό

$(v_1, v_2, v_4, v_7, v_6)$: όχι γεωδесικό

$d(G) = 3$

$e(v_1) = e(v_3) = e(v_5) = e(v_6) = e(v_8) = 3$

$e(v_2) = e(v_4) = e(v_7) = 2$

$r(G) = 2$

Κέντρο του $G = \{v_2, v_4, v_7\}$.

Περιφερειακό σύνολο του $G = \{v_1, v_3, v_5, v_8\}$.

Η βιβλιοθήκη `networkx` διαθέτει τις μεθόδους `radius(G)`, `diameter(G)`, `center(G)` και `periphery(G)` για τον υπολογισμό των αντίστοιχων εννοιών. Υπολογιστικά όμως συμφέρει να υπολογίσουμε μια φορά τις εκκεντρότητες των κορυφών του G με την μέθοδο `eccentricity(G)` και έπειτα, με βάση αυτές, τα υπόλοιπα στατιστικά.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

#create a random graph with n nodes and m edges
n,m = 20,30
G = nx.gnm_random_graph(n,m)
pos = nx.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)

print("G has",nx.number_connected_components(G),"connected component(s)")
```

```

#for every connected component compute the eccentricities of its nodes
#and then its radius, diameter and center
Gcc = nx.connected_components(G)
for cc in Gcc:
    G1 = G.subgraph(cc)      #G1 is a connected component
    #find the eccentricities every node in G1
    eccdict = nx.eccentricity(G1)
    #print the eccentricities of every node in G1
    for v in G1:
        print("The eccentricity of node",v,"is",eccdict[v])

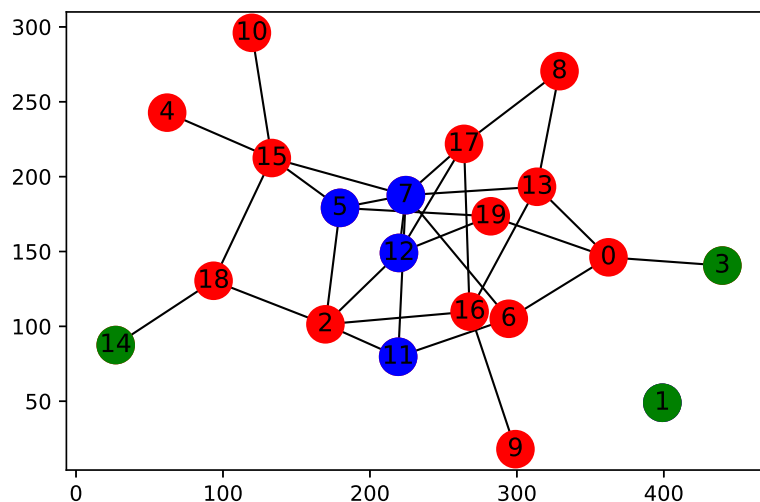
    all_values = eccdict.values()
    G1rad = min(all_values) #compute the radius of G1
    G1diam = max(all_values) #compute the diameter of G1
    #find center of G1
    G1center = []
    G1periphery = []
    for node in eccdict:
        eccnode = eccdict[node]
        if eccnode == G1rad:
            G1center.append(node)
        if eccnode == G1diam:
            G1periphery.append(node)
    print("The connected component",cc,"has radius",G1rad,"diameter",G1diam,"center",
    G1center,"and periphery",G1periphery)

    #color blue the central and peripheral nodes of G1
    G2 = G.subgraph(G1center) #G2 is the induced subgraph of Gcenter
    nx.draw_networkx_nodes(G2,pos,node_color='blue',width=3.0)
    G3 = G.subgraph(G1periphery) #G3 is the induced subgraph of Gperiphery
    nx.draw_networkx_nodes(G3,pos,node_color='green',width=3.0)

plt.show()

```

Output:



```

G has 2 connected component(s)
The eccentricity of node 0 is 5
The eccentricity of node 2 is 4
The eccentricity of node 3 is 6

```

```

The eccentricity of node 4 is 5
The eccentricity of node 5 is 3
The eccentricity of node 6 is 4
The eccentricity of node 7 is 3

```

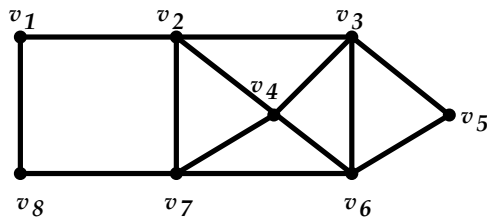

The eccentricity of node 8 is 5
 The eccentricity of node 9 is 5
 The eccentricity of node 10 is 5
 The eccentricity of node 11 is 3
 The eccentricity of node 12 is 3
 The eccentricity of node 13 is 4
 The eccentricity of node 14 is 6
 The eccentricity of node 15 is 4
 The eccentricity of node 16 is 4
 The eccentricity of node 17 is 4
 The eccentricity of node 18 is 5

The eccentricity of node 19 is 4
 The connected component {0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19} has radius 3 diameter 6 center [5, 7, 11, 12] and periphery [3, 14]
 The eccentricity of node 1 is 0
 The connected component {1} has radius 0 diameter 0 center [1] and periphery [1]

Παρατήρηση: Αν $d(v_i, v_j) = d$ τότε το στοιχείο (i, j) της μήτρας M^d ισούται με 0 για κάθε v με $0 \leq v < d$. Άρα, αν ένα γράφημα έχει διάμετρο $d(G)$ τότε για κάθε v με $0 \leq v < d(G)$ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο στην μήτρα M^v .

Πρόταση 1.2.6 (Υπολογισμός διαμέτρου γραφήματος με χρήση μήτρας). Η διάμετρος ενός γραφήματος G με μήτρα γειτνίασης M ισούται με τον ελάχιστο φυσικό αριθμό d για τον οποίο όλα τα στοιχεία της μήτρας $A = \sum_{v=0}^d M^v$ είναι μη μηδενικά. Για κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές n τιμή του d είναι το πολύ $n - 1$.

Παράδειγμα: Η διάμετρος του γραφήματος G



μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση.

```
import numpy as np

M = np.array([[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
              [1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0],
              [0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0],
              [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0],
              [0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0],
              [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0],
              [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1],
              [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]])

rows, cols = M.shape
A = np.zeros((rows, cols))

for i in range(rows):
    A += np.linalg.matrix_power(M, i)
    print("A = sum from M**0 to M**", i)
    print(A)
    print("")
    if(np.count_nonzero(A) == rows*cols): #A does not contain any zeros
        print("The diameter of G is:", i)
        break
```

Output:

```
A = sum from M**0 to M** 0
[[1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
```

```
[0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
[0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0.]
[0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0.]
[0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0.]
[0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0.]
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0.]
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1.]
```

A = sum from M**0 to M** 1

```
[1. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 1.]
[1. 1. 1. 1. 0. 0. 1. 0.]
[0. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 0.]
[0. 1. 1. 1. 0. 1. 1. 0.]
[0. 0. 1. 0. 1. 1. 0. 0.]
[0. 0. 1. 0. 1. 1. 1. 0.]
[0. 1. 0. 1. 0. 1. 1. 1.]
[1. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 1.]
```

A = sum from M**0 to M** 2

```
[3. 1. 1. 1. 0. 0. 2. 1.]
[1. 5. 2. 3. 1. 3. 2. 2.]
[1. 2. 5. 2. 2. 3. 3. 0.]
[1. 3. 3. 4. 2. 3. 3. 1.]
[0. 1. 2. 1. 3. 2. 1. 0.]
[0. 2. 2. 2. 2. 4. 1. 1.]
[2. 2. 3. 2. 1. 2. 5. 1.]
[1. 2. 0. 1. 0. 1. 1. 3.]
```

A = sum from M**0 to M** 3

```
[ 3.  7.  2.  4.  1.  4.  3.  5.]
[ 7.  9. 12.  9.  5.  8. 13.  3.]
[ 2. 11. 10. 10.  8. 12.  7.  4.]
[ 4. 11. 12. 10.  6. 12. 11.  4.]
[ 1.  4.  7.  4.  5.  7.  4.  1.]
[ 3.  5. 10.  5.  6.  8.  9.  1.]
[ 3. 12.  7. 10.  5. 11.  8.  7.]
[ 5.  3.  4.  3.  1.  2.  7.  3.]
```

The diameter of G is: 3

Επομένως, η διάμετρος $d(G)$ του G ισούται με 3.

Επειδή όλα τα συνεκτικά γραφήματα με n κορυφές έχουν διάμετρο το πολύ $n-1$, αυτό δίνει ένα απλό κριτήριο για να ελέγξουμε την συνεκτικότητα ενός γραφήματος χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις της μήτρας γεινίασης του.

Πρόταση 1.2.7 (Έλεγχος συνεκτικότητας γραφήματος με χρήση μήτρας). Ένα γράφημα δεσμών G με n κορυφές και μήτρα γεινίασης M είναι συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε στοιχείο της μήτρας

$$A = \sum_{\nu=0}^{n-1} M^\nu \text{ είναι μη μηδενικό.}$$

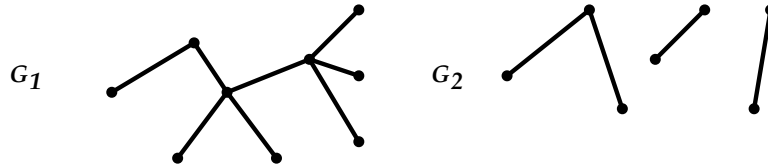
Παρατήρηση: Οι δυνάμεις της μήτρας γεινίασης ενός γραφήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον υπολογισμό της εκκεντρότητας των κορυφών του και της ακτίνας του.

- Η εκκεντρότητα μιας κορυφής v_i ισούται με τον ελάχιστο φυσικό αριθμό d για τον οποίο όλα τα στοιχεία της γραμμής i της μήτρας $A = \sum_{\nu=0}^d M^\nu$ είναι μη μηδενικά.

- Η ακτίνα ενός γραφήματος G ισούται με τον ελάχιστο φυσικό αριθμό r για τον οποίο όλα τα στοιχεία κάποιας γραμμής της μήτρας $A = \sum_{\nu=0}^r M^\nu$ είναι μη μηδενικά.

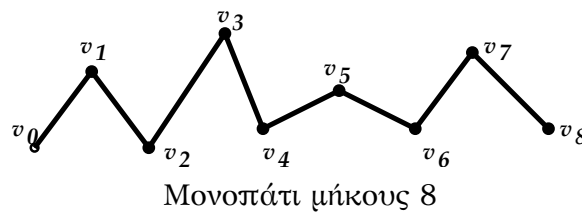
Άκυκλο ονομάζεται ένα γράφημα που δεν έχει κύκλους.

Παραδείγματα



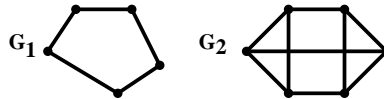
Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ λέγεται $v_0 - v_n$ **μονοπάτι** (ή απλά **μονοπάτι**) μήκους n , αν $d(v_0) = d(v_n) = 1$ και $d(v_i) = 2$, για κάθε $i \in [n - 1]$.

Παράδειγμα:



Ένα συνεκτικό 2-κανονικό γράφημα λέγεται **κύκλος**, ενώ ένα 3-κανονικό γράφημα λέγεται **κυβικό γράφημα**. Ένας κύκλος μήκους n , δηλαδή με n κόμβους, συμβολίζεται με C_n .

Παραδείγματα



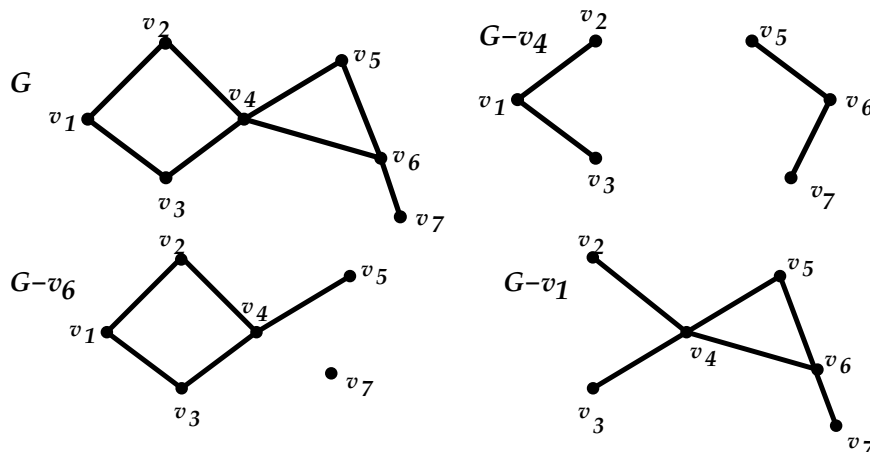
Τα γράφηματα G_1, G_2 είναι κύκλος και κυβικό γράφημα αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Παρατηρείστε τη διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς «μονοπάτι γραφήματος» και «κύκλος γραφήματος» που δόθηκαν νωρίτερα και στους ορισμούς των γραφημάτων «μονοπάτι» και «κύκλος» που δίνονται εδώ.

Κλειδωση (ή **σημείο κοπής**) ενός συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ λέγεται κάθε $v \in V$ τέτοιο ώστε το $G - v$ είναι μη συνεκτικό.

Παραδείγματα

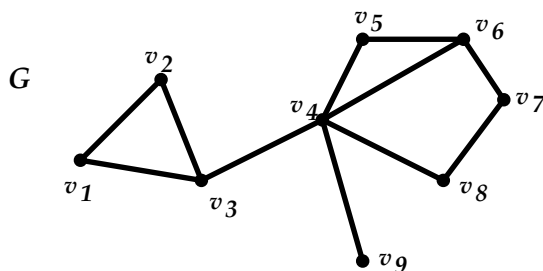
Οι κόμβοι v_4, v_6 του παρακάτω γραφήματος G είναι κλειδώσεις, ενώ ο v_1 δεν είναι.



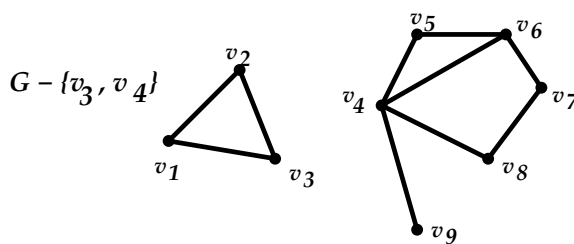
Προφανώς, κλειδώσεις ενός μη συνεκτικού γραφήματος G ονομάζονται οι κλειδώσεις των συνιστωσών του G .

Γέφυρα (ή **ισθμός**) ενός συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ λέγεται κάθε δεσμός $e \in E$ τέτοιος ώστε το $G - e$ είναι μη συνεκτικό.

Παράδειγμα: Για το γράφημα



ο $\{v_3, v_4\}$ είναι γέφυρα, αφού το γράφημα

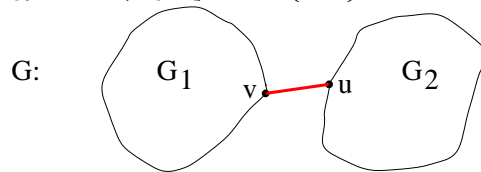


είναι μη συνεκτικό.

Προφανώς, γέφυρες ενός μη συνεκτικού γραφήματος G ονομάζονται οι γέφυρες των συνιστωσών του G .

Πρόταση 1.2.8. Αν ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών G περιέχει μόνο κορυφές με άρτιο βαθμό, τότε δεν περιέχει γέφυρες.

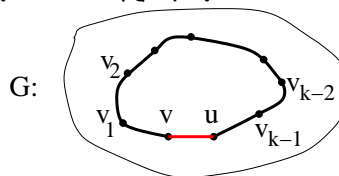
Απόδειξη. Έστω ότι το G περιέχει την γέφυρα $e = \{v, u\}$.



Αν διαγράψουμε από το G την γέφυρα e , στο νέο γράφημα $G - e$ οι κορυφές v, u θα έχουν περιττούς βαθμούς και θα προκύψουν δύο συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2 στις οποίες θα ανήκουν αντίστοιχα τα v, u . Τότε όμως όλες οι υπόλοιπες κορυφές της G_1 θα έχουν άρτιο βαθμό, επομένως το άθροισμα των βαθμών των κορυφών της G_1 θα είναι περιττό, άτοπο. Άρα, το G δεν περιέχει γέφυρα. \square

Πρόταση 1.2.9. Αν ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών G δεν περιέχει γέφυρα, τότε κάθε κορυφή του ανήκει πάνω σε κάποιο κύκλο.

Απόδειξη. Έστω $e = \{v, u\}$ ένας δεσμός του γραφήματος.



Αφού ο δεσμός e δεν είναι γέφυρα το γράφημα $G - e$ είναι συνεκτικό, άρα υπάρχει μονοπάτι $P = (v, v_1, v_2, \dots, v_k = u)$ στο $G - e$ που συνδέει τις κορυφές v και u . Επομένως, στο G η v ανήκει στον κύκλο $(v, v_1, v_2, \dots, u, v)$. \square

Μπορούμε να εντοπίσουμε τις γέφυρες και τις κλειδώσεις ενός γραφήματος χρησιμοποιώντας τις μεθόδους `bridges(G)` και `articulation_points(G)`.

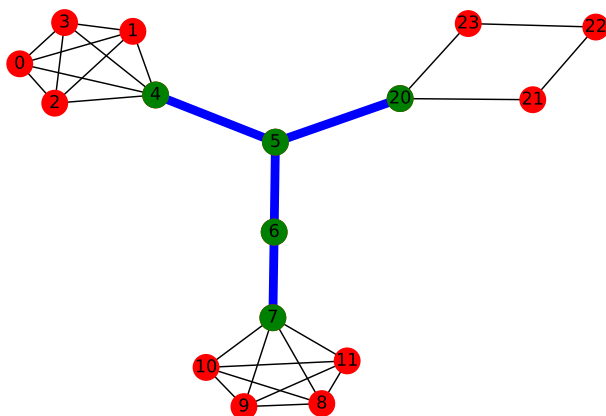
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.barbell_graph(5,2)
G.add_edges_from([[5,20],[20,21],[21,22],[22,23],[23,20]])

pos = nx.drawing.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw(G,pos,with_labels=True)
#nx.draw_networkx(G)
B = list(nx.bridges(G))
print("Bridges of G:",B)
for e in B:
    G1 = G.subgraph(e)
    nx.draw_networkx_edges(G1,pos,edge_color='blue',width=6.0)
C = list(nx.articulation_points(G))
print("Cut points of G:",C)
for v in C:
    G1 = G.subgraph(v)
    nx.draw_networkx_nodes(G1,pos,node_color='green',width=6.0)
plt.savefig("barbell52.eps")
plt.show()
```

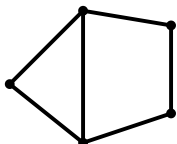
Output:

Bridges of G : $[(4, 5), (5, 6), (5, 20), (6, 7)]$
 Cut points of G : $[7, 6, 5, 20, 4]$



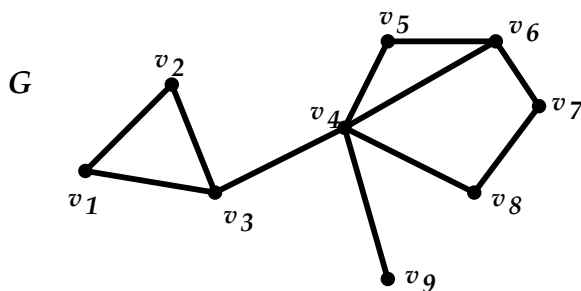
Ένα μη τετριμμένο, συνεκτικό γράφημα χωρίς κλειδώσεις λέγεται **μη διαχωρίσιμο** (ή **συμπαγές**, ή **δισυνεκτικό**).

Παράδειγμα: Το παρακάτω γράφημα είναι μη διαχωρίσιμο:

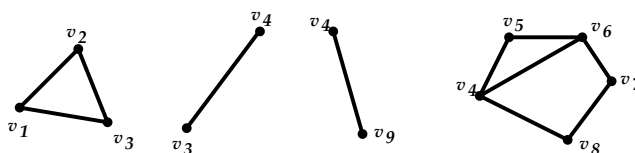


Αν το H είναι ένα μεγιστικό μη διαχωρίσιμο υπογράφημα του G (δηλαδή το H δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου μη διαχωρίσιμου υπογραφήματος του G) τότε λέγεται **μπλοκ** (ή **δισυνεκτική συνιστώσα**) του G .

Παράδειγμα: Τα μπλοκ του γραφήματος



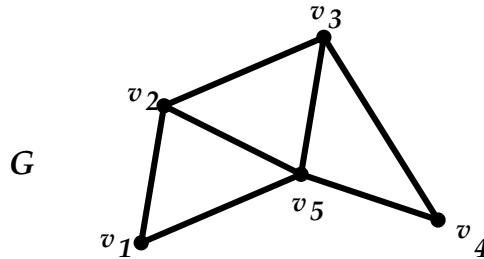
είναι τα



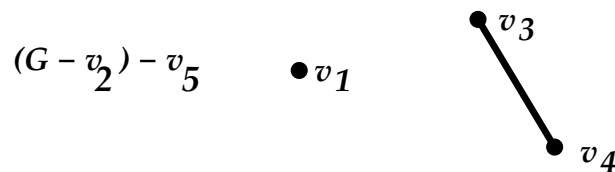
Σύνολο κλειδώσεων ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ τέτοιο ώστε το $((((G - v_1) - v_2) - \dots) - v_n$ να είναι μη συνεκτικό.

Ένα γράφημα ονομάζεται k -**συνεκτικό** (k -connected) αν κάθε σύνολο κλειδώσεων του περιέχει τουλάχιστον k κορυφές. Με άλλα λόγια, αν το G είναι k -συνεκτικό τότε το γράφημα που προκύπτει από την διαγραφή οποιουδήποτε συνόλου $k - 1$ κορυφών του G είναι επίσης συνεκτικό.

Παράδειγμα: Το γράφημα



είναι 2-συνεκτικό, αφού το σύνολο $\{v_2, v_5\}$ είναι ένα ελάχιστο σύνολο κλειδώσεων:



Παρατήρηση. Αν ένα γράφημα G είναι $(k + 1)$ -συνεκτικό, τότε είναι και k -συνεκτικό. Πράγματι, αφού το G είναι $(k + 1)$ -συνεκτικό η διαγραφή οποιονδήποτε k κορυφών του, δεν το κάνει μη συνεκτικό, άρα ούτε και η διαγραφή $k - 1$ κορυφών οδηγεί σε μη συνεκτικό γράφημα, οπότε το G είναι και k -συνεκτικό. Δεν ισχύει το αντίστροφο, αν ένα γράφημα είναι k -συνεκτικό τότε δεν είναι $(k + 1)$ -συνεκτικό.

Στην επόμενη πρόταση δίδεται μια απλή αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα γράφημα να είναι 2-συνεκτικό.

Πρόταση 1.2.10. Ένα γράφημα είναι 2-συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος κορυφών του υπάρχει τουλάχιστον ένα κύκλος που τις περιέχει.

Παράδειγμα : Στο προηγούμενο 2-συνεκτικό γράφημα οι κορυφές v_2 και v_4 ανήκουν στον κύκλο $(v_2v_5v_4v_3v_2)$, οι κορυφές v_2 και v_1 ανήκουν στον κύκλο (v_1, v_2, v_5, v_1) , οι κορυφές v_2 και v_3 ανήκουν στον κύκλο $(v_2, v_1, v_5, v_4, v_3, v_3)$, κ.ο.κ.

Παρατήρηση. Αν ένα γράφημα είναι 2-συνεκτικό τότε για κάθε ζεύγος κορυφών του υπάρχουν 2 τουλάχιστον διαφορετικά μονοπάτια που τους συνδέουν τα οποία, εκτός από τα άκρα τους, περιέχουν διαφορετικές κορυφές το καθένα.

Γενικότερα έχει αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.11 (Whitney, 1932). Ένα γράφημα G είναι k -συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε ζεύγος κορυφών του u, v υπάρχουν k τουλάχιστον διαφορετικά μονοπάτια που τους συνδέουν τα οποία, εκτός από τα άκρα τους, περιέχουν διαφορετικές κορυφές το καθένα.

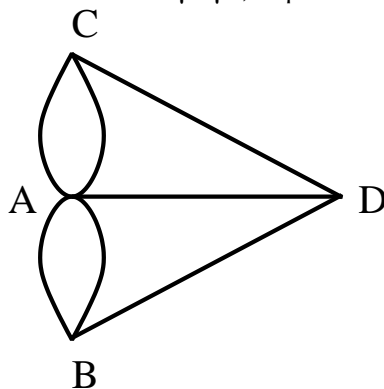
1.2.7 Γραφήματα Euler και Hamilton

Αν υπάρχει (τουλάχιστον) ένας δρόμος του γραφήματος G , ο οποίος χρησιμοποιεί όλους τους δεσμούς του G , λέγεται **δρόμος Euler**. Αν το G περιέχει ένα κλειστό δρόμο Euler, τότε λέγεται **γράφημα Euler**.

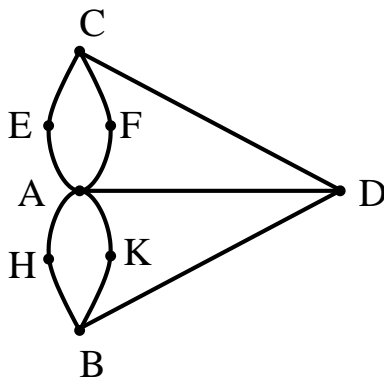
Πρόταση 1.2.12.

- i) Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα που περιέχει τουλάχιστον ένα δρόμο Euler. Τότε περιέχει το πολύ δύο κόμβους περιττού βαθμού. Αν περιέχει δύο τέτοιους κόμβους v_1, v_2 , τότε όλοι οι δρόμοι Euler του G είναι $v_1 - v_2$ δρόμοι.
- ii) Ένα συνεκτικό γράφημα G είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν όλοι οι κόμβοι του έχουν άρτιο βαθμό. Στην περίπτωση αυτή, όλοι οι δρόμοι Euler του G είναι κλειστοί.

Παρατήρηση: Η Πρόταση 1.2.12 i) δίνει και την (αρνητική) απάντηση στο πρόβλημα των γεφυρών του Κόνιγσβερν, που παρουσιάστηκε στην εισαγωγή, αφού το γράφημα

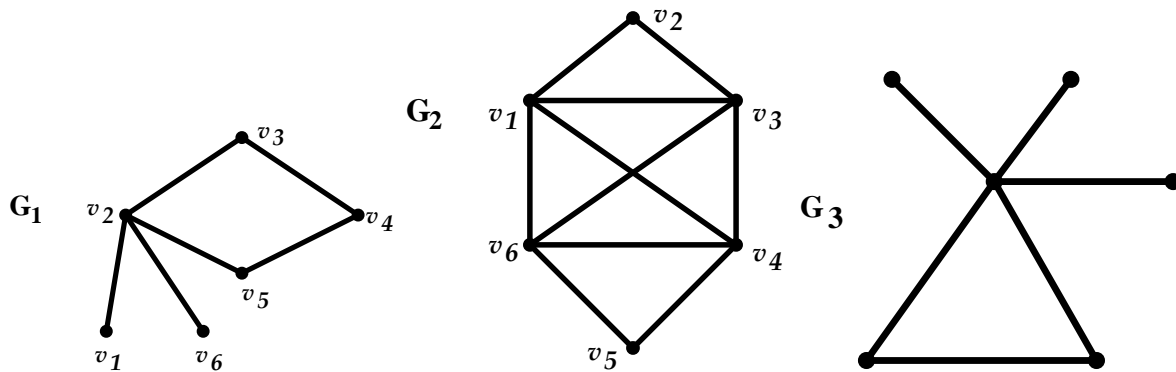


ή, αυστηρότερα, το γράφημα



έχει πάνω από δύο κόμβους περιττού βαθμού.

Παραδείγματα



Το γράφημα G_1 περιέχει το δρόμο Euler

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6)$$

αλλά δεν είναι γράφημα Euler, (αφού περιέχει και κόμβους περιττού βαθμού).

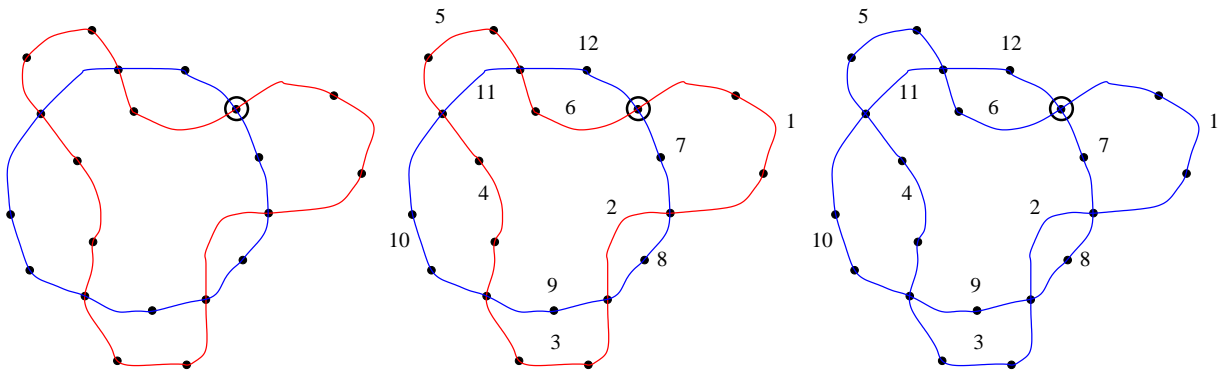
Το γράφημα G_2 (του οποίου όλοι οι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό) είναι γράφημα Euler, και περιέχει για παράδειγμα τον κλειστό δρόμο Euler

$$(v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_3, v_6, v_4, v_5, v_6).$$

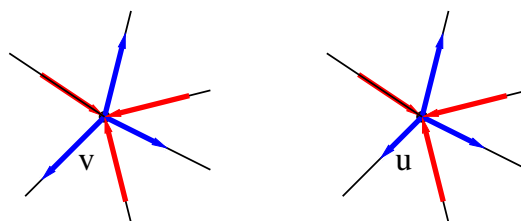
Το γράφημα G_3 δεν περιέχει δρόμο Euler, (αφού περιέχει πάνω από δύο κόμβους περιττού βαθμού).

Για την εύρεση ενός κλειστού δρόμου Euler μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο επόμενος αλγόριθμος. Ο αλγόριθμος στηρίζεται σε δύο παρατηρήσεις:

- Αν έχουμε δύο κλειστούς δρόμους που διέρχονται από μια ή περισσότερες κοινές κορυφές και χρησιμοποιούν διαφορετικούς δεσμούς, τότε μπορούμε να τους ενώσουμε σε ένα μεγαλύτερο κλειστό δρόμο.



- Επειδή όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό, κάθε δρόμος που ξεκινά από μια οποιαδήποτε κορυφή v μπορεί πάντα να επιστρέψει στην αρχική κορυφή v ανεξάρτητα από τις επιλογές που γίνονται κατά την διάτρεξή του. Ο λόγος είναι ότι για κάθε δεσμό που μας απομακρύνει από την αρχική v υπάρχει τουλάχιστον ένας δεσμός που μας οδηγεί πάλι σ' αυτή. Αντίθετα σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή u δεν μπορούμε να φτάσουμε σε αδιέξοδο αφού για κάθε δεσμό που μας οδηγεί στην u υπάρχει τουλάχιστον ένας δεσμός που μας απομακρύνει από την u .



Αλγόριθμος του Hierholzer

Είσοδος: Ένα γράφημα Euler G .

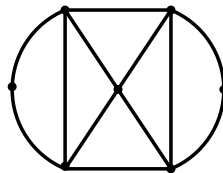
Έξοδος: Ένας κλειστός δρόμος Euler.

Βήμα 1 Επιλέγουμε οποιαδήποτε κορυφή v η οποία είναι άκρο δεσμού που δεν έχουμε διασχίσει. Κατασκευάζουμε ένα κλειστό δρόμο που περιέχει την v επιλέγοντας αυθαίρετα ένα οποιοδήποτε από δεσμούς που δεν έχουμε ήδη διασχίσει μέχρι να επιστρέψουμε και πάλι στην v .

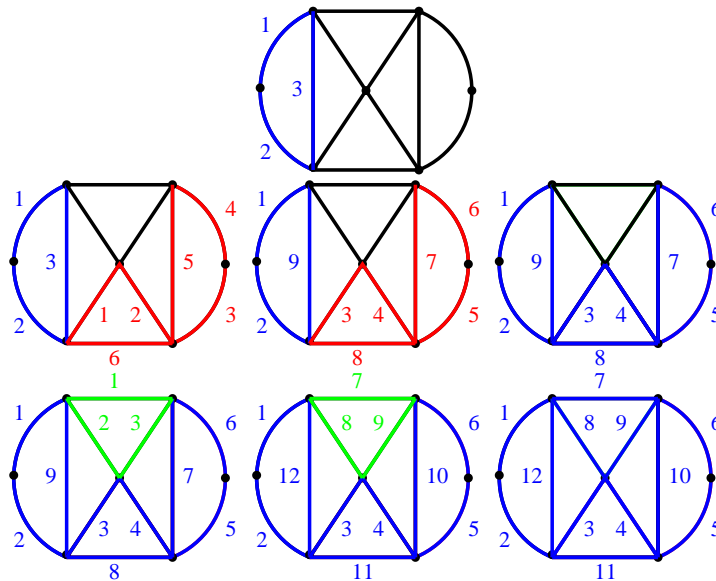
Βήμα 2 Αν υπάρχει κορυφή u η οποία είναι άκρο δεσμού που δεν έχουμε συμπεριλάβει στον κλειστό δρόμο W , επαναλαμβάνουμε το Βήμα 1 για την κορυφή u και **ενώνουμε** τους δύο κλειστούς δρόμους που προκύπτουν.

Αφού το G είναι συνεκτικό επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1 και 2 θα εξαντλήσουμε όλους τους δεσμούς του γραφήματος και θα δημιουργήσουμε ένα κλειστό δρόμο Euler για το G .

Παράδειγμα: Να βρεθεί ένας κλειστός δρόμος Euler για το γράφημα



Λύση.



□

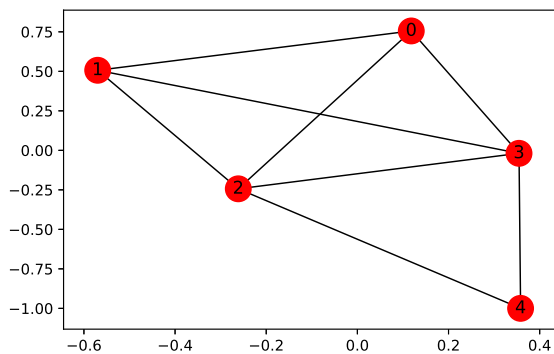
Μπορούμε να βρούμε ένα κλειστό δρόμο Euler σε ένα (συνεκτικό) γράφημα με άρτιους βαθμούς κορυφών χρησιμοποιώντας την μέθοδο `eulerian_circuit(G)`:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

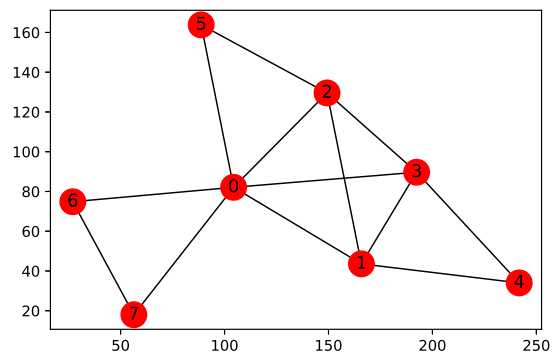
H = nx.house_x_graph()
nx.draw_networkx(H)
plt.show()
if nx.is_eulerian(H):
    W1 = nx.eulerian_circuit(H)
    print("An Eulerian circuit for H:", list(W1))
else:
    print("H is not Eulerian graph")

Seq = [6,4,4,4,2,2,2,2]
G = nx.havel_hakimi_graph(Seq)
pos = nx.drawing.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)
plt.savefig("euler_example0.eps")
if nx.is_eulerian(G):
    #W is an Eulerian circuit for G
    W = nx.eulerian_circuit(G)
    print("An Eulerian circuit for G:", list(W))
    #print("An Eulerian circuit for G:", [u for u, v in W])
    i = 1
    for e in W:
        G1 = G.subgraph(e)
        nx.draw_networkx_edges(G1,pos,edge_color='blue',width=3.0)
        nx.draw_networkx_nodes(G1,pos,node_color='blue',width=3.0)
        plt.savefig("euler_example"+str(i)+".eps")
        nx.draw_networkx_edges(G1,pos,edge_color='red',width=3.0)
        nx.draw_networkx_nodes(G1,pos,node_color='red',width=3.0)
        i += 1
    plt.savefig("euler_example"+str(i)+".eps")
else:
    print("G is not Eulerian graphs")
plt.show()
```

Output:



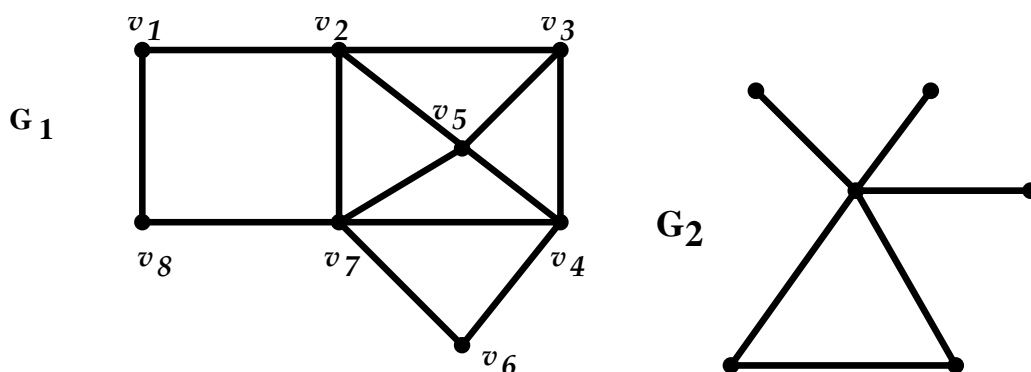
H is not Eulerian graph



An Eulerian circuit for G: [(0, 6), (6, 7), (7, 0), (0, 5), (5, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 2), (2, 0), (0, 1), (1, 3), (3, 0)]

Ένας κύκλος του G ο οποίος διέρχεται από όλους τους κόμβους του G λέγεται **κύκλος Hamilton**. Αν το G περιέχει ένα κύκλο Hamilton, λέγεται **γράφημα Hamilton**.

Παραδείγματα



Το γράφημα G_1 είναι γράφημα Hamilton, αφού περιέχει τον κύκλο Hamilton $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_1)$, ενώ το γράφημα G_2 δεν είναι γράφημα Hamilton, αφού προφανώς δεν περιέχει ένα κύκλο Hamilton.

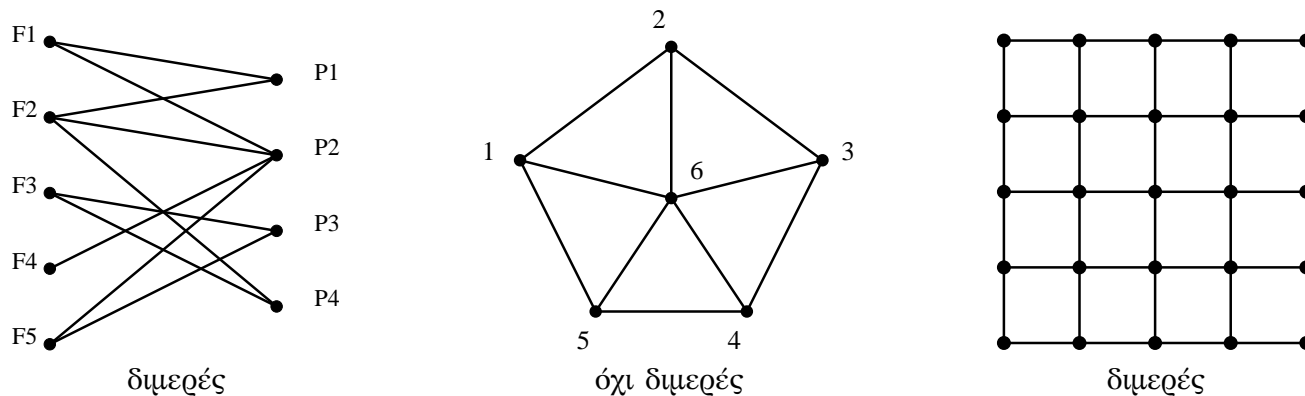
Πρόταση 1.2.13. Αν σε ένα απλό γράφημα G με $|V(G)| = n \geq 3$, για κάθε ζεύγος v, u μη γειτονικών κορυφών ισχύει ότι

$$d(v) + d(u) \geq n,$$

τότε είναι γράφημα Hamilton.

1.2.8 Διμερή γραφήματα

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται **διμερές** αν το V μπορεί να διαμεριστεί σε δύο υποσύνολα V_1, V_2 τέτοια ώστε κάθε $e \in E$ ενώνει ένα κόμβο του V_1 με ένα κόμβο του V_2 .



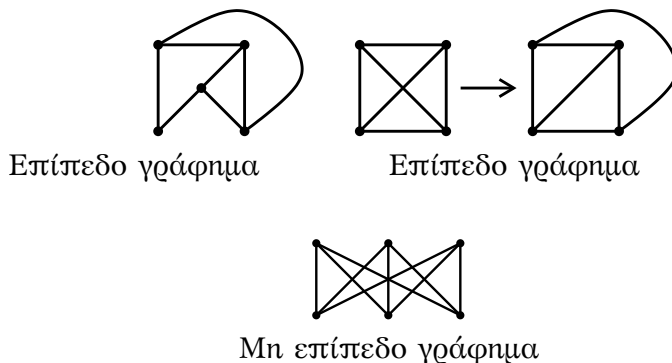
Πρόταση 1.2.14. Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν όλοι οι κύκλοι του είναι άρτιου μήκους.

1.2.9 Επίπεδα γραφήματα

Επίπεδο (planar) λέγεται ένα γράφημα που μπορεί να απεικονισθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε :

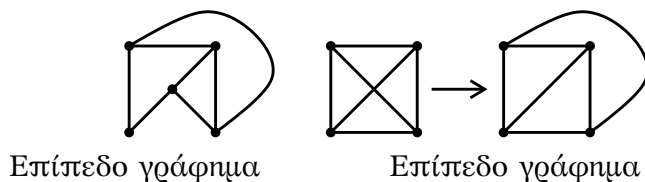
- α) Οι κόμβοι του να είναι διακεκρωμένα σημεία.
- β) Οι δεσμοί του να είναι απλές, επίπεδες καμπύλες.
- γ) Κάθε ζεύγος δεσμών (αν συναντιούνται), συναντιούνται μόνο στους κόμβους.

Παράδειγμα :



Επίπεδο τοπολογικό γράφημα (plane graph) λέγεται ένα επίπεδο γράφημα που έχει ήδη απεικονισθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες α), β) και γ).

Παράδειγμα : Το πρώτο και το τρίτο από τα επόμενα γραφήματα είναι επίπεδο τοπολογικό γράφημα.

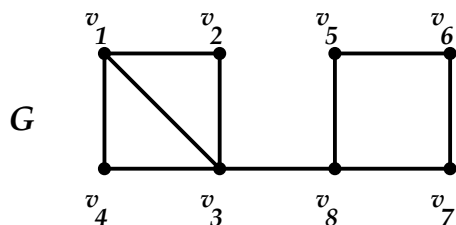


Παρατήρηση : Στο “**πρόβλημα σύνδεσης**” το ερώτημα που τίθεται (κατά πόσον κάποιοι κόμβοι μπορούν να συνδεθούν με κάποιους άλλους χωρίς να υπάρχουν “διασταυρώσεις”) είναι ουσιαστικά το ερώτημα : κατά πόσον το προκύπτον γράφημα είναι επίπεδο. (Εφαρμογές : Πληροφορική, ηλεκτρολογία (συνδεσμολογίες), συγκοινωνίες κ.λπ.).

Ένα θεώρημα σχετικό με το θέμα αυτό (ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα γράφημα μη επίπεδο) είναι το διάσημο θεώρημα του Kuratowski, που θα δούμε αργότερα.

Ορίζουμε σαν **έδρες** (faces) ενός επίπεδου τοπολογικού γραφήματος G τις κλειστές περιοχές του επιπέδου που ορίζονται από τους δεσμούς του γραφήματος. Η ανοιχτή περιοχή ονομάζεται **εξωτερική έδρα** (outer face) του G .

Παράδειγμα :



Το γράφημα G έχει τρεις έδρες : Τα “**τρίγωνα**” που ορίζονται από τους κύκλους (v_1, v_2, v_3, v_1) και (v_1, v_3, v_4, v_1) και το “**τετράγωνο**” που ορίζεται από τον κύκλο $(v_5, v_6, v_7, v_8, v_5)$.

Τύπος του Euler

Για τα επίπεδα γραφήματα ισχύει η επόμενη αξιολογική πρόταση:

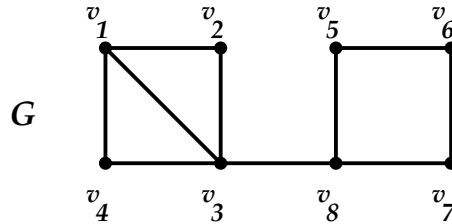
Πρόταση 1.2.15 (Τύπος του Euler). Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό επίπεδο τοπολογικό γράφημα με $|F| = |F(G)|$ έδρες (συμπεριλαμβανόμενης και της εξωτερικής).

Τότε

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή (ως προς τον αριθμό των εδρών).

Παράδειγμα : Στο γράφημα G



έχουμε :

$|V| = 8$, $|E| = 10$, $|F| = 4$ και πράγματι $8 - 10 + 4 = 2$.

Παρατηρήσεις :

1. Από τον τύπο του Euler προκύπτει ότι αν ένα γράφημα είναι επίπεδο κάθε αναπαράστασι του ως επίπεδο τοπολογικό γράφημα θα έχει πάντα τον ίδιο αριθμό εδρών.
2. Ο τύπος του Euler ισχύει και για μη απλά γραφήματα, δηλαδή για γραφήματα που περιέχουν βρόχους ή και πολλαπλούς δεσμούς ανάμεσα στις κορυφές τους.
3. Ο τύπος του Euler ισχύει και για γραφήματα τα οποία έχουν απεικονισθεί πάνω σε μια σφαίρα, έτσι ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες α), β) και γ). Σε αυτή την περίπτωση ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν τα πολύεδρα με κορυφές πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

Λήμμα 1.2.16.

1. Σε κάθε επίπεδο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$, με $|E| \geq 2$, ισχύει ότι

$$3|F| \leq 2|E|$$

2. Σε κάθε επίπεδο διμερές συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $|E| \geq 2$ ισχύει ότι

$$2|F| \leq |E|$$

Απόδειξη. Έστω $s(G)$ ο αριθμός των ζευγών (e, f) του G για τα οποία ο δεσμός e συνορεύει με την έδρα f , δηλαδή

$$s(G) = \sum_{e, f \text{ συνορεύουν}} 1$$

Μπορούμε να μετρήσουμε τα ζεύγη (e, f) με δύο τρόπους: Αθροίζοντας για κάθε έδρα f το πλήθος των δεσμών e που συνορεύουν με αυτήν, ή αθροίζοντας για κάθε δεσμό e το πλήθος των εδρών f οι οποίες συνορεύουν με αυτόν.

1. Με τον πρώτο τρόπο, κάθε έδρα συνορεύει με τουλάχιστον 3 δεσμούς, επομένως

$$s(G) = \sum_f \sum_{e \text{ συνορεύει με } f} 1 \geq \sum_f 3 = 3|F|$$

Με τον δεύτερο τρόπο, κάθε δεσμός συνορεύει το πολύ με δύο έδρες, οπότε

$$s(G) = \sum_e \sum_{f \text{ συνορεύει με } e} 1 \leq \sum_e 2 = 2|E|$$

Άρα

$$3|F| \leq s(G) \leq 2|E|.$$

2. Επειδή το γράφημα είναι διμερές, δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους, άρα, με τον πρώτο τρόπο, κάθε έδρα συνορεύει με τουλάχιστον 4 δεσμούς, επομένως

$$s(G) \geq 4|F|$$

Με τον πρώτο τρόπο, κάθε δεσμός συνορεύει το πολύ με δύο έδρες, οπότε

$$s(G) \leq 2|E|$$

Άρα

$$4|F| \leq 2|E| \Leftrightarrow 2|F| \leq |E|.$$

Πόρισμα 1.2.17 (Ανισότητα κορυφών-δεσμών).

1. Σε κάθε επίπεδο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει ότι

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

2. Σε κάθε επίπεδο διμερές συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει ότι

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Απόδειξη.

1. Από το προηγούμενο λήμμα για κάθε επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει ότι

$$3|F| \leq 2|E|$$

Όμως, από τον τύπο του Euler έχουμε ότι $|F| = |E| - |V| + 2$ οπότε

$$3(|E| - |V| + 2) \leq 2|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6$$

2. Άσκηση.

Άσκηση 1.1. Τα γραφήματα K_5 και $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα.

Λύση Για το γράφημα K_5 έχουμε ότι $|V(K_5)| = 5$ και $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$.

Από το προηγούμενο πόρισμα, έχουμε ότι αν το K_5 είναι επίπεδο πρέπει

$$|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$$

άτοπο, άρα το K_5 δεν είναι επίπεδο.

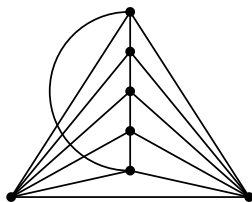
Για το γράφημα $K_{3,3}$ έχουμε ότι $|V(K_{3,3})| = 6$ και $|E(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$.

Επειδή το $K_{3,3}$ είναι διμερές, από το προηγούμενο πόρισμα, έχουμε ότι αν το $K_{3,3}$ είναι επίπεδο πρέπει

$$|E(K_{3,3})| \leq 2|V(K_{3,3})| - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8$$

άτοπο, άρα το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

Άσκηση 1.2. Να εξετασθεί αν το παρακάτω γράφημα είναι επίπεδο ή όχι.



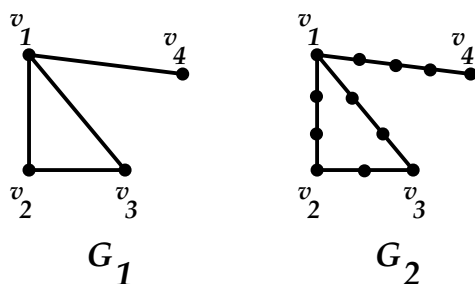
κορυφών = 7,
δεσμών = 16

Παρατήρηση: Προφανώς, αν ένα γράφημα G έχει ως υπογράφημα ένα μη επίπεδο γράφημα H , τότε το G είναι μη επίπεδο.

Το θεώρημα του Kuratowski

Εάν ένα γράφημα G_2 προκύπτει από ένα γράφημα G_1 με αντικατάσταση ενός ή περισσότερων δεσμών του G_1 από ένα μονοπάτι μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων (δηλαδή, με την παρεμβολή νέων κόμβων), τότε το G_2 λέγεται **εκλέπτυνση** ή **υποδιαίρεση** του G_1 .

Παράδειγμα :



Το G_2 είναι μια εκλέπτυνση του G_1 .

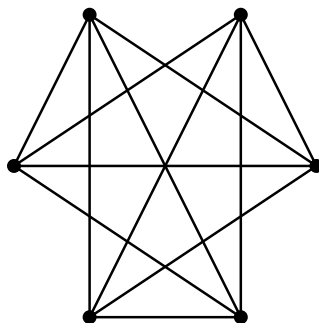
Πρόταση 1.2.18 (Θεώρημα Kuratowski). Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν έχει ένα υπογράφημα που είναι εκλέπτυνση του K_5 ή του $K_{3,3}$.

Άσκηση 1.3.

1. Να εξετασθεί αν κάποιο από τα παρακάτω γραφήματα είναι επίπεδο.

(α) K_6 , (β) $K_{5,2}$, (γ) $K_{4,3}$.

2. Να εξετασθεί αν το παρακάτω γράφημα είναι επίπεδο.



Παρατήρηση: Το Θεώρημα του Kuratowski συνδέει μια τοπολογική ιδιότητα (την αναπαράσταση ενός γραφήματος στο επίπεδο χωρίς τεμνόμενους δεσμούς) με μια συνδυαστική ιδιότητα (την μη εμφάνιση ως υπογραφημάτων των εκλεπτύνσεων του K_5 και του $K_{3,3}$). Επειδή, ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο έπεται ότι μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα γράφημα είναι ή όχι επίπεδο σε πολυωνυμικό χρόνο.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο `check_planarity(G)` της βιβλιοθήκης `networkx` μπορούμε αφενός να ελέγξουμε αν ένα γράφημα είναι επίπεδο και αφετέρου, εφόσον είναι επίπεδο, να το σχεδιάσουμε ως επίπεδο τοπολογικό γράφημα:

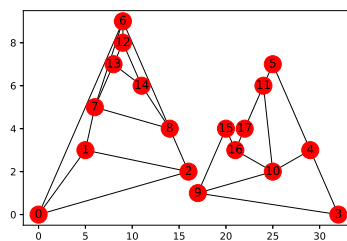
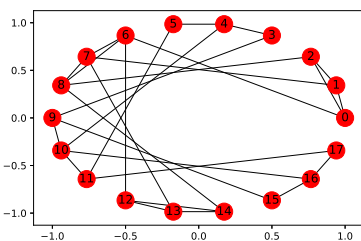
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

K5 = nx.complete_graph(5)
#check_planarity(G) returns the tuple: bool is_planar, PlanarEmbedding
#is_planar is True iff G is planar
#PlanarEmbedding is a combinatorial description of a planar embedding
#to be used with nx.combinatorial_embedding_to_pos(embedding)
#to get the x,y coordinates of each vertex
if nx.check_planarity(K5)[0]:
    print("The graph is planar")
else:
    print("The graph is not planar")
```

```
#Create a planar graph G using some operations
G1 = nx.cycle_graph(3)
G2 = nx.path_graph(3)
G = nx.disjoint_union(G1,G2)
G = nx.cartesian_product(G2, G)
G = nx.disjoint_union(G, nx.Graph())
#A non-planar drawing
pos = nx.layout.shell_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)
plt.show()
is_planar, embedding = nx.check_planarity(G)
#A planar drawing of G (if it exists)
if is_planar:
    pos = nx.combinatorial_embedding_to_pos(embedding)
    nx.draw_networkx(G,pos)
    plt.show()
```

Output:

The graph is **not** planar



Αριθμός διασταυρώσεων

Σχετικός με το πρόβλημα σύνδεσης είναι και ο παρακάτω ορισμός :

Αριθμός διασταυρώσεων (crossing number) $cr(G)$ ενός γραφήματος G είναι ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων των δεσμών του G ανά δύο, όταν το G ζωγραφιστεί στο επίπεδο.

Προφανώς $cr(G) = 0$ αν και μόνο αν το G είναι επίπεδο γράφημα. Έχει αποδειχθεί ότι ο αριθμός διασταυρώσεων ενός πλήρους γραφήματος K_n ικανοποιεί την ανισότητα :

$$cr(K_n) \leq \frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$$

(και μάλιστα, για $n \leq 12$, ισχύει το “=”).

Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι

$$cr(K_{m,n}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$$

(και μάλιστα, όταν $m \leq n$ και είτε $m \leq 6$ είτε $m = 7$ και $n \leq 10$, ισχύει το “=”).

Πρόταση 1.2.19. Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών τότε

$$cr(G) \geq |E(G)| - 3|V(G)| + 6$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν το G είναι επίπεδο, τότε $cr(G) = 0$ και $|E(G)| - 3|V(G)| + 6 \leq 0$, άρα η ανισότητα ισχύει.

Αν το G δεν είναι επίπεδο, τότε κάθε αναπαράσταση του στο επίπεδο θα περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο διασταύρωσης. Έστω μια αναπαράσταση του G με $cr(G) = c$ σημεία διασταύρωσης.

Αν στο γράφημα G προσθέσουμε c επιπλέον κορυφές στα σημεία διασταύρωσης των δεσμών του, τότε θα προκύψει ένα γράφημα G' το οποίο είναι επίπεδο και έχει $|V(G)| + c$ κορυφές και $|E(G)| + 2c$ δεσμούς.

Επομένως, από το Πρόσμμα 1.2.17 για το γράφημα G' θα ισχύει ότι

$$|E(G')| \leq 3|V(G')| - 6 \Leftrightarrow$$

$$|E(G)| + 2c \leq 3(|V(G)| + c) - 6 \Leftrightarrow$$

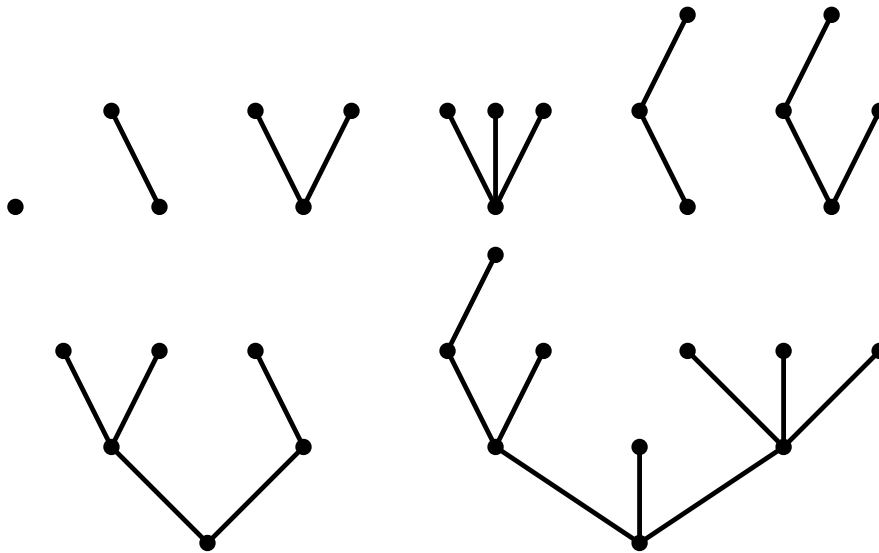
$$|E(G)| - 3|V(G)| + 6 \leq c$$

1.3 Δένδρα

1.3.1 Βασικοί ορισμοί - Βασικά αποτελέσματα

Ένα συνεκτικό άκυκλο γράφημα δεσμών ονομάζεται δένδρο.

Παραδείγματα

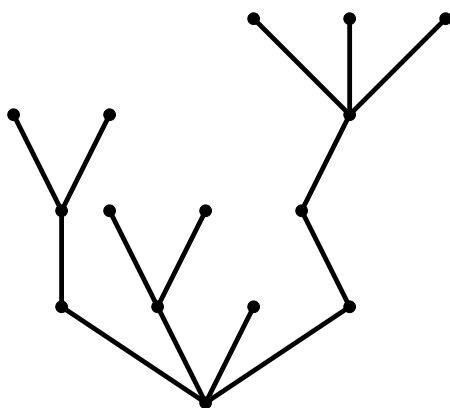


Οι κόμβοι ενός δένδρου με βαθμό 1 λέγονται **φύλλα** του δένδρου.

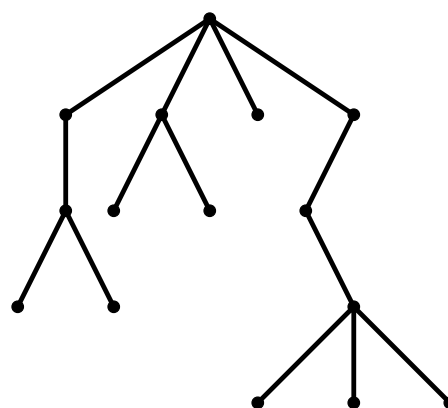
Μέγεθος ενός δένδρου ονομάζεται το πλήθος των δεσμών του.

Ένα άκυκλο γράφημα δεσμών λέγεται **δάσος**.

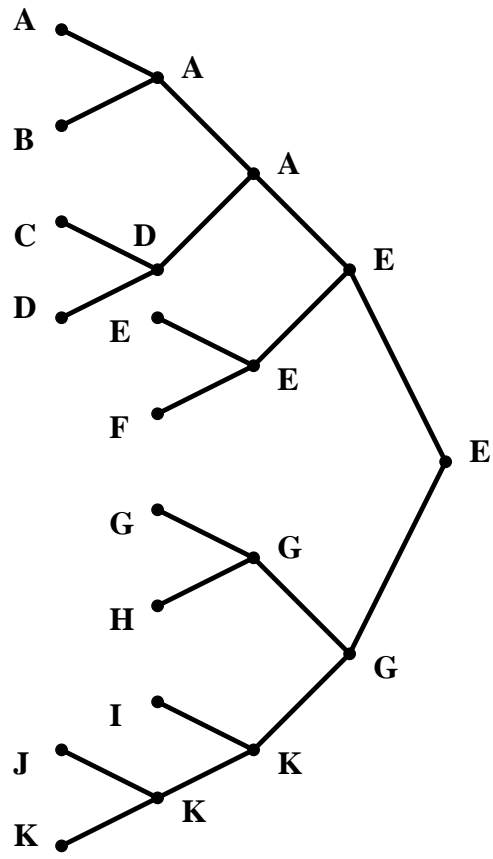
Αναπαράσταση δένδρων



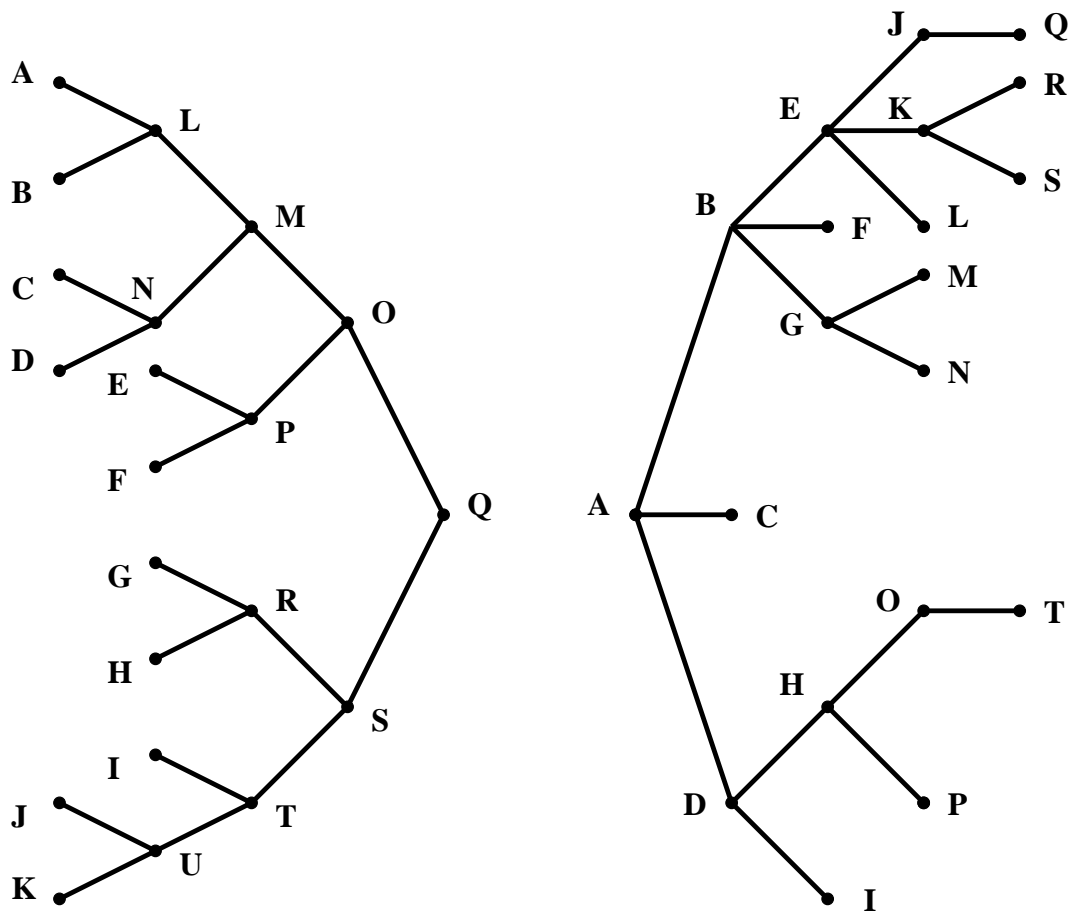
“Φυσικός” τρόπος



Στην πληροφορική



Τουρνουά



Γενεαλογικά δένδρα

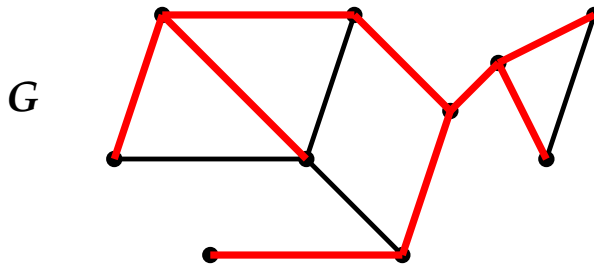
Πρόταση 1.3.1. Για ένα γράφημα $G = (V, E)$ οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- 1) Το G είναι δένδρο.
- 2) Κάθε δύο κόμβοι του G ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι.
- 3) Το G είναι συνεκτικό, με $|V| = |E| + 1$.
- 4) Το G δεν έχει κύκλους και $|V| = |E| + 1$.

1.3.2 Δένδρα ζεύξης

Υπενθυμίζουμε ότι ένα γράφημα $G_1 = (V, E_1)$ λέγεται γενετικό υπογράφημα ενός γραφήματος $G = (V, E)$, αν $E_1 \subseteq E$. Αν το G_1 είναι δένδρο, τότε έχουμε ένα γενετικό (ή γεννηπτικό, ή μερικό) δένδρο, ή δένδρο ζεύξης του G .

Παράδειγμα:



Το “κόκκινο” γράφημα είναι γενετικό δένδρο του G .

(Φυσικά μπορούμε να βρούμε κι άλλα γενετικά δένδρα για το ίδιο G).

Πρόταση 1.3.2. Ένα γράφημα έχει (τουλάχιστον ένα) δένδρο ζεύξης αν και μόνο αν είναι συνεκτικό.

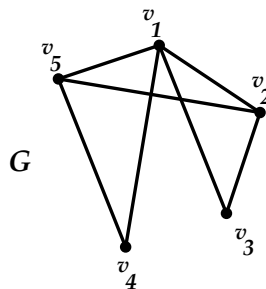
Απαρίθμηση δένδρων ζεύξης

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών με μήτρα γειτνίασης $M(G)$ και n διαγώνια μήτρα $\Delta(G) = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$.

Η Λαπλασιανή μήτρα, ή μήτρα Laplace $L(G)$ του G ορίζεται ως n μήτρα

$$L(G) = \Delta(G) - M(G)$$

Παράδειγμα: Για το γράφημα G

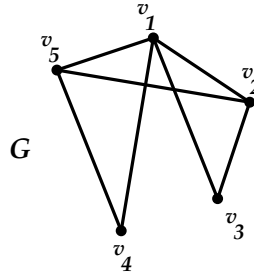


έχουμε

$$L(G) = \Delta(G) - M(G) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1.3.3 (Θεώρημα μήτρας - δένδρου). Το πλήθος των δένδρων ζεύξης του G ισούται με την τιμή της ορίζουσας της μήτρας που προκύπτει από την μήτρα Laplace $L(G)$ σβήνοντας την i γραμμή και την i στήλη για οποιοδήποτε $i \in [|V|]$.

Παράδειγμα: Το πλήθος των δένδρων ζεύξης του γραφήματος G



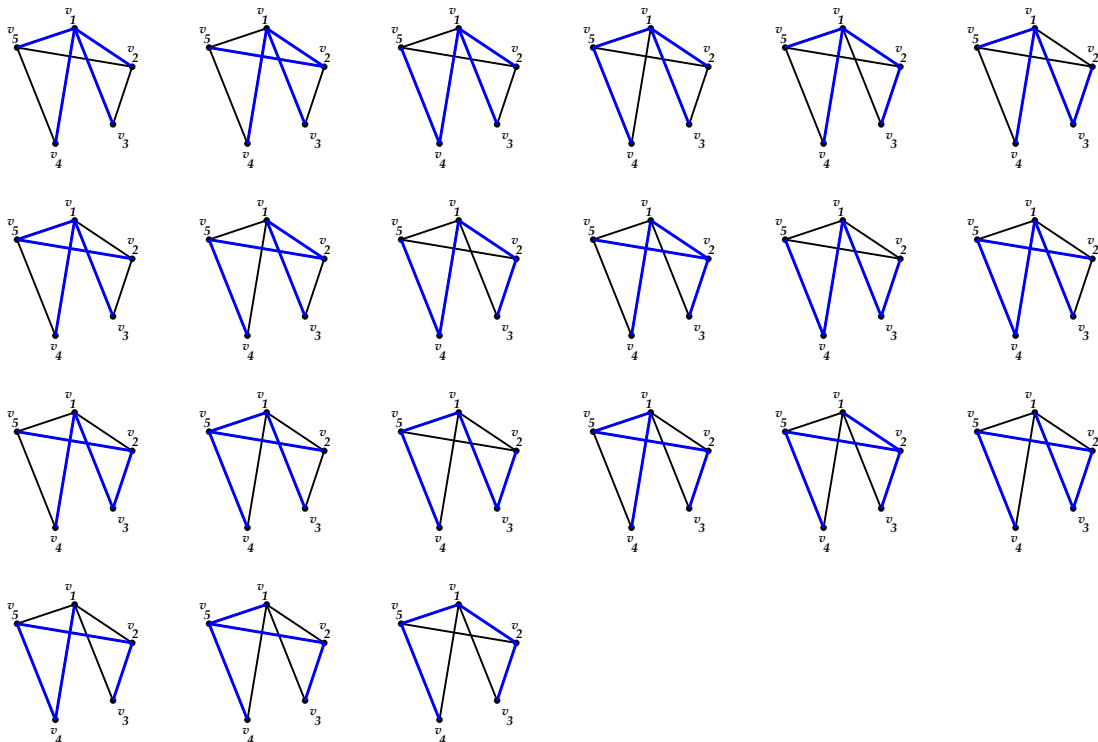
ισούται με την τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ που προκύπτει από την μήτρα $L(G) =$

$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ σβήνοντας την 1η γραμμή και την 1η στήλη της

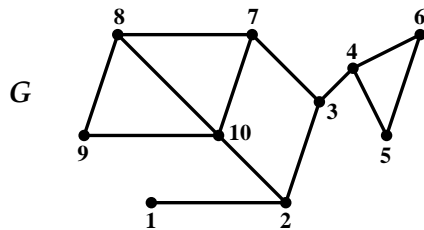
Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_4} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 13 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 13 & -5 \end{vmatrix} = 21 \text{ δένδρα ζεύξης.}$$



Παράδειγμα: Για γράφημα G



έχουμε

$$L(G) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Το πλήθος των γενετικών δένδρων του G ισούται με την τιμή της ορίζουσας της μήτρας που προκύπτει από την $L(G)$ σβίνοντας, για παράδειγμα, την 10η γραμμή και 10η στήλη. Οπότε

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \dots = 87.$$

δηλαδή το γράφημα G έχει 87 δένδρα ζεύξης.

Πρόταση 1.3.4. Ο αριθμός των δένδρων ζεύξης του K_n ισούται με n^{n-2} .

Η μήτρα Laplace του K_n είναι η $n \times n$ μήτρα

$$L(G) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Από το θεώρημα μήτρας-δένδρου έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός ισούται με την τιμή της ορίζουσας της $(n-1) \times (n-1)$ μήτρας που προκύπτει από την $L(G)$ σβίνοντας την n γραμμή και n στήλη της.

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} \stackrel{R_1=R_1+\sum_{i=2}^{n-2} R_i}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} \stackrel{R_i=R_i+R_1, i \geq 2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

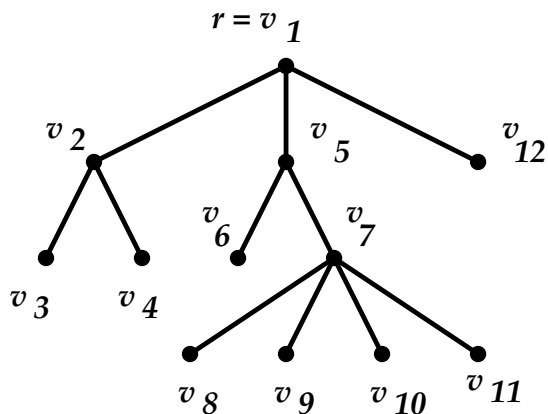
Παρατήρηση: Υπάρχει εναλλακτικός κομψός τρόπος υπολογισμού του πλήθους των δένδρων ζεύξης του K_n μέσω κωδίκων Prüfer.

1.3.3 Δένδρα με ρίζα

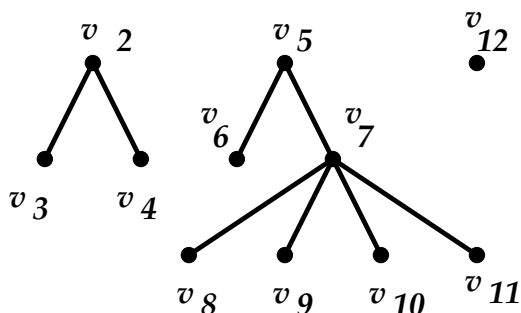
Δένδρο με ρίζα είναι ένα δένδρο με έναν ειδικά επιλεγμένο κόμβο (τη **ρίζα** του δένδρου).

Έστω r η ρίζα του δένδρου T . Τα δένδρα του δάσους $T - r$ λέγονται **υποδένδρα** (ή **δένδρα-παιδιά**) της ρίζας r . Τα δένδρα του δάσους $T - r$ θεωρούνται επίσης δένδρα με ρίζα: Ρίζα καθενός είναι το άλλο άκρο του δεσμού που περιέχει την ρίζα r του T . Η έννοια των υποδένδρων ενός οποιουδήποτε κόμβου (που δεν είναι φύλλο) ορίζεται ανάλογα.

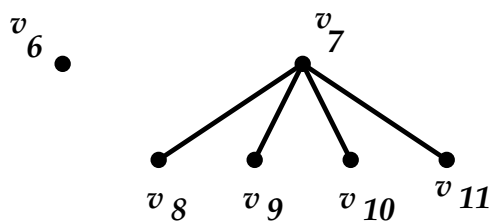
Παραδείγματα



Υποδένδρα της ρίζας v_1 είναι τα



Υποδένδρα του κόμβου v_5 είναι τα



Ορίζουμε το **επίπεδο** $l(v)$ ενός κόμβου v του T ως εξής: $l(r) = 0$ και αν στο (μοναδικό) $r - v$ μονοπάτι (r, \dots, u, v) έχουμε $l(u) = i$, τότε $l(v) = i + 1$. (Στην περίπτωση αυτή το u λέγεται **γονέας** του v και το v λέγεται **παιδί** του u . Παιδιά του ίδιου γονέα λέγονται **αδέρφια**). Με άλλα λόγια το επίπεδο ενός κόμβου είναι η απόσταση του από την ρίζα του δένδρου.

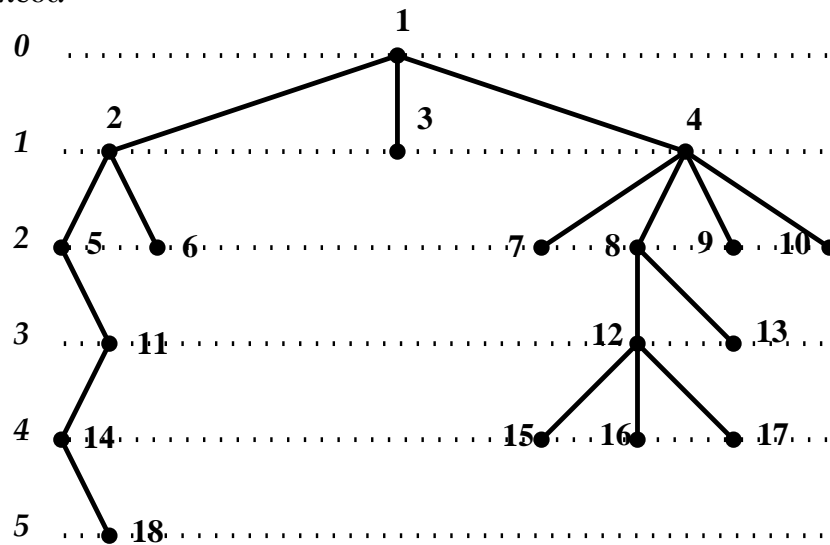
Το πλήθος των παιδιών ενός κόμβου σε ένα δένδρο με ρίζα ονομάζεται **βαθμός** του κόμβου, (οπότε, προφανώς, ο βαθμός κάθε κόμβου, εκτός από τη ρίζα, είναι κατά ένα μικρότερος από το βαθμό του κόμβου, όπως αυτός ορίστηκε νωρίτερα για ένα τυχαίο γράφημα).

Αν υπάρχει στο T διαδρομή από ένα κόμβο v_1 σε ένα κόμβο v_k , η οποία χρησιμοποιεί κόμβους με επίπεδα που συνεχώς αυξάνουν τότε λέμε ότι το v_1 είναι **πρόγονος** του v_k και το v_k είναι **απόγονος** του v_1 .

Ένας κόμβος χωρίς παιδιά (δηλαδή βαθμού 0) λέγεται **φύλλο** (ή **τερματικός κόμβος**). Αλλιώς λέγεται **ενδιάμεσος** κόμβος.

Ύψος (ή **βάθος**) $h(T)$ ενός δένδρου T λέγεται το μεγαλύτερο από τα επίπεδα των κόμβων του.

Παράδειγμα: Επίπεδα



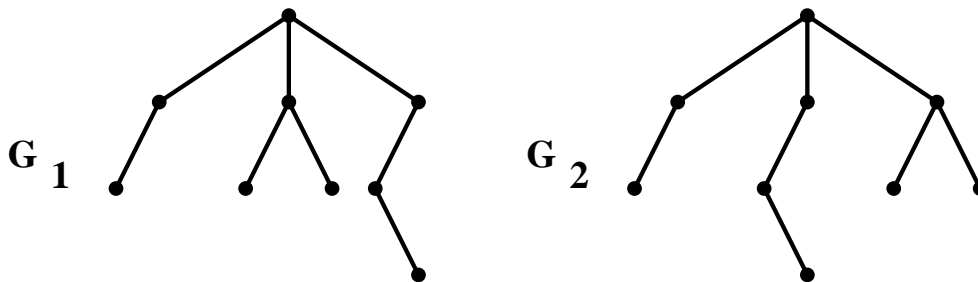
- | | |
|--|-------------------------------|
| 1 : ρίζα | 2 : γονέας των 5, 6 |
| 5, 6 : παιδιά του 2 | 4 : γονέας του 7 |
| 7, 8, 9, 10 : παιδιά του 4 | 15, 16, 17 : αδέρφια |
| 2 : πρόγονος των 5,6, 11,14,18 | 15 : απόγονος των 1, 4, 8, 12 |
| 3, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18 : φύλλα | Βαθμός του 12 = 3 |
| 11 : ενδιάμεσος κόμβος | $h(T) = 5$. |

Παρατήρηση: Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν $l(r) = 1$ αντί 0.

1.3.4 Διατεταγμένα δένδρα

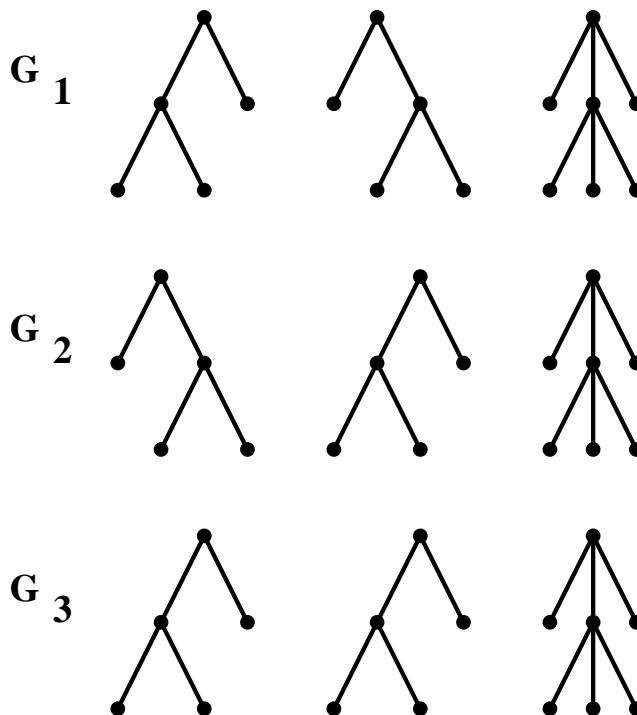
Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **διατεταγμένο** αν η αλλαγή της σχετικής θέσης των υποδένδρων της ρίζας του θεωρείται ότι δημιουργεί μη ισόμορφο δένδρο.

Παράδειγμα:



Αν τα G_1, G_2 δεν θεωρηθούν διατεταγμένα τότε $G_1 \cong G_2$, αλλά τα διατεταγμένα δένδρα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα. (Σ' ένα διατεταγμένο δένδρο, τα υποδένδρα της ρίζας χαρακτηρίζονται σαν πρώτο, δεύτερο κ.λπ. από αριστερά προς τα δεξιά).

Διατεταγμένο δάσος διατεταγμένων δένδρων είναι ένα διατεταγμένο σύνολο από ξένα, διατεταγμένα δέντρα.



Τα τρία δάση G_1, G_2, G_3 είναι ισόμορφα. Δεν είναι όμως ισόμορφα, αν θεωρηθούν ως διατεταγμένα δάση.

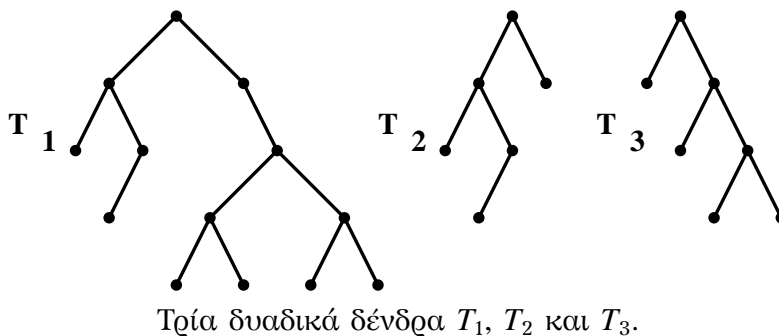
Ένα διατεταγμένο δένδρο, στο οποίο κάθε κόμβος επιτρέπεται να έχει το πολύ k παιδιά, λέγεται **k -δένδρο**.

Παράδειγμα:

Το πρώτο και το δεύτερο διατεταγμένο δένδρο του διατεταγμένου δάσους G_1 του τελευταίου παραδείγματος, είναι 2-δένδρα, ενώ το τρίτο είναι 3-δένδρο.

1.3.5 Δυαδικά δένδρα

Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **δυαδικό δένδρο** αν κάθε κόμβος του που δεν είναι φύλλο έχει είτε ένα αριστερό, είτε ένα δεξιό παιδί, είτε δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξιό).

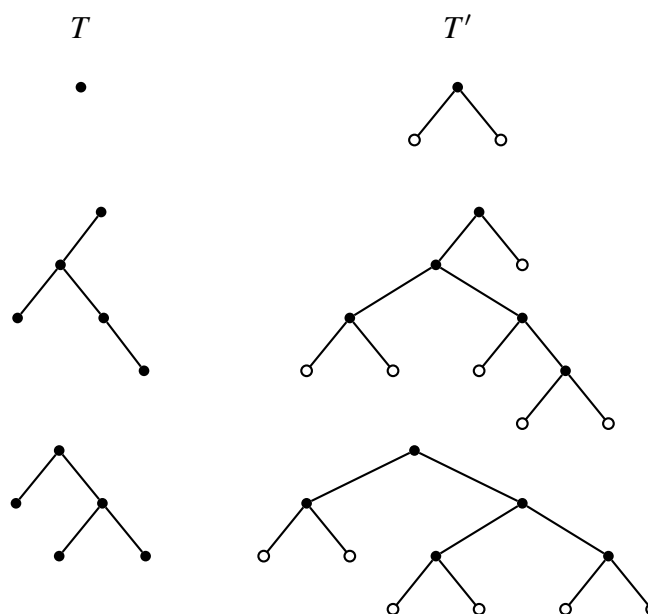


Παρατηρήσεις

1. Σε αντίθεση με τον γενικό ορισμό των γραφημάτων, στα δυαδικά δένδρα συμπεριλαμβάνεται και το κενό δυαδικό δένδρο, δηλαδή το δένδρο T με $X(T) = \emptyset$.
2. Ισοδύναμος ορισμός του δυαδικού δένδρου μπορεί να δοθεί αναδρομικά:
 - Το κενό δένδρο είναι δυαδικό.
 - Κάθε μη κενό δυαδικό δένδρο T αποτελείται από ένα κόμβο r που έχει ως παιδιά δύο δυαδικά δένδρα T_1 (το αριστερό), T_2 (το δεξιό) τα οποία μπορεί να είναι κενά.

Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Η ισοδυναμία είναι η εξής: Κάθε δυαδικό δένδρο T (πρώτος ορισμός) μπορεί να επεκταθεί κατά μοναδικό τρόπο σε ένα δυαδικό δένδρο T' (δεύτερος ορισμός), όπου κάθε κόμβος του έχει 0 ή 2 παιδιά, προσθέτοντας ένα αριστερό (αντ. δεξιό) (κενό) παιδί σε κάθε κόμβο με δεξιό (αντ. αριστερό) παιδί, και δύο (κενά) παιδιά σε κάθε φύλλο του T . Τα φύλλα του T' είναι όλα κενά δυαδικά δένδρα. Προφανώς, το δυαδικό δένδρο T μπορεί να προκύψει ξανά από το T' σβήνοντας όλα τα φύλλα του T' .

Παραδείγματα

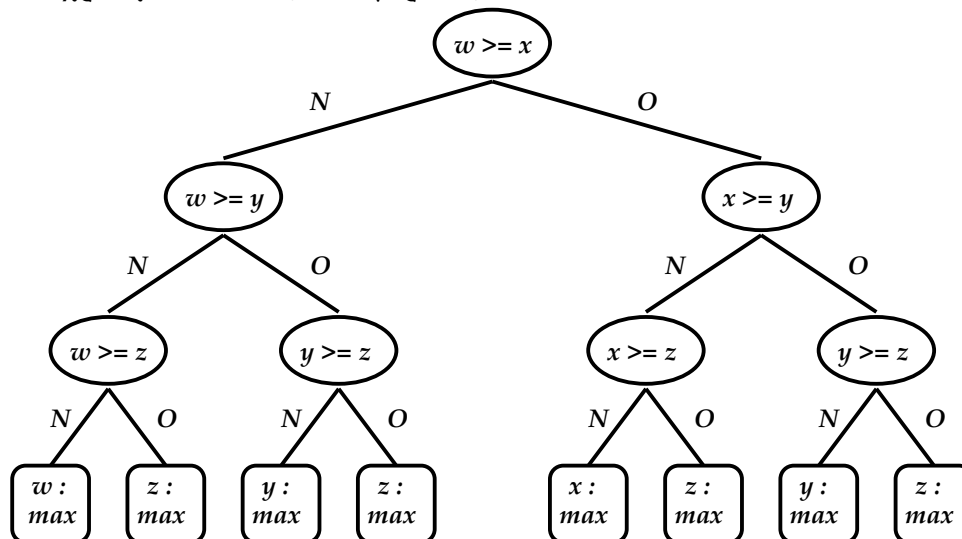


3. Προφανώς, αντίστοιχα με το διατεταγμένο δάσος διατεταγμένων δένδρων ορίζεται και το **διατεταγμένο δάσος δυαδικών δένδρων**.

1.3.6 Δένδρα αποφάσεων

Δένδρο απόφασης λέγεται ένα k -δένδρο του οποίου κάθε εσωτερική κορυφή παριστάνει μια ερώτηση για την οποία πρέπει να αποφασίσουμε. Οι δυνατές απαντήσεις (αποφάσεις) παριστάνονται από τους δεσμούς που συνδέουν τον κόμβο με τους κόμβους του επόμενου επίπεδου. Τα τελικά αποτελέσματα της διαδικασίας παριστάνονται από τα φύλλα του δένδρου.

Πολύ συχνά, οι δυνατές απαντήσεις κάθε φορά είναι : “Ναι” (N) ή “Όχι ” (O), οπότε το δένδρο απόφασης είναι ένα δυαδικό δένδρο, όπως το παρακάτω δένδρο που βρίσκει το μέγιστο μεταξύ 4 στοιχείων x, y, z, w χρησιμοποιώντας 3 συγκρίσεις.

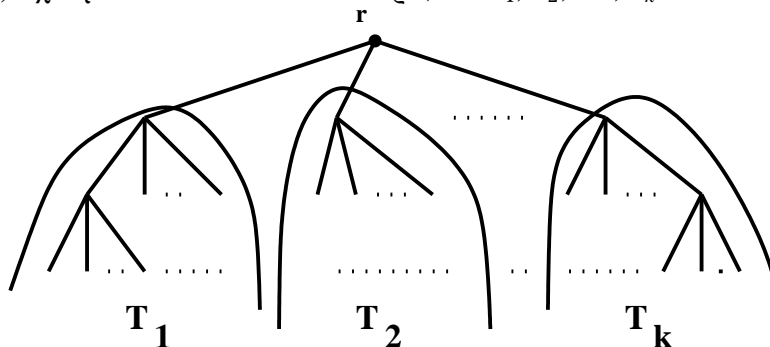


Ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα που μας δίνει κάτω φράγματα για το πλήθος των ερωτήσεων που απαιτούνται σε κάποιο πρόβλημα απόφασης που μοντελοποιείται από ένα k -δένδρο είναι το επόμενο.

Πρόταση 1.3.5. Έστω T ένα k -δένδρο με ύψος h και l φύλλα. Τότε $h \geq \log_k l$.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι $h \geq \log_k l$, ή ισοδύναμα ότι $k^h \geq l$, δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι ένα k -δένδρο ύψους h έχει το πολύ k^h φύλλα. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς h : Για $h = 0$, το δένδρο είναι τετριμμένο και ο μοναδικός του κόμβος είναι και φύλλο, άρα έχει πράγματι k^0 φύλλα.

Έστω ότι ισχύει για κάθε $h \leq n$, και έστω T ένα k -δένδρο ύψους $n + 1$. Στο γράφημα $T - r$ (όπου r η ρίζα του T) έχουμε k το πολύ υποδένδρα, τα T_1, T_2, \dots, T_k .



Αλλά τα T_1, T_2, \dots, T_k έχουν ύψος το πολύ n . Άρα, από την υπόθεση της επαγωγής, έχουν συνολικά k^n το πολύ φύλλα το καθένα. Συνολικά λοιπόν, τα υποδένδρα T_1, T_2, \dots, T_k έχουν το πολύ $k \cdot k^n = k^{n+1}$ φύλλα, τα οποία είναι τα φύλλα και του αρχικού δένδρου T . \square

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι

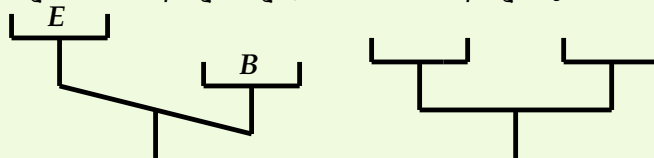
- ένα k -δένδρο με ύψος h περιέχει το πολύ k^h φύλλα.

- ένα k -δένδρο με l φύλλα έχει ύψος τουλάχιστον $\log_k l$.

Στο επόμενο παράδειγμα δίνεται μια εφαρμογή που χρησιμοποιεί ένα 3-δένδρο απόφασης:

Παράδειγμα 1.1 (Το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων). Ένα κανονικό νόμισμα έχει αριθμό 0. Υπάρχουν n άλλα νομίσματα ίδια ακριβώς στην εμφάνιση με το 0, που έχουν όμως αριθμούς $1, 2, \dots, n$. Υποψιαζόμαστε ότι ένα νόμισμα μπορεί να είναι “κίβδηλο” (είτε λίγο ελαφρύτερο, είτε λίγο βαρύτερο).

- i) Ναδειχθεί ότι χρειάζονται τουλάχιστον $\log_3(2n + 1)$ ζυγίσματα σε μια ζυγαριά n οποία δείχνει το ελαφρύτερο και το βαρύτερο, ή δύο ίσου βάρους



για να αποφασίσουμε αν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα, ποιο είναι αυτό και αν είναι βαρύ ή ελαφρύ.

- ii) Να περιγραφεί μια διαδικασία που να χρησιμοποιεί ακριβώς αυτό τον αριθμό ζυγισμάτων, όταν $n = 4$.

- i) Υπάρχουν $2n+1$ πιθανές τελικές απαντήσεις (φύλλα) στο δένδρο απόφασης, για το παραπάνω πρόβλημα

$K,$	$1B,$	$1E,$	$2B,$	$2E,$	$\dots,$	$nB,$	nE
καλά	το 1 είναι	το 1 είναι	το 2 είναι	το 2 είναι		το n είναι	το n είναι
όλα	βαρύ	ελαφρύ	βαρύ	ελαφρύ		βαρύ	ελαφρύ

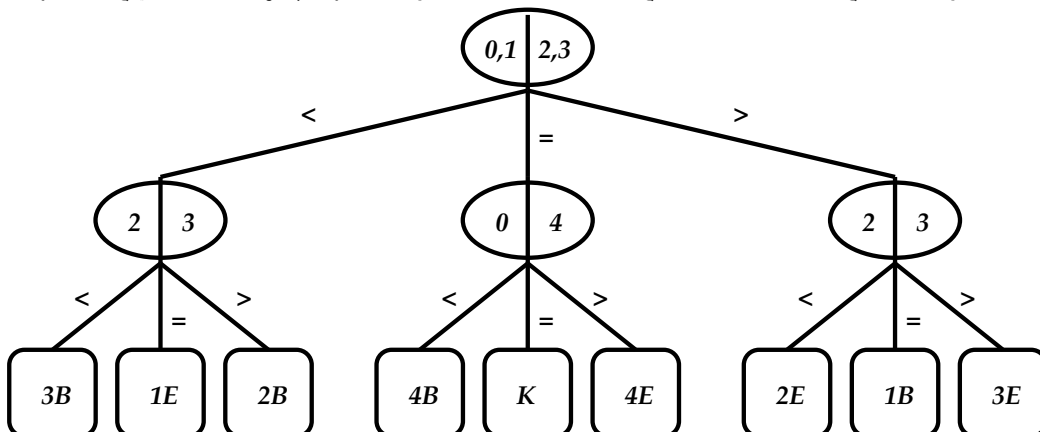
Το δένδρο απόφασης εδώ είναι ένα 3-δένδρο, αφού κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν τρία πιθανά αποτελέσματα :

- $<$: το αριστερό είναι ελαφρύτερο,
- $=$: τα δύο μέρη έχουν το ίδιο βάρος,
- $>$: το αριστερό είναι βαρύτερο.

Άρα το ύψος του δένδρου είναι τουλάχιστον $\log_3(2n + 1)$, οπότε το πλήθος των δεσμών του δένδρου (δηλαδή των ζυγισμάτων) από τη ρίζα μέχρι κάποιο (τουλάχιστον ένα) φύλλο (δηλαδή σε μία τουλάχιστον περίπτωση) είναι τουλάχιστον $\log_3(2n + 1)$.

Για $n = 4$, έχουμε $\log_3(2 \cdot 4 + 1) = \log_3 9 = 2$, άρα το ύψος του δένδρου είναι τουλάχιστον 2, οπότε τα ζυγίσματα θα είναι τουλάχιστον 2.

- ii) Η λύση με ακριβώς δύο ζυγίσματα φαίνεται στο παρακάτω 3-δένδρο αποφάσεων:



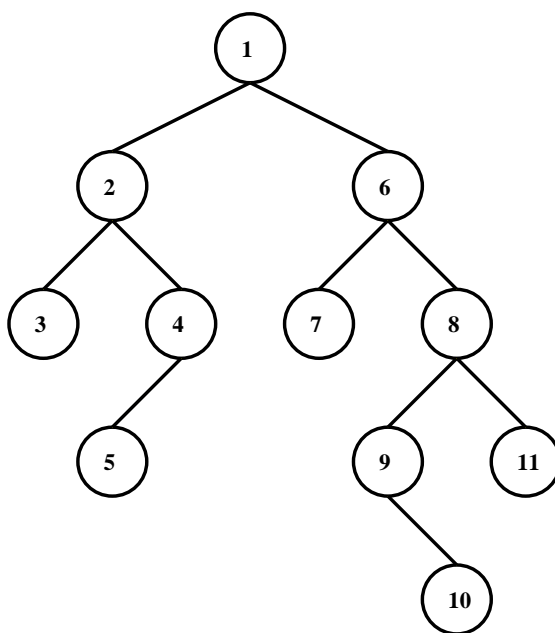
1.4 Διάσχιση δένδρων

1.4.1 Διάσχιση δυαδικών δένδρων

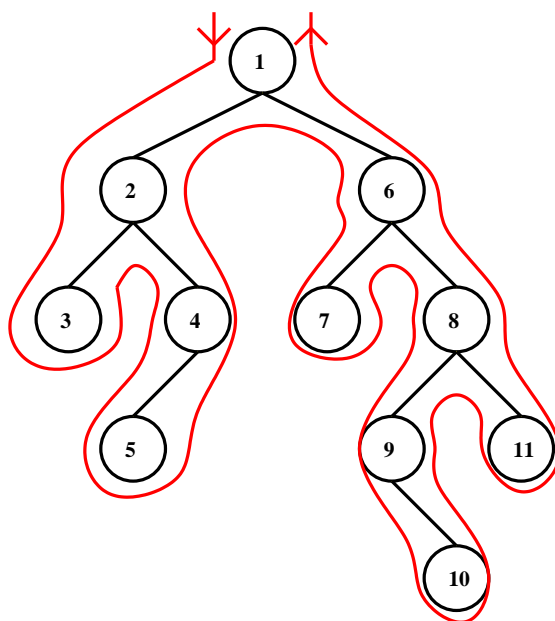
Υπάρχουν 4 βασικοί τρόποι να διασχίσουμε (αριθμήσουμε) τους κόμβους ενός δυαδικού δένδρου. Καθένας από τους τρόπους αυτούς καθορίζει μια ολική διάταξη των κόμβων του δένδρου.

1) **Προδιάταξη** : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πριν διασχίσουμε σε προδιάταξη το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο του. Δηλαδή, επισκεπτόμαστε πρώτα τον γονέα και μετά τα δένδρα - παιδιά του (πρώτα το αριστερό και μετά το δεξιό).

Παράδειγμα:

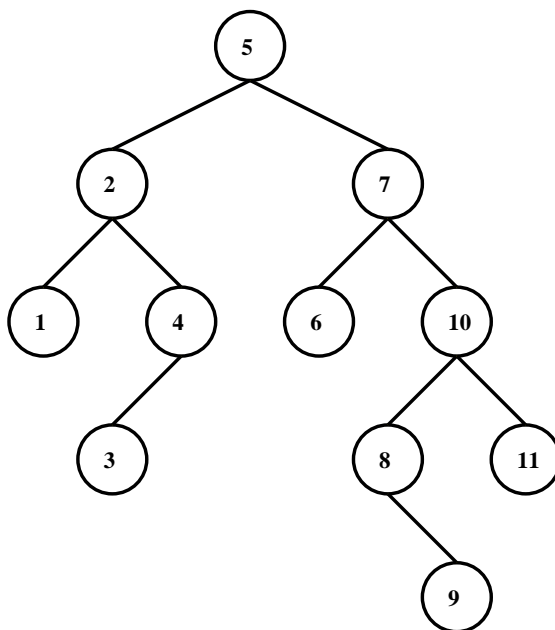


Πρακτικός τρόπος : Αριθμούμε κάθε κορυφή μόλις την πρωτοσυναντήσουμε καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :

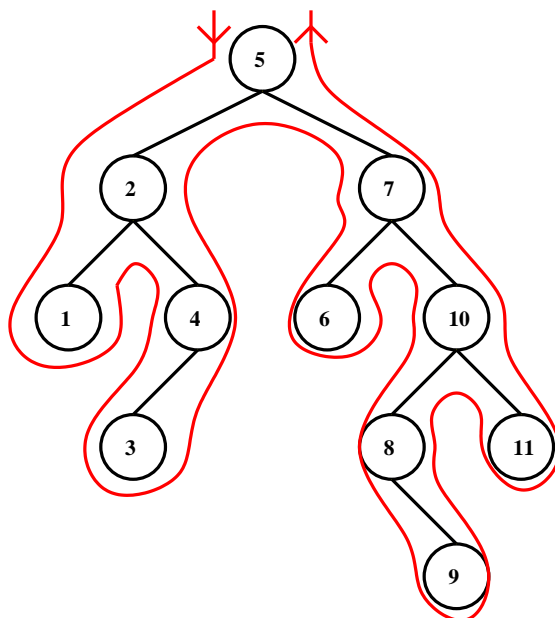


2) Ενδοδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε σε ενδοδιάταξη το αριστερό υπόδενδρο του και πριν την διασχίσουμε σε ενδοδιάταξη το δεξιό υποδένδρο του. Δηλαδή, επισκεπτόμαστε πρώτα το αριστερό δένδρο – παιδί, μετά τον γονέα και μετά το δεξιό δένδρο – παιδί.

Παράδειγμα:

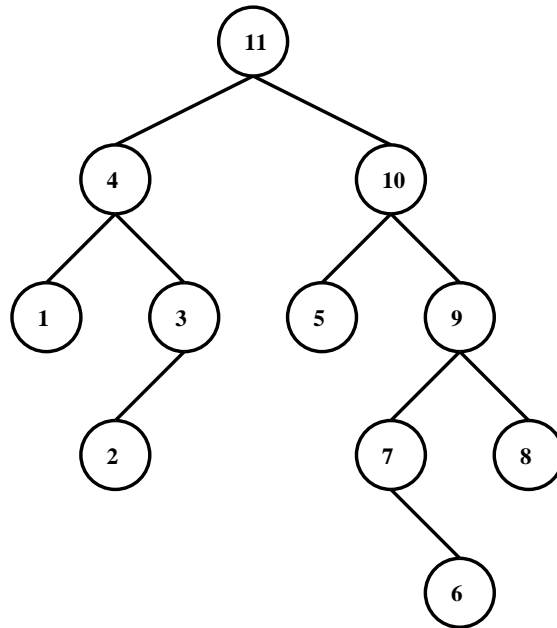


Πρακτικός τρόπος : Αριθμούμε κάθε κορυφή τη πρώτη φορά που τη συναντάμε αν δεν έχει αριστερό παιδί, ενώ την αριθμούμε τη δεύτερη φορά αν έχει αριστερό παιδί, καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :

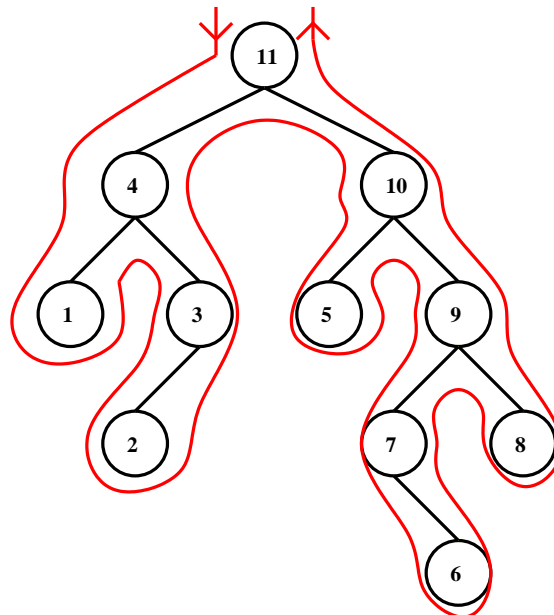


3) Μεταδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού έχουμε διασχίσει σε μεταδιάταξη και το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο του. Δηλαδή, επισκεπτόμαστε πρώτα τα δένδρα – παιδιά (πρώτα το αριστερό και μετά το δεξιό) και μετά τον γονέα.

Παράδειγμα:

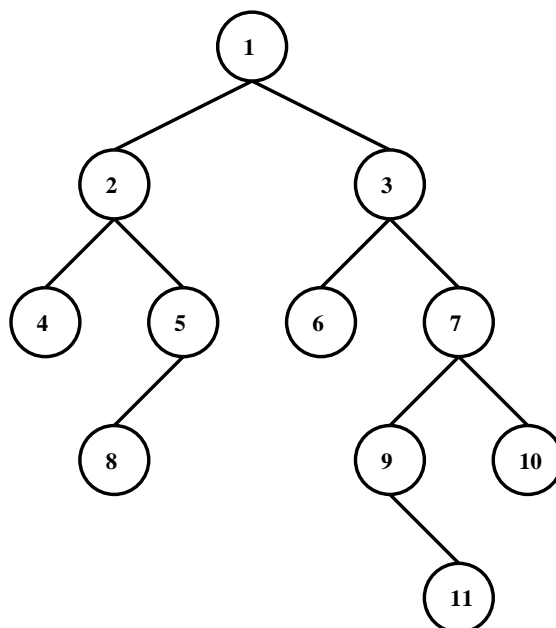


Πρακτικός τρόπος : Αριθμούμε κάθε κόμβο την τελευταία φορά που τον συναντάμε (δηλαδή καθώς τον εγκαταλείπουμε για να πάμε προς τον γονέα του) καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :



4) **Διάσχιση κατά σειρά επιπέδων** : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τους κόμβους κατά επίπεδο (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τους κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα:

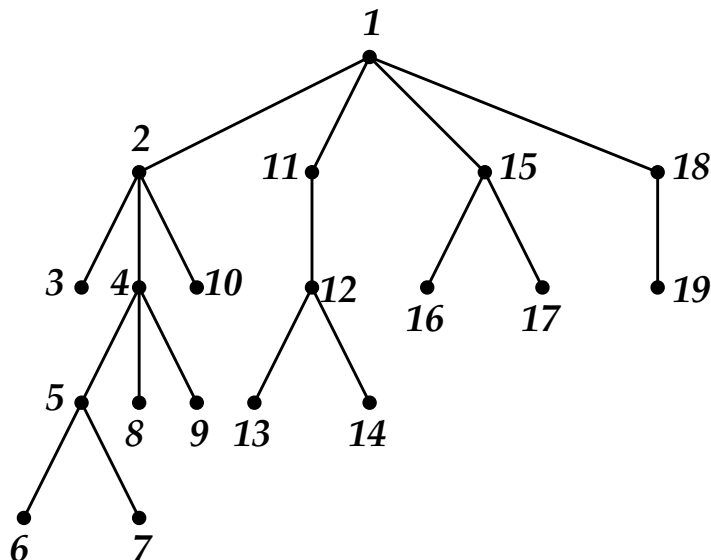


1.4.2 Διάσχιση διατεταγμένων δένδρων

1) Προδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξή τους) τα δένδρα-παιδιά του σε προδιάταξη. Δηλαδή πρώτα τον γονέα και έπειτα τα δένδρα παιδιά του (από το πρώτο προς το τελευταίο).

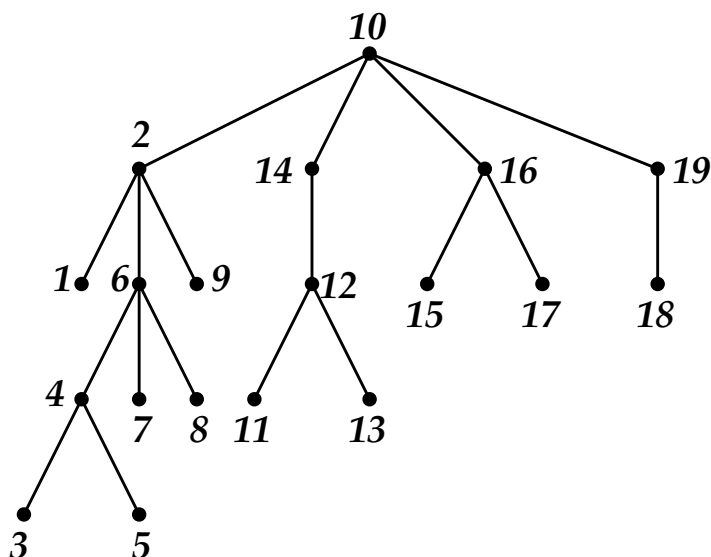
Παράδειγμα:



2) Ενδοδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε σε ενδοδιάταξη το πρώτο δένδρο-παιδί και πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με την διάταξή τους) τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του σε ενδοδιάταξη. Δηλαδή πρώτα το πρώτο δένδρο-παιδί, μετά τον γονέα κι έπειτα τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του (από το δεύτερο προς το τελευταίο).

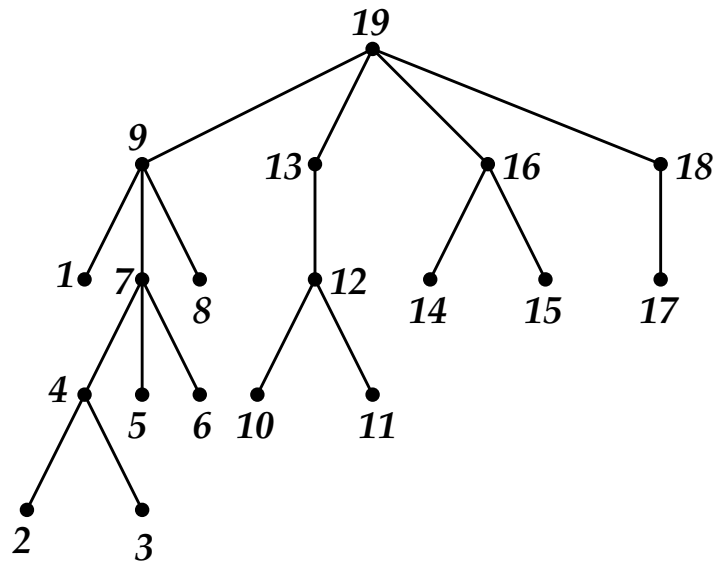
Παράδειγμα:



3) Μεταδιάταξη

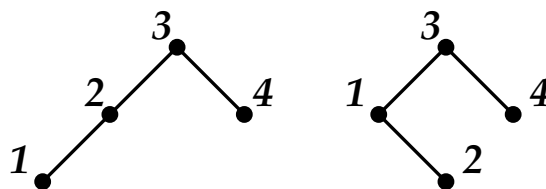
Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξή τους) τα δένδρα-παιδιά του σε μεταδιάταξη. Δηλαδή πρώτα τα δένδρα-παιδιά (από το πρώτο προς το τελευταίο) και έπειτα τον γονέα.

Παράδειγμα:

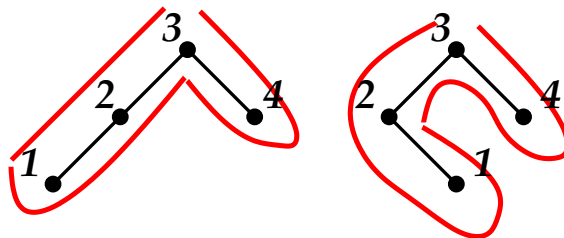


Παρατήρηση: Μπορούμε να αριθμήσουμε τα διατεταγμένα δένδρα σε προδιάταξη και μεταδιάταξη με πρακτικό τρόπο, αντίστοιχα με τα δυαδικά δένδρα. Ο πρακτικός τρόπος για την ενδοδιάταξη των διατεταγμένων δένδρων όμως είναι διαφορετικός: Αριθμούμε τον κάθε κόμβο τη δεύτερη φορά που τον συναντάμε, εκτός αν είναι φύλλο, οπότε τον αριθμούμε την πρώτη φορά. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο ότι στα δυαδικά δένδρα, στην περίπτωση γονέα με μοναδικό παιδί η σειρά αρίθμησης τους δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Αν το παιδί είναι αριστερό παιδί τότε προηγείται του γονέα ενώ αν είναι δεξιό τότε έπεται του γονέα.

Έτσι για παράδειγμα, ενώ η ενδοδιάταξη και στα δύο παρακάτω δυαδικά δένδρα δίνει



ο πρακτικός τρόπος θα έδινε αντίστοιχα

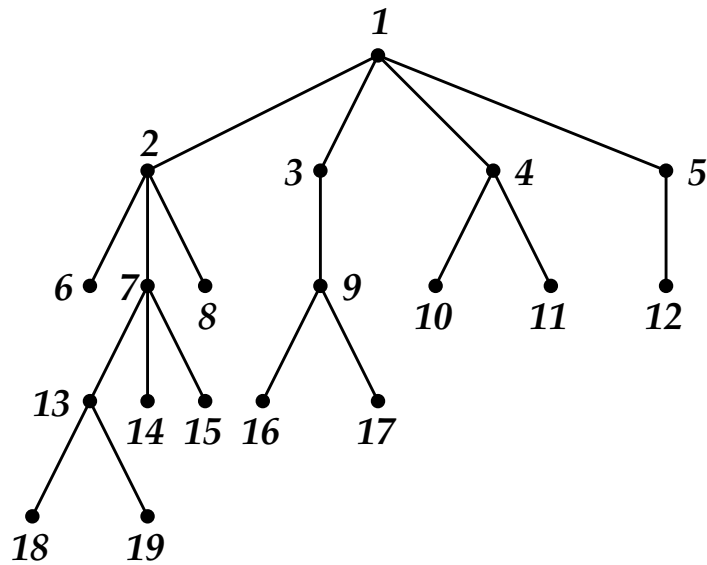


με το δεύτερο δένδρο να δίνει διαφορετική ενδοδιάταξη από ό,τι ο ορισμός.

4. Διάταξη κατά επίπεδα

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τους κόμβους κατά επίπεδο (από το μικρότερο επίπεδο στο μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τους κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα:



Παρατήρηση: Οι διασχίσεις των δένδρων (δυναδικών, ή διατεταγμένων) σύμφωνα με οποιαδήποτε από τις παραπάνω διατάξεις γενικεύονται προφανώς στα διατεταγμένα δάση, διασχίζοντας σύμφωνα με τη συγκριμένη κάθε φορά διάταξη το πρώτο δένδρο του διατεταγμένου δάσους, ακολούθως το δεύτερο δένδρο, κ.ο.κ.

1.5 Γραφήματα τόξων

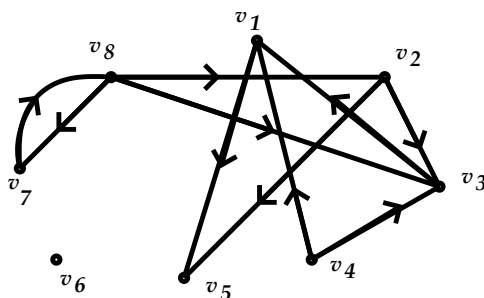
1.5.1 Βασικοί ορισμοί

Κάθε δυάδα $G = (V(G), U(G))$, ή (V, U) , όπου V είναι ένα μη κενό σύνολο και U είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη $(v, u) \in V^2$ ονομάζεται **γράφημα τόξων**, ή **προσανατολισμένο γράφημα**, ή **γράφημα με κατεύθυνση**, ή **διγράφημα**.

Τα στοιχεία του V καλούνται **κορυφές**, ή **σημεία**, ή **κόμβοι** όπως και στα γραφήματα δεσμών, ενώ τα στοιχεία του U καλούνται **τόξα** και συμβολίζονται γραφικά με τόξα. Αν $(v, u) \in U$, τότε λέμε το v (αντ. u) είναι **αρχή** (αντ. **τέλος**) του (v, u) .

Παράδειγμα:

Η δυάδα $G = (V, U)$ όπου $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ και $U = \{(v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_1), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_7, v_8), (v_8, v_2), (v_8, v_3), (v_8, v_7)\}$ είναι ένα γράφημα τόξων. Η γραφική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:



Το τόξο (v, v) , $v \in V$ ονομάζεται **βρόχος**.

Οι ορισμοί είναι αντίστοιχοι με αυτούς που δώσαμε στα γραφήματα δεσμών με τις εξής επισημάνσεις :

Τώρα ορίζεται ο **βαθμός εξόδου** $d_+(v)$ και ο **βαθμός εισόδου** $d_-(v)$ ενός κόμβου $v \in V(G)$, ως

$$d_+(v) = |\{u \in V(G) : (v, u) \in U(G)\}|,$$

(δηλαδή, το πλήθος των τόξων του G , των οποίων ο v είναι αρχή), και

$$d_-(v) = |\{u \in V(G) : (u, v) \in U(G)\}|$$

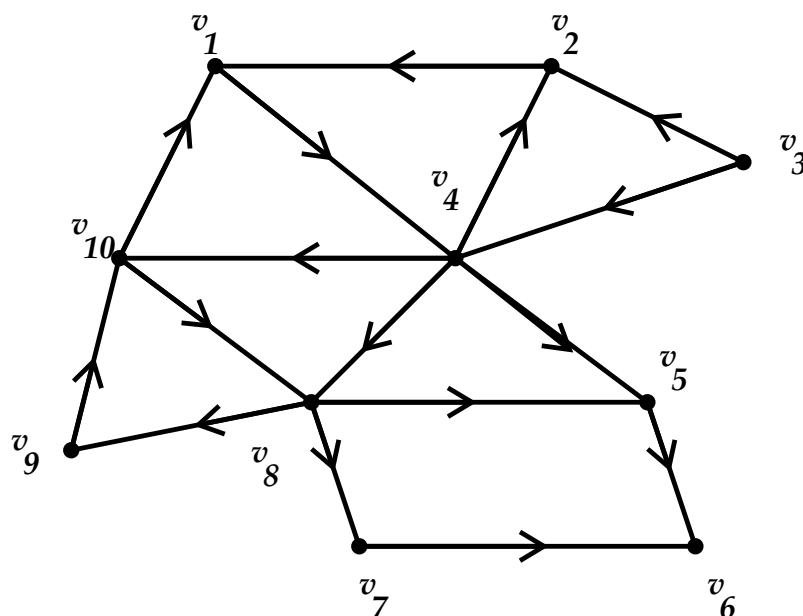
(δηλαδή, το πλήθος των τόξων του G , των οποίων ο v είναι τέλος.)

Προφανώς τώρα ο **βαθμός** $d(v)$ ενός κόμβου v ορίζεται από την σχέση

$$d(v) = d_+(v) + d_-(v).$$

Παράδειγμα:

Στο επόμενο γράφημα

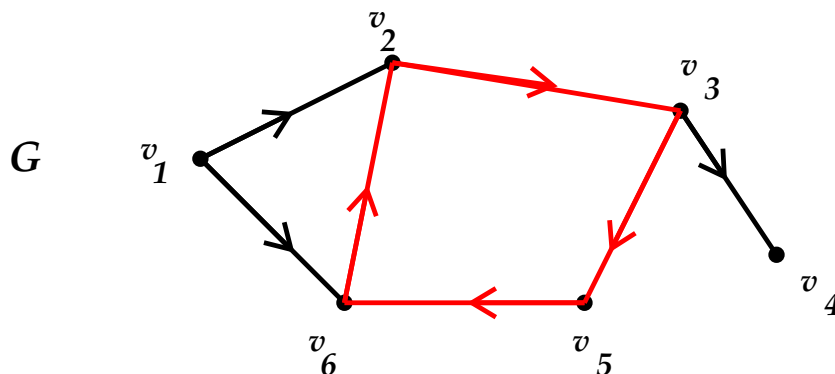


είναι $d_+(v_8) = 3$, $d_-(v_8) = 2$, $d(v_8) = 5$, $d_-(v_2) = 2$, $d_-(v_3) = 0$, κ.λπ.

Η διαδρομή σε ένα διγράφημα πρέπει εν γένει να “ακολουθεί” τη διεύθυνση κάθε τόξου από την αρχή προς το τέλος του. Αν αυτό δεν συμβαίνει, έχουμε μια **ημιδιαδρομή**.

Συνήθως η κλειστή διαδρομή που σχηματίζεται από τόξα λέγεται **κύκλωμα**.

Παράδειγμα:



Στο γράφημα G η διαδρομή $(v_2, v_3, v_5, v_6, v_2)$ είναι κύκλωμα, ενώ η ημιδιαδρομή (v_1, v_2, v_6, v_1) δεν είναι.

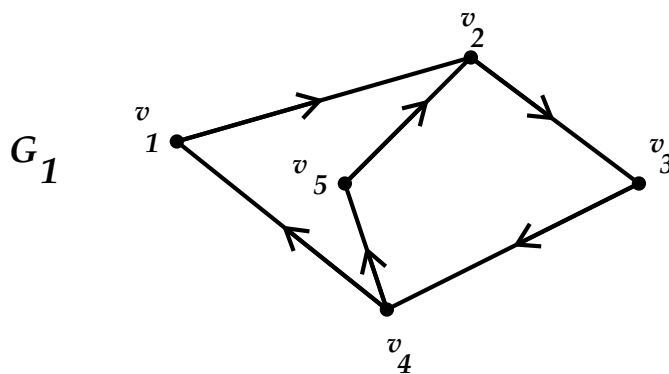
Υπάρχουν διάφορα είδη συνεκτικότητας στα διγράφημα :

Ένα γράφημα τόξων λέγεται **ισχυρά συνεκτικό** αν για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει μονοπάτι και από τον πρώτο προς τον δεύτερο, και από τον δεύτερο προς τον πρώτο.

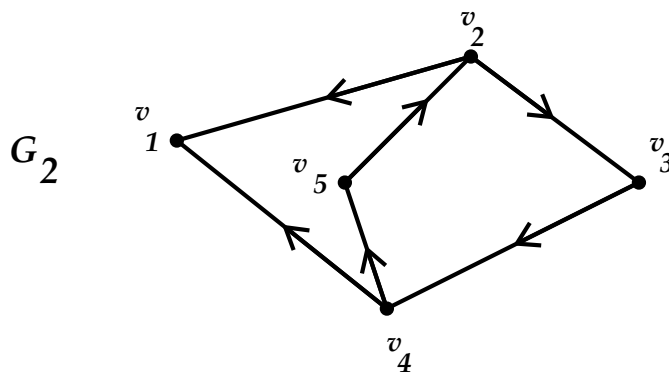
Ένα γράφημα τόξων λέγεται **μονομερώς συνεκτικό** αν δεν είναι ισχυρά συνεκτικό αλλά για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει μονοπάτι είτε από τον πρώτο προς τον δεύτερο, είτε από τον δεύτερο προς τον πρώτο.

Ένα γράφημα τόξων λέγεται **ασθενώς συνεκτικό** αν δεν είναι μονομερώς συνεκτικό, αλλά για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει ημιδιαδρομή μεταξύ τους.

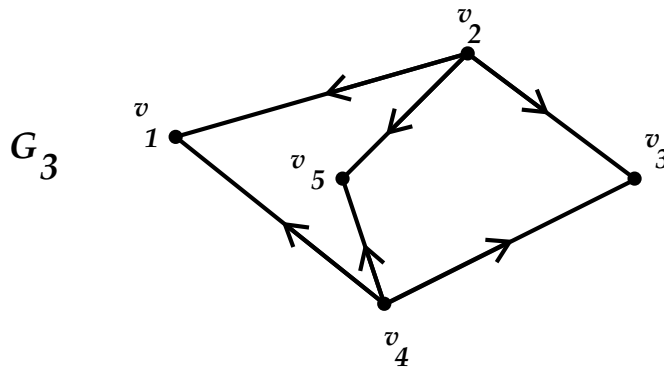
Παραδείγματα



Το γράφημα G_1 είναι ισχυρά συνεκτικό.



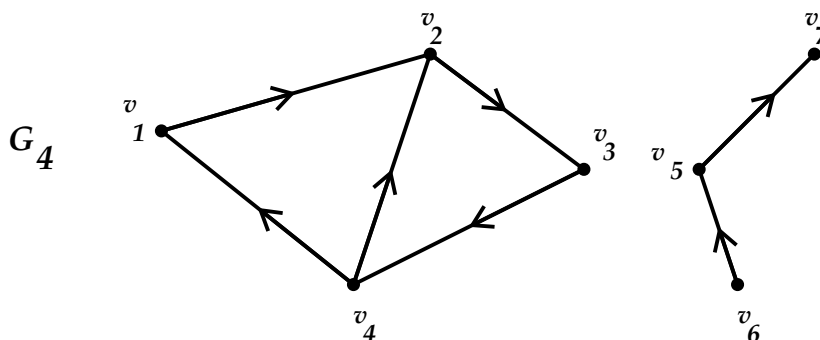
Το γράφημα G_2 είναι μονομερώς συνεκτικό (αφού για παράδειγμα, ενώ υπάρχει $v_3 - v_1$ μονοπάτι, δεν υπάρχει $v_1 - v_3$ μονοπάτι).



Το γράφημα G_3 είναι ασθενώς συνεκτικό (αφού για παράδειγμα δεν υπάρχει ούτε $v_2 - v_4$, ούτε $v_4 - v_2$ μονοπάτι, ενώ υπάρχει η ημιδιαδρομή (v_2, v_3, v_4)).

Ένα γράφημα τόξων ονομάζεται **μη συνεκτικό** αν δεν είναι ούτε ισχυρά, ούτε μονομερώς, ούτε ασθενώς συνεκτικό.

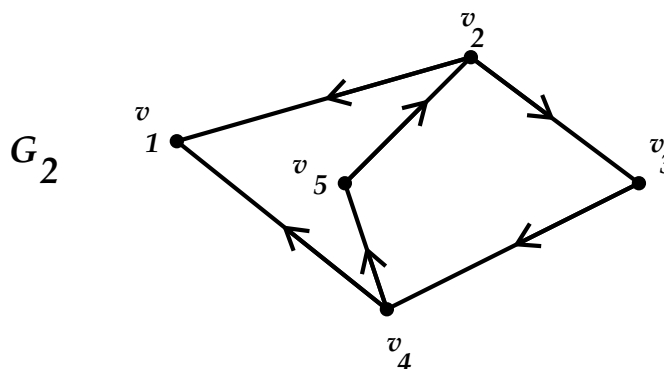
Παράδειγμα:



Το γράφημα G_4 είναι μη συνεκτικό.

Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα ενός γραφήματος τόξων G ονομάζεται οποιοδήποτε μεγιστικό ισχυρά συνεκτικό υπογράφημα του G .

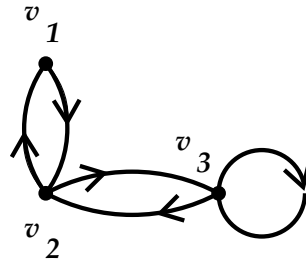
Για παράδειγμα, το γράφημα G_2



(το οποίο όπως είδαμε δεν είναι ισχυρά συνεκτικό) περιέχει μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα: το κύκλωμα $(v_2, v_3, v_4, v_5, v_2)$.

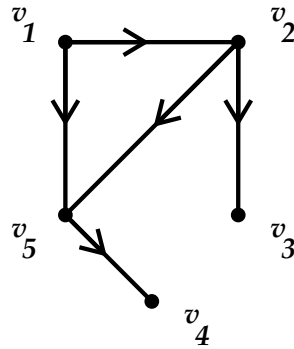
Στα γραφήματα τόξων ορίζουμε και τα παρακάτω είδη γραφημάτων:
Συμμετρικό ονομάζεται ένα γράφημα τόξων $G = (V, U)$ για το οποίο ισχύει
 $(u, v) \in U \Leftrightarrow (v, u) \in U$.

Παράδειγμα:



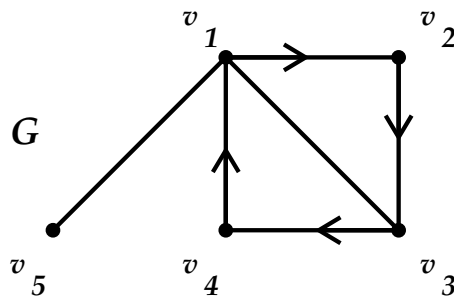
Αντισυμμετρικό ονομάζεται ένα γράφημα τόξων $G = (V, U)$ για το οποίο ισχύει
 $(u, v) \in U \Rightarrow (v, u) \notin U$

Παράδειγμα:

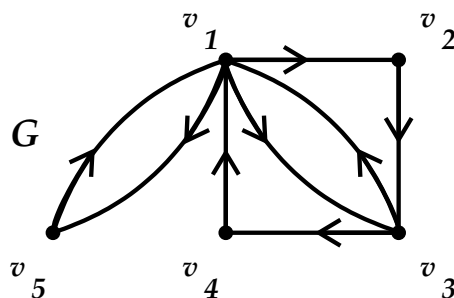


Παρατήρηση: Μερικές φορές εμφανίζονται γραφήματα που περιέχουν συγχρόνως και δεσμούς και τόξα.

Παράδειγμα:



Τα γραφήματα αυτά, τα θεωρούμε ουσιαστικά ως γραφήματα τόξων, αντικαθιστώντας κάθε δέσμο $\{v, u\}$ με δύο τόξα (v, u) και (u, v) . Έτσι, το προηγούμενο παράδειγμα γράφεται:



Φυσικά, με την ίδια λογική μπορούμε γενικά οποιοδήποτε γράφημα δεσμών να το θεωρήσουμε αντίστοιχα ως γράφημα τόξων, το οποίο θα είναι προφανώς συμμετρικό. Το μειονέκτημα μιας τέτοιας προσέγγισης είναι ότι η αντίστοιχη θεωρία και οι εφαρμογές γίνονται γενικά πολύ πιο πολύπλοκες.

1.5.2 Μήτρα γραφήματος τόξων

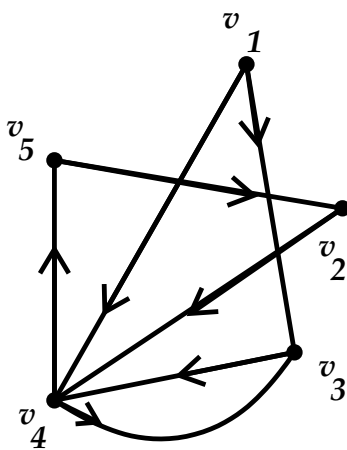
Έστω $G = (V, U)$ ένα γράφημα τόξων. Ορίζουμε την $|V| \times |V|$ μήτρα M_G ή M του G ως εξής :

$$M = [m_{ij}] \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{αν } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

Η μήτρα αυτή ονομάζεται **μήτρα (γειτονικότητας) του γραφήματος τόξων**.

Παράδειγμα:

Στο γράφημα G



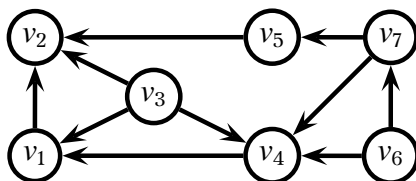
αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.5.3 Τοπολογική διάταξη

Έστω $G = (V, U)$ ένα γράφημα τόξων. Μια ολική διάταξη $<$ στο σύνολο των κορυφών του G ονομάζεται **τοπολογική** (topological sorting) αν και μόνο αν για κάθε τόξο $(v, u) \in U$ ισχύει ότι $v < u$ (v προηγείται του u) στην διάταξη.

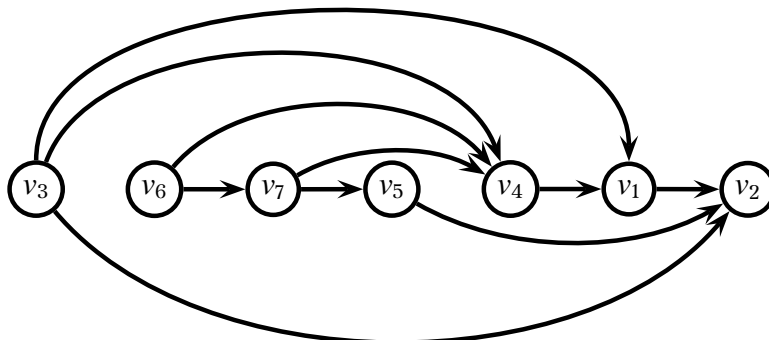
Παράδειγμα: Στο επόμενο γράφημα τόξων



μια τοπολογική διάταξη κορυφών του είναι η διάταξη:

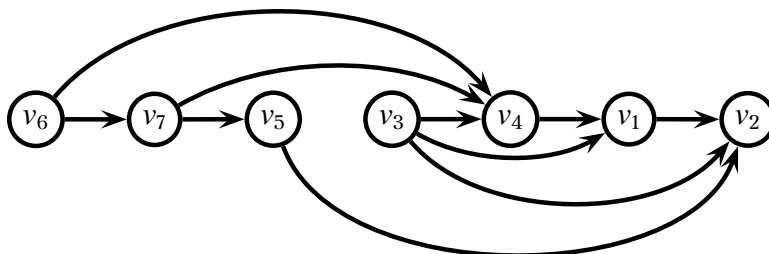
$$(v_3, v_6, v_7, v_5, v_4, v_1, v_2)$$

Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι η σειρά αυτή ικανοποιεί τον ορισμό της τοπολογικής διάταξης σχεδιάζοντας ξανά το γράφημα, τοποθετώντας τις κορυφές του πάνω σε μια ευθεία με την σειρά που εμφανίζονται στην διάταξη. Τότε όλα τα τόξα έχουν προσανατολισμό από τα αριστερά προς τα δεξιά (από μικρότερη προς μεγαλύτερη κορυφή).

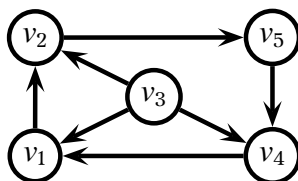


Μια άλλη τοπολογική διάταξη είναι η διάταξη:

$(v_6, v_7, v_5, v_3, v_4, v_1, v_2)$



Το επόμενο γράφημα τόξων δεν έχει τοπολογική διάταξη



διότι η ύπαρξη του κυκλώματος $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_1)$ παραβιάζει την μεταβατική ιδιότητα που έχουν όλες οι διατάξεις.

Πρόταση 1.5.1. Ένα γράφημα τόξων G έχει τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν δεν περιέχει κυκλώματα.

Παρατήρηση: Σε κάθε γράφημα τόξων χωρίς κυκλώματα υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή με βαθμό εισόδου 0.

Πράγματι, έστω ότι δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό εισόδου 0, τότε για κάθε κορυφή v υπάρχει προηγούμενη κορυφή u τέτοια ώστε $(u, v) \in U$.

Οπότε, αν ξεκινήσουμε από μια οποιαδήποτε κορυφή v μπορούμε να δημιουργήσουμε μια λίστα που κατασκευάζεται προθέτοντας την προηγούμενη κορυφή u' κάθε κορυφής u που είναι στην λίστα.



Επειδή το πλήθος των κορυφών είναι φραγμένο, η λίστα αυτή θα περιέχει επαναλήψεις, επομένως το γράφημα θα έχει κύκλωμα, άτοπο.

Η εύρεση μιας τοπολογικής διάταξης των κορυφών ενός γραφήματος τόξων G , αν υπάρχει, μπορεί να γίνει μέσω του επόμενου αλγόριθμου.

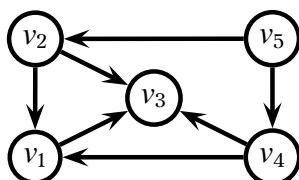
Αλγόριθμος τοπολογικής διάταξης

Είσοδος: Ένα γράφημα τόξων G

Έξοδος: Μια λίστα L με την τοπολογική διάταξη των κορυφών, αν υπάρχει.

- Όσο υπάρχουν κορυφές με βαθμό εισόδου 0 στο G
 - Επιλέγουμε μια κορυφή v του G με βαθμό εισόδου 0 και την τοποθετούμε στο τέλος της λίστας L .
 - Αφαιρούμε από το G την κορυφή v (καθώς και όλα τα τόξα που ξεκινούν από αυτήν).
- Αν το G δεν περιέχει άλλες κορυφές, τότε η σειρά των κορυφών στην λίστα L είναι μια τοπολογική διάταξη.
- Αλλιώς, το γράφημα περιέχει κύκλωμα και άρα δεν έχει τοπολογική διάταξη.

Παράδειγμα: Να βρεθεί, αν υπάρχει, μια τοπολογική διάταξη των κορυφών του γραφήματος:

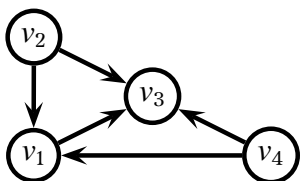


Λύση.

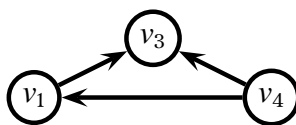
- Η μοναδική κορυφή με βαθμό εισόδου 0 είναι η v_5 . Τοποθετούμε την v_5 στο τέλος της λίστας L και αφαιρούμε τα τόξα που αρχίζουν από την v_5
- Μετά την αφαίρεση της v_5 υπάρχουν δύο κορυφές με βαθμό εισόδου 0, οι v_2 και v_4 . Επιλέγουμε την v_2 , την τοποθετούμε στο τέλος της λίστας L , και αφαιρούμε όλα τα τόξα της
- Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στο κενό γράφημα και στην λίστα

$$L = (v_5, v_2, v_4, v_1, v_3)$$

η οποία είναι τοπολογική διάταξη των κορυφών του γραφήματος.

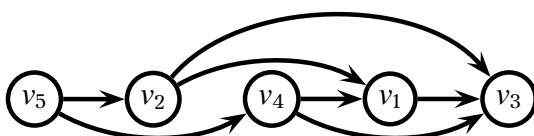


$$L = (v_5)$$



$$L = (v_5, v_2)$$

Πράγματι,



□

Παρατήρηση: Για την εύρεση της τοπολογικής διάταξης ενός γραφήματος υπάρχει και άλλος αλγόριθμος που χρησιμοποιεί την αναζήτηση σε βάθος των κορυφών του.

1.5.4 Συνάρτηση Grundy - Sprague

Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$. Ορίζουμε το **mex (minimum excluded value)** του A ως εξής:

$$\text{mex } A = \min \mathbb{N} \setminus A,$$

δηλαδή $\text{mex } A$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που δεν ανήκει στο A .

Παράδειγμα:

- $\text{mex}\{1, 2, 4\} = 0$
- $\text{mex}\{0, 1, 2, 6\} = 3$
- $\text{mex}\{0, 1, 2, 3\} = 4$
- $\text{mex } \emptyset = 0$.

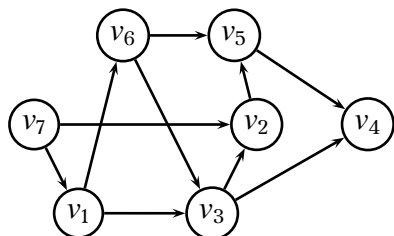
Για κάθε κορυφή v ενός γραφήματος τόξων $G = (V, U)$ με $\Gamma(v)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κορυφών u που είναι άκρα τόξων με αρχή την κορυφή v (**γείτονες της v**), δηλαδή

$$\Gamma(v) = \{u \in X : (v, u) \in U\}$$

Παράδειγμα: Για το γράφημα τόξων $G = (V, U)$ όπου $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ και

$$U = \{(v_1, v_3), (v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_4), (v_6, v_3), (v_6, v_5), (v_7, v_1), (v_7, v_2)\}.$$

Έχουμε ότι



$$\begin{aligned} \Gamma(v_1) &= \{v_3, v_6\} \\ \Gamma(v_2) &= \{v_5\} \\ \Gamma(v_3) &= \{v_2, v_4\} \\ \Gamma(v_4) &= \emptyset \\ \Gamma(v_5) &= \{v_4\} \\ \Gamma(v_6) &= \{v_3, v_5\} \\ \Gamma(v_7) &= \{v_1, v_2\}. \end{aligned}$$

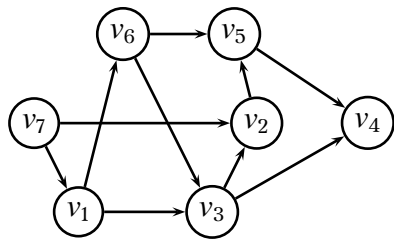
Σε κάθε γράφημα τόξων $G = (V, U)$ **χωρίς κυκλώματα** αντιστοιχεί μια (μοναδική) συνάρτηση $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ η οποία ονομάζεται **συνάρτηση Grundy - Sprague** του G .

Συγκεκριμένα, για κάθε κορυφή v του γραφήματος ορίζουμε

$$g(v) = \text{mex}\{g(u) : \text{για κάθε } u \in \Gamma(v)\}.$$

Η συνάρτηση g τοποθετεί στις κορυφές του γραφήματος G φυσικούς αριθμούς, έτσι ώστε κάθε κορυφή v να έχει τιμή $g(v)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό που δεν έχει τοποθετηθεί στους γείτονές της. Η τιμή $g(v)$ ονομάζεται **g -value** της κορυφής v .

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης g του γραφήματος τόξων G :



$$\begin{aligned}\Gamma(v_1) &= \{v_3, v_6\} \\ \Gamma(v_2) &= \{v_5\} \\ \Gamma(v_3) &= \{v_2, v_4\} \\ \Gamma(v_4) &= \emptyset \\ \Gamma(v_5) &= \{v_4\} \\ \Gamma(v_6) &= \{v_3, v_5\} \\ \Gamma(v_7) &= \{v_1, v_2\}.\end{aligned}$$

Το G δεν έχει κυκλώματα, άρα ορίζεται η συνάρτηση Grundy - Sprague σ αυτό. Στόχος μας είναι να συμπληρώσουμε τις κενές θέσεις στον επόμενο πίνακα

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$							

$$g(v) = \text{mex}\{g(u) : \text{για κάθε } u \in \Gamma(v)\},$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Gamma(v_1) &= \{v_3, v_6\} \\ \Gamma(v_2) &= \{v_5\} \\ \Gamma(v_3) &= \{v_2, v_4\} \\ \Gamma(v_4) &= \emptyset \\ \Gamma(v_5) &= \{v_4\} \\ \Gamma(v_6) &= \{v_3, v_5\} \\ \Gamma(v_7) &= \{v_1, v_2\}.\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}g(v_1) &= \text{mex}\{g(v_3), g(v_6)\} \\ g(v_2) &= \text{mex}\{g(v_5)\} \\ g(v_3) &= \text{mex}\{g(v_2), g(v_4)\} \\ g(v_4) &= \text{mex}\emptyset \\ g(v_5) &= \text{mex}\{g(v_4)\} \\ g(v_6) &= \text{mex}\{g(v_3), g(v_5)\} \\ g(v_7) &= \text{mex}\{g(v_1), g(v_2)\}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

Για να υπολογισθεί το $g(v_1)$ πρέπει να υπολογισθούν πρώτα τα $g(v_3), g(v_6)$.

Για να υπολογισθεί το $g(v_2)$ πρέπει να υπολογισθεί πρώτα το $g(v_5)$,

Για να υπολογισθεί το $g(v_3)$ πρέπει να υπολογισθούν πρώτα τα $g(v_2), g(v_4)$.

Για να υπολογισθεί το $g(v_5)$ πρέπει να υπολογισθεί πρώτα το $g(v_4)$,

Για να υπολογισθεί το $g(v_6)$ πρέπει να υπολογισθούν πρώτα τα $g(v_3), g(v_5)$.

Για να υπολογισθεί το $g(v_7)$ πρέπει να υπολογισθούν πρώτα τα $g(v_1), g(v_2)$.

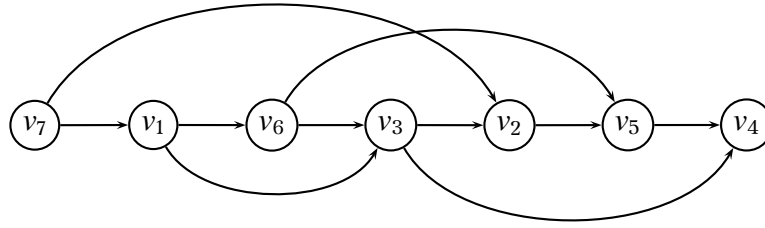
Αντίθετα, για τον υπολογισμό του $g(v_4)$ δεν χρειάζονται άλλες τιμές της g και ισχύει ότι $g(v_4) = \text{mex}\emptyset = 0$.

Επομένως, για να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης g πρέπει να βρούμε (αν υπάρχει) μια σειρά στις κορυφές του, σύμφωνα με την οποία να υπολογίζουμε την τιμή $g(v)$ μια κορυφής αφού πρώτα έχουμε ήδη υπολογίσει τις τιμές $g(u)$ όλων των γειτόνων u της v .

Συνεπώς, ο υπολογισμός της συνάρτησης g είναι πρόβλημα προτεραιοτήτων, επομένως μπορεί να λυθεί υπολογίζοντας μια τοπολογική διάταξη στο σύνολο των κορυφών του γραφήματος G . Η διαφοροποίηση στο πρόβλημα αυτό είναι ότι το τόξο (v, u) λειτουργεί ανάποδα, αφού για τον υπολογισμό της $g(v)$ χρειαζόμαστε την τιμή $g(u)$.

Άρα, για το πρόβλημα αυτό, θα βρούμε μια τοπολογική διάταξη στο γράφημα G και έπειτα θα υπολογίσουμε την συνάρτηση με την αντίστροφη σειρά.

Μια τέτοια διάταξη απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα



(από την κορυφή v_i ξεκινάει βέλος προς την κορυφή v_j αν ο υπολογισμός της $g(v_i)$ απαιτεί τον υπολογισμό της $g(v_j)$).

Θα υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης g με την ανάστροφη σειρά

$$v_4, v_5, v_2, v_3, v_6, v_1, v_7$$

οπότε σε κάθε βήμα οι τιμές της g που απαιτούνται έχουν υπολογισθεί σε κάποιο προηγούμενο βήμα.

Πράγματι, έχουμε τα εξής:

1) $g(v_4) = \text{mex}\emptyset = 0.$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$				0			

2) $g(v_5) = \text{mex}\{g(v_4)\} = \text{mex}\{0\} = 1.$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$				0	1		

3) $g(v_2) = \text{mex}\{g(v_5)\} = \text{mex}\{1\} = 0.$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$		0		0	1		

4) $g(v_3) = \text{mex}\{g(v_2), g(v_4)\} = \text{mex}\{0, 0\} = \text{mex}\{0\} = 1.$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$		0	1	0	1		

5) $g(v_6) = \text{mex}\{g(v_3), g(v_5)\} = \text{mex}\{1, 1\} = \text{mex}\{1\} = 0.$

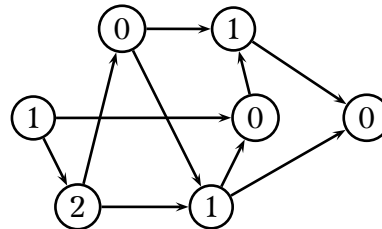
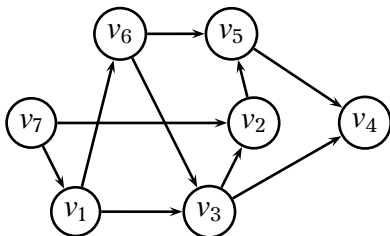
v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$		0	1	0	1	0	

6) $g(v_1) = \text{mex}\{g(v_3), g(v_6)\} = \text{mex}\{1, 0\} = 2.$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$	2	0	1	0	1	0	

7) Τέλος, $g(v_7) = \text{mex}\{g(v_1), g(v_2)\} = \text{mex}\{2, 0\} = 1.$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$	2	0	1	0	1	0	1.



Παρατήρηση: Η συνάρτηση Grundy - Sprague ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

- Αν για την κορυφή v ισχύει ότι $g(v) \neq 0$, τότε υπάρχει $u \in \Gamma(v)$ με $g(u) = 0$.
- Αν για την κορυφή v ισχύει ότι $g(v) = 0$, τότε για κάθε $u \in \Gamma(v)$ ισχύει ότι $g(u) \neq 0$.

Μια εφαρμογή της συνάρτησης Grundy - Sprague είναι ότι

- αποδεικνύει ότι υπάρχει στρατηγική νίκης σε συνδυαστικά παιχνίδια δύο παιχτών όπου έχουμε αποκλείσει την ισοπαλία (π.χ. σκάκι), δηλαδή αποδεικνύει ότι κάποιος από τους δύο παίκτες μπορεί πάντα να κερδίζει (αρκεί να γνωρίζει την στρατηγική).
- δίνει την στρατηγική νίκης στο παιχνίδι αυτό, αρκεί να είναι υπολογιστικά εφικτός ο υπολογισμός της συνάρτησης g . Η στρατηγική νίκης είναι (πάντα) να φτάνουμε σε καταστάσεις με τιμή g ίση με 0.

Παράδειγμα 1.2 (Μια παραλλαγή του Nim).

Δύο παίκτες A και B παίζουν το εξής παιχνίδι:

Υπάρχουν δύο σωροί με σπίρτα. Ο πρώτος σωρός αποτελείται από x σπίρτα και ο δεύτερος σωρός από y σπίρτα.

Οι παίκτες παίζουν εναλλάξ κάνοντας **μια κίνηση ο καθένας**: Κάθε παίκτης αφαιρεί ένα ή περισσότερα σπίρτα

- ή από τον πρώτο σωρό,
- ή από τον δεύτερο σωρό,
- ή τον ίδιο αριθμό και από τους δύο σωρούς.

Χάνει ο παίκτης που δεν μπορεί να κάνει κίνηση.

- Για παράδειγμα, αν ο πρώτος σωρός περιέχει 12 σπίρτα και ο δεύτερος σωρός 8 σπίρτα ποιος από τους δύο παίκτες θα κερδίσει;

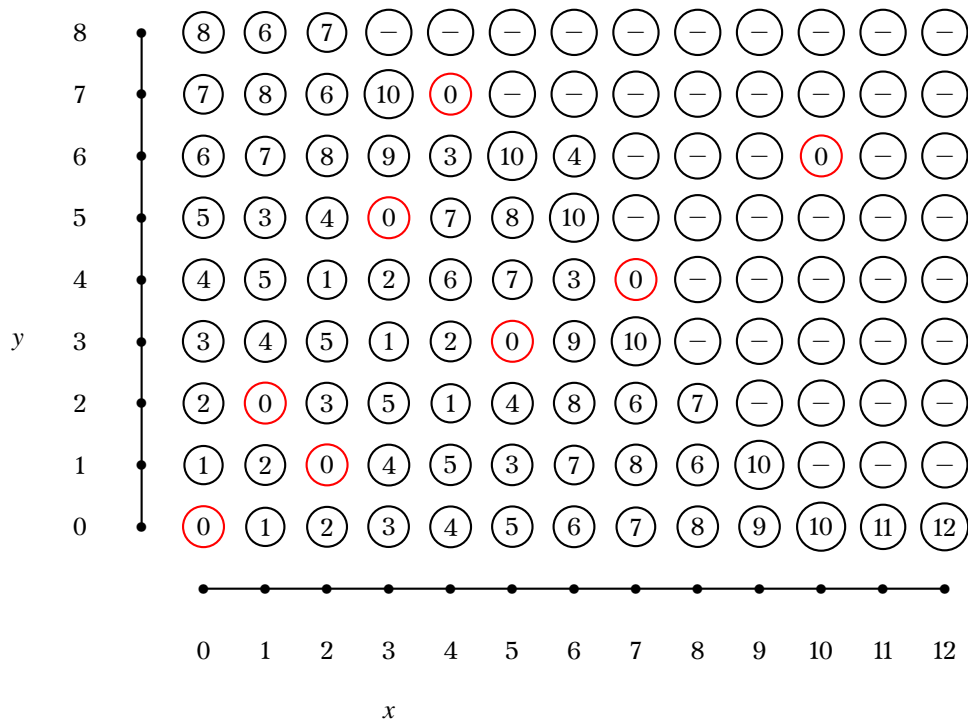
Λύση. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το παιχνίδι ως ένα γράφημα τόξων.

Οι κορυφές είναι οι καταστάσεις του παιχνιδιού. Κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) όπου x ο αριθμός των σπίρτων στον πρώτο σωρό και y ο αριθμός των σπίρτων στον δεύτερο σωρό.

Ισχύει ότι $0 \leq x \leq 12$ και $0 \leq y \leq 8$. Συνολικά υπάρχουν $13 \times 9 = 117$ καταστάσεις.

Αρχικά το παιχνίδι βρίσκεται στην κορυφή (κατάσταση) $(12, 8)$. Με κάθε κίνηση των παιχτών το παιχνίδι αλλάζει καταστάσεις. Οι επιτρεπτές κινήσεις αντιστοιχούν στην μετακίνηση οριζόντια (προς τα αριστερά) ή κατακόρυφα (προς τα κάτω) ή διαγώνια (προς το κέντρο) οσαδήποτε βήματα. Κερδίζει ο παίκτης που θα φτάσει πρώτος στην κορυφή $(0, 0)$.

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται μόνο οι κορυφές του γραφήματος. Τα τόξα ορίζονται από τις επιτρεπτές κινήσεις. Επίσης, έχουν σημειωθεί οι τιμές της συνάρτησης Grundy - Sprague. Οι μηδενικές τιμές (τιμές με κόκκινο) ορίζουν την νικηφόρα στρατηγική του παιχνιδιού.



Στο παράδειγμα, μπορεί να κερδίζει πάντα ο πρώτος παίχτης, διότι αφαιρώντας 2 σπίρτα και από τους δύο σωρούς καταλήγει στην κατάσταση $(10, 6)$ η οποία έχει τιμή g ίση με 0. \square

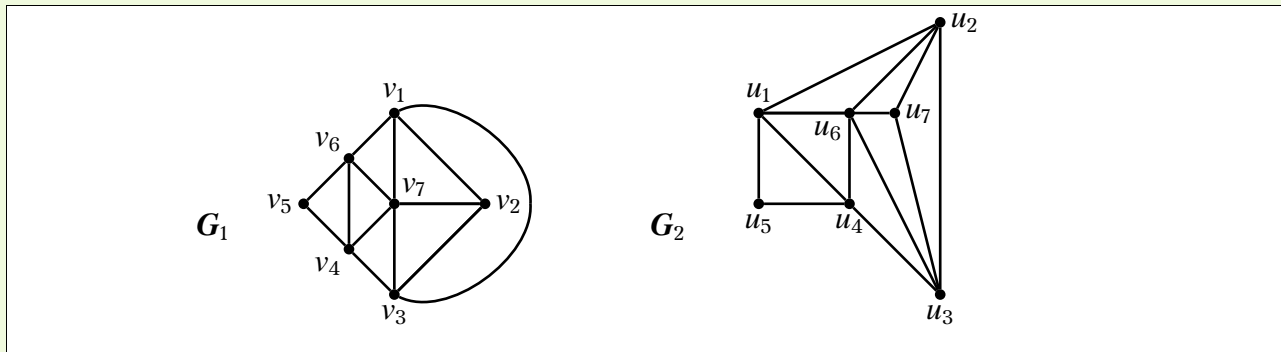
Παρατήρηση: Σε κάθε συνδυαστικό παιχνίδι δύο παιχτών (χωρίς ισοπαλία) μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα των καταστάσεων του παιχνιδιού. Το γράφημα αυτό δεν θα περιέχει κυκλώματα (αφού δεν επιτρέπεται ισοπαλία).

Πόρισμα 1.5.2. Κάθε συνδυαστικό παιχνίδι δύο παιχτών (χωρίς ισοπαλία) έχει συνάρτηση g . Επομένως, μπορεί να κερδίζει πάντα ή ο πρώτος, ή ο δεύτερος παίχτης. (Αρκεί να γνωρίζει τις καταστάσεις που μηδενίζουν την συνάρτηση g .)

1.6 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1.4. Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων.

(i)



Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$f(v_1) = u_2$$

$$f(v_2) = u_7$$

$$f(v_3) = u_3$$

$$f(v_4) = u_4$$

$$f(v_5) = u_5$$

$$f(v_6) = u_1$$

$$f(v_7) = u_6$$

□

Μπορούμε να ελέγξουμε αν τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα χρησιμοποιώντας την μέθοδο `GraphMatcher` της βιβλιοθήκης `networkx`.

```
import networkx as nx
G1 = nx.Graph()
G1.add_nodes_from(range(1,8))
G1.add_edges_from([[1,2],[1,3],[1,6],[1,7],[2,3],[2,7],
                   [3,4],[3,7],[4,5],[4,6],[4,7],[5,6],[6,7]])
G2 = nx.Graph()
G2.add_nodes_from(range(1,8))
G2.add_edges_from([[1,2],[1,5],[1,4],[1,6],[2,3],[2,6],
                   [2,7],[3,4],[3,6],[3,7],[4,5],[4,6],[6,7]])
#Test whether the graphs are isomorphic
GM = nx.isomorphism.GraphMatcher(G1,G2)
if GM.is_isomorphic(): #If G1, G2 are isomorphic
    print("The graphs are isomorphic")
    print("An isomorphism between them is the following:")
    for i in G1:
        print("v",i,"->", "u",GM.mapping[i])
    print(GM.mapping)
else:
    print("The graphs are not isomorphic")
```

Output:

The graphs are isomorphic

An isomorphism between them is the following:

$v_1 \rightarrow u_3$

$v_2 \rightarrow u_7$

$v_3 \rightarrow u_2$

$v_4 \rightarrow u_1$

$v_5 \rightarrow u_5$

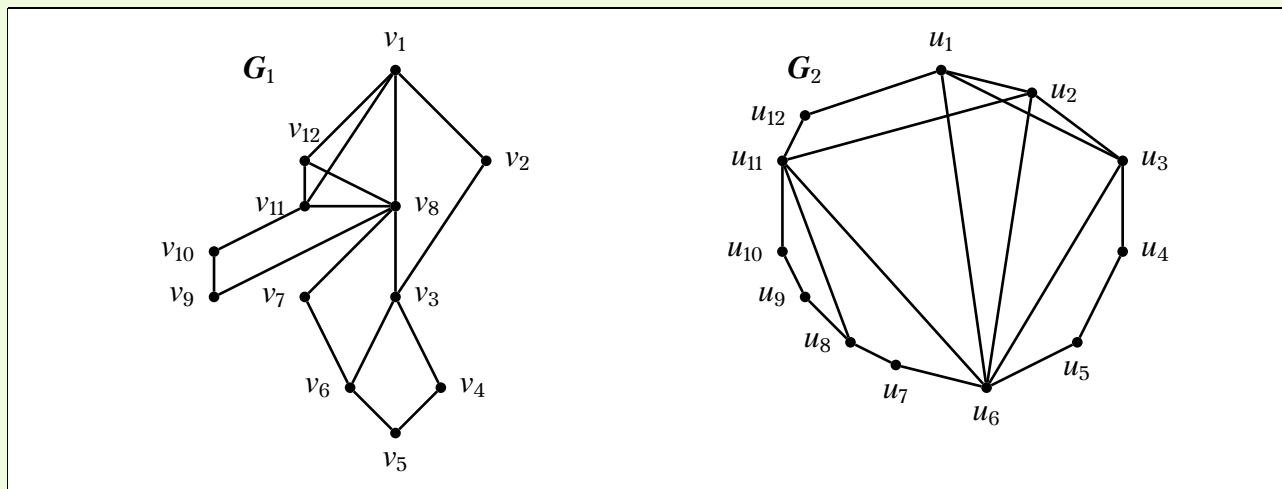
$v_6 \rightarrow u_4$

$v_7 \rightarrow u_6$

$\{4: 1, 3: 2, 1: 3, 6: 4, 5: 5, 7: 6, 2: 7\}$

Παρατήρηση: Παρατηρήστε ότι ο αλγόριθμος ανακάλυψε έναν διαφορετικό ισομορφισμό από αυτόν που δίνεται στην λύση της άσκησης.

(ii)

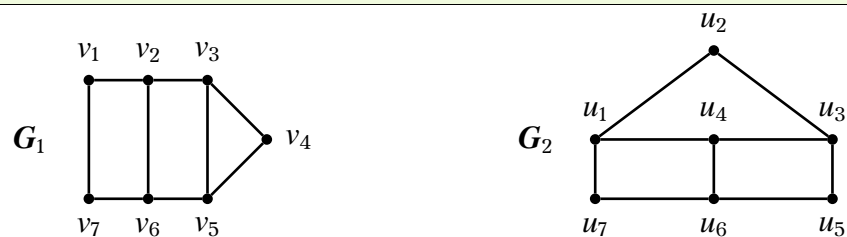


Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι έχουν διαφορετικές ακολουθίες βαθμών.

Ακολουθία βαθμών του G_1 : (6, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2).

Ακολουθία βαθμών του G_2 : (6, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2). □

(iii)



Λύση. Δεν είναι ισόμορφα: Το G_1 περιέχει κύκλο μήκους 3 ενώ το G_2 όχι. □

Μπορούμε να ελέγξουμε αν τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα χρησιμοποιώντας την μέθοδο `GraphMatcher` της βιβλιοθήκης `networkx`.

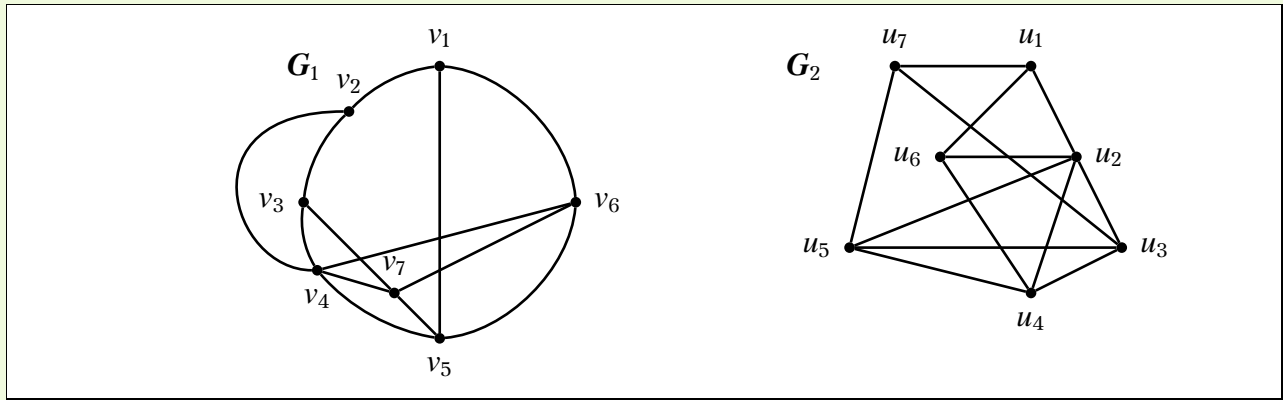
```
import networkx as nx
G1 = nx.Graph()
G1.add_nodes_from(range(1,8))
G1.add_edges_from([[1,2],[1,7],[2,3],[2,6],[3,4],[3,5],[4,5],[5,6],[6,7]])
G2 = nx.Graph()
G2.add_nodes_from(range(1,8))
G2.add_edges_from([[1,2],[1,4],[1,7],[2,3],[3,4],[3,5],[4,6],[5,6],[6,7]])
#Test whether the graphs are isomorphic
GM = nx.isomorphism.GraphMatcher(G1,G2)
if GM.is_isomorphic(): #If G1, G2 isomorphic? then
    print("The graphs are isomorphic")
    print("An isomorphism between them is the following:")
    for i in G1:
        print("v",i,"->", "u",GM.mapping[i])
    print(GM.mapping)
else:
    print("The graphs are not isomorphic")
    print("Degree sequence of G1:",sorted((d for n, d in G1.degree()),
reverse=True))
    print("Degree sequence of G2:",sorted((d for n, d in G2.degree()),
reverse=True))
```

Output:

```
The graphs are not isomorphic
Degree sequence of G1: [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2]
Degree sequence of G2: [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2]
```

Παρατήρηση: Παρατηρήστε ότι παρόλο που τα γραφήματα είναι μη ισόμορφα έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών. Στην περίπτωση όπου τα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα, η μέθοδος `GraphMatcher` δεν μας δίνει κάποια εξήγηση γιατί συμβαίνει αυτό.

(iv)



Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$f(v_1) = u_7$$

$$f(v_2) = u_1$$

$$f(v_3) = u_6$$

$$f(v_4) = u_2$$

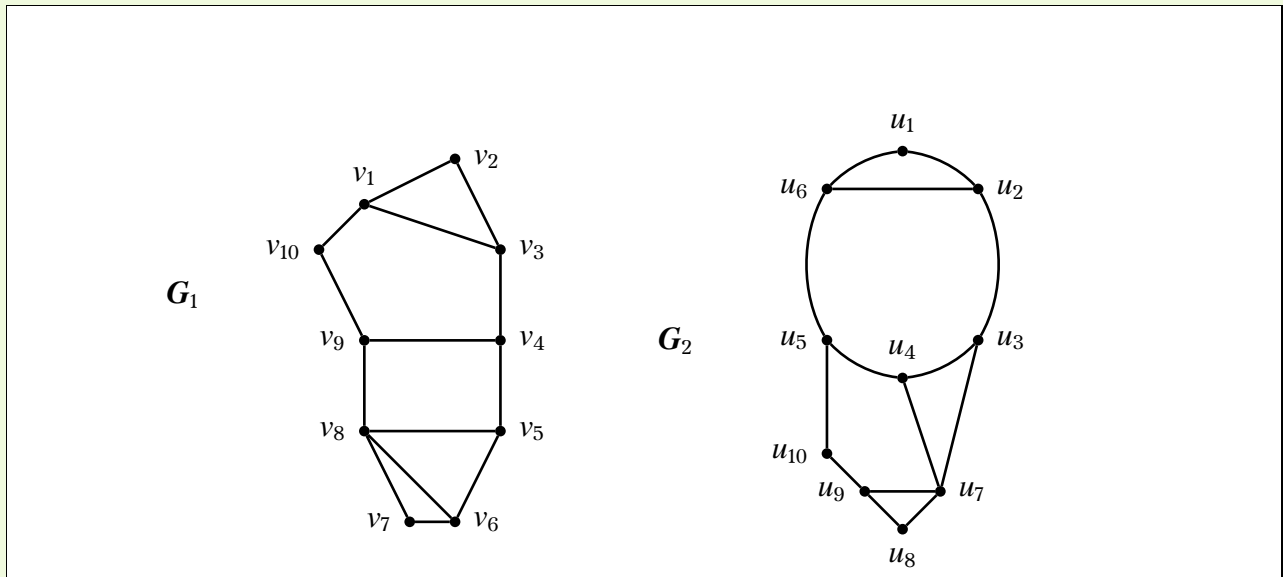
$$f(v_5) = u_5$$

$$f(v_6) = u_3$$

$$f(v_7) = u_4$$

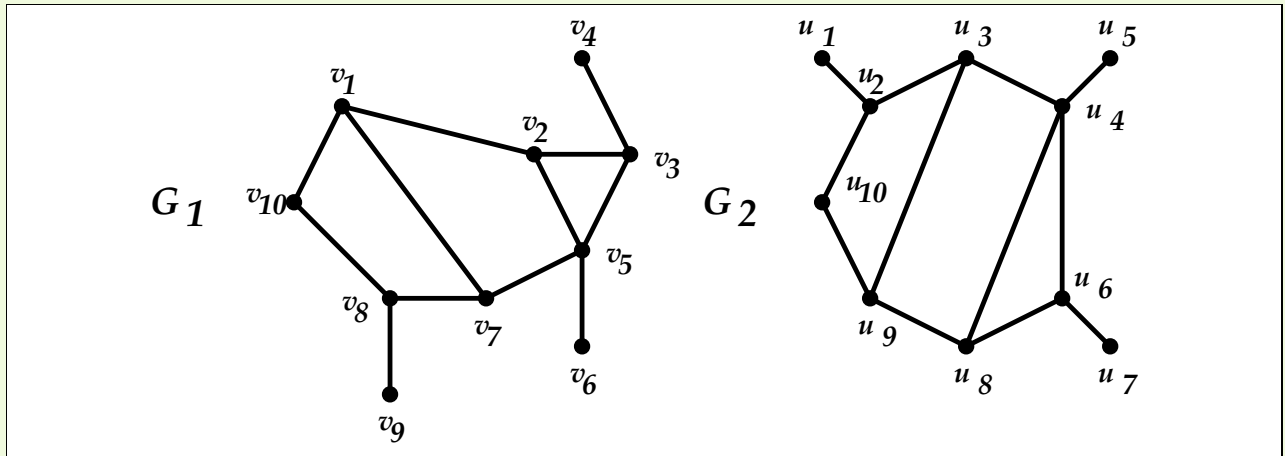
□

(v)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι το G_1 περιέχει κύκλο μήκους 4 ενώ το G_2 όχι. □

(vi)

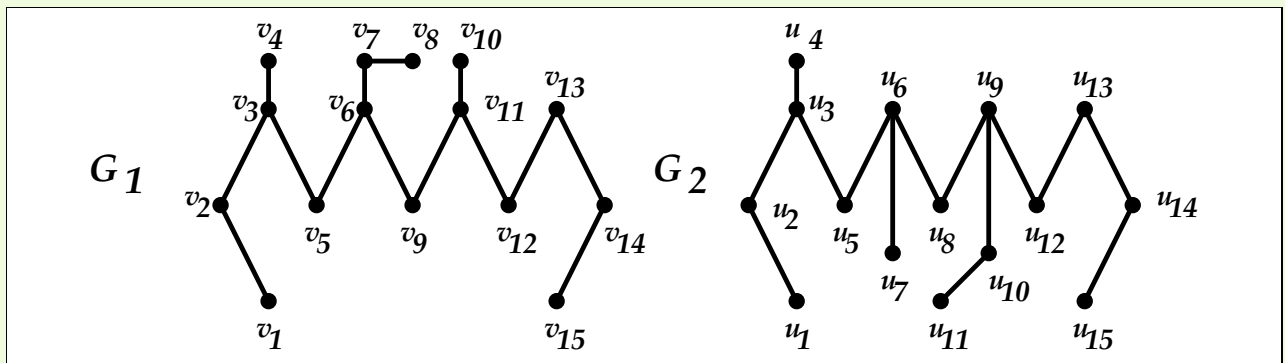


Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_9 \\ f(v_2) &= u_8 \\ f(v_3) &= u_6 \\ f(v_4) &= u_7 \\ f(v_5) &= u_4 \\ f(v_6) &= u_5 \\ f(v_7) &= u_3 \\ f(v_8) &= u_2 \\ f(v_9) &= u_1 \\ f(v_{10}) &= u_{10} \end{aligned}$$

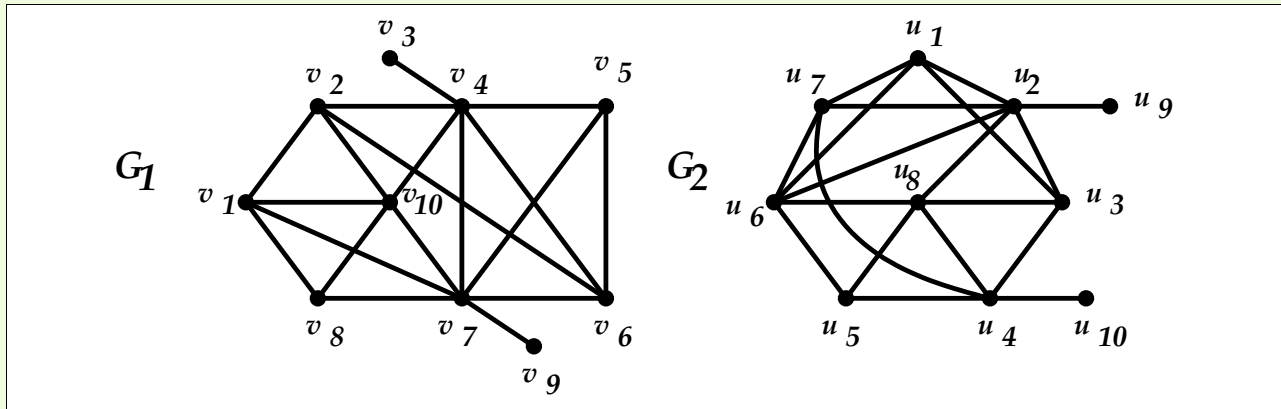
□

(vii)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχουν κορυφές βαθμού 1 που απέχουν απόσταση 4 (οι u_4 και u_7) ενώ στο G_1 όχι. □

(viii)



Λύση. Τα G_1 , G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχει κορυφή βαθμού 1 η οποία συνδέεται με κορυφή βαθμού 5, ενώ στο G_1 δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές. \square

Άσκηση 1.5. Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.

(i) (4, 4, 3, 3, 2, 2, 1).

Λύση. Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός. \square

(ii) (5, 3, 2, 2, 2).

Λύση. Δεν υπάρχει σε ένα γράφημα με 5 κορυφές ο μέγιστος βαθμός είναι το πολύ 4. \square

(iii) (1, 1, 1, 1, 1, 1).

Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



\square

(iv) (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2).

Λύση. Υπάρχει. Για παράδειγμα ο C_7 . \square

(v) (7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1)

Λύση. Από το θεώρημα Havel - Hakimi έχουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα αν και μόνο αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών:

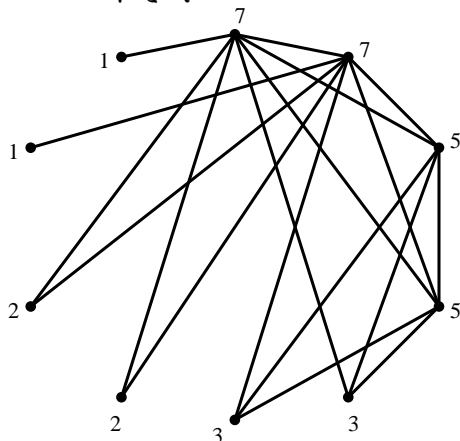
$$(7 - 1, 5 - 1, 5 - 1, 3 - 1, 3 - 1, 2 - 1, 2 - 1, 1, 1) = (6, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$$

$$(4 - 1, 4 - 1, 2 - 1, 2 - 1, 1 - 1, 1 - 1, 1, 1, 1) = (3, 3, 1, 1, 0, 0, 1, 1) = (3, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$$

$$(3 - 1, 1 - 1, 1 - 1, 1, 1, 0, 0) = (2, 0, 0, 1, 1, 0, 0) = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1 - 1, 1 - 1, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0), \text{ (μηδενικό γράφημα με 6 κορυφές)}$$

Επομένως, υπάρχει γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών. Ένα τέτοιο γράφημα μπορεί κατασκευασθεί με τον αλγόριθμο των Havel - Hakimi και είναι το επόμενο:



□

(vi) (7, 7, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 1)

Λύση. Από το θεώρημα Havel - Hakimi έχουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα αν και μόνο αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών:

$$(7 - 1, 7 - 1, 3 - 1, 3 - 1, 2 - 1, 1 - 1, 1 - 1, 1) = (6, 6, 2, 2, 1, 0, 0, 1) = (6, 6, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$$

$$(6 - 1, 2 - 1 - 2 - 1, 1 - 1, 1 - 1, 0 - 1, 0, 0) = (5, 1, 1, 0, 0, -1, 0)$$

Επομένως, δεν υπάρχει γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών.

□

Για τον έλεγχο ύπαρξης και κατασκευής ενός γραφήματος με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους `is_graphical` και `havel_hakimi_graph` της βιβλιοθήκης `networkx`.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

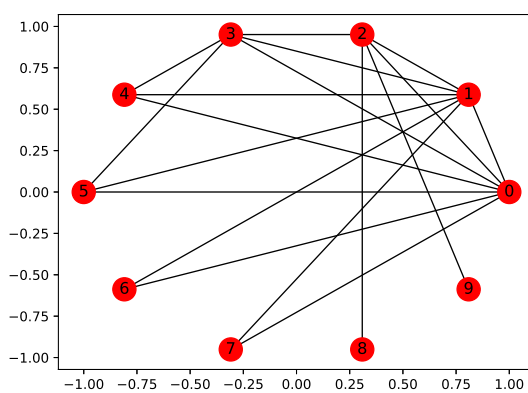
def Graph_Check(Seq):
    if nx.is_graphical(Seq):
        print("The sequence",Seq,"is graphical")
        G = nx.havel_hakimi_graph(Seq)
        print("The adjacency matrix of graph having this degree sequence
is:")
        print(nx.adjacency_matrix(G).todense())
        pos = nx.circular_layout(G)
        nx.draw_networkx(G,pos)
        plt.show()
    else:
        print("The sequence",Seq,"is NOT graphical")
        print("")

Seq1 = [7,7,5,5,3,3,2,2,1,1]
Seq2 = [7,7,7,3,3,2,1,1,1,1]

Graph_Check(Seq1)
Graph_Check(Seq2)
```

Output:

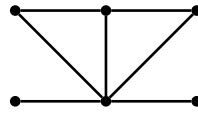
```
The sequence [7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1] is graphical
The adjacency matrix of graph having this degree sequence is:
[[0 1 1 1 1 1 1 1 0 0]
 [1 0 1 1 1 1 1 1 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 1 1]
 [1 1 1 0 1 1 0 0 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
 [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]]
```



The sequence [7, 7, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1] is NOT graphical

(vii) (5, 3, 2, 2, 1, 1).

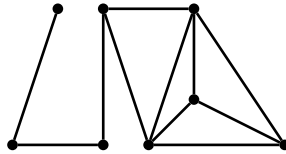
Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



□

(viii) (4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1).

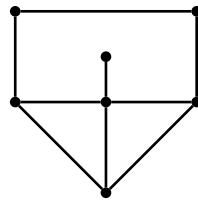
Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

(ix) (4, 3, 3, 3, 2, 2, 1).

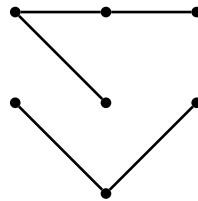
Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

(x) (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)

Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

Άσκηση 1.6.

i) Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του K_n (πλήρες γράφημα με n κορυφές).

Λύση. Το K_n περιέχει n κορυφές και ο βαθμός κάθε κορυφής του K_n ισούται με $n - 1$. Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

$$2|E(K_n)| = \sum_{i=1}^n (n-1) = n(n-1) \Leftrightarrow |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Παρατήρηση: Ο αριθμός των δεσμών του K_n ισούται με τον αριθμό των ζευγών των κορυφών του. Υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζεύγη κορυφών, οπότε $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. \square

ii) Έστω $G = (V, E)$ ένα d -κανονικό γράφημα με $|V| = n$. Να βρεθεί το $|E|$.

Λύση. Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

$$2|E| = \sum_{i=1}^n d = nd \Leftrightarrow |E| = \frac{dn}{2} \quad \square$$

iii) Έστω $G = (V, E)$ με $|V| = n$ και $|E| = k$. Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του G^c (συμπλήρωμα του G).

Λύση. Έστω $G^c = (V, E^c)$. Για κάθε $v, u \in V$ με $v \neq u$ ισχύει ότι

$$\acute{\eta} \{v, u\} \in E \acute{\eta} \{v, u\} \in E^c$$

Επομένως, επειδή υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζεύγη κορυφών του V έπεται ότι

$$\sum_{\substack{v, u \in V \\ v \neq u}} 1 = \binom{n}{2}$$

$$\sum_{\{v, u\} \in E} 1 + \sum_{\{v, u\} \in E^c} 1 = \binom{n}{2}$$

$$|E| + |E^c| = \binom{n}{2}$$

Άρα,

$$|E^c| = \binom{n}{2} - |E| = \binom{n}{2} - k \quad \square$$

iv) Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **αυτοσυμπληρωματικό** αν $G \simeq G^c$. Να δειχθεί ότι $|V| \equiv 0 \pmod{4}$ ή $|V| \equiv 1 \pmod{4}$.

Λύση. Αν $G \simeq G^c$ έπεται ότι $|E(G)| = |E(G^c)| = |E|$. Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει ότι

$$|E(G^c)| = \binom{|V|}{2} - |E(G)| \Leftrightarrow |E| = \binom{|V|}{2} - |E| \Leftrightarrow 2|E| = \frac{|V|(|V| - 1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$4|E| = |V|(|V| - 1) \Leftrightarrow |V|(|V| - 1) \equiv 0 \pmod{4}$$

Άρα, ή $|V| \equiv 0 \pmod{4}$, ή $(|V| - 1) \equiv 0 \pmod{4}$. Ισοδύναμα

$$\text{ή } |V| \equiv 0 \pmod{4}, \text{ ή } |V| \equiv 1 \pmod{4} \quad \square$$

Άσκηση 1.7. Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών, με $|V| \geq 2$. Να δειχθεί ότι αν $|V| > |E|$, τότε το G θα περιέχει τουλάχιστον ένα κόμβο βαθμού 1.

Λύση. Επειδή το G είναι συνεκτικό $d(v) \geq 1$ για κάθε $v \in V$.

Έστω ότι δεν υπάρχει $v \in V$ με $d(v) = 1$, τότε $d(v) \geq 2$ για κάθε $v \in V$.

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V| > 2|E|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, υπάρχει $v \in G$ με $d(v) = 1$. □

Άσκηση 1.8. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε γράφημα δεσμών $G = (V, E)$, με $|V| \geq 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο κόμβοι με τον ίδιο βαθμό.

Λύση. Για κάθε $v \in V$ ισχύει ότι $0 \leq d(v) \leq |V| - 1$.

Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν ταυτόχρονα κόμβοι $v, v' \in V$ με $d(v) = 0$ και $d(v') = |V| - 1$.

Άρα, είτε $0 \leq d(v) \leq |V| - 2$ για κάθε $v \in V$, είτε $1 \leq d(v) \leq |V| - 1$ για κάθε $v \in V$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν $|V| - 1$ δυνατές τιμές βαθμών κόμβων για τους $|V|$ κόμβους του γραφήματος G , οπότε από την αρχή του περιστερώνα έπεται το ζητούμενο. □

Άσκηση 1.9. Να δειχθεί ότι αν ένα γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ έχει $|V| = 2n$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και όλοι οι κόμβοι του είναι βαθμού n , τότε είναι συνεκτικό.

Λύση. Έστω ότι το G είναι μη συνεκτικό. Υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορυφές v_1, v_2 που ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2 του G .

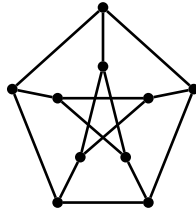
Επειδή $d(v_1) = d(v_2) = n$ έπεται ότι $|V(G_1)|, |V(G_2)| \geq n + 1$ όπου $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Επομένως $|V| \geq |V(G_1)| + |V(G_2)| \geq n + 1 + n + 1 = 2n + 2$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το G είναι συνεκτικό. □

Άσκηση 1.10. Να σχεδιασθεί ένα κυβικό γράφημα (V, E) με $|V| = 2n$ (για κάποιο $n \geq 3$), το οποίο να μην περιέχει τρίγωνα.

Λύση. Ένας κύβος με 8 κορυφές. □

Άσκηση 1.11. Να σχεδιασθεί ένα κυβικό γράφημα (V, E) με 10 κορυφές το οποίο δεν περιέχει τρίγωνα και κύκλους μήκους 4.

Λύση. Το γράφημα του Petersen:



□

Άσκηση 1.12. Ναδειχθεί ότι σε ένα απλό γράφημα δεσμών με ακριβώς δύο κόμβους περιττού βαθμού, υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους αυτούς.

Λύση. Έστω ότι οι κόμβοι δεν συνδέονται με μονοπάτι, τότε ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Έστω G_1 η μια από αυτές τις συνιστώσες. Η G_1 είναι γράφημα. Ο βαθμός κάθε κόμβου της G_1 είναι άρτιος αριθμός εκτός από τον κόμβο που έχει βαθμό περιττό. Αυτό είναι άτοπο, διότι το άθροισμα των βαθμών των κόμβων της G_1 θα ήταν περιττός αριθμός. Άρα, οι δύο κόμβοι περιττού βαθμού δηλαδή βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα δηλαδή συνδέονται με μονοπάτι. □

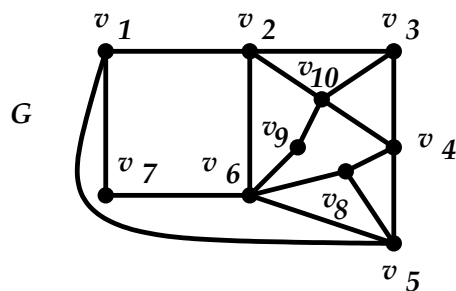
Άσκηση 1.13. Ναδειχθεί ότι αν το G είναι μη συνεκτικό απλό γράφημα δεσμών, τότε το συμπλήρωμά του G^c είναι συνεκτικό.

Λύση. Έστω $x, y \in V$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

Αν οι x, y δεν συνδέονται στο G , τότε οι x, y συνδέονται με δεσμό στο G^c .

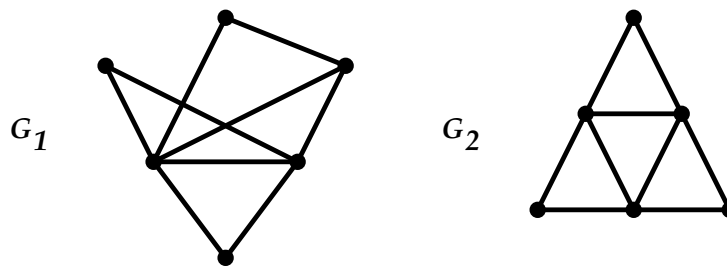
Αν οι x, y συνδέονται στο G , τότε επειδή το G είναι μη συνεκτικό υπάρχει κόμβος z που δεν συνδέεται με κανένα από τους x, y . (Αλλιώς, αν κάθε κόμβος z του G συνδέονταν με το x ή/και y , το γράφημα θα ήταν συνεκτικό.) Άρα, οι x, z και y, z συνδέονται με δεσμό στο G^c . Άρα, οι x, y ενώνονται στο G^c με το μονοπάτι x, z, y . □

Άσκηση 1.14. Να βρεθεί (αν υπάρχει) ένας κύκλος Hamilton στο παρακάτω γράφημα:



Απάντηση. Το G περιέχει κύκλο Hamilton. Για παράδειγμα υπάρχει ο κύκλος $(v_{10}, v_9, v_6, v_7, v_1, v_5, v_8, v_4, v_3, v_2, v_{10})$. □

Άσκηση 1.15. Να εξετασθεί αν καθένα από τα παρακάτω γραφήματα περιέχει ένα δρόμο Euler ή είναι γράφημα Euler.

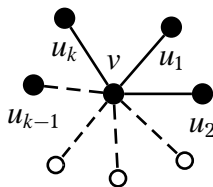


Απάντηση. Το G_1 περιέχει δρόμο Euler αλλά δεν είναι γράφημα Euler. Το G_2 είναι γράφημα Euler. \square

Άσκηση 1.16. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε συνεκτικό γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ με $|V| \geq 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές με τον ίδιο βαθμό οι οποίες είναι γειτονικές ή έχουν κοινό γείτονα.

Λύση. Έστω $\Delta(G) = k$ ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του γραφήματος και έστω $v \in V$ μια κορυφή με βαθμό k .

Η v έχει k γειτονικές κορυφές u_1, u_2, \dots, u_k και κάθε μία από αυτές έχει βαθμό από 1 μέχρι k .



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν κάποια από τις u_1, u_2, \dots, u_k έχει βαθμό k , τότε το γράφημα περιέχει δύο γειτονικές κορυφές με τον ίδιο βαθμό.
- Αν καμία από τις u_1, u_2, \dots, u_k δεν έχει βαθμό k , τότε υπάρχουν $k-1$ δυνατές τιμές βαθμών για τους k γείτονες της v , οπότε από την αρχή του περιστρεώνα, δύο τουλάχιστον από αυτές έχουν τον ίδιο βαθμό και κοινό γείτονα την v . \square

Άσκηση 1.17. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με $|V| = n$ κορυφές. Να δειχθεί ότι αν το G δεν περιέχει τρίγωνα, τότε για κάθε ζεύγος γειτονικών κορυφών u, v ισχύει ότι $d(v) + d(u) \leq n$.

Λύση. Έστω $N(u), N(v) \subseteq V$ οι γειτονικές κορυφές των u, v αντίστοιχα. Προφανώς,

$$d(u) = |N(u)| \text{ και } d(v) = |N(v)|$$

Αφού το G δεν περιέχει τρίγωνα, οι u, v δεν έχουν κοινές γειτονικές κορυφές (δηλαδή $N(u) \cap N(v) = \emptyset$), επομένως

$$d(u) + d(v) = |N(u)| + |N(v)| = |N(u) \cup N(v)| + |N(u) \cap N(v)| \leq |V| = n. \quad \square$$

Άσκηση 1.18. Έστω G ένα γράφημα με μέγιστο βαθμό κορυφών $\Delta(G) = k$.

- i) Ναδειχθεί ότι για κάθε κορυφή v με βαθμό $d(v) = q$ υπάρχουν το πολύ $q(k-1)^{m-1}$ μονοπάτια μήκους m , όπου $m \geq 1$, με αρχή την v .

Λύση. Κάθε μονοπάτι P μήκους m με αρχή την v έχει την μορφή

$$P = (v, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Για την u_1 υπάρχουν q επιλογές.

Για την u_2 πρέπει να επιλέξουμε κάποιον από τους γείτονες της u_1 , άρα υπάρχουν το πολύ $k-1$ επιλογές. (Δεν μπορούμε να επιλέξουμε ξανά την v .)

Για την u_3 πρέπει να επιλέξουμε κάποιον από τους γείτονες της u_2 , άρα υπάρχουν το πολύ $k-1$ επιλογές. (Δεν μπορούμε να επιλέξουμε ξανά την u_1), κ.ο.κ. Για την u_v πρέπει να επιλέξουμε κάποιον από τους γείτονες της u_{v-1} , άρα υπάρχουν το πολύ $k-1$ επιλογές. (Δεν μπορούμε να επιλέξουμε ξανά την u_{v-2}).

Άρα, από την αρχή του γινομένου, υπάρχουν **το πολύ** $q \cdot \underbrace{(k-1) \cdot (k-1) \cdots (k-1)}_{m-1 \text{ φορές}} = q \cdot (k-1)^{m-1}$ διαφορετικά μονοπάτια με αρχή την κορυφή v . \square

- ii) Ναδειχθεί ότι για κάθε κορυφή v με βαθμό $d(v) = q$ υπάρχουν το πολύ $1 + \frac{q}{k-2} ((k-1)^m - 1)$ κορυφές του G σε απόσταση από την v μικρότερη ή ίση από m .

Λύση. Οι κορυφές του G που βρίσκονται από την v σε απόσταση μικρότερη ή ίση από m διαμερίζονται με βάση την απόσταση l που απέχουν από την v , όπου $l = 0, 1, \dots, m$.

Για κάθε κορυφή u που βρίσκεται από την v σε απόσταση l υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι μήκους l με αρχή την v και τέλος την u . Άρα, το πλήθος τους είναι μικρότερο ή ίσο από τον αριθμό των μονοπατιών μήκους l με αρχή την v , δηλαδή μικρότερο ή ίσο από $q \cdot (k-1)^{m-1}$.

Επομένως, το συνολικό πλήθος των κορυφών ισούται με το άθροισμα

$$1 + \sum_{l=1}^m q \cdot (k-1)^{m-1} = 1 + q \frac{(k-1)^m - 1}{k-1-1} = 1 + \frac{q}{k-2} ((k-1)^m - 1) \quad \square$$

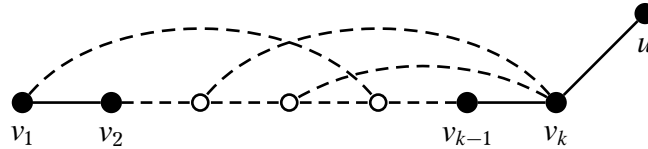
- iii) Ναδειχθεί ότι αν το G έχει ακτίνα $r(G) = r$, τότε περιέχει το πολύ $1 + \frac{k}{k-2} ((k-1)^r - 1)$ κορυφές.

Λύση. Έστω v μια κορυφή που ανήκει στο κέντρο του G (δηλαδή έχει εκκεντρότητα r). Ο βαθμός q της v είναι μικρότερος ή ίσος του k . Από το προηγούμενο ερώτημα υπάρχουν το πολύ $1 + \frac{q}{k-2} ((k-1)^r - 1) \leq 1 + \frac{k}{k-2} ((k-1)^r - 1)$ κορυφές του G σε απόσταση από την v μικρότερη ή ίση του r . Όμως, κάθε κορυφή του G απέχει απόσταση το πολύ r από την v , επομένως το G περιέχει το πολύ $1 + \frac{k}{k-2} ((k-1)^r - 1)$ κορυφές. \square

Άσκηση 1.19. i) Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και P ένα μονοπάτι στο G με μέγιστο μήκος. Να δειχθεί ότι τα άκρα του P μπορούν να συνδέονται μόνο με κορυφές του P .

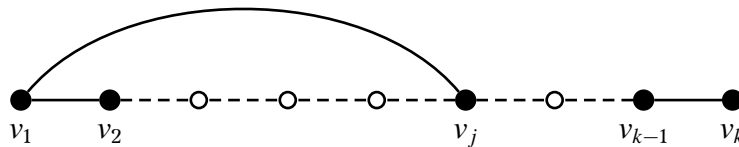
ii) Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών του είναι 2. Να δειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.

Λύση. i) Έστω $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ ένα μονοπάτι στο G με μέγιστο μήκος. Αν κάποιο από τα άκρα του, π.χ. η v_k , συνδέεται και με κάποια κορυφή u εκτός του P ,



τότε το μονοπάτι $P = (v_1, v_2, \dots, v_k, u)$ έχει μεγαλύτερο μήκος από το P , άτοπο. Ομοίως και για το άλλο άκρο, την v_1 .

ii) Έστω $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ ένα μονοπάτι στο G με μέγιστο μήκος. Τότε τα άκρα του v_1 και v_k συνδέονται μόνο με κορυφές του P . Επειδή ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 2, η v_1 συνδέεται με την v_2 και τουλάχιστον μια ακόμη κορυφή v_j που ανήκει στο P .



Επομένως, το G περιέχει τον κύκλο $(v_1, v_2, \dots, v_j, v_1)$. □

Άσκηση 1.20. Να αποδειχθεί επαγωγικά ότι σε κάθε δένδρο $T = (V, E)$ ισχύει ότι $|V| = |E| + 1$.

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς τον αριθμό των δεσμών E .

Για $|E| = 0$, έχουμε το δένδρο που αποτελείται από ένα κόμβο, οπότε $|V| = 1$ και $|V| = |E| + 1$, δηλαδή η πρόταση ισχύει για $|E| = 0$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει σε κάθε δένδρο με $|E| < k$ δεσμούς.

Έστω $T = (V, E)$ ένα δένδρο με $|E| = k$ δεσμούς. Αν αφαιρέσουμε ένα οποιοδήποτε δεσμό του T θα προκύψουν δύο δένδρα $T_1 = (V_1, E_1)$ και $T_2 = (V_2, E_2)$. όπου $|V| = |V_1| + |V_2|$ και $|E| = |E_1| + |E_2| + 1$.

Επειδή $|E_1|, |E_2| < k$, από την υπόθεση της επαγωγής, για τα δένδρα T_1, T_2 ισχύει ότι $|V_1| = |E_1| + 1, |V_2| = |E_2| + 1$.

Άρα $|V_1| + |V_2| = |E_1| + |E_2| + 2$, ή ισοδύναμα $|V| = |E| + 1$. Άρα, η πρόταση ισχύει για το δένδρο T , δηλαδή η πρόταση ισχύει για κάθε δένδρο T . □

Άσκηση 1.21. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ενός δένδρου $T = (V, E)$ με n κορυφές ισούται με $2n - 2$.

Λύση. Επειδή το T είναι δένδρο έπεται ότι $|E| = n - 1$. Επομένως, ισχύει ότι

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2|E| = 2(n - 1). \quad \square$$

Άσκηση 1.22. Να βρεθεί ο αριθμός των δένδρων ενός δάσους F με n κόμβους και m δεσμούς, όπου $n > m$.

Λύση. Έστω ότι το δάσος F περιέχει k δένδρα T_1, T_2, \dots, T_k . Προφανώς, $|V(F)| = |V(T_1)| + |V(T_2)| + \dots + |V(T_k)|$ και $|E(F)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + \dots + |E(T_k)|$. Για κάθε δένδρο $T_i, i \in [k]$ ισχύει ότι

$$|V(T_i)| = |E(T_i)| + 1$$

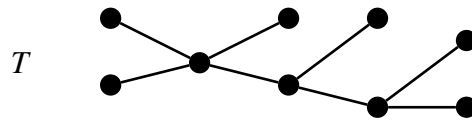
Αθροίζοντας για κάθε $i \in [k]$ προκύπτει ότι

$$|V(T_1)| + |V(T_2)| + \dots + |V(T_k)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + \dots + |E(T_k)| + k \Leftrightarrow |V(F)| = |E(F)| + k \Leftrightarrow n = m + k.$$

Άρα, το δάσος περιέχει $k = n - m$ δένδρα. □

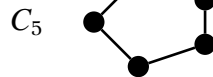
Άσκηση 1.23. Να βρεθεί το πλήθος των γενετικών δένδρων των παρακάτω γραφημάτων:

i)

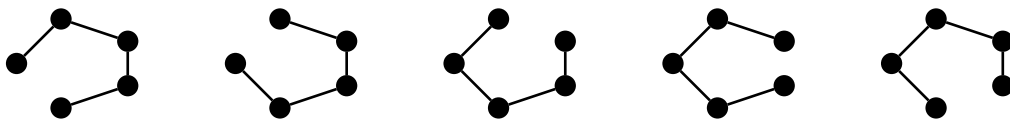


Λύση. Το T έχει 1 γενετικό δένδρο, τον εαυτό του. □

ii)

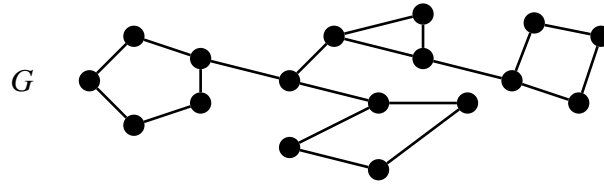


Λύση. Το C_5 έχει 5 γενετικά δένδρα:



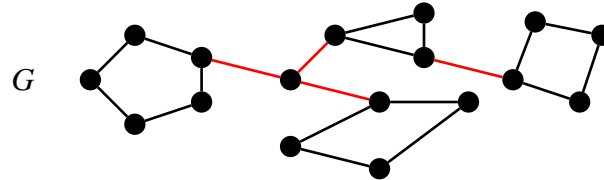
iii) C_n

Λύση. Το C_n έχει n γενετικά δένδρα. Το καθένα προκύπτει σβίνοντας ακριβώς ένα δεσμό του C_n . □

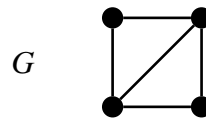


iv)

Λύση. Οι γέφυρες του γραφήματος (δεσμοί που είναι σημειωμένοι με κόκκινο) πρέπει να ανήκουν σε όλα τα γενετικά δένδρα.

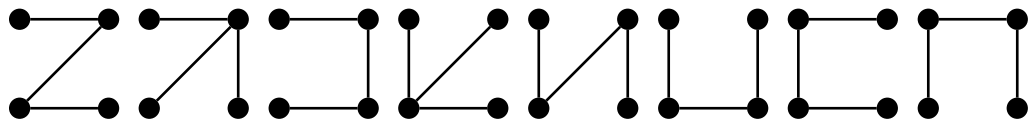


Σε κάθε ένα από τους 4 κύκλους που εμφανίζονται στο G μπορούμε να επιλέξουμε ανεξάρτητα ένα γενετικό δένδρο τους, οι δεσμοί του οποίου περιέχονται στο γενετικό δένδρο του G . Επομένως, το G έχει $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 240$ γενετικά δένδρα. \square



v)

Λύση. Το G έχει 4 κορυφές άρα κάθε γενετικό δένδρο του πρέπει να περιέχει 3 δεσμούς. Υπάρχουν 5 δεσμοί στο G από τους οποίους πρέπει να επιλέξουμε 3. Άρα, ο αριθμός των γενετικών δένδρων του G είναι το πολύ $\binom{5}{3} = 10$. Όμως, κάποιες τριάδες δεσμών του G δεν αντιστοιχούν σε δένδρο. Οπότε τελικά έχουμε τα παρακάτω 8 γενετικά δένδρα του G .



\square

Παρατήρηση: Για το πλήθος των γενετικών δένδρων ενός γραφήματος G υπάρχει τύπος που απαιτεί τον υπολογισμό μιας ορίζουσας (*matrix-tree theorem*). Η πολυπλοκότητα του τύπου είναι πολυωνυμική ως προς τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος.

Άσκηση 1.24. Έστω Q_n το γράφημα δεσμών του οποίου οι κορυφές είναι οι δυαδικές λέξεις μήκους n , ενώ οι δεσμοί του αποτελούνται από τα ζεύγη των δυαδικών λέξεων που διαφέρουν ακριβώς σε μια θέση. Το γράφημα Q_n ονομάζεται συνήθως **υπερκύβος διάστασης n** .

i) Να βρεθούν τα σύνολα V, E για τα γραφήματα Q_1, Q_2, Q_3 και στη συνέχεια να παρασταθούν γραφικά.

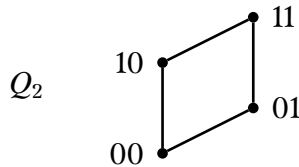
ii) Να βρεθεί ο αριθμός $|V|$ των κορυφών και ο αριθμός $|E|$ των δεσμών του Q_n .

Λύση.

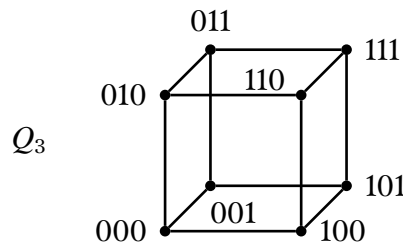
i) Για το Q_1 : $V = \{0, 1\}$, $E = \{\{0, 1\}\}$



Για το Q_2 : $V = \{00, 01, 10, 11\}$, $E = \{\{00, 01\}, \{00, 10\}, \{01, 11\}, \{10, 11\}\}$.



Για το Q_3 : $V = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$, $E = \{\{000, 001\}, \{000, 010\}, \{000, 100\}, \{001, 011\}, \{001, 101\}, \{010, 011\}, \{010, 110\}, \{011, 111\}, \{100, 101\}, \{100, 110\}, \{101, 111\}, \{110, 111\}\}$.



ii) Ο αριθμός των κορυφών του Q_n ισούται με το πλήθος των δυαδικών λέξεων μήκους n , δηλαδή το Q_n έχει $|V| = 2^n$ κορυφές.

Κάθε κορυφή του Q_n έχει βαθμό n , διότι σε κάθε μια από τις n θέσεις των ψηφίων της αντιστοιχεί και μια διαφορετική γειτονική κορυφή. Επομένως, από την σχέση

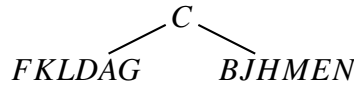
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

έχουμε ότι $n2^n = 2|E|$, δηλαδή το Q_n έχει $|E| = n2^{n-1}$ δεσμούς. □

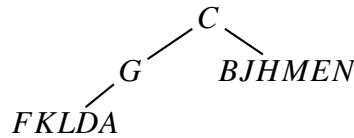
Άσκηση 1.25. Να βρεθεί το δυαδικό δένδρο T με ετικέτες $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N$ του οποίου οι διασχίσεις σε προδιάταξη και ενδοδιάταξη είναι αντίστοιχα

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
προδιάταξη:	C	G	D	K	F	L	A	J	B	H	E	M	N
ενδοδιάταξη:	F	K	L	D	A	G	C	B	J	H	M	E	N

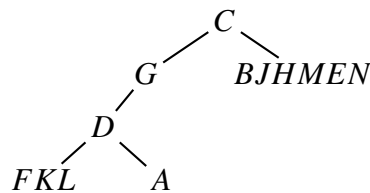
Λύση. Επειδή το 1ο στοιχείο σε προδιάταξη είναι το C , έπεται ότι το C είναι η ρίζα του δένδρου. Στην ενδοδιάταξη το C βρίσκεται στην 7η θέση, άρα οι κορυφές με ετικέτες F, K, L, D, A, G περιέχονται στο αριστερό υποδένδρο του C , ενώ οι υπόλοιπες κορυφές (με ετικέτες B, J, H, M, E, N) περιέχονται στο δεξιό υποδένδρο του C .



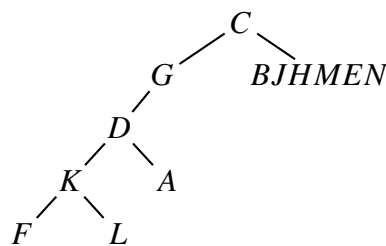
Επειδή το 2ο στοιχείο σε προδιάταξη είναι το G έπεται ότι το G είναι ρίζα του αριστερού υποδενδρου του C . Από την ενδοδιάταξη συμπεραίνουμε το αριστερό υποδένδρο του G αποτελείται από τις κορυφές με ετικέτες F, K, L, D, A , ενώ το δεξιό υποδένδρο του είναι κενό.



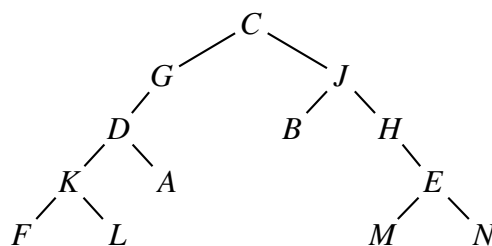
Επειδή το 3ο στοιχείο σε προδιάταξη είναι το D έπεται ότι το D είναι ρίζα του αριστερού υποδενδρου του G . Από την ενδοδιάταξη συμπεραίνουμε το αριστερό υποδένδρο του D αποτελείται από τις κορυφές με ετικέτες F, K, L , ενώ το δεξιό υποδένδρο του αποτελείται από την κορυφή A .



Επειδή το 4ο στοιχείο σε προδιάταξη είναι το K έπεται ότι το K είναι ρίζα του αριστερού υποδενδρου του D . Από την ενδοδιάταξη συμπεραίνουμε το αριστερό υποδένδρο του K αποτελείται από τις κορυφή F , ενώ το δεξιό υποδένδρο του αποτελείται από την κορυφή L .



Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει τελικά το δυαδικό δένδρο



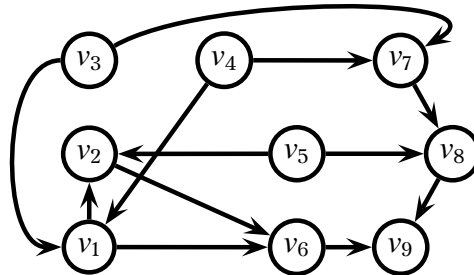
□

Άσκηση 1.26. Για την ολοκλήρωση ενός έργου πρέπει να εκτελεστούν 9 δραστηριότητες T_1, T_2, \dots, T_9 . Κάποιες από αυτές χρειάζονται τα αποτελέσματα μερικών άλλων, των οποίων η εκτέλεση πρέπει να προηγηθεί. Οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:

	απαιτήσεις		απαιτήσεις		απαιτήσεις
T_1	T_3, T_4	T_4		T_7	T_3, T_4
T_2	T_1, T_5	T_5		T_8	T_5, T_7
T_3		T_6	T_1, T_2	T_9	T_6, T_8

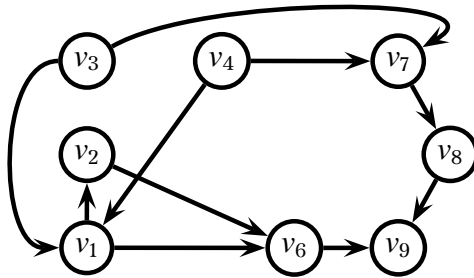
Να βρεθεί με ποια σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι T_1, T_2, \dots, T_9 ώστε να ολοκληρωθεί το έργο.

Λύση. Στο πρόβλημα της εκτέλεσης αντιστοιχεί ένα κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο η δραστηριότητα T_i αναπαρίσταται από την κορυφή v_i , και αν η δραστηριότητα T_i απαιτεί την ολοκλήρωση της δραστηριότητας T_j τότε στην κορυφή v_i καταλήγει ένα τόξο με αρχή την κορυφή v_j .



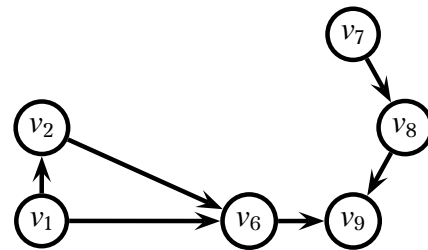
Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση της τοπολογικής διάταξης των κορυφών του γραφήματος. Προκειμένου να υπάρχει λύση πρέπει να μην υπάρχει κύκλωμα. Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της τοπολογικής διάταξης. Θα φτιάξουμε μια λίστα L που θα περιέχει τις κορυφές του γραφήματος με την σειρά της τοπολογικής διάταξης. Κάθε φορά επιλέγουμε μια κορυφή με βαθμό εισόδου 0, την προσθέτουμε στο τέλος της λίστας L και αφαιρούμε όλα τα τόξα που αρχίζουν από αυτή, μέχρις ότου να μην υπάρχουν κορυφές με βαθμό εισόδου 0 στο γράφημα.

1. Επιλέγουμε την v_5 οπότε έχουμε:



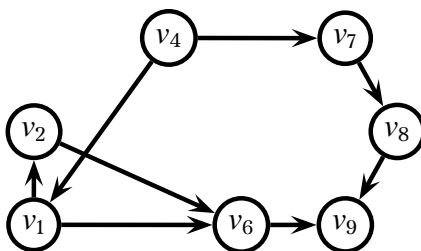
$$L = (v_5)$$

3. Επιλέγουμε την v_4 οπότε έχουμε:



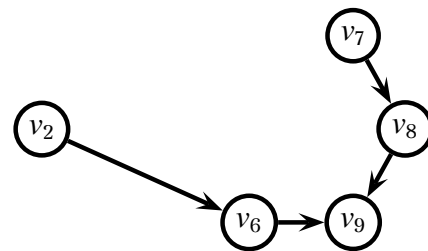
$$L = (v_5, v_3, v_4)$$

2. Επιλέγουμε την v_3 οπότε έχουμε:



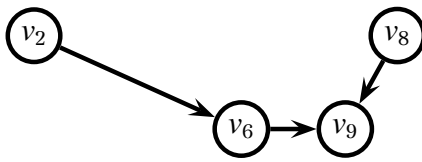
$$L = (v_5, v_3)$$

4. Επιλέγουμε την v_1 οπότε έχουμε:



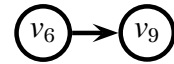
$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1)$$

5. Επιλέγουμε την v_7 οπότε έχουμε:



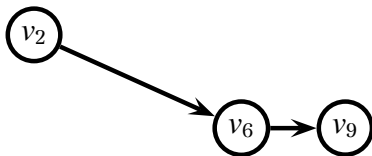
$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7)$$

7. Επιλέγουμε την v_2 οπότε έχουμε:



$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8, v_2)$$

6. Επιλέγουμε την v_8 οπότε έχουμε:



$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8)$$

8. Επιλέγουμε την v_6 οπότε έχουμε:



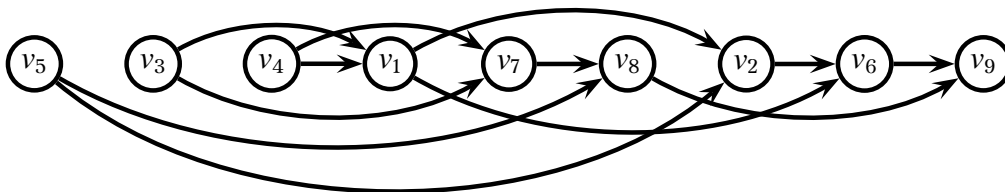
$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8, v_2, v_6)$$

9. Επιλέγουμε την v_9 οπότε έχουμε:

$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8, v_2, v_6, v_9)$$

Μια τοπολογική διάταξη των κορυφών του γραφήματος είναι η σειρά

$$(v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8, v_2, v_6, v_9)$$



Επομένως, μια πιθανή σειρά εκτέλεσης των 9 δραστηριοτήτων έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις της καθεμιάς είναι η εξής:

$$(T_5, T_3, T_4, T_1, T_7, T_8, T_2, T_6, T_9)$$

Μπορούμε να υπολογίζουμε την τοπολογική διάταξη του G χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη networkx:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import random

G = nx.DiGraph()
V = [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
U = [(1,2), (1,6), (2,6), (3,1), (3,7), (4,1), (4,7), (5,2), (5,8), (6,9), (3,8), (8,9)]
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(U)

# Topological sorting of G using method topological_sort(G)
if(nx.is_directed_acyclic_graph(G)):
    R = list(nx.topological_sort(G))
    print("A topological sorting of G:",R,"(using the method topological_sort())")
else:
```

```

print("G contains a cycle")

# A simple implementation of topological sorting algorithm
L = [] #Topological sorting of the nodes of G
H = G.copy() #Work on an copy of G
while(len(H)!=0):
    notfound = True
    for v in H.nodes():
        if (H.in_degree(v) == 0):
            L.append(v)
            H.remove_node(v)
            notfound = False # vertex v has indegree 0
            break
    if notfound: break # no vertex has indegree 0
# If L contains all the nodes of G a solution is found
if len(L) == len(G):
    print("A topological sorting of G:",L)
else:
    print("G contains a cycle")

# Position all vertices of G in a line according to the topological sorting L
x = y = 0
mypos = {} #empty dictionary
for i in L:
    x = x + 1
    y = random.uniform(-1,1)
    mypos[i] = [x,y] #coordinates of node i

# Create a figure in order to add title text
fig = plt.figure()
fig.suptitle('Topological sorting of the vertices of G \n (from left to right)',
            fontsize=14, fontweight='bold')
nx.draw_networkx(G,pos=mypos)
plt.show()

```

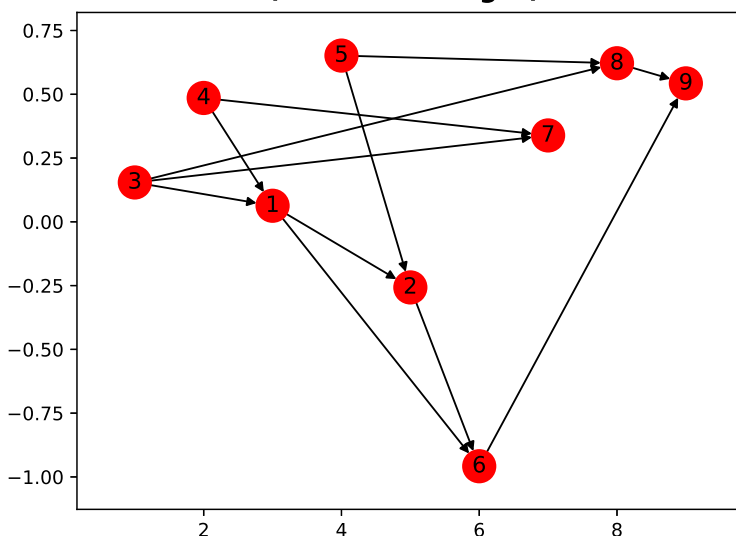
Output:

```

A topological sorting of G: [5, 4, 3, 8, 7, 1, 2, 6, 9] (using the method
topological_sort())
A topological sorting of G: [3, 4, 1, 5, 2, 6, 7, 8, 9]

```

**Topological sorting of the vertices of G
(from left to right)**



□

1.7 Ασκήσεις προς επίλυση

1) (Ισομορφισμός γραφημάτων)

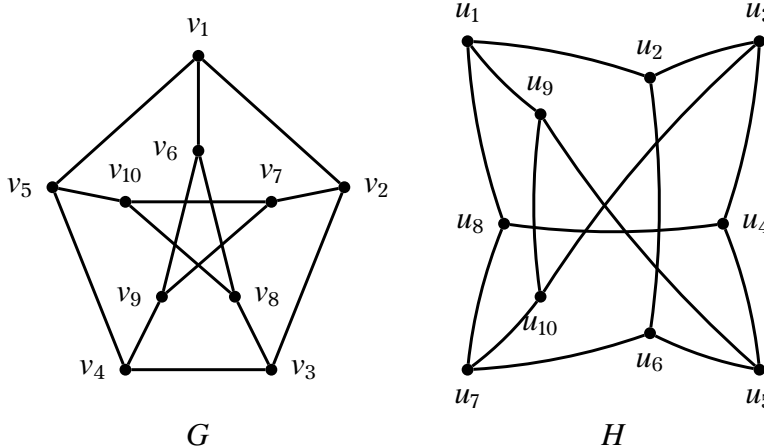
- i) Ναδειχθεί ότι η σχέση ισομορφισμού γραφημάτων \simeq είναι σχέση ισοδυναμίας.
- ii) Ναδειχθεί ότι δύο γραφήματα G, H είναι ισόμορφα αν και μόνο αν τα συμπληρωματικά τους γραφήματα G^c, H^c είναι ισόμορφα.

2) (Μη ικανή συνθήκη ισομορφισμού) Έστω G, H δύο απλά γραφήματα για τα οποία υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ τέτοια ώστε αν $\{u, v\} \in E(G)$ τότε $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E(H)$. Ναδειχθεί ότι τα γραφήματα G, H δεν είναι απαραίτητα ισόμορφα.

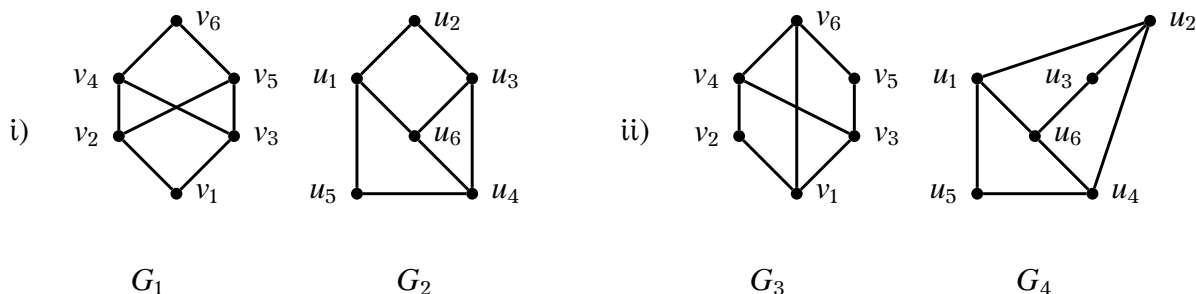
3) (Γραφήματα με 3 και 4 κορυφές)

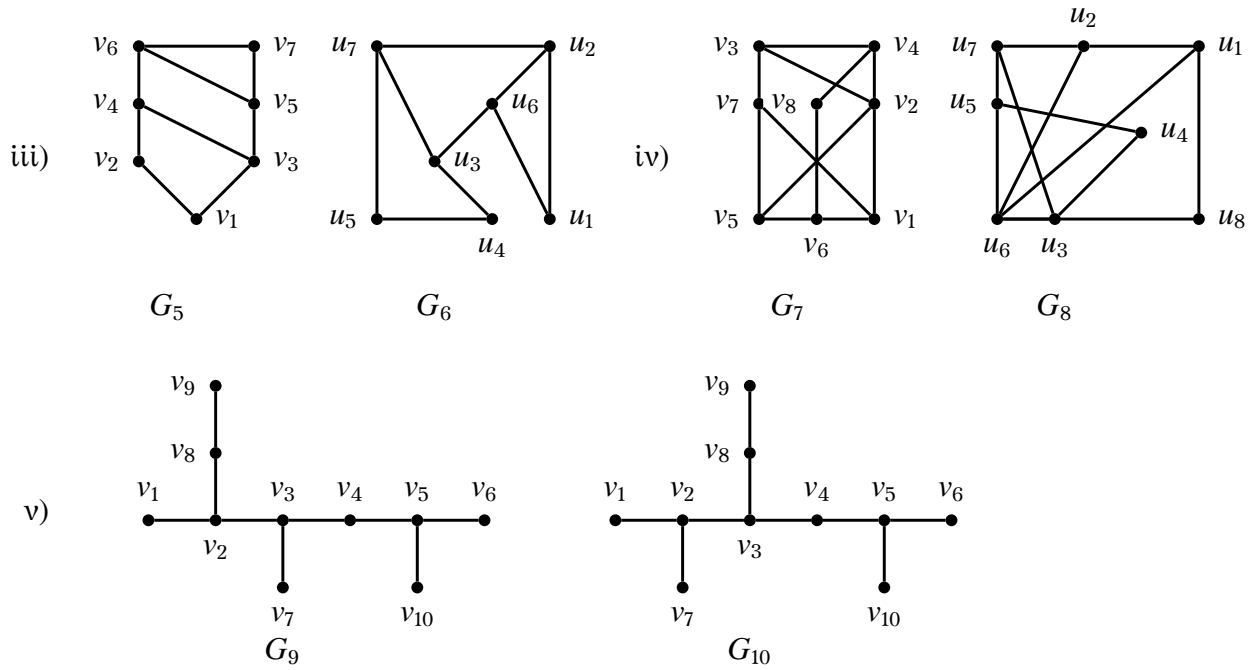
- i) Να σχεδιασθούν όλα τα μη ισόμορφα (απλά) γραφήματα με 3 κορυφές. (Υπόδειξη. Υπάρχουν 4 τέτοια γραφήματα.)
- ii) Να σχεδιασθούν όλα τα μη ισόμορφα (απλά) γραφήματα με 4 κορυφές. (Υπόδειξη. Υπάρχουν 11 τέτοια γραφήματα.)

4) (Γράφημα Petersen) Ναδειχθεί ότι τα παρακάτω γραφήματα είναι ισόμορφα:

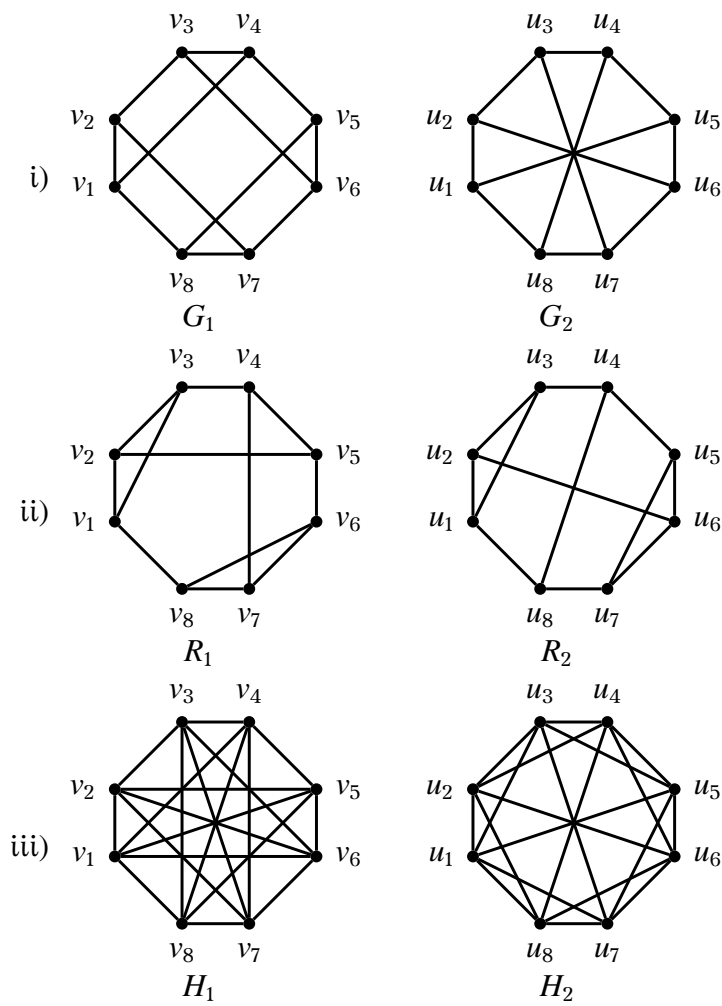


5) (Ισόμορφα γραφήματα) Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων είναι ισόμορφα:

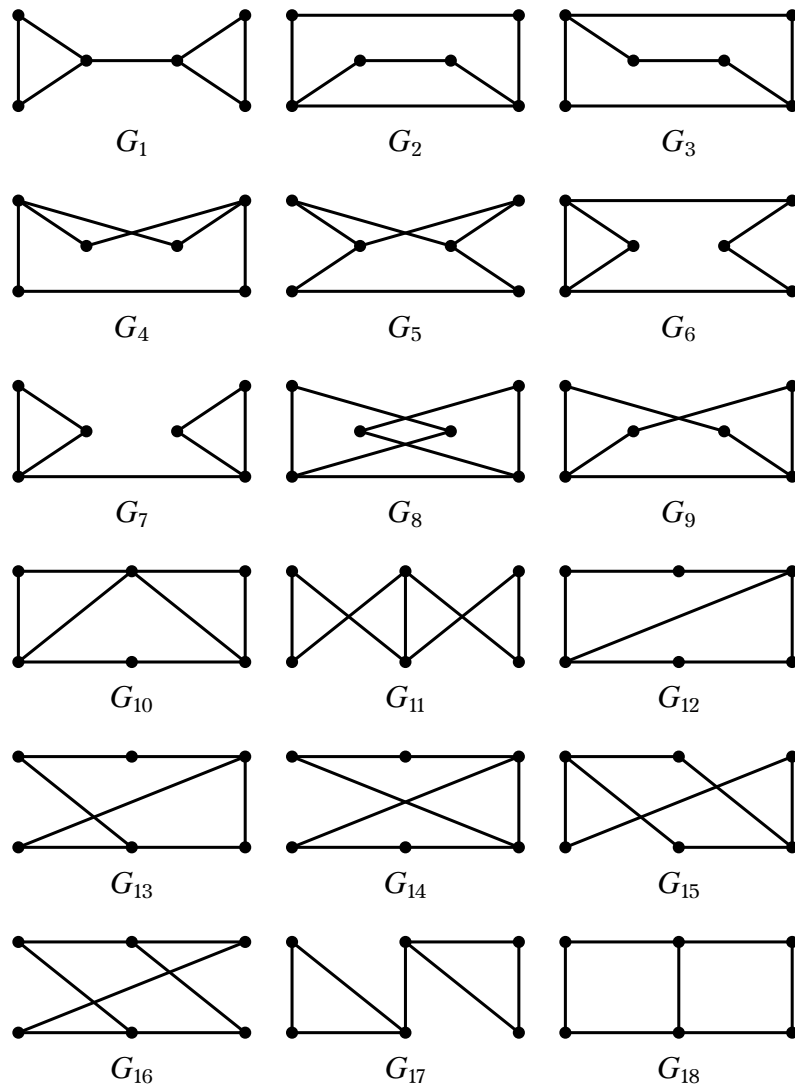




6) (Ισόμορφα γραφήματα) Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων είναι ισομορφα:

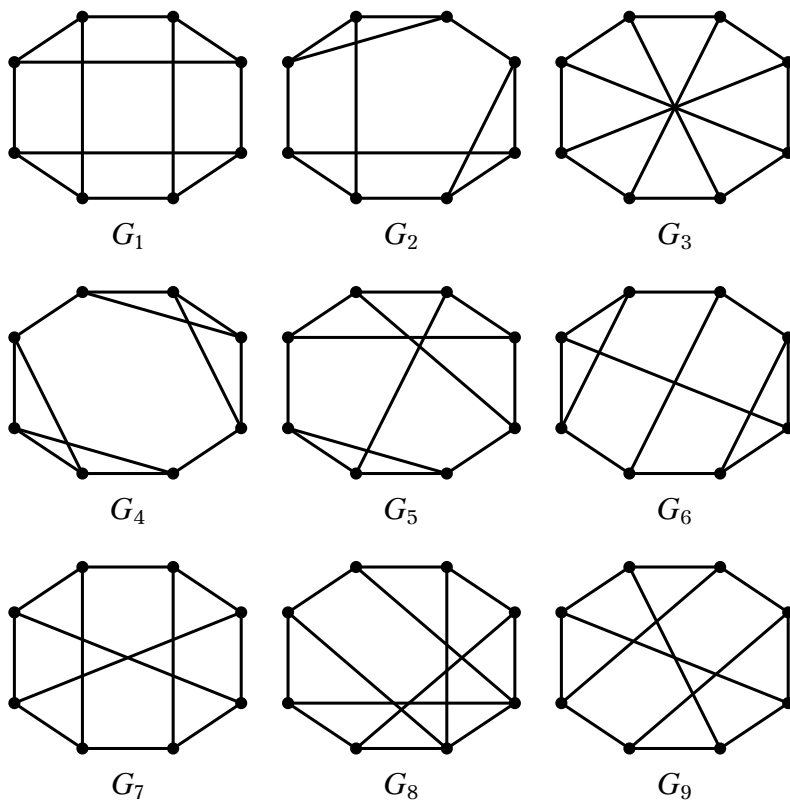


7) (Ισόμορφα γραφήματα) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα κάποια από τα παρακάτω γραφήματα:



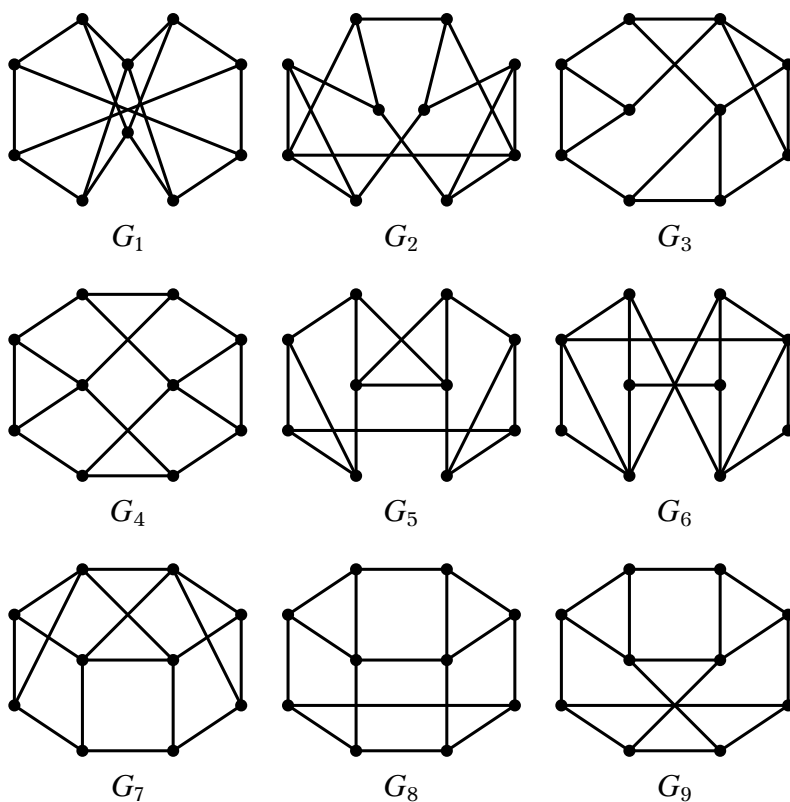
Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.

8) (Ισόμορφα γραφήματα) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα κάποια από τα παρακάτω γραφήματα:



Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.

9) (Ισόμορφα γραφήματα) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα κάποια από τα παρακάτω γραφήματα:

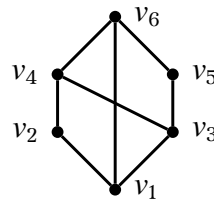


Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.

- 10) (Ακολουθίες βαθμών) Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών G με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.
- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| i) (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) | vii) (4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2) |
| ii) (6, 4, 4, 4, 2, 2, 0) | viii) (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5) |
| iii) (5, 5, 3, 3, 3, 1) | ix) (4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3) |
| iv) (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) | x) (4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2) |
| v) (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3) | xi) (5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1). |
| vi) (4, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1) | |
- 11) (Ακολουθίες βαθμών) Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει γράφημα δεσμών G με $2n$ κορυφές και ακολουθία βαθμών $(n, n, n - 1, n - 1, \dots, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$.
- 12) (Ακολουθίες βαθμών) Να κατασκευασθούν γραφήματα δεσμών G που έχουν τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.
- i) (6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
 - ii) (3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) και το G να είναι συνεκτικό.
 - iii) (3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) και το G να μην είναι συνεκτικό.
 - iv) (3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2).
 - v) (4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) και το G να είναι συνεκτικό.
 - vi) (4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) και το G να μην είναι συνεκτικό.
- 13) (Κανονικά γραφήματα) Ναδειχθεί ότι αν ο αριθμός των κορυφών ενός γραφήματος δεσμών G είναι πολλαπλάσιο του 4 και ο αριθμός των δεσμών του είναι περιττός, τότε το γράφημα G δεν είναι κανονικό (δηλαδή έχει τουλάχιστον δύο κορυφές με διαφορετικούς βαθμούς).
- 14) (Διμερή γραφήματα) Σε μια αθλητική συνάντηση συμμετείχαν ορισμένοι αθλητές. Κάθε αθλητής αγωνίστηκε σε ακριβώς 6 παιχνίδια και σε κάθε παιχνίδι συμμετείχαν ακριβώς 8 αθλητές. Αν ο αριθμός των παιχνιδιών είναι 15, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που έλαβαν μέρος.
- 15) (Μονοπάτια μεγίστου μήκους)
- i) Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός των κόμβων του είναι k . Ναδειχθεί ότι το G περιέχει μονοπάτι μήκους (τουλάχιστον) k .
(Υπόδειξη: Θεωρήστε ένα μονοπάτι στο G με μέγιστο μήκος.)
 - ii) Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός των κόμβων του είναι 4. Ναδειχθεί ότι το G περιέχει δύο τουλάχιστον κύκλους που αποτελούνται από διαφορετικούς δεσμούς.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε ένα μονοπάτι στο G με μέγιστο μήκος.)
 - iii) Ναδειχθεί ότι κάθε δύο μονοπάτια μεγίστου μήκους σε ένα συνεκτικό γράφημα G έχουν τουλάχιστον ένα κοινό κόμβο.
- 16) (Ανισότιπες αριθμού κορυφών και αριθμού δεσμών)
- i) Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός δεσμών ενός γραφήματος με n κορυφές.
 - ii) Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός αριθμός κορυφών ενός γραφήματος με m δεσμούς.

- 17) (Αναπόφευκτα τρίγωνα) Έστω ένα γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ με $|V| = 6$. Να δειχθεί ότι τουλάχιστον ένα από τα γραφήματα G και G^c περιέχει ως υπογράφημα το K_3 .
- 18) (Αριθμός μονοπατιών στο K_n) Να βρεθεί ο αριθμός όλων των μονοπατιών μήκους 2 στο K_n .
- 19) (Γράφημα τομών υποσυνόλων) Έστω S ένα σύνολο και C ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του S . Ορίζουμε το γράφημα $I(C)$ ως εξής: Οι κορυφές του $I(C)$ είναι τα στοιχεία του C , ενώ οι δεσμοί του αποτελούνται από τα ζεύγη $A, B \in C$ με $A \cap B \neq \emptyset$.

- i) Έστω $S = [7]$ και $C = \{\{2, 3\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{6, 7\}\}$. Να σχεδιασθεί το γράφημα $I(C)$.
- ii) Έστω $S = [5]$ και C το σύνολο υποσυνόλων του $[5]$ που περιέχουν ακριβώς 2 στοιχεία. Να σχεδιασθεί το γράφημα $I(C)$.
- iii) Να βρεθούν 6 υποσύνολα του \mathbb{N} τέτοια ώστε το γράφημα τομών υποσυνόλων που ορίζουν να είναι ισόμορφο με το επόμενο γράφημα:

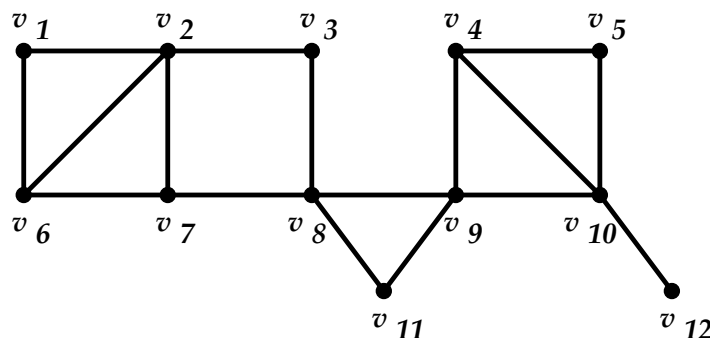


- iv) Να δειχθεί ότι για κάθε γράφημα δεσμών G , υπάρχει ένα σύνολο S και ένα υποσύνολο C του δυναμοσυνόλου του S , ώστε τα γραφήματα G και $I(C)$ να είναι ισόμορφα.

- 20) (Γράφημα υπερκύβου) Έστω Q_n το γράφημα της λυμένης άσκησης 1.24 (σελ. 98).

- i) Να παρασταθεί γραφικά το γράφημα Q_4 .
- ii) Να αποδειχθεί ότι το γράφημα Q_n είναι συνεκτικό, για κάθε $n \geq 1$.
- iii) Να βρεθεί ένας κλειστός δρόμος Euler (αν υπάρχει) για τα Q_4 και Q_6 .
- iv) Είναι το Q_5 γράφημα Hamilton; Αν ναι, να βρεθεί ένας τέτοιος κύκλος Hamilton.
- v) Να βρεθούν δύο κορυφές του Q_5 οι οποίες απέχουν την μέγιστη δυνατή απόσταση. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση κορυφών στο Q_n ;

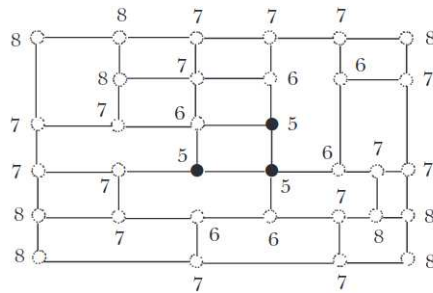
- 21) (Γραφήματα δεσμών) Δίδεται το γράφημα



Να βρεθούν:

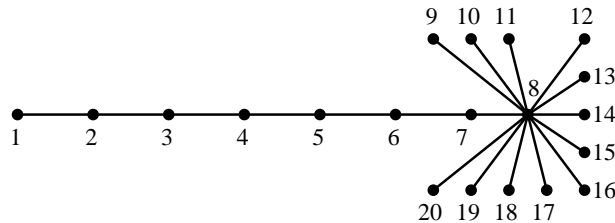
- i) Η ακολουθία βαθμών του.
- ii) Οι αποστάσεις $d(v_1, v_9)$ και $d(v_4, v_6)$.
- iii) Ένα μονοπάτι του, μήκους 5.
- iv) Ένας κύκλος του, μήκους 5.
- v) Όλα τα $v_1 - v_8$ μονοπάτια του.
- vi) Ένα δένδρο ζεύξης του.
- vii) Οι κλειδώσεις και οι ισθμοί του (αν υπάρχουν).
- viii) Τα μπλοκ του.

22) (Εκκεντρότητες) Στο επόμενο σχήμα δίδονται οι εκκεντρότητες των κορυφών ενός γραφήματος που αναπαριστά το σχέδιο μιας νέας πόλης στην οποία πρόκειται να χτιστεί ένας πυροσβεστικός σταθμός.

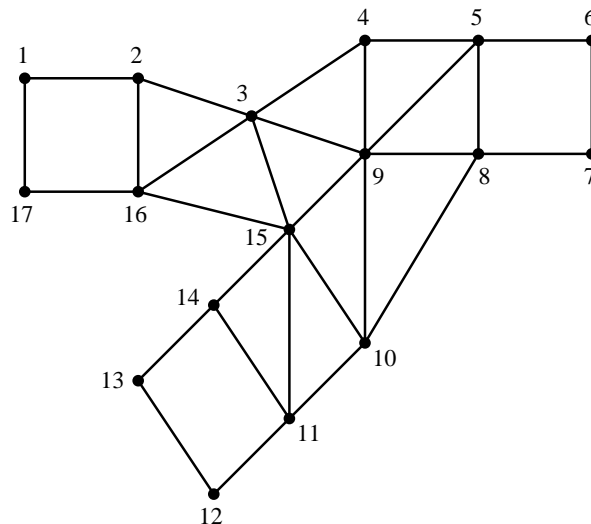


Σε ποιο κόμβο θα προτείνατε να δημιουργηθεί ένας τέτοιος σταθμός;

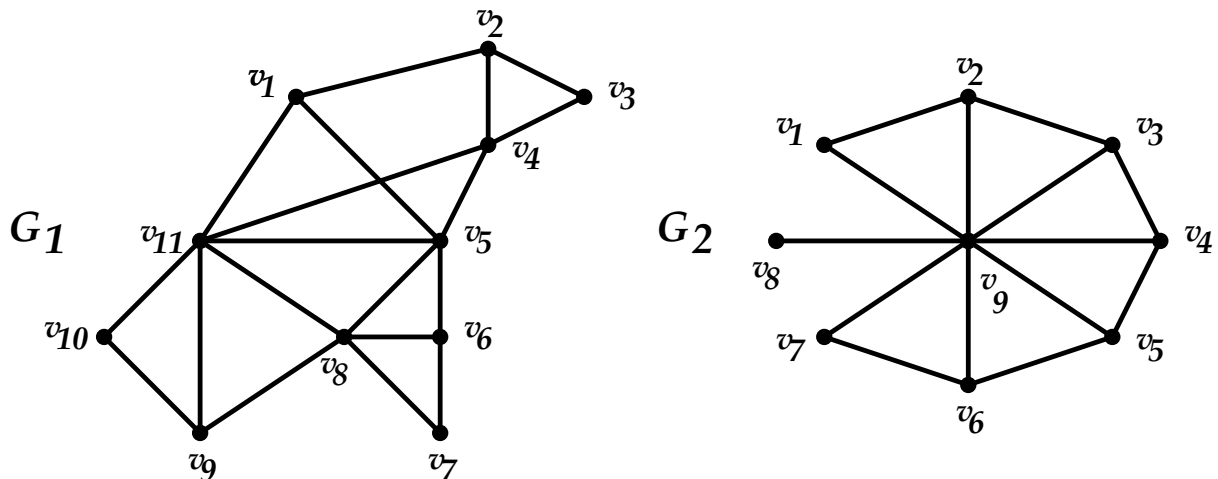
Στην επόμενη πόλη μας ενδιαφέρει να χτίσουμε ένα σχολείο και ένα πυροσβεστικό σταθμό. Σε ποια περιοχή θα προτείνατε να δημιουργηθεί το καθένα;



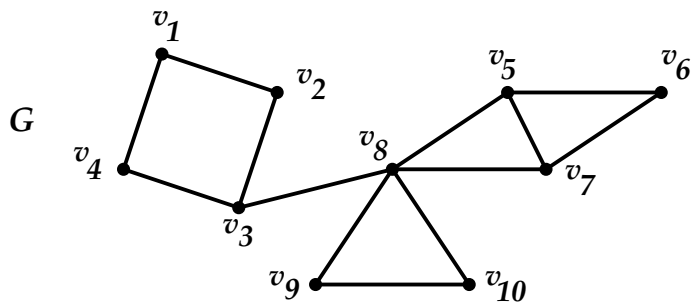
23) (Διάμετρος, ακτίνα, κέντρο) Να βρεθεί η διάμετρος, η ακτίνα και το κέντρο του επόμενου γραφήματος



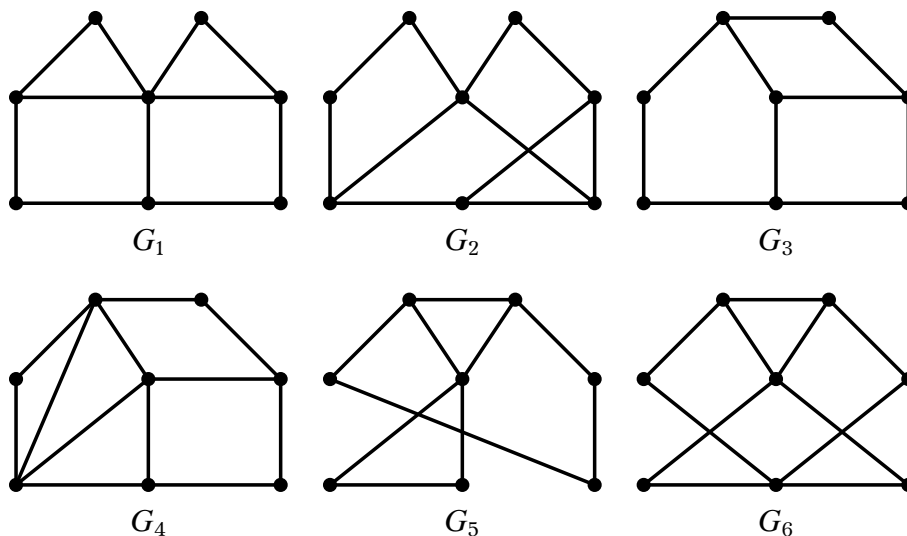
- 24) (Διάμετρος συμπληρωματικού γραφήματος) Ναδειχθεί ότι αν ένα γράφημα G είναι μη συνεκτικό, τότε το συμπλήρωμά του G^c έχει διάμετρο το πολύ 2. Πότε έχει διάμετρο 1; Πότε έχει διάμετρο 2;
- 25) (Γράφημα τετράγωνο) Το τετράγωνο ενός γραφήματος G , το οποίο συμβολίζεται με G^2 , είναι ένα γράφημα που έχει ως κορυφές τις κορυφές του G και στο οποίο δύο κορυφές ενώνονται αν και μόνο αν έχουν απόσταση το πολύ 2 στο G . Να εξηγηθεί πως μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα G^2 χρησιμοποιώντας την μήτρα γειτνίασης του G .
- 26) (Σύνολο κλειδώσεων) Να βρεθεί ένα ελάχιστο σύνολο κλειδώσεων για τα γραφήματα G_1 και G_2 .



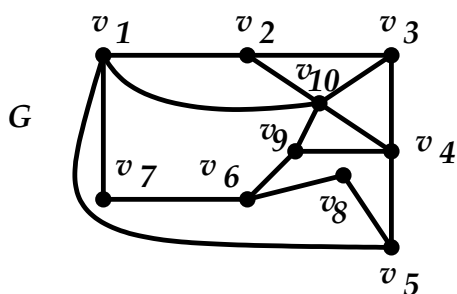
- 27) (3-συνεκτικό γράφημα) Να σχεδιασθεί ένα γράφημα δεσμών το οποίο είναι 3-συνεκτικό.
- 28) (Κλειδώσεις) Έστω $G = (X, E)$ ένα γράφημα δεσμών και v ένα σημείο κοπής του. Ναδειχθεί ότι υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο κόμβοι του G τέτοιοι ώστε κάθε μονοπάτι που τους ενώνει να περιέχει το v .
- 29) (Κλειδώσεις και ισθμοί)
- Να σχεδιασθεί ένα γράφημα δεσμών το οποίο περιέχει ισθμό αλλά όχι κλείδωσι.
 - Να σχεδιασθεί ένα γράφημα δεσμών το οποίο περιέχει κλείδωσι αλλά όχι ισθμό.
- 30) (Ιδιότητες κλειδώσεων) Ναδειχθεί ότι αν μια κορυφή v είναι κλείδωσι ενός γραφήματος G , τότε δεν είναι κλείδωσι του G^c .
- 31) (Ισθμοί)
- (Βαθμοί και ισθμοί) Ναδειχθεί ότι αν ένα γράφημα δεσμών G περιέχει ισθμό τότε δεν μπορεί όλοι οι κόμβοι του G να έχουν άρτιο βαθμό.
 - (Γράφημα Euler και ισθμοί) Ναδειχθεί ότι αν ένα γράφημα δεσμών G περιέχει ισθμό τότε δεν είναι γράφημα Euler.
- 32) (Μπλοκ γραφήματος) Να βρεθούν τα μπλοκ του παρακάτω γραφήματος:



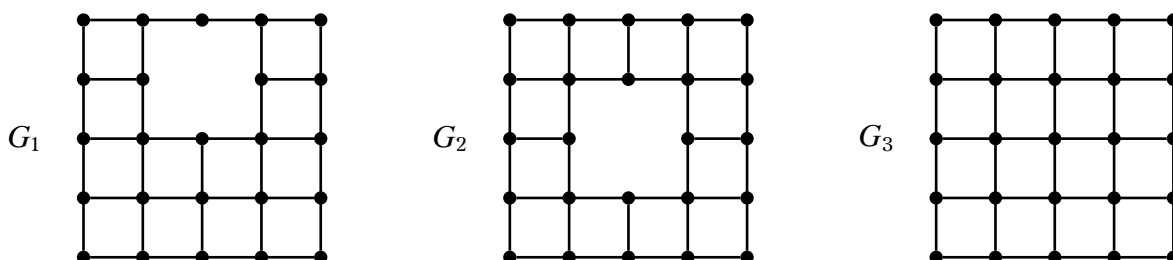
33) (Γραφήματα Euler και Hamilton) Να εξετασθεί αν καθένα από τα παρακάτω γραφήματα περιέχει ένα δρόμο Euler, ή κύκλο Hamilton, ή είναι γράφημα Euler.

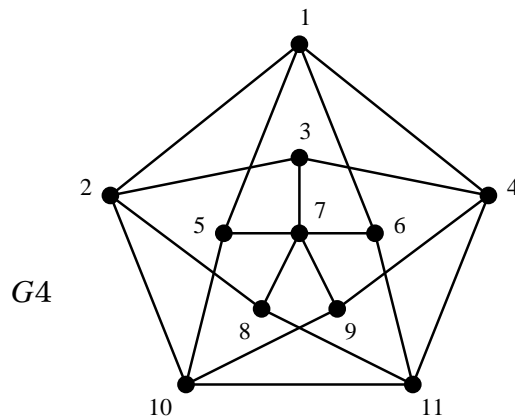


34) (Κύκλος Hamilton) Να βρεθεί (αν υπάρχει) ένας κύκλος Hamilton στο παρακάτω γράφημα:

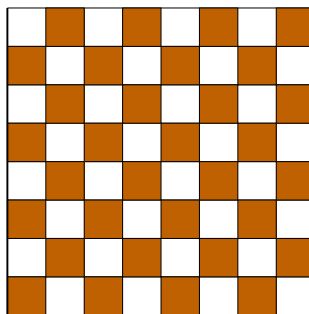


35) (Κύκλος Hamilton) Να εξετασθεί αν κάποιο από τα παρακάτω γραφήματα περιέχει κύκλο Hamilton:





36) (Κύκλος Hamilton στην σκακιέρα) Να βρεθεί μια διαδρομή του ίππου, στην παρακάτω σκακιέρα, η οποία διέρχεται από κάθε τετράγωνο της σκακιέρας ακριβώς μια φορά. (Για τις κινήσεις του ίππου μπορείτε να ανατρέξετε σε οποιοδήποτε εγχειρίδιο σκακιού.)

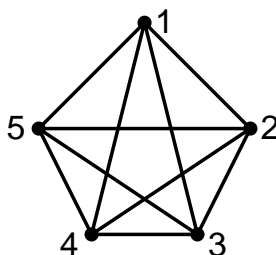


37) (Γραφήματα Euler και Hamilton)

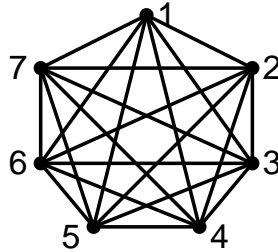
- i) Να σχεδιασθεί ένα άκυκλο γράφημα δεσμών με περισσότερες από 5 κορυφές το οποίο περιέχει δρόμο Euler.
- ii) Να σχεδιασθεί ένα γράφημα Hamilton το οποίο δεν είναι γράφημα Euler.
- iii) Να σχεδιασθεί ένα γράφημα Euler το οποίο δεν είναι γράφημα Hamilton
- iv) Να σχεδιασθεί ένα γράφημα Euler το οποίο είναι και γράφημα Hamilton.

38) (Κλειστοί δρόμοι Euler στο K_n)

- i) Για ποια $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι το γράφημα K_n είναι γράφημα Euler;
- ii) Να βρεθεί ένας κλειστός δρόμος Euler για το γράφημα K_5 :



- iii) Να βρεθεί ένας κλειστός δρόμος Euler για το γράφημα K_7 :

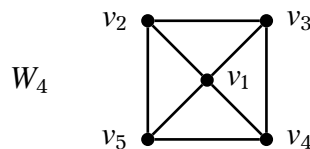


- 39) (Κανονικά γραφήματα Euler) Ναδειχθεί ότι αν ο αριθμός των κορυφών ενός d -κανονικού γραφήματος δεσμών G είναι άρτιος και ο αριθμός των δεσμών του είναι περιττός, τότε το G δεν είναι γράφημα Euler.
- 40) (Μήτρα γραφήματος δεσμών) Δίνεται το γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ όπου $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, με την ακόλουθη μήτρα:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί μια διαδρομή του, μήκους 4.

- 41) (Αριθμός διαδρομών) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός a_n των διαδρομών μήκους n με αρχή την κορυφή 1 και τέλος την κορυφή 2 στο γράφημα W_4



ικανοποιεί την αναγωγική σχέση $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2}$, για $n \geq 2$, όπου $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$.

Παρατήρηση: Οι αριθμοί των διαδρομών μήκους n με αρχή την κορυφή 1 και τέλος οποιαδήποτε από τις κορυφές 2, 3, 4, 5 είναι ίσοι μεταξύ τους.

- 42) (Γραφήματα με συνάρτηση κόστους) Να σχεδιασθεί το γράφημα δεσμών με συνάρτηση κόστους το οποίο έχει μήτρα γειτονικότητας

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 43) (Όχι δένδρο) Να δοθεί ένα παράδειγμα γραφήματος με n κορυφές και $n - 1$ δεσμούς το οποίο να μην είναι δένδρο.
- 44) (Ακολουθίες βαθμών δένδρων) Έστω ένα δένδρο στο οποίο υπάρχουν n_1 κορυφές βαθμού 1, n_2 κορυφές βαθμού 2, n_3 κορυφές βαθμού 3, ..., n_k κορυφές βαθμού k , όπου k είναι ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του. Ναδειχθεί ότι

$$n_1 = (3 - 2)n_3 + (4 - 2)n_4 + \dots + (k - 2)n_k + 2.$$

45) (Δένδρα και φύλλα)

i) Να δειχθεί ότι σε κάθε δένδρο (εκτός από το δένδρο που αποτελείται από ένα κόμβο) υπάρχουν τουλάχιστον δύο φύλλα.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε ένα μονοπάτι στο δένδρο με μέγιστο μήκος.)

ii) Να δειχθεί ότι κάθε δένδρο που περιέχει κόμβο με βαθμό k έχει τουλάχιστον k φύλλα.

iii) Να δειχθεί ότι κάθε δένδρο με τουλάχιστον τρία φύλλα περιέχει μια κορυφή βαθμού τουλάχιστον 3.

46) (Υπογραφήματα δένδρων) Έστω T ένα δένδρο με n κορυφές. Να δειχθεί ότι για κάθε $k \in [n]$ υπάρχει υπογράφημα του T με k κορυφές το οποίο είναι δένδρο.

47) (Μονοπάτια σε δένδρα)

i) Έστω T ένα δένδρο. Να δειχθεί ότι για κάθε ζεύγος κόμβων του T υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που τους συνδέει.

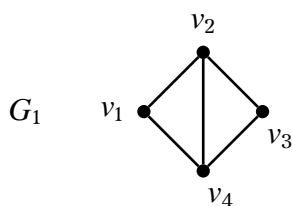
ii) Να βρεθεί ο αριθμός όλων των μονοπατιών σε ένα δένδρο με n κόμβους.

48) (Δένδρα και ισθμοί) Να δειχθεί ότι κάθε δεσμός ενός δένδρου είναι ισθμός.

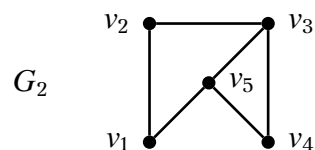
49) (Γενετικά δένδρα) Να δειχθεί ότι αν ένα γράφημα G έχει n κόμβους και $n - 2$ δεσμούς τότε είναι μη συνεκτικό.

50) (Αριθμός γενετικών δένδρων) Να βρεθεί ο αριθμός των γενετικών δένδρων των παρακάτω γραφημάτων

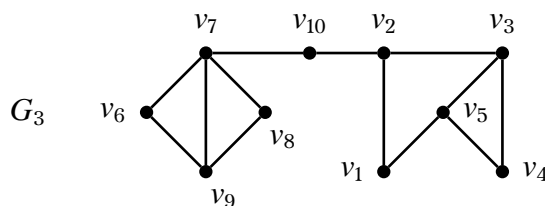
i)



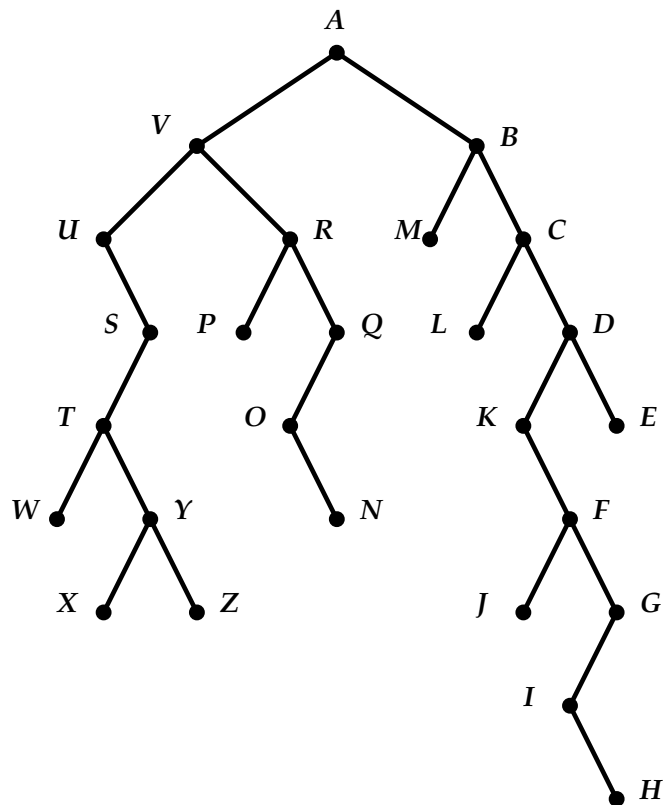
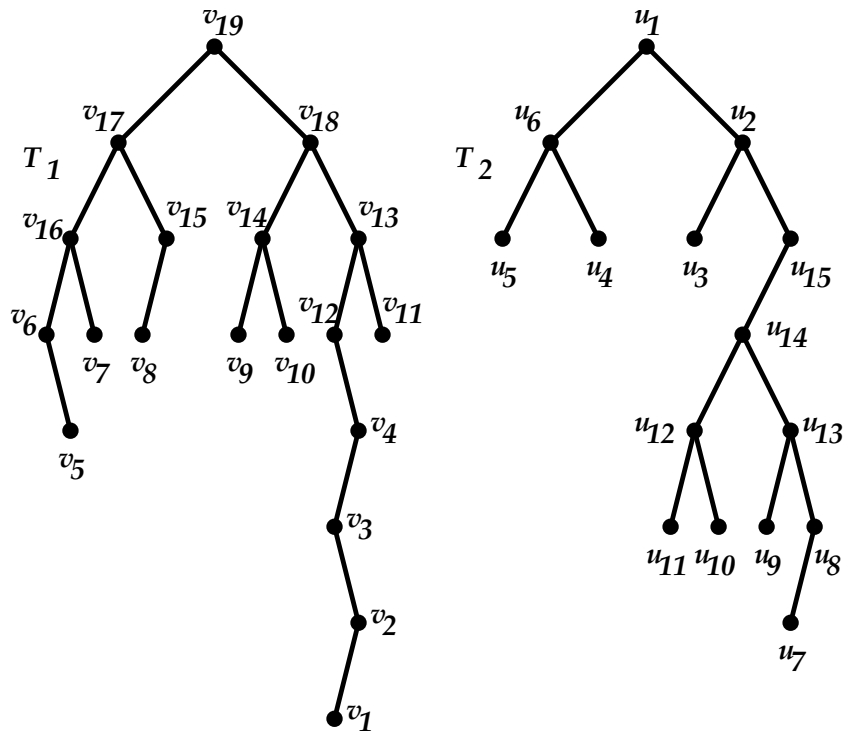
ii)



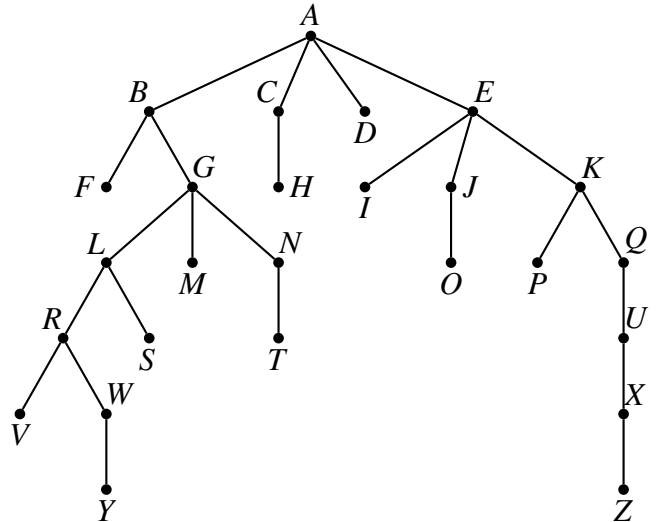
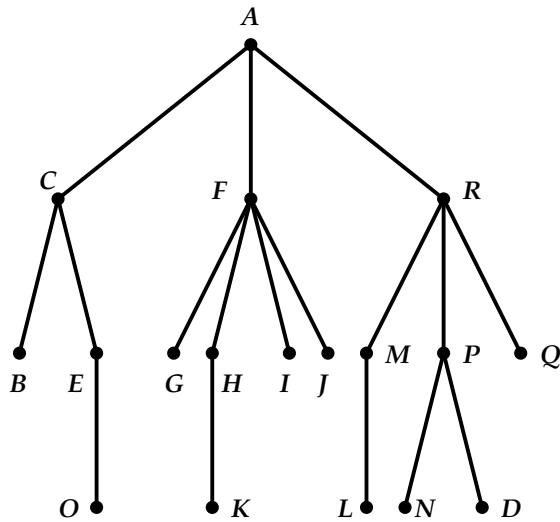
iii)



51) (Διατρέξεις δυαδικών δένδρων) Να γίνει διάτρεξη σε προδιάταξη, μεταδιάταξη, ενδοδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων στα παρακάτω δυαδικά δένδρα (με ρίζες v_{19} , u_1 και A αντίστοιχα).



52) (Διατρέξεις διατεταγμένων δένδρων) Να γίνει διάτρεξι σε προδιάταξη, ενδοδιάταξη, μεταδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων των παρακάτω διατεταγμένων δένδρων (με ρίζα A).

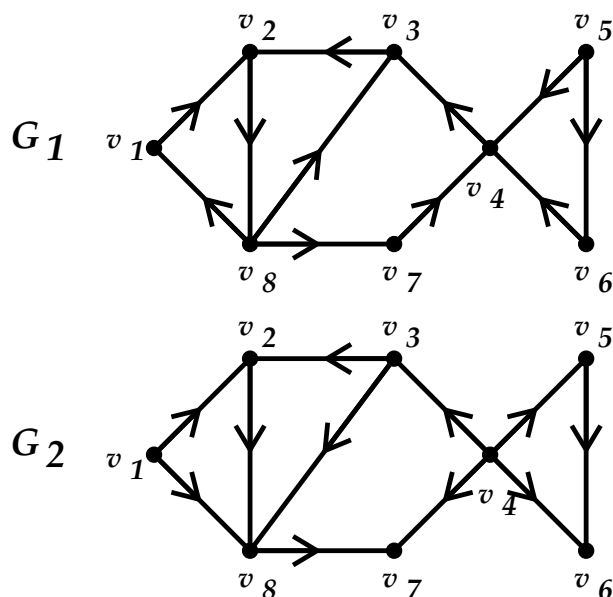


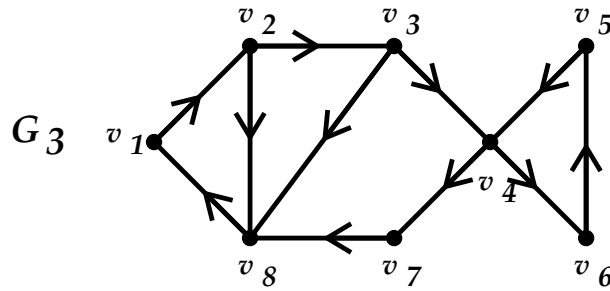
53) (Διατρέξεις δυαδικών δένδρων) Να βρεθεί το δυαδικό δένδρο για το οποίο γνωρίζουμε ότι οι διασχίσεις του ως προς την προδιάταξη και ενδοδιάταξη είναι αντίστοιχα:

$A B C D E F G H I J K L M N O P Q$ και $B D C F E G A I H K M O N P L J Q$.

54) (Μέγιστος αριθμός τόξων) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|U|$, για ένα γράφημα τόξων $G = (V, U)$ (χωρίς βρόχους) με $|V| = n$.

55) (Συνεκτικότητα γραφήματος τόξων) Να εξετασθούν ως προς τη συνεκτικότητα τα παρακάτω γραφήματα τόξων:





56) (Συνεκτικότητα γραφήματος τόξων) Να σχεδιασθεί ένα ισχυρά συνεκτικό, ένα ασθενώς συνεκτικό και ένα μονομερώς συνεκτικό γράφημα τόξων με 7 τουλάχιστον κόμβους.

57) (Αναπαράστασεις γραφημάτων) Να παρασταθούν

i) γραφικά

ii) με μήτρα

το γράφημα τόξων $G = (V, U)$ με

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \text{ και}$$

$$U = \{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_1), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_5)\}$$

και το γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ με

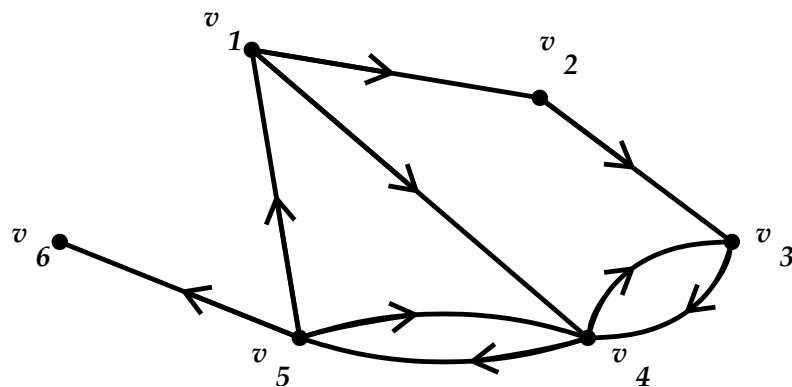
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \text{ και}$$

$$E = \{\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_6\}, \{v_1, v_5\}\}.$$

58) (Μήτρα γραφήματος τόξων) Να σχεδιασθεί το γράφημα τόξων το οποίο έχει μήτρα γειτονικότητας

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

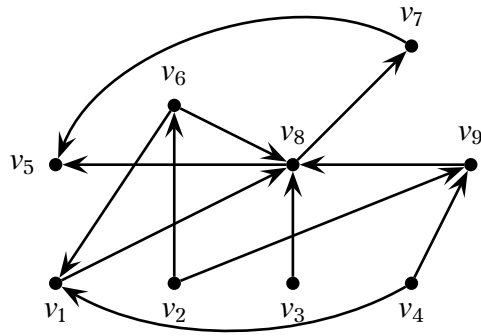
59) (Γραφήματα τόξων) Δίνεται το γράφημα τόξων:



Να βρεθεί η μήτρα του γραφήματος. Να δοθούν δύο δρόμοι μήκους 4, και ένα κύκλωμα.

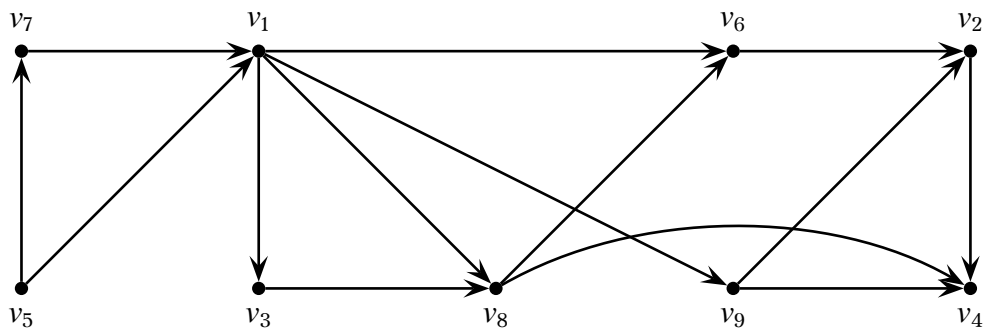
60) (Τοπολογική διάταξη) Να γραφεί πρόγραμμα που υπολογίζει την τοπολογική διάταξη ενός άκυκλου γραφήματος τόξων χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη networkx της Python. Ο κώδικάς σας να μην χρησιμοποιεί την μέθοδο topological_sort() της βιβλιοθήκης networkx αλλά να υλοποιήσετε τον αλγόριθμο τοπολογικής διάταξης των σημειώσεων.

Με την βοήθεια αυτού, ή με άλλο τρόπο υπολογίστε τρεις τουλάχιστον διαφορετικές τοπολογικές διατάξεις στο επόμενο γράφημα τόξων.



Το παραδοτέο που αφορά το πρόγραμμα αποτελείται από το αρχείο του κώδικα με όνομα `tsort.py` και από screenshots εκτέλεσης του προγράμματος για το γράφημα τόξων που δίδεται.

- 61) (Συνάρτηση Grundy - Sprague) Να υπολογισθούν οι τιμές της συνάρτησης Grundy - Sprague για τις κορυφές του επόμενου γραφήματος τόξων.



- 62) (Παιχνίδι με σπίρτα) Πάνω σε ένα τραπέζι βρίσκονται 25 σπίρτα. Δύο παίκτες κάνουν εναλλάξ την εξής κίνηση: Αφαιρούν 1, 2 ή 3 σπίρτα από το τραπέζι. Ο παίκτης που θα πάρει το τελευταίο σπίρτο χάνει. Ναδειχθεί ότι ο δεύτερος παίκτης μπορεί πάντα να κερδίζει το παιχνίδι. (Δοκιμάστε να παίξετε το παιχνίδι με 5, 9 και 13 σπίρτα)
- 63) (Γενεαλογικά δένδρα) Σχηματίστε το γενεαλογικό δένδρο των απογόνων ενός προπάπου ή μιας προγιαγιάς σας. (Αν δεν γνωρίζετε όλα τα στοιχεία, συμπληρώστε το δένδρο με φανταστικά ονόματα).
- 64) (Γενεαλογικά δένδρα) Σχηματίστε το γενεαλογικό δένδρο των προγόνων σας, μέχρι τους προπαπούδες - προγιαγιάδες. (Αν δεν γνωρίζετε όλα τα στοιχεία, συμπληρώστε το δένδρο με φανταστικά ονόματα).

Κεφάλαιο 2

Τυπικές Γλώσσες - Αυτόματα

2.1 Τυπικές γλώσσες

2.1.1 Ορισμοί

Αλφάβητο είναι ένα μη κενό, πεπερασμένο σύνολο συμβόλων \mathcal{E} .

Παραδείγματα

1. Το ελληνικό αλφάβητο $\mathcal{E}_1 = \{A, B, \Gamma, \dots, \Omega\}$.
2. Το λατινικό αλφάβητο $\mathcal{E}_2 = \{A, B, C, \dots, Z\}$.
3. Το δυαδικό αλφάβητο $\mathcal{E}_3 = \{0, 1\}$.
4. Το αλφάβητο της λογικής $\mathcal{E}_4 = \{a, b, c, \dots, z, (,), \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$.

Τα στοιχεία ενός αλφαβήτου ονομάζονται **γράμματα**. Κάθε πεπερασμένη ακολουθία γραμμάτων ονομάζεται **λέξη**.

Παραδείγματα

1. Για το \mathcal{E}_1 , λέξεις είναι οι ΝΙΚΟΣ, ΑΑΑΒΑΩ, Β, ΤΡΑΠΕΖ, κ.λπ.
2. Για το \mathcal{E}_2 , λέξεις είναι οι BOAT, B, CCCCQ, κ.λπ.
3. Για το \mathcal{E}_3 , λέξεις είναι οι 10010, 11, 1010, κ.λπ.
4. Για το \mathcal{E}_4 , λέξεις είναι οι $(a \rightarrow b)$, $(a \vee b) \wedge (c \vee d)$, $a \vee (\neg a)$, κ.λπ.

Ορίζουμε επίσης μια λέξη χωρίς γράμματα, την **κενή λέξη** \square , ή ϵ , ή λ .

Ο αριθμός των γραμμάτων μιας λέξης m λέγεται **μήκος** ή **βαθμός** της λέξης και συμβολίζεται με $l(m)$ ή $|m|$.

Έτσι η πρώτη λέξη καθενός από τα τέσσερα προηγούμενα παραδείγματα έχει μήκος 5, 4, 5 και 5 αντίστοιχα.

Η λέξη που προκύπτει από την αντιστροφή της σειράς των γραμμάτων μιας λέξης m ονομάζεται **κατοπτρική εικόνα** της m και συμβολίζεται με \tilde{m} .

Έτσι, η πρώτη λέξη καθενός από τα τέσσερα προηγούμενα παραδείγματα έχει ως κατοπτρική εικόνα τη λέξη $\tilde{m} = \Sigma\text{OKIN}$, TAOB , 01001 και $)b \rightarrow a($ αντίστοιχα.

Μια λέξη m για την οποία $\tilde{m} = m$ ονομάζεται **συμμετρική**.

Παραδείγματα

Το σύνολο όλων των λέξεων ενός αλφαβήτου \mathcal{E} συμβολίζεται με \mathcal{E}^* .

Παραδείγματα

1. Για το αλφάβητο \mathcal{E}_1 παίρνουμε ως \mathcal{E}_1^* το σύνολο όλων των λέξεων που χρησιμοποιούν οσαδήποτε, οποιαδήποτε και με οποιαδήποτε σειρά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου (πεπερασμένα σε πλήθος) καθώς επίσης και την \square .
2. Για το αλφάβητο \mathcal{E}_3 έχουμε $\mathcal{E}_3^* = \{\square, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \dots\}$.

Ορίζουμε μια εσωτερική πράξη στο \mathcal{E}^* ως εξής: Για κάθε $m_1, m_2 \in \mathcal{E}^*$ παίρνουμε την $m = m_1 m_2$ που προκύπτει από τα γράμματα της m_1 ακολουθούμενα από τα γράμματα της m_2 . Η πράξη αυτή λέγεται **ζεύξη** ή **σύζευξη**.

Παραδείγματα

Αν $m_1 = 1011$ και $m_2 = 11$ τότε $m_1 m_2 = 101111$ και $m_2 m_1 = 111011$.

Αν $m_1 = \text{ANTI}$ και $m_2 = \text{ΓΡΑΦΩ}$ τότε $m_1 m_2 = \text{ΑΝΤΙΓΡΑΦΩ}$.

Προφανώς ισχύει η προσεταιριστικότητα αλλά όχι η αντιμεταθετικότητα, όπως φαίνεται και από το πρώτο παράδειγμα. Επίσης, υπάρχει ουδέτερο στοιχείο (η λέξη \square , αφού $m\square = \square m = m$).

Για την λέξη m , συχνά γράφουμε m^n αντί $\underbrace{mm \cdots m}_n$. Θεωρούμε ότι $m^0 = \square$.

Η αλγεβρική δομή \mathcal{E}^* με την πράξη της ζεύξης λέγεται **ελεύθερο μονοειδές** (με γεννήτορες τα στοιχεία του \mathcal{E}).

Κάθε υποσύνολο L του \mathcal{E}^* ονομάζεται **τυπική γλώσσα του \mathcal{E}^*** .

Παραδείγματα

1. \mathcal{E} το ελληνικό αλφάβητο και L όλες οι λέξεις της ελληνικής γλώσσας.
2. $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ και L όλοι οι αριθμοί x με $100 \leq x \leq 355$.

Το κενό υποσύνολο \emptyset του \mathcal{E}^* ονομάζεται **κενή γλώσσα**.

2.1.2 Πράξεις

Αν A, B είναι δύο τυπικές γλώσσες του \mathcal{E}^* , τότε ορίζουμε

- Την **ένωση** $A \cup B$ των A και B ως το σύνολο όλων των λέξεων x όπου $x \in A$ ή/και $x \in B$.

Παράδειγμα Αν $A = \{\square, 0, 11\}$ και $B = \{1, 10, 110\}$ τότε

$$A \cup B = \{\square, 0, 11, 1, 10, 110\}$$

- Την **σύζευξη** AB των A και B ως το σύνολο όλων των λέξεων xy όπου $x \in A$ και $y \in B$.

Παράδειγμα Αν $A = \{\square, 0, 11\}$ και $B = \{1, 10, 110\}$ τότε

$$AB = \{1, 10, 110, 01, 010, 0110, 111, 1110, 11110\}$$

$$BA = \{1, 10, 111, 10, 100, 1011, 110, 1100, 11011\}$$

Αν $B = \emptyset$ τότε $AB = BA = \emptyset$.

- Αν A είναι μια τυπική γλώσσα τότε ορίζουμε επαγωγικά την n -οστή δύναμη της A ως εξής:

$$A^0 = \{\square\}$$

και

$$A^{n+1} = A^n A, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Παράδειγμα Έστω $A = \{0, 11\}$ να βρεθούν οι γλώσσες A^n για $n = 0, 1, 2, 3$.

$$A^0 = \{\square\}$$

$$A^1 = A^0 A = \{\square\}\{0, 11\} = \{0, 11\} = A$$

$$A^2 = A^1 A = \{0, 11\}\{0, 11\} = \{00, 011, 110, 1111\}$$

$$A^3 = A^2 A = \{00, 011, 110, 1111\}\{0, 11\} = \{000, 0011, 0110, 01111, 1100, 11011, 11110, 111111\}$$

- Το **άστρο του Kleene** ή **κλειστότητα του Kleene** L^* μιας τυπικής γλώσσας L είναι το σύνολο που αποτελείται από τις συζεύξεις οσονδήποτε λέξεων της γλώσσας L , δηλαδή

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$$

Παραδείγματα

Αν $L = 0$ τότε $L^* = \{0^n : n \in \mathbb{N}\}$

Αν $L = 11$ τότε $L^* = \{(11)^n : n \in \mathbb{N}\}$ (το σύνολο όλων των λέξεων που αποτελούνται από άρτιο αριθμό 1).

Αν $L = \{00, 11\}$ τότε L^* είναι το σύνολο όλων των δυαδικών λέξεων οι οποίες δεν περιέχουν τις υπολέξεις 101 και 010. Επίσης, στο L δεν περιλαμβάνονται οι λέξεις 0 και 1.

Επίσης με L^+ συμβολίζεται το σύνολο $L^* \setminus \{\square\}$.

- **Συμπλήρωμα** μιας γλώσσας $L \subseteq \mathcal{E}^*$ ονομάζεται το σύνολο $\bar{L} = \{w : w \in \mathcal{E}^* \text{ και } w \notin L\}$.

Παράδειγμα

Αν $\mathcal{E} = \{0, 1\}$ και L είναι όλα τα στοιχεία του \mathcal{E}^* που τελειώνουν σε 0, τότε \bar{L} είναι όλα τα στοιχεία του \mathcal{E}^* που τελειώνουν σε 1, καθώς και \square .

Προφανώς, ισχύει ότι $\overline{\bar{L}} = L$. Το $\overline{\mathcal{E}^*}$ δεν περιέχει καμία λέξη.

2.1.3 Λεξικογραφική διάταξη

Με τη βοήθεια της ζεύξης, μπορεί να ορισθεί διάταξη στο \mathcal{E}^* . Για να γίνει αυτό, απαιτείται ένα αλφάβητο \mathcal{E} ολικά διατεταγμένο από τη σχέση του “προηγείται”, όπου $x < y$ όταν το γράμμα x προηγείται του γράμματος y στο \mathcal{E} .

Η σχέση αυτή, που είναι γνωστή ως **αλφαβητική** διάταξη του \mathcal{E} , επεκτείνεται και στο σύνολο \mathcal{E}^* ορίζοντας τη **λεξικογραφική** του διάταξη.

Για δύο λέξεις m_1, m_2 του \mathcal{E}^* ορίζεται

$$m_1 < m_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = m_1 m_3 \text{ και } m_3 \neq \square, \text{ ή} \\ m_1 = m a m_3 \text{ και } m_2 = m b m_4, \text{ όπου } m, m_3, m_4 \in \mathcal{E}^* \text{ και } a < b \text{ με } a, b \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

Παραδείγματα

1. Αν $m_1 = aabb$ και $m_2 = aabbab$, τότε $m_1 < m_2$, διότι $m_2 = m_1 m_3$, όπου $m_3 = ab \neq \square$.
2. Αν $m_1 = \text{THEN}$ και $m_2 = \text{THIS}$, τότε $m_1 < m_2$, διότι

$$m_1 = m E m_3 \quad \text{και} \quad m_2 = m I m_4,$$

όπου $m = \text{TH}$, $m_3 = \text{N}$, $m_4 = \text{S}$ και $E < I$.

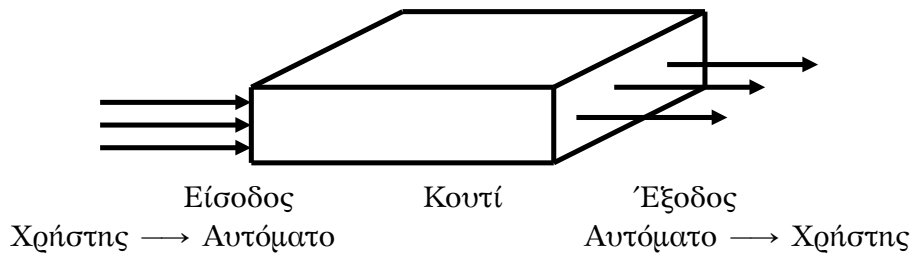
3. Αν $m_1 = \text{ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ}$ και $m_2 = \text{ΕΛΠΙΔΑ}$, τότε $m_1 < m_2$, διότι

$$m_1 = m E m_3 \quad \text{και} \quad m_2 = m \Pi m_4,$$

όπου $m = \text{ΕΛ}$, $m_3 = \text{ΥΘΕΡΙΑ}$, $m_4 = \text{ΙΔΑ}$ και $E < \Pi$.

2.2 Αυτόματα

Ένα κουτί με διαύλους εισόδου και εξόδου:



Αυτόματα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (θέσεων) (Finite state automata, πεπερασμένα αυτόματα).

Το σύνολο των καταστάσεων καθώς και η διαδικασία που επιτρέπει τη μετάβαση από τη μια κατάσταση στην άλλη (με τη βοήθεια “σημάτων”) είναι τα βασικά στοιχεία ενός αυτόματου.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα *D*-αυτόματα:

2.2.1 *D*-αυτόματα

Κάθε πεντάδα $a = (S, \mathcal{E}, T, s_0, f)$ όπου

S : ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων,

\mathcal{E} : ένα αλφάβητο (το αλφάβητο εισόδου),

$T \subseteq S$: το σύνολο των τελικών καταστάσεων,

$s_0 \in S$: η αρχική κατάσταση,

$f : S \times \mathcal{E} \rightarrow S$ (η συνάρτηση μετάβασης),

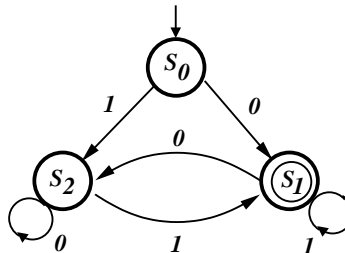
ονομάζεται **(πεπερασμένο) *D*-αυτόματο (deterministic finite state automaton)**. Η συνάρτηση μετάβασης f , εκφράζει τον “εσωτερικό μηχανισμό” του *D*-αυτόματου, και σε κάθε ζεύγος του $S \times \mathcal{E}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του S .

Σε κάθε *D*-αυτόματο αντιστοιχεί ένα γράφημα τόξων με ετικέτες στα τόξα. Κορυφές του γραφήματος είναι οι καταστάσεις του αυτόματου, και σε κάθε τιμή $f(s_i, k) = s_j$ της f αντιστοιχεί το τόξο (s_i, s_j) με ετικέτα k . Στην κορυφή της αρχικής κατάστασης s_0 υπάρχει ένα τόξο εισόδου, ενώ για τις κορυφές των τελικών καταστάσεων χρησιμοποιούνται διπλοί κύκλοι, αντί για τον ένα που χρησιμοποιείται για τις υπόλοιπες κορυφές.

Παραδείγματα

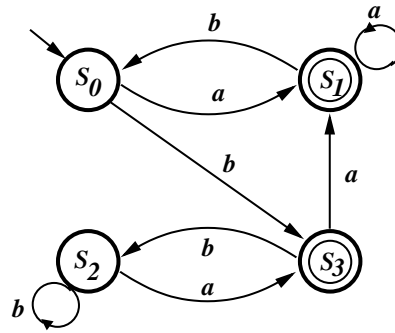
1. $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $\mathcal{E} = \{0, 1\}$, $T = \{s_1\}$ και $f : S \times \mathcal{E} \rightarrow S$ με $f(s_0, 0) = s_1$, $f(s_0, 1) = s_2$, $f(s_1, 0) = s_2$, $f(s_1, 1) = s_1$, $f(s_2, 0) = s_2$ και $f(s_2, 1) = s_1$.

Το αντίστοιχο γράφημα (που περιγράφει αυτό το *D*-αυτόματο) είναι το εξής:

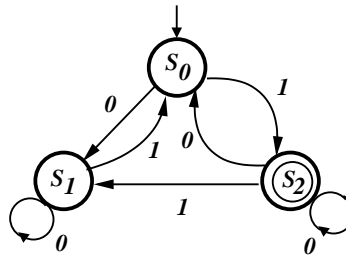


2. $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $\mathcal{E} = \{a, b\}$, $T = \{s_1, s_3\}$ και $f : S \times \mathcal{E} \rightarrow S$ με $f(s_0, a) = s_1$, $f(s_0, b) = s_3$, $f(s_1, a) = s_1$, $f(s_1, b) = s_0$, $f(s_2, a) = s_3$, $f(s_2, b) = s_2$, $f(s_3, a) = s_1$, $f(s_3, b) = s_2$.

Το αντίστοιχο γράφημα (που περιγράφει αυτό το D -αυτόματο) είναι το εξής:



3. Το αυτόματο που περιγράφει το επόμενο γράφημα **δεν είναι** ντετερμινιστικό (αφού η $f(s_2, 0)$ δεν είναι μοναδικά καθορισμένη).



2.2.2 Λέξεις και αυτόματα

Για να εξετάσουμε αν ένα D -αυτόματο “δέχεται” (αναγνωρίζει) μια λέξη, ορίζουμε πρώτα μια καινούργια συνάρτηση $f^* : S \times \mathcal{E}^* \rightarrow S$ ως εξής:

$$f^*(s_i, \square) = s_i, \quad \forall s_i \in S$$

$$f^*(s_i, m_1 m_2) = f(f^*(s_i, m_1), m_2), \quad \forall s_i \in S, m_1 \in \mathcal{E}^*, m_2 \in \mathcal{E}.$$

Μια λέξη m **αναγνωρίζεται** από ένα D -αυτόματο, όταν $f^*(s_0, m) \in T$. (Δηλαδή πρέπει, αν ξεκινήσουμε από το s_0 και προχωρήσουμε “βήμα-βήμα”, ακολουθώντας τα “γράμματα” της λέξης m , να καταλήξουμε σε κάποιο “τελικό” στοιχείο, δηλαδή σε κάποιο στοιχείο του T).

Παραδείγματα

1. Το D -αυτόματο του παραδείγματος 1 αναγνωρίζει τη λέξη $m = 1001101$, αφού

$$f^*(s_0, 1) = f^*(s_0, \square 1) = f(f^*(s_0, \square), 1) = f(s_0, 1) = s_2$$

$$f^*(s_0, 10) = f(f^*(s_0, 1), 0) = f(s_2, 0) = s_2$$

$$f^*(s_0, 100) = f(f^*(s_0, 10), 0) = f(s_2, 0) = s_2$$

$$f^*(s_0, 1001) = f(f^*(s_0, 100), 1) = f(s_2, 1) = s_1$$

$$f^*(s_0, 10011) = f(f^*(s_0, 1001), 1) = f(s_1, 1) = s_1$$

$$f^*(s_0, 100110) = f(f^*(s_0, 10011), 0) = f(s_1, 0) = s_2$$

$$f^*(s_0, m) = f^*(s_0, 1001101) = f(f^*(s_0, 100110), 1) = f(s_2, 1) = s_1 \in T.$$

Παρατήρηση: Πρακτικός τρόπος: Ξεκινάμε από το s_0 και ακολουθούμε τα βήματα της $m = 1001101$

$$s_0 \xrightarrow{1} s_2 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{1} s_1 \in T.$$

2. Το ίδιο D -αυτόματο δεν αναγνωρίζει τη λέξη $w = 11110010$ διότι

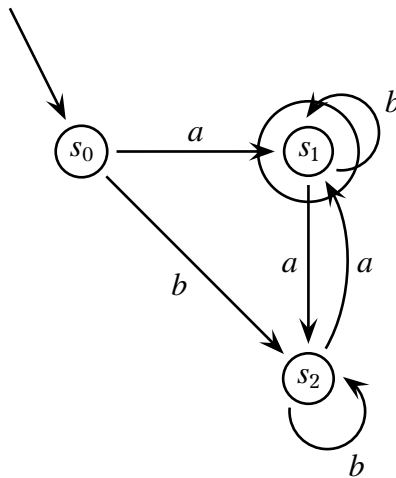
$$s_0 \xrightarrow{1} s_2 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{0} s_2 \notin T.$$

3. Το D -αυτόματο του παραδείγματος 2 αναγνωρίζει τη λέξη $m = abbbbabaa$ διότι

$$s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b} s_0 \xrightarrow{b} s_3 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{a} s_3 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{a} s_3 \xrightarrow{a} s_1 \in T.$$

Ένα D -αυτόματο **αναγνωρίζει** μια γλώσσα L (ή, ισοδύναμα μια γλώσσα L **αναγνωρίζεται** από ένα D -αυτόματο), αν το D -αυτόματο αναγνωρίζει όλες τις λέξεις της L και μόνον αυτές.

Παράδειγμα: Το παρακάτω D -αυτόματο αναγνωρίζει τη γλώσσα του $\{a, b\}^*$ η οποία αποτελείται από τις λέξεις στις οποίες το a έχει περιττό αριθμό εμφανίσεων.



2.3 Κανονικές εκφράσεις και κανονικές γλώσσες

2.3.1 Κανονικές εκφράσεις

Οι κανονικές εκφράσεις (regular expressions) ορίζονται αναδρομικά.

Έστω \mathcal{E} ένα αλφάβητο. Τα επόμενα σύμβολα ονομάζονται **κανονικές εκφράσεις του \mathcal{E}** .

- Το κενό σύνολο \emptyset είναι κανονική έκφραση του \mathcal{E} .
- Η κενή λέξη \square είναι κανονική έκφραση του \mathcal{E} .
- Κάθε γράμμα a του \mathcal{E} είναι κανονική έκφραση του \mathcal{E} .
- Αν A, B είναι κανονικές εκφράσεις του \mathcal{E} , τότε και τα $(A \cup B)$, (AB) , $A^* = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A^k\right)$ είναι κανονικές εκφράσεις του \mathcal{E} .
- Δεν υπάρχουν άλλες κανονικές εκφράσεις του \mathcal{E} .

Παραδείγματα

Στο αλφάβητο $\mathcal{E} = \{0, 1\}$ οι παρακάτω εκφράσεις είναι κανονικές.

- 1^*

- 01^*0^*
- $(0^*1 \cup 01^*)1^*$
- $(01)(01)^*10^* \cup (00)^*$

Κάθε κανονική έκφραση του \mathcal{E} αναπαριστά ένα σύνολο λέξεων του \mathcal{E}^* . Συγκεκριμένα,

- Το κενό σύνολο \emptyset αναπαριστά το κενό σύνολο!
- Η κενή λέξη \square αναπαριστά το μονοσύνολο $\{\square\}$.
- Κάθε γράμμα a του \mathcal{E} αναπαριστά το μονοσύνολο $\{a\}$.
- Η $(A \cup B)$ αναπαριστά την ένωση των συνόλων που αναπαριστούν τα A και B
- Η (AB) αναπαριστά την σύζευξη των συνόλων που αναπαριστούν τα A και B .
- Η A^* αναπαριστά την κλειστότητα του Kleene του συνόλου που αναπαριστά το A .

Παραδείγματα

- $1^* = \{\square, 1, 11, 111, \dots\} = \{1^n : n \in \mathbb{N}\}$
- $01^*0^* = \{0\}\{1^n : n \in \mathbb{N}\}\{0^k : k \in \mathbb{N}\} = \{01^n0^k : k, n \in \mathbb{N}\}$
- $0(1^*0^*)^* =$ Το σύνολο των δυαδικών λέξεων που αρχίζουν με 0.
- $(0^*1^*)^*(101)(0^*1^*)^*(101)(0^*1^*)^* =$ Το σύνολο των δυαδικών λέξεων που περιέχουν δύο τουλάχιστον εμφανίσεις του 101.
- $(0^*1^*)^*(101 \cup 1100) =$ Το σύνολο των δυαδικών λέξεων που τελειώνουν είτε σε 101, είτε σε 1100.
- $(0^*1 \cup 01^*)1^* = \{0^n1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{01^k : k \in \mathbb{N}\}\{1^\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.
- $(01)(01)^*10^* \cup (00)^* = \{01(01)^n10^k : n, k \in \mathbb{N}\} \cup \{(00)^\lambda : \lambda \in \mathbb{N}\}$.

2.3.2 Κανονικές γλώσσες

Μια γλώσσα L του \mathcal{E} ονομάζεται **κανονική** (regular) αν ορίζεται από κανονική έκφραση του \mathcal{E} , δηλαδή υπάρχει κανονική έκφραση R του \mathcal{E} που αναπαριστά την γλώσσα L .

Παραδείγματα Έστω $\mathcal{E} = \{0, 1\}$.

- Η γλώσσα L των δυαδικών λέξεων είναι κανονική διότι $L = (0 \cup 1)^*$
- Η γλώσσα L των δυαδικών λέξεων που αρχίζουν με 01 είναι κανονική διότι $L = (01)(0 \cup 1)^*$.
- Η γλώσσα L των δυαδικών λέξεων που περιέχουν άρτιο αριθμό 0 είναι κανονική διότι $L = 1^*(01^*0)^*$.
- Αποδεικνύεται ότι η γλώσσα $L = \{0^n1^n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κανονική.

Πρόταση 2.3.1 (Θεώρημα του Kleene (1956)). Μια γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν αναγνωρίζεται από κάποιο D -αυτόματο.

Με άλλα λόγια, τα D -αυτόματα αναγνωρίζουν μόνο κανονικές γλώσσες και για κάθε κανονική γλώσσα υπάρχει ένα D -αυτόματο που την αναγνωρίζει.

2.3.3 Pumping lemma

Ένα χρήσιμο κριτήριο για το πότε μια γλώσσα είναι κανονική είναι το λεγόμενο pumping lemma:

Πρόταση 2.3.2 (Pumping lemma). Αν μια γλώσσα L είναι κανονική τότε υπάρχει ένας ακέραιος $p \geq 1$ τέτοιος ώστε κάθε λέξη a με μήκος $|a| \geq p$

- α) γράφεται στην μορφή $a = uvw$ όπου $v \neq \epsilon$
- β) $|uv| \leq p$
- γ) $uv^i w \in L$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$.

Δηλαδή στις κανονικές γλώσσες, κάθε αρκετά μακριά λέξη a μπορεί να χωριστεί σε 3 μέρη, δηλαδή $a = uvw$, έτσι ώστε όλες οι λέξεις $uv^i w$, $i \in \mathbb{N}$ να περιέχονται επίσης στην γλώσσα. Το μεσαίο τμήμα όλων των αρκετά μακριών λέξεων μια κανονικής γλώσσας μπορεί να επαναληφθεί οσοδήποτε φορές (φουσκώνοντας (pumping) έτσι την λέξη) ώστε να παράγει νέες λέξεις που επίσης περιέχονται στην γλώσσα.

Στην Ελληνική βιβλιογραφία το pumping lemma έχει μεταφραστεί ως λήμμα της άντλησης! Αν η γλώσσα είναι πεπερασμένη και έχει μέγιστο μήκος λέξεων ίσο με n , τότε το λήμμα ισχύει για $p = n + 1$.

Παράδειγμα Η γλώσσα $L = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κανονική.

Απόδειξη. Έστω ότι η L είναι κανονική. Τότε από το pumping lemma υπάρχει ακέραιος p ώστε κάθε λέξη $a \in L$ με $|a| > p$ να γράφεται στην μορφή

$$a = uvw$$

όπου $|uv| \leq p$ και $uv^i w \in L$.

Θεωρούμε την λέξη $a = 0^p 1^p$. Το μήκος της a είναι μεγαλύτερο από το p . Από το pumping lemma υπάρχουν λέξεις u, v, w ώστε $a = uvw$ όπου $|uv| \leq p$. Επειδή $|uv| < p$ έπεται ότι $u = 0^k$, $v = 0^\lambda$, $\lambda > 0$, όπου $k + \lambda \leq p$, και $w = 0^{p-k-\lambda} 1^p$.

Από το pumping lemma πρέπει όλες οι λέξεις $uv^i w$ επίσης να ανήκουν στην L . Όμως,

$$uv^i w = 0^k 0^{i\lambda} 0^{p-k-\lambda} 1^p = 0^{p+(i-1)\lambda} 1^p$$

για $i = 2$ προκύπτει ότι η λέξη $0^{p+\lambda} 1^p \in L$, $\lambda > 0$, το οποίο είναι άτοπο.

2.4 Το πρόβλημα των λέξεων

2.4.1 Αντικατάσταση

Σύστημα σχέσεων του Thue είναι ένα σύστημα κανόνων αντικαταστάσεων στο \mathcal{E}^* , δηλαδή η παραδοχή ότι κάποιες λέξεις είναι ισοδύναμες (και άρα η μια μπορεί να αντικαθιστά την άλλη όταν τις συναντάμε μέσα σε άλλες λέξεις).

Γράφουμε

$$m_i \sim m'_i$$

$i = 1, 2, \dots, n$ γι' αυτές τις συνθήκες.

Δύο λέξεις λέγονται **γειτονικές** αν η μια προκύπτει από την άλλη με μια μόνο αντικατάσταση. Αν η μια προκύπτει από την άλλη μέσω περισσότερων διαδοχικών αντικαταστάσεων, τότε οι λέξεις λέγονται **ισοδύναμες** και γράφουμε $m_1 \approx m_2$.

Παραδείγματα

1. Θεωρώντας το σύστημα των σχέσεων του Thue:

$$ab \sim ba, aba \sim b, bab \sim a$$

τότε οι λέξεις $m_1 = aabbacca$, $m_2 = acca$ είναι ισοδύναμες. Πραγματικά,

$$\begin{aligned} m_1 &\approx \underline{aabbacca} \\ &\approx ab\underline{abacca} \\ &\approx \underline{abbcca} \\ &\approx \underline{babcca} \\ &\approx acca \approx m_2. \end{aligned}$$

2. Θεωρώντας το σύστημα των σχέσεων του Thue:

$$\omega \sim o, \alpha\iota \sim \epsilon, \epsilon\iota \sim \iota$$

έχουμε την ισοδυναμία

$$\text{Πειραι}\underline{\omega}\text{s} \approx \text{Πειρ}\underline{\alpha}\text{i}\underline{\omega}\text{s} \approx \text{Πειρ}\underline{\epsilon}\text{o}\text{s} \approx \text{Πιρ}\text{o}\text{s}.$$

Έστω \mathcal{E} ένα αλφάβητο και ένα σύστημα σχέσεων του Thue στο \mathcal{E}^* .

Το **πρόβλημα των λέξεων** είναι να κατασκευασθεί ένας αλγόριθμος απαντάει στο ερώτημα αν δύο λέξεις w_1 και w_2 του \mathcal{E}^* είναι ισοδύναμες ή όχι.

Παράδειγμα Έστω $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e\}$ και το σύστημα σχέσεων του Thue

$$\begin{aligned} ac &\sim ca \\ ad &\sim da \\ bc &\sim cb \\ bd &\sim db \\ eca &\sim ce \\ edb &\sim de \\ cdca &\sim cdca \\ caaa &\sim aaa \\ daaa &\sim aaa \end{aligned}$$

Να κατασκευασθεί αλγόριθμος που να απαντάει στο ερώτημα αν μια λέξη w είναι ισοδύναμη με την λέξη aaa .

Το 1947 ο Markov απέδειξε ότι το πρόβλημα των λέξεων είναι μη επιλύσιμο.

Πρόταση 2.4.1 (Θεώρημα Markov). *Υπάρχουν συστήματα σχέσεων του Thue και λέξεις w για τις οποίες δεν υπάρχει αλγόριθμος που να απαντά σε όλες τις περιπτώσεις αν μια λέξη u είναι ισοδύναμη με την w .*

Το προηγούμενο παράδειγμα (από τον Tseitin) είναι ένα από αυτά τα συστήματα Thue για το οποίο έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος που να απαντά αν μια λέξη w είναι ισοδύναμη με την aaa ή όχι.

2.5 Ασκήσεις

Άσκηση 2.1. Να συγκριθούν οι λέξεις $m_1 = aabaca$ και $m_2 = abc$ του \mathcal{E}^* , που έχει αλφάβητο $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$ και σύστημα σχέσεων του Thue:

$$ab \sim ba, ac \sim ca, aaa \sim \square.$$

Απάντηση. Είναι ισοδύναμες. □

Άσκηση 2.2. Να ορισθεί το σύνολο των λέξεων μήκους 4 που αρχίζουν από a όταν $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$.

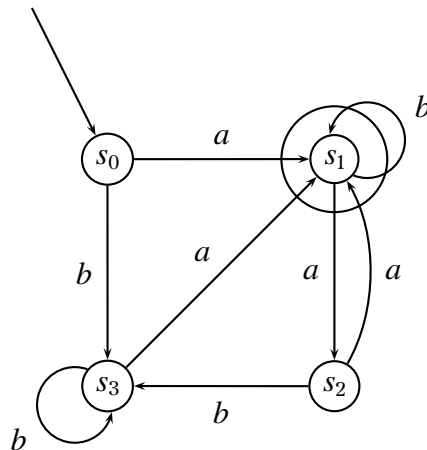
Απάντηση. $\{aaaa, aaab, aaac, aaba, aabb, aabc, aaca, aacb, aacc, abaa, abab, abac, abba, abbb, abbc, abca, abcb, abcc, acaa, acab, acac, acba, acbb, acbc, acca, accb, accc\}$ □

Άσκηση 2.3. Να ορισθεί το σύνολο των λέξεων, μήκους μικρότερου ή ίσου του 4, στις οποίες το a έχει περιττό αριθμό εμφανίσεων όταν $\mathcal{E} = \{a, b\}$.

Άσκηση 2.4. Να ορισθεί το σύνολο των λέξεων, μήκους μικρότερου ή ίσου του 4, στις οποίες δεν εμφανίζονται τρία διαδοχικά b όταν $\mathcal{E} = \{a, b\}$.

Άσκηση 2.5. Να βρεθεί ένα D -αυτόματο με $\mathcal{E} = \{a, b\}$ και $|S| = 4$, που να αναγνωρίζει τη γλώσσα η οποία αποτελείται από τις λέξεις στις οποίες το a έχει περιττό αριθμό εμφανίσεων.

Απάντηση. : Ένα τέτοιο D -αυτόματα είναι το παρακάτω:



□

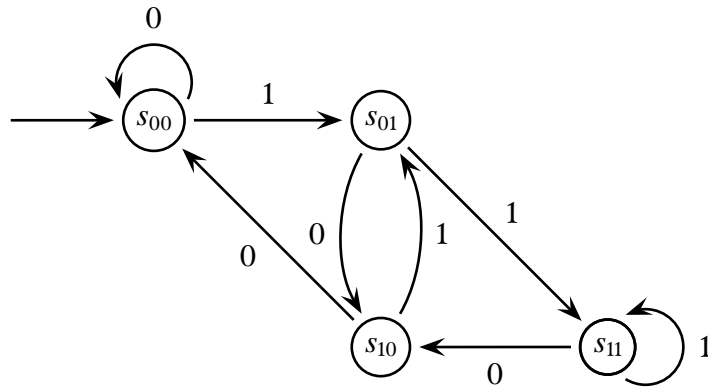
Άσκηση 2.6. Να παρασταθεί με γράφημα το D -αυτόματο για το οποίο

$$S = \{s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}\},$$

$$\mathcal{E} = \{0, 1\}, s_0 = s_{00}, T = \{s_{11}\}$$

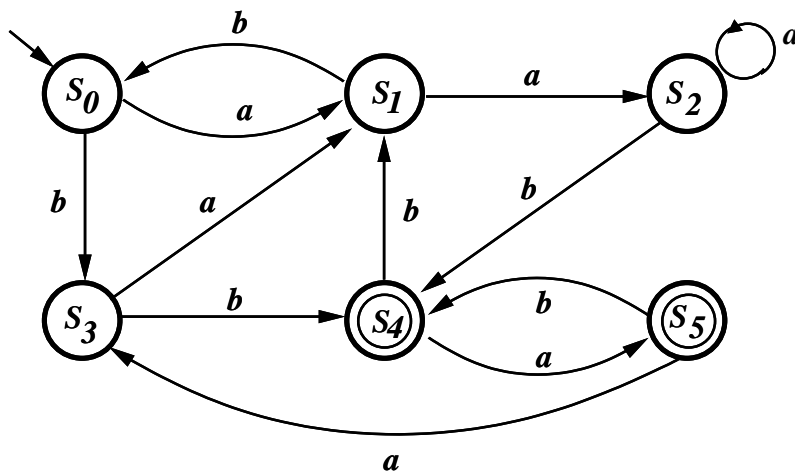
και με f τέτοια ώστε $f(s_{ij}, k) = s_{jk}$.

Απάντηση.



□

Άσκηση 2.7. Να εξετασθεί αν το D -αυτόματο



αναγνωρίζει τις παρακάτω λέξεις: $w_1 = abbaabbab$, $w_2 = bbaabbaab$, $w_3 = babababa$.

Απάντηση. Το αυτόματο αναγνωρίζει τις w_1, w_2 αλλά όχι την w_3 .

□

Άσκηση 2.8.

(i) Να δοθεί το γράφημα που περιγράφει το D -αυτόματο $(S, \mathcal{E}, T, s_0, f)$ όπου

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, \mathcal{E} = \{a, b\},$$

$$T = \{s_2, s_4\} \text{ και } f : S \times \mathcal{E} \rightarrow S$$

με

$$\begin{array}{ll} f(s_0, a) = s_4 & f(s_0, b) = s_1 \\ f(s_1, a) = s_2 & f(s_1, b) = s_0 \\ f(s_2, a) = s_4 & f(s_2, b) = s_2 \\ f(s_3, a) = s_1 & f(s_3, b) = s_2 \\ f(s_4, a) = s_4 & f(s_4, b) = s_3 \end{array}$$

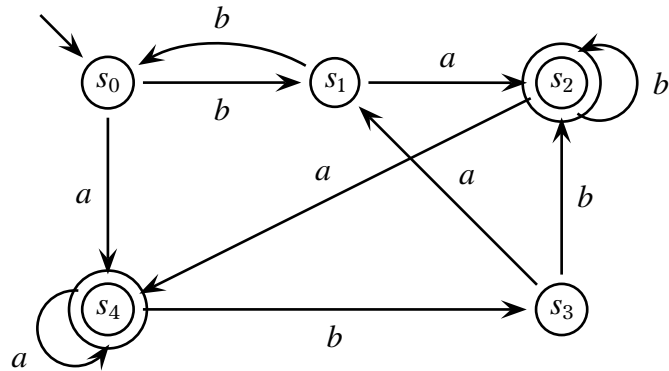
(ii) Να εξετασθεί αν το αυτόματο αυτό αναγνωρίζει τις λέξεις:

$w_1 = abababab$, $w_2 = baaabbabaaab$ και $w_3 = baabbaabaa$.

(iii) Έστω u μια λέξη που αποτελείται από m σε πλήθος a και v μια λέξη που αποτελείται από n σε πλήθος b ($m, n \in \mathbb{N}^*$). Να δειχθεί ότι το παραπάνω D -αυτόματο αναγνωρίζει τη λέξη $w = vu$. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις αναγνωρίζει τη λέξη $w' = uv$;

Απάντηση.

(i)



(ii) $f^*(w_1) = s_0 \notin T$ (άρα η w_1 δεν αναγνωρίζεται).

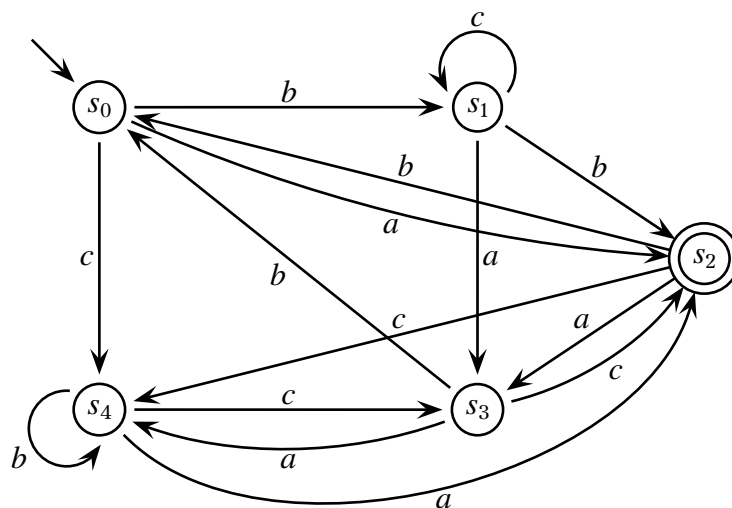
$f^*(w_2) = s_3 \notin T$ (άρα η w_2 δεν αναγνωρίζεται).

$f^*(w_3) = s_2 \in T$ (άρα η w_3 αναγνωρίζεται).

(iii) Αν ο n είναι άρτιος τότε $f^*(v) = s_0$, οπότε $f^*(w) = s_4 \in T$. Αν ο n είναι περιττός τότε $f^*(v) = s_1$, οπότε αν $m = 1$, τότε $f^*(w) = s_2 \in T$, ενώ αν $m \geq 2$ τότε $f^*(w) = s_4 \in T$. Αφού λοιπόν σε κάθε περίπτωση $f^*(w) \in T$, τότε η w αναγνωρίζεται από το αυτόματο. Εξάλλου, για κάθε m , $f^*(u) = s_4$. Αν $n = 1$, τότε $f^*(w') = s_3 \notin T$, ενώ για κάθε $n \geq 2$, $f^*(w') = s_2 \in T$. Άρα το αυτόματο αναγνωρίζει την w' για κάθε m, n , με $n \neq 1$. \square

Άσκηση 2.9.

(i) Να ορισθεί αναλυτικά η συνάρτηση f του D -αυτόματου $(S, \mathcal{E}, T, s_0, f)$ το οποίο περιγράφεται από το επόμενο γράφημα:

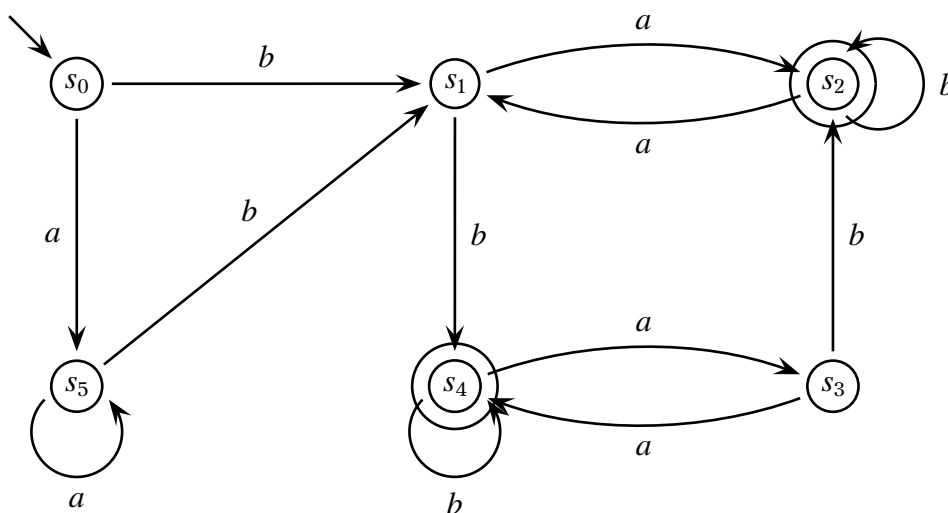


(ii) Να εξετασθεί αν το παραπάνω D -αυτόματο αναγνωρίζει τις λέξεις:

$w_1 = abcabcabc$, $w_2 = aaabbbccc$, $w_3 = baccabbabcc$.

(iii) Να δοθούν όλες οι δυνατές τιμές των $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε το παραπάνω αυτόματο να αναγνωρίζει τη λέξη $w = a^3b^\mu c^\nu$.

Άσκηση 2.10. Να ορισθούν αναλυτικά τα σύνολα S, \mathcal{E}, T και η συνάρτηση f του D -αυτόματου $(S, \mathcal{E}, T, s_0, f)$ που περιγράφεται από το επόμενο γράφημα:



Επίσης, να εξετασθεί αν το αυτόματο αυτό αναγνωρίζει τις λέξεις:

$w_1 = baaabbabbba$ και $w_2 = aaaabbaaaaba$.

Τέλος, να εξηγηθεί γιατί το αυτόματο αυτό δεν αναγνωρίζει οποιαδήποτε ζεύξη m_1m_2 , με $m_2 = baba$.

Κεφάλαιο 3

Βασικοί αριθμοί

Η απλή ακολουθία των **παραγοντικών** $n!$ και η διπλή ακολουθία των **συνδυασμών** $\binom{n}{k}$ εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα απαρίθμησης που μελετήσαμε στα Μαθηματικά των Υπολογιστών. Υπάρχουν και πολλές άλλες ακολουθίες αριθμών που εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα απαρίθμησης και κατασκευής αντικειμένων, οι οποίες λόγω της σημαντικότητάς τους είναι επώνυμες. Παραδείγματα τέτοιων επώνυμων ακολουθιών αποτελούν οι απλές ακολουθίες των αριθμών **Fibonacci**, **Catalan**, **Bell**, **Motzkin**, κ.α. και οι διπλές ακολουθίες των αριθμών **Stirling**, **Narayana**, κ.α. Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται ορισμένες από τις παραπάνω βασικές ακολουθίες.

Όπως φαίνεται στις επόμενες ενότητες οι ιδιότητες αυτών των αριθμών συνδέονται με την δομή των αντικειμένων που απαριθμούν. Επίσης, αρκετά νωρίς παρατηρήθηκε ότι όταν δύο συνδυαστικά αντικείμενα απαριθμούνται από την ίδια ακολουθία αριθμών συνήθως υπάρχει μια “δομική” συγγένεια μεταξύ τους. Παραδείγματος χάριν, τα αντικείμενα στα οποία εμφανίζονται οι αριθμοί **Catalan** μπορούν να ορισθούν αναδρομικά από δύο “μικρότερα” αντικείμενα του ίδιου τύπου με αυτά. Από το γεγονός αυτό προέκυψε η ανάγκη συστηματικής μελέτης και καταγραφής ορισμένων ακολουθιών αριθμών. Το 1973, ο **Sloane** εξέδωσε το βιβλίο **A Handbook of Integer Sequences**, το οποίο περιλάμβανε στοιχεία για περίπου 2300 ακολουθίες. Το 1995, σε συνεργασία με τον **Plouffe**, ακολούθησε νέα έκδοση υπό τον τίτλο **The Encyclopedia of Integer Sequences**, η οποία περιλάμβανε περίπου 5000 ακολουθίες. Η χρησιμότητα αυτών των βιβλίων έγινε φανερή από την αρχή (βλ. για παράδειγμα τις βιβλιοκριτικές των **Borwein** και **Corless** (J. M. Borwein and R. M. Corless, An Encyclopedia of Integer Sequences, *SIAM Review* **38** (1996), 333–337.), ή του **Guy** (R. Guy, The Encyclopedia of Integer Sequences, *Amer. Math. Monthly* **104**(2), 180–184). Από το 1996, τα βιβλία αυτά πέρασαν σε ηλεκτρονική μορφή διαθέσιμη στο διαδίκτυο, γνωστή ως **The Online Encyclopedia of Integer Sequences**

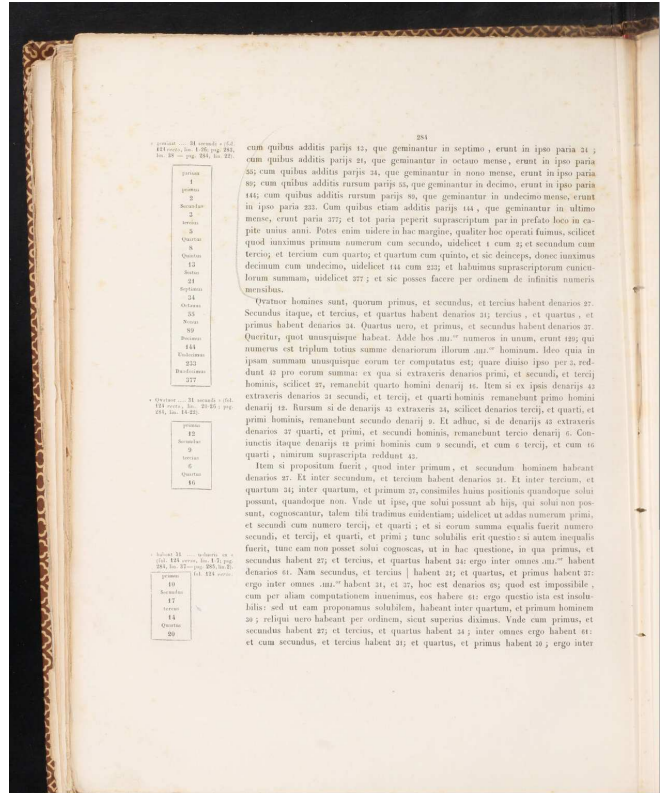
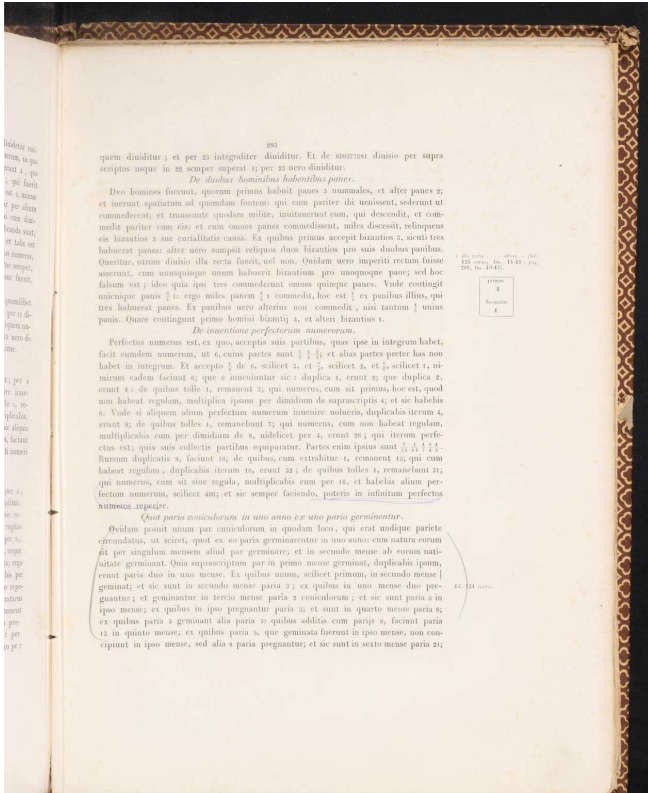
<https://oeis.org/>

η οποία σήμερα (2020) περιλαμβάνει πάνω από 330.000 ακολουθίες ακεραίων αριθμών, και ανανεώνεται καθημερινά από ερευνητές με νέες ακολουθίες και με νέα στοιχεία για τις υπάρχουσες ακολουθίες.

3.1 Αριθμοί Fibonacci

Ιστορικό. Οι αριθμοί Fibonacci πήραν το όνομά τους από τον Leonardo Pisano (Λεονάρντο της Πίζας) της οικογένειας Bonaci ο οποίος είναι γνωστός ως ο συγγραφέας του βιβλίου **Liber Abaci** (*Βιβλίο των υπολογισμών*) το οποίο εκδόθηκε στα Λατινικά το 1202 στην Ρώμη. Το όνομα Fibonacci ερμηνεύεται ως ο υιός του Bonaci.

Οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται για πρώτη φορά σε ένα πρόβλημα απαριθμησης κουνελιών στο κεφαλαίο 12 του βιβλίου Liber Abaci.¹



Σελίδες 283-4 του βιβλίου Liber Abaci

Το πρόβλημα των κουνελιών του Fibonacci. Σε ένα πληθυσμό κουνελιών κάθε ενήλικο ζευγάρι γεννάει ένα ζευγάρι κουνελιών κάθε μήνα. Τα κουνέλια ενηλικιώνονται τον δεύτερο μήνα οπότε μπορούν και αυτά να ζευγαρώσουν. Υποτίθεται ότι κανένα ζευγάρι κουνελιών δεν πεθαίνει. Αρχικά έχουμε $f_0 = 1$ ζευγάρι νεογέννητων κουνελιών. Να υπολογισθεί ο αριθμός f_n των ζευγαριών κουνελιών που θα ζουν τον n -οστό μήνα.

Τον 1ο μήνα θα υπάρχει $f_1 = 1$ ζευγάρι κουνελιών.

Τον 2ο μήνα θα υπάρχουν $f_2 = 1 + 1 = 2$ ζευγάρια κουνελιών.

Τον 3ο μήνα θα υπάρχουν $f_3 = 2 + 1 = 3$ ζευγάρια κουνελιών.

Τον 4ο μήνα θα υπάρχουν $f_4 = 3 + 2 = 5$ ζευγάρια κουνελιών.

Τον 5ο μήνα θα υπάρχουν $f_5 = 5 + 3 = 8$ ζευγάρια κουνελιών, κ.ο.κ.

Επαγωγικά εύκολα αποδεικνύεται ότι τον $(n + 1)$ -οστό μήνα θα υπάρχουν $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ζευγάρια κουνελιών.

Ο αριθμός f_n είναι ο n -στός αριθμός Fibonacci, ο οποίος ορίζεται με διάφορους τρόπους.

Στην επόμενη ενότητα δίδεται ένας πιο σύγχρονος τρόπος ορισμού των αριθμών Fibonacci βασισμένος στα υποσυνόλα του συνόλου $[n]$.

¹Πηγή εικόνων: <http://hldigital.lindahall.org/>

3.1.1 Υποσύνολα του $[n]$ χωρίς διαδοχικούς αριθμούς

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ θεωρούμε το σύνολο \mathcal{A}_n όλων των υποσυνόλων του $[n]$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς αριθμούς. Οι αριθμοί f_n με

$$f_0 = f_1 = 1 \text{ και } f_{n+1} = |\mathcal{A}_n|, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}^*$$

ονομάζονται **αριθμοί Fibonacci**.

Παραδείγματα

$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$, οπότε $f_2 = 2$.

$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, οπότε $f_3 = 3$.

$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, οπότε $f_4 = 5$.

$\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, οπότε $f_5 = 8$.

Πρόταση 3.1.1 (Αναγωγική εξίσωση αριθμών Fibonacci). Οι αριθμοί Fibonacci επαληθεύουν την παρακάτω αναγωγική εξίσωση

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ για } n \geq 1.$$

Απόδειξη. Το σύνολο \mathcal{A}_n διαμερίζεται σε δύο υποσύνολα, σε αυτό που τα σύνολά του **δεν περιέχουν το n** και σε αυτό που τα σύνολά του **περιέχουν το n**

(Για παράδειγμα, αν $n = 4$, τότε $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\} \cup \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$.)

Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1} \cup \mathcal{B}_n$$

όπου $\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{A}_n : n \in A\}$.

Κάθε $A \in \mathcal{B}_n$ δεν περιέχει το $n - 1$ οπότε ισχύει $A \in \mathcal{B}_n \Leftrightarrow A \setminus \{n\} \in \mathcal{A}_{n-2}$.

Άρα, $|\mathcal{B}_n| = |\mathcal{A}_{n-2}|$ και επομένως

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= |\mathcal{A}_n| = |\mathcal{A}_{n-1}| + |\mathcal{B}_n| \\ &= |\mathcal{A}_{n-1}| + |\mathcal{A}_{n-2}| \\ &= f_n + f_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Παρατήρησεις

- Χρησιμοποιώντας την αναγωγική σχέση των αριθμών Fibonacci μπορούμε να υπολογίσουμε μερικούς από τους πρώτους όρους της ακολουθίας f_n χωρίς να κατασκευάσουμε τα αντίστοιχα σύνολα \mathcal{A}_n .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Πρακτικά, ο υπολογισμός του n -οστού αριθμού Fibonacci γίνεται επαναληπτικά (αντί για αναδρομικά) προσθέτοντας κάθε φορά τους δύο προηγούμενους όρους της ακολουθίας, όπως στο επόμενο πρόγραμμα.

```
def Fibonacci(n):
    a = b = 1
    for i in range(1,n):
        t = b #store original b value
        b = a + b #new b value
        a = t #set a to original b value
    return b
```

2) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της προηγούμενης απόδειξης προκύπτει μια αναγωγική κατασκευή του \mathcal{A}_n από τα $\mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-2}$.

Παράδειγμα 3.1. Θα κατασκευασθεί το \mathcal{A}_4 από τα

$$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

και

$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}.$$

Λύση. Το \mathcal{A}_4 αποτελείται από τα στοιχεία του \mathcal{A}_3 , και τα στοιχεία του \mathcal{A}_2 προσθέτοντας σε κάθε ένα το 4, δηλαδή

$$\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}.$$

□

```
def GenFibonacci(n):
    if n==0: return [[]]
    if n==1: return [[],[1]]
    else:
        F = GenFibonacci(n-1)
        G = GenFibonacci(n-2)
        for s in G:
            s.append(n)
            F.append(s)
        return F
```

n = 6

F = GenFibonacci(n)

print("There exist", len(F), "subsets of [", n, "] having no consecutive elements:", F)

Output:

There exist 21 subsets of [6] having no consecutive elements: [[], [1], [2], [3], [1, 3], [4], [1, 4], [2, 4], [5], [1, 5], [2, 5], [3, 5], [1, 3, 5], [6], [1, 6], [2, 6], [3, 6], [1, 3, 6], [4, 6], [1, 4, 6], [2, 4, 6]]

Πρόταση 3.1.2. Για κάθε $A \in \mathcal{A}_n$ ισχύει ότι $|A| \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Απόδειξη. Αν $A \in \mathcal{A}_n$ ορίζουμε

$$B = \{x + 1 : x \in A\}.$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$B \subseteq [n + 1], A \cap B = \emptyset \text{ και } |A| = |B|.$$

Άρα επειδή $A \cup B \subseteq [n + 1]$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} |A \cup B| &\leq |[n + 1]| \\ |A| + |B| &\leq n + 1 \\ 2|A| &\leq n + 1 \\ |A| &\leq \frac{n + 1}{2} \\ |A| &\leq \left\lceil \frac{n + 1}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.1.3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

i) Ο αριθμός των m -υποσυνόλων του $[n]$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς αριθμούς ισούται με $\binom{n-m+1}{m}$.

ii)
$$f_{n+1} = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-m+1}{m}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $m = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ορίζουμε το σύνολο B_m ως εξής:

$$B_m = \{A \in \mathcal{A}_n : |A| = m\}.$$

Προφανώς τα B_m αποτελούν μια διαμέριση του \mathcal{A}_n , οπότε ισχύει ότι

$$f_{n+1} = |A_n| = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} |B_m|.$$

Έτσι, αρκεί να δειχθεί ότι

$$|B_m| = \binom{n-m+1}{m} \text{ για κάθε } m = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor.$$

Θα κατασκευάσουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του B_m και του συνόλου των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1} = n - 2m + 1$.

Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \in B_m$ όπου

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1} < a_m \leq n.$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 - 1, \\ x_i &= a_i - a_{i-1} - 2, \text{ για κάθε } i = 2, \dots, m \\ x_{m+1} &= n - a_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Τότε ισχύουν : $x_i \geq 0$ για κάθε $i \in [m+1]$ (άσκηση) και

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_m + x_{m+1} &= (a_1 - 1) + (a_2 - a_1 - 2) + \dots + (a_m - a_{m-1} - 2) + (n - a_m) \\ &= n - 1 - \underbrace{2 - 2 - \dots - 2}_{m-1 \text{ φορές}} \\ &= n - 2(m-1) - 1 \\ &= n - 2m + 1. \end{aligned}$$

Έτσι, κάθε σύνολο $A \in B_m$ αντιστοιχίζεται σε μια μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1} = n - 2m + 1. \tag{2}$$

Αντίστροφα, εύκολα αποδεικνύεται (άσκηση) ότι για κάθε μη αρνητική λύση

$$(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$$

της εξίσωσης (2), υπάρχουν μοναδικά $a_1, a_2, \dots, a_m \in [n]$ έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (1).

Κατόπιν τούτων, το σύνολο

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

ανήκει στο B_m και έτσι ορίζεται μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του συνόλου B_m και του συνόλου όλων των μη αρνητικών λύσεων της (2).

Επειδή το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της (2) είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ n-2m+1 \end{bmatrix} = \binom{m+1+n-2m+1-1}{n-2m+1} = \binom{n-m+1}{n-2m+1} = \binom{n-m+1}{m}$$

έπεται ότι

$$|B_m| = \binom{n-m+1}{m}.$$

Άρα,

$$f_{n+1} = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-m+1}{m}.$$

□

Πόσο γρήγορα αυξάνονται οι όροι της ακολουθίας Fibonacci; Στην επόμενη πρόταση δίνεται ένα άνω και κάτω φράγμα για το μέγεθος του n -στού όρου της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci.

Πρόταση 3.1.4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\phi^{n-1} \leq f_n \leq \phi^n$ όπου $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ο λόγος της χρυσής τομής).

Απόδειξη. Υπενθυμίζεται ότι $\phi^2 = \phi + 1$. (Πράγματι, $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$.)

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς το δείκτη n .

Για $n = 0$ ισχύει ότι $f_0 = 1 \leq 1 = \phi^0$ και $f_0 = 1 \geq \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \phi^{-1}$ και για $n = 1$ ισχύει ότι $f_1 = 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi^1$ και $f_1 = 1 \geq 1 = \phi^0$, άρα η πρόταση ισχύει για $n = 0, 1$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό μικρότερο του n , όπου $n \geq 3$. Θα δειχθεί ότι η πρόταση για ισχύει για το n .

Ισχύει ότι

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής $\phi^{n-2} \leq f_{n-1} \leq \phi^{n-1}$ και $\phi^{n-3} \leq f_{n-2} \leq \phi^{n-2}$, άρα

$$\begin{aligned} \phi^{n-2} + \phi^{n-3} &\leq f_n \leq \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \Leftrightarrow \\ \phi^{n-3}(\phi + 1) &\leq f_n \leq \phi^{n-2}(\phi + 1) \Leftrightarrow \\ \phi^{n-3}\phi^2 &\leq f_n \leq \phi^{n-2}\phi^2 = \phi^n \Leftrightarrow \\ \phi^{n-1} &\leq f_n \leq \phi^n. \end{aligned}$$

Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

□

3.1.2 Το θεώρημα Zeckendorf

Είναι γνωστό ότι κάθε φυσικός αριθμός n εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2. Αν 2^k είναι η μέγιστη δύναμη του 2 που δεν ξεπερνά το n , τότε υπάρχουν μοναδικά $b_k, b_{k-1}, \dots, b_2, b_1, b_0 \in \{0, 1\}$ έτσι ώστε

$$n = b_k 2^k + b_{k-1} 2^{k-1} + \dots + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0.$$

Η ακολουθία $b_k, b_{k-1}, \dots, b_2, b_1, b_0$ ορίζει τη γνωστή αναπαράσταση του n ως τον δυαδικό αριθμό $b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1 b_0$.

Για παράδειγμα, ο αριθμός 53 εκφράζεται ως άθροισμα των δυνάμεων του 2 ως εξής: Ο μεγαλύτερος 2^k που δεν ξεπερνά το 53 είναι το $2^5 = 32$, οπότε

$$\begin{aligned} 53 &= 32 + 16 + 4 + 1 \\ &= 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

επομένως η δυαδική αναπαράσταση του 53 είναι ο δυαδικός αριθμός 1 1 0 1 0 0 1.

Αντίστροφα, η δυαδική λέξη 100101_2 αναπαριστά τον φυσικό αριθμό

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 4 + 1 = 37.$$

Στην ενότητα αυτή θα δούμε ότι υπάρχει αντίστοιχη μοναδική έκφραση που χρησιμοποιεί την ακολουθία των αριθμών Fibonacci, αντί για την ακολουθία των δυνάμεων του 2.

Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.1.5. Έστω A ένα σύνολο διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci (που δεν περιέχει το f_0). Αν ο μέγιστος όρος του A είναι το f_n , τότε το άθροισμα των στοιχείων του A είναι μικρότερο από f_{n+1} .

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το δείκτη n του μέγιστου όρου.

Για $n = 1$, έχουμε $A = \{f_1\}$ επομένως το άθροισμα των στοιχείων του A ισούται με $f_1 = 1 < 2 = f_2$, άρα η πρόταση ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε δείκτη μικρότερο του n , όπου $n \geq 2$. Θα δειχθεί ότι ισχύει και για το n .

Έστω f_n ο μέγιστος όρος του A . Τότε ο αμέσως μικρότερος όρος A (αν υπάρχει) είναι ο f_{n-2} , επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής το άθροισμα των στοιχείων του $A \setminus \{f_n\}$ είναι μικρότερο από f_{n-1} , επομένως το άθροισμα των στοιχείων του A είναι μικρότερο από $f_{n-1} + f_n = f_{n+1}$. Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. □

Πρόταση 3.1.6 (Θεώρημα Zeckendorf). Κάθε θετικός ακέραιος n μπορεί να εκφραστεί, κατά μοναδικό τρόπο, ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci f_k , όπου $k \geq 1$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο άθροισμα και στη συνέχεια, με τη βοήθεια του προηγούμενου λήμματος, θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό.

Για την ύπαρξη θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το n .

Για $n = 1$ έχουμε ότι $1 = f_1$, και για $n = 2$ έχουμε ότι $2 = f_2$, άρα η πρόταση ισχύει για $n = 1, 2$.

Έστω ότι κάθε ακέραιος αριθμός μικρότερος του n , όπου $n \geq 3$, εκφράζεται ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci. Θα δειχθεί ότι και ο n μπορεί να εκφραστεί με τον αυτόν τον τρόπο.

Πράγματι, έστω f_k ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το n .

Αν $f_k = n$, τότε ο n εκφράζεται χρησιμοποιώντας τον αριθμό f_k .

Αν $f_k < n$, τότε $n = f_k + (n - f_k)$. Ισχύει ότι $n - f_k < f_{k-1}$, αλλιώς αν $n - f_k \geq f_{k-1}$ τότε $n \geq f_k + f_{k-1} = f_{k+1}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το f_k είναι ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το n .

Από την υπόθεση της επαγωγής ο αριθμός $n - f_k$ εκφράζεται ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci (που δεν περιέχει τον αριθμό f_{k-1}). Επομένως, ο αριθμός n εκφράζεται ως άθροισμα του f_k και του αντίστοιχου αθροίσματος για τον $n - f_k$. Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι για κάθε n το άθροισμα αυτό είναι μοναδικό.

Έστω n ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ο οποίος εκφράζεται με τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci. Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος αριθμός n . Προφανώς $n > 3$.

Έστω f_k ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το n . Επειδή $n > 3$, έπεται ότι $f_k \geq 1$.

Παρατηρούμε ότι η έκφραση του n ως άθροισμα πρέπει να περιέχει το f_k . Πράγματι, αν ο μέγιστος όρος του αθροίσματος είναι το f_{k-1} τότε από το προηγούμενο λήμμα το άθροισμα θα είναι μικρότερο του f_k , άρα μικρότερο του n , το οποίο είναι άτοπο.

Αν $f_k = n$, η αναπαράσταση είναι μοναδική.

Αν $f_k < n$, τότε $n = f_k + (n - f_k)$. Όμως, επειδή $n - f_k < n$ έπεται ότι υπάρχει μοναδική αναπαράσταση του $(n - f_k)$ ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci, άρα η αναπαράσταση του n είναι και πάλι μοναδική.

Επομένως, δεν υπάρχει αριθμός n που εκφράζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα με αυτές τις ιδιότητες, άρα η αναπαράσταση είναι μοναδική για κάθε n . \square

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αν f_k είναι ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το n , τότε υπάρχουν μοναδικά $b_k, b_{k-1}, \dots, b_2, b_1 \in \{0, 1\}$ έτσι ώστε

$$n = b_k f_k + b_{k-1} f_{k-1} + \dots + b_2 f_2 + b_1 f_1,$$

όπου $b_i \cdot b_{i+1} = 0$ για κάθε $i \in [k-1]$ (δηλαδή για κάθε $i \in [k-1]$ ένα τουλάχιστον από τα b_i, b_{i+1} είναι 0).

Η ακολουθία $b_k, b_{k-1}, \dots, b_2, b_1$ ορίζει μια νέα αναπαράσταση του φυσικού αριθμού n ως τον δυαδικό αριθμό $b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1$, ο οποίος έχει την ιδιότητα ότι δεν περιέχει δύο διαδοχικά ψηφία ίσα με 1.

Για παράδειγμα, ο αριθμός 53 εκφράζεται με τον τρόπο αυτό ως εξής:

$$\begin{aligned} 53 &= 34 + 13 + 5 + 1 \\ &= f_8 + f_6 + f_4 + f_1 \\ &= 1 \cdot f_8 + 0 \cdot f_7 + 1 \cdot f_6 + 0 \cdot f_5 + 1 \cdot f_4 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_2 + 1 \cdot f_1. \end{aligned}$$

και μπορεί να κωδικοποιηθεί από τη δυαδική λέξη 1 0 1 0 1 0 0 1 (η οποία δεν περιέχει δύο διαδοχικά ψηφία της ίσα με 1).

Αντίστροφα, η δυαδική λέξη 1 0 0 1 0 0 1 αναπαριστά τον φυσικό αριθμό

$$1 \cdot f_7 + 0 \cdot f_6 + 0 \cdot f_5 + 1 \cdot f_4 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_2 + 1 \cdot f_1 = 21 + 5 + 1 = 27.$$

Στην αναπαράσταση αυτή επιτρέπονται οι δυαδικές λέξεις να αρχίζουν και με 0, έτσι η δυαδική λέξη 0 0 1 0 0 1 0 1 αναπαριστά και πάλι τον αριθμό 27.

Συμφωνούμε ότι ο αριθμός 0 αναπαρίσταται από τη λέξη 0 0 \dots 0 0.

Η δυαδική λέξη 1 0 0 1 1 0 1 δεν θεωρείται αποδεκτή για αυτήν την αναπαράσταση διότι περιέχει δύο διαδοχικά ψηφία ίσα με 1.

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.5 ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός που αναπαρίσταται από μια δυαδική λέξη μήκους k ισούται με $f_{k+1} - 1$, ενώ στην κλασική αναπαράσταση των δυαδικών λέξεων ο αντίστοιχος μέγιστος αριθμός είναι ο $2^k - 1$.

Παραδείγματα

Κάθε αριθμός από 1 έως 20 μπορεί να εκφραστεί μοναδικά ως άθροισμα κάποιων από τους όρους $f_6 = 13$, $f_5 = 8$, $f_4 = 5$, $f_3 = 3$, $f_2 = 2$ και $f_1 = 1$. Ακολουθούν οι εκφράσεις καθώς και οι αντίστοιχες δυαδικές λέξεις μήκους 6 για κάθε έκφραση.

$1 = f_1$	000001	$2 = f_2$	000010
$3 = f_3$	000100	$4 = 3 + 1 = f_3 + f_1$	000101
$5 = f_4$	001000	$6 = 5 + 1 = f_4 + f_1$	001001
$7 = f_4 + f_2$	001010	$8 = f_5$	010000
$9 = 8 + 1 = f_5 + f_1$	010001	$10 = 8 + 2 = f_5 + f_2$	010010
$11 = 8 + 3 = f_5 + f_3$	010100	$12 = 8 + 3 + 1 = f_5 + f_3 + f_1$	010101
$13 = f_6$	100000	$14 = 13 + 1 = f_6 + f_1$	100001
$15 = 13 + 2 = f_6 + f_2$	100010	$16 = 13 + 3 = f_6 + f_3$	100100
$17 = 13 + 3 + 1 = f_6 + f_3 + f_1$	100101	$18 = 13 + 5 = f_6 + f_4$	101000
$19 = 13 + 5 + 1 = f_6 + f_4 + f_1$	101001	$20 = 13 + 5 + 2 = f_6 + f_4 + f_2$	101010

Μια υλοποίηση για εύρεση της αναπαράστασης ενός φυσικού αριθμού ως άθροισμα μη διαδοχικών αριθμών Fibonacci δίδεται στο επόμενο πρόγραμμα:

```
def Zeckendorf(n):
    FiboList = []
    BinaryRepresentation = []
    FiboRepresentation = []
    a = b = 1
    #Create a list of all Fibonacci numbers
    #less than or equal to n
    while(b <= n):
        FiboList.append(b)
        t = b #store original b value
        b = a + b #new b value
        a = t #set a to original b value    return b
    #Using this list compute the required
    #representation
    while(len(FiboList) > 0):
        x = FiboList.pop()
        if(n >= x):
            BinaryRepresentation.append(1)
            FiboRepresentation.append(x)
            n -= x
        else:
            BinaryRepresentation.append(0)
    return BinaryRepresentation, FiboRepresentation
```

```
n = 20
```

```
print("The representation of",n,"in Fibonacci number system is:",Zeckendorf(n))
```

Output:

```
The representation of 20 in Fibonacci number system is: ([1, 0, 1, 0, 1, 0], [13, 5, 2])
```

3.2 Αριθμοί Stirling

3.2.1 Αριθμοί Stirling πρώτου είδους

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και το παραγοντικό πολυώνυμο

$$F_n(x) = x(x-1) \cdots (x-n+1).$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου αυτού ονομάζονται **αριθμοί Stirling πρώτου είδους** και συμβολίζονται με $S(n, k)$.

Δηλαδή ισχύει ότι

$$F_n(x) = S(n, n)x^n + S(n, n-1)x^{n-1} + \cdots + S(n, 1)x + S(n, 0) = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k.$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$S(n, k) = 0 \text{ όταν } k > n,$$

$$S(n, n) = 1 \text{ και } S(n, 0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Παραδείγματα 3.1.

(1) $F_1(x) = x.$

Άρα, $S(1, 1) = 1.$

(2) $F_2(x) = x(x-1) = x^2 - x.$

Άρα, $S(2, 2) = 1, S(2, 1) = -1.$

(3) $F_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x.$

Άρα, $S(3, 3) = 1, S(3, 2) = -3, S(3, 1) = 2.$

(4) $F_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$

$= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$

Άρα, $S(4, 4) = 1, S(4, 3) = -6, S(4, 2) = 11, S(4, 1) = -6.$

(5) $F_5(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x.$

Άρα, $S(5, 5) = 1, S(5, 4) = -10, S(5, 3) = 35, S(5, 2) = -50, S(5, 1) = 24.$

Αναγωγικές εξισώσεις για τους αριθμούς Stirling πρώτου είδους

Πρόταση 3.2.1 (Τριγωνική αναγωγική εξίσωση). *Ισχύει ότι*

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) - (n-1)S(n-1, k)$$

για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. Ισχύουν ισοδύναμα οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 F_n(x) &= x(x-1) \cdots (x-n+2)(x-n+1) \\
 F_n(x) &= F_{n-1}(x)(x-n+1) \\
 \sum_{k=0}^n S(n,k)x^k &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)x^k \right) (x-n+1) \\
 \sum_{k=0}^n S(n,k)x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)x^{k+1} - (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)x^k \\
 \sum_{k=1}^n S(n,k)x^k &= \sum_{k=1}^n S(n-1,k-1)x^k - (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)x^k \\
 \sum_{k=1}^n S(n,k)x^k &= \sum_{k=1}^n \left[S(n-1,k-1) - (n-1)S(n-1,k) \right] x^k
 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) - (n-1)S(n-1,k). \quad \square$$

Παράδειγμα: $S(5,3) = S(4,2) - 4 \cdot S(4,3) = 11 - 4(-6) = 35$.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική αναγωγική σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τις αρχικές τιμές της διπλής ακολουθίας των αριθμών Stirling πρώτου είδους.

Αριθμοί $S(n,k)$ για $1 \leq k \leq n \leq 6$.

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	-1	1				
3	2	-3	1			
4	-6	11	-6	1		
5	24	-50	35	-10	1	
6	-120	274	-225	85	-15	1

Πρόταση 3.2.2 (Κατακόρυφη αναγωγική εξίσωση).

$$S(n+1, k+1) = \sum_{\nu=k}^n (-1)^{n-\nu} F_{n-\nu}(n) S(\nu, k)$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Ισχύουν ισοδύναμα οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1}(x) &= x(x-1) \cdots (x-(n+1)+1) \\
 F_{n+1}(x) &= x(x-1) \cdots ((x-1)-n+1) \\
 F_{n+1}(x) &= xF_n(x-1) \\
 \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1, k)x^k &= xF_n(x-1) \\
 \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1, k)x^{k-1} &= F_n(x-1)
 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα,

$$F_n(x-1) = \sum_{k=0}^n S(n+1, k+1)x^k. \quad (1)$$

Από τον τύπο του Vandermonde προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F_n(x-1) &= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} F_{\nu}(x) F_{n-\nu}(-1) \\ &= \sum_{\nu=0}^n F_{\nu}(x) \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} (-1)(-2)\cdots(-1-(n-\nu)+1) \\ &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \frac{n!}{\nu!} F_{\nu}(x) \\ &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} n(n-1)\cdots(\nu+1) F_{\nu}(x) \\ &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} n(n-1)\cdots(n-(n-\nu)+1) F_{\nu}(x) \\ &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} F_{n-\nu}(n) \left(\sum_{k=0}^{\nu} S(\nu, k)x^k \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{n-\nu} F_{n-\nu}(n) S(\nu, k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=k}^n (-1)^{n-\nu} F_{n-\nu}(n) S(\nu, k)x^k. \end{aligned}$$

Άρα,

$$F_n(x-1) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\nu=k}^n (-1)^{n-\nu} F_{n-\nu}(n) S(\nu, k) \right) x^k. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

$$\sum_{k=0}^n S(n+1, k+1)x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\nu=k}^n (-1)^{n-\nu} F_{n-\nu}(n) S(\nu, k) \right) x^k$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα,

$$S(n+1, k+1) = \sum_{\nu=k}^n (-1)^{n-\nu} F_{n-\nu}(n) S(\nu, k). \quad \square$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} S(5, 3) &= \sum_{\nu=2}^4 (-1)^{4-\nu} F_{4-\nu}(4) S(\nu, 2) \\ &= F_2(4)S(2, 2) - F_1(4)S(3, 2) + F_0(4)S(4, 2) \\ &= 12 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 11 = 35. \end{aligned}$$

Πρόταση 3.2.3 (Οριζόντια αναγωγική εξίσωση). *Ισχύει ότι*

$$S(n+1, k+1) = \sum_{v=k}^n (-1)^{v-k} \binom{v}{k} S(n, v).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} S(5, 3) &= \sum_{v=2}^4 (-1)^{v-2} \binom{v}{2} S(4, v) \\ &= \binom{2}{2} S(4, 2) - \binom{3}{2} S(4, 3) + \binom{4}{2} S(4, 4) \\ &= 11 - 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 1 = 35. \end{aligned}$$

3.2.2 Αριθμοί Stirling δευτέρου είδους

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού $p(x)$ βαθμού n γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των παραγοντικών πολυωνύμων $F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x)$.

Οι συντελεστές του $p(x) = x^n$ στο ανάπτυγμα αυτό ονομάζονται **αριθμοί Stirling δευτέρου είδους** και συμβολίζονται με $\bar{S}(n, k)$. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$x^n = \sum_{k=0}^n \bar{S}(n, k) F_k(x).$$

Προφανώς, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \bar{S}(n, k) &= 0, \text{ όταν } k > n, \\ \bar{S}(n, 1) &= \bar{S}(n, n) = 1 \text{ και } \bar{S}(n, 0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Παραδείγματα 3.2. (1) $x = F_1(x)$.

Άρα, $\bar{S}(1, 1) = 1$.

(2) $x^2 = F_2(x) + F_1(x)$.

Άρα, $\bar{S}(2, 2) = 1, \bar{S}(2, 1) = 1$.

(3) $x^3 = F_3(x) + 3F_2(x) + F_1(x)$,

Άρα, $\bar{S}(3, 3) = 1, \bar{S}(3, 2) = 3, \bar{S}(3, 1) = 1$.

(4) $x^4 = F_4(x) + 6F_3(x) + 7F_2(x) + F_1(x)$.

Άρα, $\bar{S}(4, 4) = 1, \bar{S}(4, 3) = 6, \bar{S}(4, 2) = 7, \bar{S}(4, 1) = 1$.

(5) $x^5 = F_5(x) + 10F_4(x) + 25F_3(x) + 15F_2(x) + F_1(x)$.

Άρα, $\bar{S}(5, 5) = 1, \bar{S}(5, 4) = 10, \bar{S}(5, 3) = 25, \bar{S}(5, 2) = 15, \bar{S}(5, 1) = 1$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gregory

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k p(0)}{k!} F_k(x)$$

για το $p(x) = x^n$, προκύπτει ότι

$$\bar{S}(n, k) = \frac{(\Delta^k x^n)(0)}{k!}$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα: Ζητείται το $\bar{S}(6, 4)$.

x	x^6	Δx^6	$\Delta^2 x^6$	$\Delta^3 x^6$	$\Delta^4 x^6$
4	4096				
3	729	3367			
2	64	665	2702		
1	1	63	602	2100	
0	0	1	62	540	1560

$$\bar{S}(6, 4) = \frac{(\Delta^4 x^6)(0)}{4!} = \frac{1560}{24} = 65.$$

Αναγωγικές εξισώσεις για τους αριθμούς Stirling δευτέρου είδους

Πρόταση 3.2.4 (Τριγωνική αναγωγική εξίσωση). *Ισχύει ότι*

$$\overline{S}(n, k) = \overline{S}(n - 1, k - 1) + k\overline{S}(n - 1, k)$$

για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. Ισχύουν ισοδύναμα οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} x^n &= x x^{n-1} \\ \sum_{k=0}^n \overline{S}(n, k) F_k(x) &= x \sum_{k=0}^{n-1} \overline{S}(n - 1, k) F_k(x) \\ \sum_{k=0}^n \overline{S}(n, k) F_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{S}(n - 1, k) (F_{k+1}(x) + kF_k(x)) \end{aligned}$$

(αφού $F_{k+1}(x) = x(x - 1) \cdots (x - k + 1)(x - k) = (x - k)F_k(x) = xF_k(x) - kF_k(x)$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \overline{S}(n, k) F_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{S}(n - 1, k) F_{k+1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} k\overline{S}(n - 1, k) F_k(x) \\ \sum_{k=1}^n \overline{S}(n, k) F_k(x) &= \sum_{k=1}^n \overline{S}(n - 1, k - 1) F_k(x) + \sum_{k=1}^n k\overline{S}(n - 1, k) F_k(x) \\ \sum_{k=1}^n \overline{S}(n, k) F_k(x) &= \sum_{k=1}^n (\overline{S}(n - 1, k - 1) + k\overline{S}(n - 1, k)) F_k(x) \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$\overline{S}(n, k) = \overline{S}(n - 1, k - 1) + k\overline{S}(n - 1, k).$$

για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$. □

Παράδειγμα:

$$\overline{S}(6, 4) = \overline{S}(5, 3) + 4\overline{S}(5, 4) = 25 + 4 \cdot 10 = 65.$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική αναγωγική σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τις αρχικές τιμές της διπλής ακολουθίας των αριθμών Stirling δευτέρου είδους.

Αριθμοί $\overline{S}(n, k)$ για $1 \leq k \leq n \leq 7$.

n/k	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

Πρόταση 3.2.5 (Κατακόρυφη αναγωγική εξίσωση). *Ισχύει ότι*

$$\overline{S}(n+1, k+1) = \sum_{\nu=k}^n \binom{n}{\nu} \overline{S}(\nu, k)$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Επειδή $x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \overline{S}(n+1, k) F_k(x)$.

Θετώντας $x+1$ αντί x προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (x+1)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \overline{S}(n+1, k) F_k(x+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \overline{S}(n+1, k) F_k(x+1) \\ &= \sum_{k=0}^n \overline{S}(n+1, k+1) F_{k+1}(x+1) \\ &= \sum_{k=0}^n \overline{S}(n+1, k+1) (x+1) F_k(x) \end{aligned}$$

(αφού $F_{k+1}(x+1) = (x+1)x \cdots (x+1 - (k+1) + 1) = (x+1)x \cdots (x-k+1) = (x+1)F_k(x)$).

Άρα,

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \overline{S}(n+1, k+1) F_k(x). \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Διωνύμου του Νεύτωνα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (x+1)^n &= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \left(\sum_{k=0}^{\nu} \overline{S}(\nu, k) F_k(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\nu=k}^n \binom{n}{\nu} \overline{S}(\nu, k) \right) F_k(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\overline{S}(n+1, k+1) = \sum_{\nu=k}^n \binom{n}{\nu} \overline{S}(\nu, k). \quad \square$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \overline{S}(6, 4) &= \sum_{\nu=3}^5 \binom{5}{\nu} \overline{S}(\nu, 3) \\ &= \binom{5}{3} \overline{S}(3, 3) + \binom{5}{4} \overline{S}(4, 3) + \binom{5}{5} \overline{S}(5, 3) \\ &= 10 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 25 \\ &= 65. \end{aligned}$$

Πρόταση 3.2.6 (Οριζόντια αναγωγική εξίσωση). *Ισχύει ότι*

$$\bar{S}(n, k) = \sum_{\nu=k}^n (-1)^{\nu-k} F_{\nu-k}(\nu) \bar{S}(n+1, \nu+1).$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=k}^n (-1)^{\nu-k} F_{\nu-k}(\nu) \bar{S}(n+1, \nu+1) &= \sum_{\nu=k}^n (-1)^{\nu-k} F_{\nu-k}(\nu) \left(\bar{S}(n, \nu) + (\nu+1) \bar{S}(n, \nu+1) \right) \\ &= \sum_{\nu=k}^n (-1)^{\nu-k} F_{\nu-k}(\nu) \bar{S}(n, \nu) + \sum_{\nu=k}^{n-1} (-1)^{\nu-k} F_{\nu+1-k}(\nu+1) \bar{S}(n, \nu+1) \end{aligned}$$

(αφού,

$$\begin{aligned} (\nu+1)F_{\nu-k}(\nu) &= (\nu+1)\nu(\nu-1) \cdots (\nu-(\nu-k)+1) \\ &= (\nu+1)\nu(\nu-1) \cdots (\nu+1-(\nu+1-k)+1) \\ &= F_{\nu+1-k}(\nu+1) \\ &= \sum_{\nu=k}^n (-1)^{\nu-k} F_{\nu-k}(\nu) \bar{S}(n, \nu) + \sum_{\nu=k+1}^n (-1)^{\nu-k-1} F_{\nu-k}(\nu) \bar{S}(n, \nu) \\ &= (-1)^0 F_0(k) \bar{S}(n, k) \\ &= \bar{S}(n, k). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \bar{S}(6, 4) &= \sum_{\nu=4}^6 (-1)^{\nu-4} F_{\nu-4}(\nu) \bar{S}(7, \nu+1) \\ &= (-1)^0 F_0(4) \bar{S}(7, 5) + (-1)^1 F_1(5) \bar{S}(7, 6) + (-1)^2 F_2(6) \bar{S}(7, 7) \\ &= 140 - 5 \cdot 21 + 6 \cdot 5 \cdot 1 \\ &= 65. \end{aligned}$$

3.2.3 Σχέσεις αριθμών Striling πρώτου και δευτέρου είδους

Πρόταση 3.2.7. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sum_{\nu=k}^n S(n, \nu) \bar{S}(\nu, k) = \delta_{n,k} \quad (1)$$

$$\sum_{\nu=k}^n \bar{S}(n, \nu) S(\nu, k) = \delta_{n,k} \quad (2)$$

όπου

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = n \\ 0, & \text{αν } k \neq n \end{cases}$$

είναι το δέλτα του Kronecker.

Παράδειγμα: Για $n = 6$ και $k = 3$,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=3}^6 S(6, \nu) S(\nu, 3) &= S(6, 3) \bar{S}(3, 3) + S(6, 4) \bar{S}(4, 3) + S(6, 5) \bar{S}(5, 3) + S(6, 6) \bar{S}(6, 3) \\ &= (-225) \cdot 1 + 85 \cdot 6 + (-15) \cdot 25 + 1 \cdot 90 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Απόδειξη του τύπου (1).

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{\nu=0}^n S(n, \nu) x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^n S(n, \nu) \left(\sum_{k=0}^{\nu} \bar{S}(\nu, k) F_k(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\nu=k}^n S(n, \nu) \bar{S}(\nu, k) \right) F_k(x) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{\nu=k}^n S(n, \nu) \bar{S}(\nu, k) = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = n \\ 0, & \text{αν } k \neq n \end{cases}$$

3.2.4 Εφαρμογή των αριθμών Stirling δευτέρου είδους

Διαμερίσεις συνόλου σε k υποσύνολα Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $k = 0, 1, \dots, n$ ορίζουμε $\mathcal{D}_{n,k}$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του συνόλου $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ σε k υποσύνολα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $E = [n]$.

Παράδειγμα: Για $n = 4$, $k = 2$ και $E = [4]$.

$$\mathcal{D}_{4,2} = \{12/34, 13/24, 14/23, 1/234, 2/134, 3/124, 4/123\}.$$

(Σημείωση: Με τον συμβολισμό $1/234$ αναπαριστούμε την διαμέριση του $[4]$ στα υποσύνολα $\{1\}$ και $\{2, 3, 4\}$.)

Άρα,

$$|\mathcal{D}_{4,2}| = 7 = \bar{S}(4, 2).$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$|\mathcal{D}_{n,n}| = |\mathcal{D}_{n,1}| = 1 \text{ και } |\mathcal{D}_{n,0}| = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Πρόταση 3.2.8. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = \bar{S}(n, k).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι τα $|\mathcal{D}_{n,k}|$ ικανοποιούν την τριγωνική αναγωγική εξίσωση των αριθμών Stirling δευτέρου είδους δηλαδή ότι

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = |\mathcal{D}_{n-1,k-1}| + k|\mathcal{D}_{n-1,k}|.$$

Η βασική ιδέα για την απόδειξη είναι ότι οι διαμερίσεις του $\mathcal{D}_{n,k}$ χωρίζονται

- σε αυτές που περιέχουν το μονοσύνολο $\{n\}$
- σε αυτές που το n ανήκει σε κάποιο υποσύνολο που περιέχει και άλλα στοιχεία.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathcal{A} = \{\pi \in \mathcal{D}_{n,k} : \{n\} \in \pi\},$$

$$\mathcal{B} = \{\pi \in \mathcal{D}_{n,k} : \{n\} \notin \pi\}.$$

Τότε τα \mathcal{A}, \mathcal{B} αποτελούν μια διαμέριση του $\mathcal{D}_{n,k}$ οπότε είναι

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|. \quad (3)$$

Επιπλέον αν σε κάθε διαμέριση π' του $[n-1]$ με $k-1$ σύνολα προσθέσουμε το $\{n\}$ προκύπτει μια διαμέριση του $E = [n]$ με k σύνολα που περιέχει το $\{n\}$, δηλαδή ανήκει στο \mathcal{A} .

Έτσι, ισχύει ότι

$$\mathcal{A} = \{\pi' \cup \{n\} : \pi' \in \mathcal{D}_{n-1,k-1}\}.$$

Άρα,

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{D}_{n-1,k-1}|. \quad (4)$$

Αν τώρα π' είναι μια διαμέριση του $[n-1]$ με k υποσύνολα μπορούμε να δημιουργήσουμε μια διαμέριση π του $E = [n]$ με k υποσύνολα προσθέτοντας τον αριθμό n σε **κάποιο** από τα k υποσύνολά του.

Επειδή υπάρχουν k δυνατές επιλογές, κάθε διαμέριση $\pi' \in \mathcal{D}_{n-1,k}$ γεννάει k το πλήθος διαφορετικές διαμερίσεις $\pi \in \mathcal{D}_{n,k}$ που δεν περιέχουν το $\{n\}$, οπότε ανήκουν στο \mathcal{B} . Έτσι, τελικά θα είναι

$$|\mathcal{B}| = k|\mathcal{D}_{n-1,k}|. \quad (5)$$

Από τις (3), (4) και (5) προκύπτει ότι

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = |\mathcal{D}_{n-1,k-1}| + k|\mathcal{D}_{n-1,k}|. \quad \square$$

Παράδειγμα: $E = [5]$, $k = 3$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{5,3} = \{ & 123/4/5, 124/3/5, 134/2/5, 234/1/5, 12/34/5, \\ & 13/24/5, 14/23/5, 125/3/4, 12/35/4, 12/3/45, \\ & 135/2/4, 13/25/4, 13/2/45, 145/2/3, 14/25/3, \\ & 14/2/35, 235/1/4, 23/15/4, 23/1/45, 245/1/3, \\ & 24/15/3, 24/1/35, 345/1/2, 34/15/2, 34/1/25\} \end{aligned}$$

\mathcal{A} : οι πρώτες 7.

\mathcal{B} οι υπόλοιπες.

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{D}_{4,2}|, |\mathcal{B}| = 3|\mathcal{D}_{4,3}|.$$

3.3 Αριθμοί Bell

Ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου E με n στοιχεία ονομάζεται **αριθμός Bell** και συμβολίζεται με B_n .

Συνήθως, επιλέγουμε για E με $|E| = n$, το σύνολο $[n]$.

Παραδείγματα

Οι διαμερίσεις του $[1]$ είναι η $\{1\}$, οπότε $B_1 = 1$.

Οι διαμερίσεις του $[2]$ είναι οι εξής: $\{1\}, \{2\}$ και $\{1, 2\}$, οπότε $B_2 = 2$.

Οι διαμερίσεις του $[3]$ είναι οι εξής:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \quad \{1, 2\}, \{3\} \quad \{1, 3\}, \{2\} \quad \{1\}, \{2, 3\} \quad \{1, 2, 3\},$$

οπότε $B_3 = 5$.

Επίσης θεωρούμε ότι το κενό σύνολο έχει μια (κενή) διαμέριση, οπότε $B_0 = 1$.

Προφανώς ισχύει ότι

$$B_n = \sum_{k=1}^n \bar{S}(n, k), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επιπλέον,

Πρόταση 3.3.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η αναγωγική εξίσωση

$$B_{n+1} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_{\nu} \text{ όπου } B_0 = 1.$$

Απόδειξη. Θα δοθούν δύο αποδείξεις, η πρώτη είναι συνδυαστική και η δεύτερη είναι αλγεβρική και χρησιμοποιεί την αναγωγική σχέση των αριθμών Stirling δευτέρου είδους.

(1ος τρόπος: Συνδυαστική απόδειξη.) Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι ότι οι διαμερίσεις του $[n+1]$ διαμερίζονται ως προς το μέγεθος του υποσυνόλου το οποίο περιέχει το στοιχείο $n+1$.

Έστω $\mathcal{A}_{n+1,k}$ το σύνολο των διαμερίσεων του $[n+1]$ στις οποίες το υποσύνολο που περιέχει το στοιχείο $n+1$ έχει μέγεθος k .

Τα σύνολα $\mathcal{A}_{n+1,1}, \mathcal{A}_{n+1,2}, \dots, \mathcal{A}_{n+1,n+1}$ αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου των διαμερίσεων του $[n+1]$.

Επομένως,

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} |\mathcal{A}_{n+1,k}|.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι ο αριθμός των διαμερίσεων του συνόλου $\mathcal{A}_{n+1,k}$ είναι ίσος με $\binom{n}{k-1} B_{n-k+1}$. Πράγματι, για κάθε διαμέριση του $\mathcal{A}_{n+1,k}$ υπάρχουν $\binom{n}{k-1}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα $k-1$ στοιχεία του $[n]$ που βρίσκονται στο ίδιο υποσύνολο με το $n+1$ και για τα υπόλοιπα $n-k+1$ στοιχεία του $[n]$ υπάρχουν B_{n-k+1} τρόποι καθορισμού των υπολοίπων υποσυνόλων της διαμέρισης. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι

$$|\mathcal{A}_{n+1,k}| = \binom{n}{k-1} B_{n-k+1}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n-k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} \stackrel{2}{=} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{n-\nu} B_{\nu} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_{\nu}.$$

²Θέτουμε $\nu = n - k$.

(2ος τρόπος: Αλγεβρική απόδειξη.)

$$\begin{aligned}
 B_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \bar{S}(n+1, k) = \sum_{k=0}^n \bar{S}(n+1, k+1) = \sum_{k=0}^n \sum_{v=k}^n \binom{n}{v} \bar{S}(v, k) \\
 &= \sum_{v=0}^n \sum_{k=0}^v \binom{n}{v} \bar{S}(v, k) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \left(\sum_{k=0}^v \bar{S}(v, k) \right) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} B_v
 \end{aligned}$$

□

Με τη βοήθεια της παραπάνω αναγωγικής εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε μερικούς από τους πρώτους όρους της ακολουθίας B_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4213597

Πρακτικά, ο υπολογισμός του n -οστού αριθμού Bell γίνεται επαναληπτικά αποθηκεύοντας κάθε φορά όλους τους προηγούμενους όρους της ακολουθίας, όπως στο επόμενο πρόγραμμα.

```

#used for computing bell(n)
def binomial(n, k):
    if not 0 <= k <= n:
        return 0
    b = 1
    for t in range(min(k, n-k)):
        b *= n
        b //= t+1
        n -= 1
    return b

#bellnums stores the previous values of bell(n)
#initially it contains the value bell(0) = 1
bellnums = [1]

# bell(n) = sum_{k=1}^{n-1} binom{n-1}{k-1} bell(n-k), n > 0
#           = sum_{k=1}^{n-1} binom{n-1}{n-k-1} bell(k), n > 0
# bell(0) = 1
def bell(n):
    #In order to find bell(n) we need to first
    #compute bell(1), bell(2), ... bell(n-1).
    #To avoid repetitions in computations
    #we will use the stored values of bellnums
    for j in range(1, n+1):
        #compute bell(j) from bell(0)...bell(j-1)
        #that are already computed in bellnums
        result = 0
        for k in range(j):
            result += (binomial(j-1, j-k-1)*bellnums[k])
        #append bell(j) in bellnums
        bellnums.append(result)
    return bellnums[-1]

n = 30
print("The ", n, "-th Bell number:", bell(n))
print("The computed list of all Bell numbers used for",
      "evaluating the result:", bellnums)

```

Output:

The 30 -th Bell number: 846749014511809332450147

The computed list of all Bell numbers used for evaluating the result: [1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, 10480142147, 82864869804, 682076806159, 5832742205057, 51724158235372, 474869816156751, 4506715738447323, 44152005855084346, 445958869294805289, 4638590332229999353, 49631246523618756274, 545717047936059989389, 6160539404599934652455, 71339801938860275191172, 846749014511809332450147]

Πράγματι, υπάρχουν 15 τρόποι να διαμερίσουμε το σύνολο [4]:

{1},{2},{3},{4} {1,2},{3},{4} {1,3},{2},{4} {1},{2,3},{4} {1,2,3},{4}
 {1},{2},{3,4} {1,2},{3,4} {1},{2,4},{3} {1,3},{2,4} {1,4},{2},{3}
 {1,4},{2,3} {1},{2,3,4} {1,3,4},{2} {1,2,4},{3} {1,2,3,4}

ή, με ισοδύναμη γραφή

1/2/3/4 12/3/4 13/2/4 1/23/4
 123/4 1/2/34 12/34 1/24/3
 13/24 14/2/3 14/23 1/234
 134/2 124/3 1234

(Σημείωση: Με τον συμβολισμό 1/234 αναπαριστούμε την διαμέριση του [4] στα υποσύνολα {1} και {2, 3, 4}.)

Σύμφωνα με τον D. Knuth ένας από τους βολικότερους τρόπους αναπαράστασης μιας διαμέρισης του [n] είναι από μια ακολουθία με περιορισμούς αύξησης (restricted growth string). Συγκεκριμένα, από μια πεπερασμένη ακολουθία $a_1 a_2 \dots a_n$ για την οποία

$$a_1 = 0 \text{ και } a_{j+1} \leq 1 + \max\{a_1, a_2, \dots, a_j\}, \text{ όπου } 1 \leq j < n$$

Η ιδέα είναι να θέσουμε $a_j = a_k$ αν τα j και k ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο της διαμέρισης και να επιλέξουμε το μικρότερο διαθέσιμο αριθμό για το a_j όταν το j είναι το ελάχιστο στοιχείο στο υποσύνολό του. Μια άλλη διατύπωση της ιδέας είναι ότι τα υποσύνολα της διαμέρισης αριθμούνται σε αύξουσα σειρά με βάση το ελάχιστο στοιχείο τους (αρχίζουμε την αρίθμηση από το 0) και για κάθε στοιχείο του [n] σημειώνουμε το υποσύνολο στο οποίο ανήκει. (Το 0 ανήκει πάντα στο πρώτο υποσύνολο.)

Με αυτή την κωδικοποίηση οι παραπάνω 15 διαφορετικές διαμερίσεις του [4] γράφονται αντίστοιχα ως εξής:

0123 0012 0102 0112
 0001 0122 0011 0121
 0101 0120 0110 0111
 0100 0010 0000

Χρησιμοποιώντας την κωδικοποίηση αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε τις διαμερίσεις του [n] με την βοήθεια της τεχνικής της ανάτρεξης.

```
#increase the "size" of solution
def grow_solution(D):
    global length
    if(length < n):
        D.append(0) #put the new element in the first block
        length += 1
        return True
    return False

#try the next available option
def next_solution(D):
    global length
    if(length == 1): return False
    currentc = D[length-1]
```

```

    if(currentc < 1 + max(D[0:length-1])):
        D[length-1] += 1 #move the last element in the next block
        return True
    return False

#backtrack to a previous option
def shrink_solution(D):
    global length
    if length > 1: #never change the first element of D
        D.pop() #remove the last element
        length -= 1
        return True
    return False

#initial construction
D = [0]
n = 4 #number of elements
length = 1 #instead of len(D)
#backtracking mechanism
state = 'grow'
counter = 0 #count solutions
while state != 'finished':
    if(length == n):
        print(D)
        counter += 1
    if state == 'grow':
        if(grow_solution(D)): state = 'grow'
        else: state = 'next'
    if state == 'next':
        if(next_solution(D)): state = 'grow'
        else: state = 'shrink'
    if state == 'shrink':
        if(shrink_solution(D)): state = 'next'
        else: break
print("Total number of partitions of [", n, "]:", counter)

```

Output:

```

[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 1, 1]
[0, 0, 1, 2]
[0, 1, 0, 0]
[0, 1, 0, 1]
[0, 1, 0, 2]

```

```

[0, 1, 1, 0]
[0, 1, 1, 1]
[0, 1, 1, 2]
[0, 1, 2, 0]
[0, 1, 2, 1]
[0, 1, 2, 2]
[0, 1, 2, 3]
Total number partitions of [ 4 ]: 15

```

3.4 Αριθμοί Catalan

3.4.1 Δυαδικά δένδρα

Υπενθυμίζεται ότι ένα δένδρο με ρίζα ονομάζεται **δυαδικό δένδρο** αν κάθε κόμβος του που δεν είναι φύλλο έχει είτε ένα αριστερό, είτε ένα δεξιό παιδί, είτε δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξιό).

Όπως ειπώθηκε στα δυαδικά δένδρα συμπεριλαμβάνεται και το κενό δυαδικό δένδρο, δηλαδή το δένδρο χωρίς κανένα κόμβο.

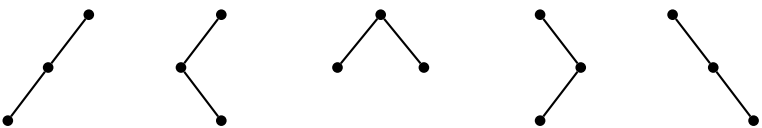
Έστω \mathcal{B}_n το σύνολο των δυαδικών δένδρων με n κόμβους και $\mathcal{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n$.

Παραδείγματα

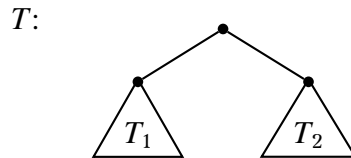
\mathcal{B}_0 : □ (κενό δυαδικό δένδρο) $|\mathcal{B}_0| = 1$

\mathcal{B}_1 : • $|\mathcal{B}_1| = 1$

\mathcal{B}_2 :  $|\mathcal{B}_2| = 2$

\mathcal{B}_3 :  $|\mathcal{B}_3| = 5$.

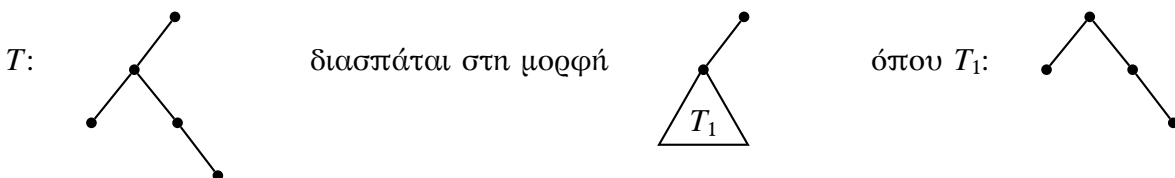
Κάθε μη κενό δυαδικό δένδρο T μπορεί να διασπασθεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή:



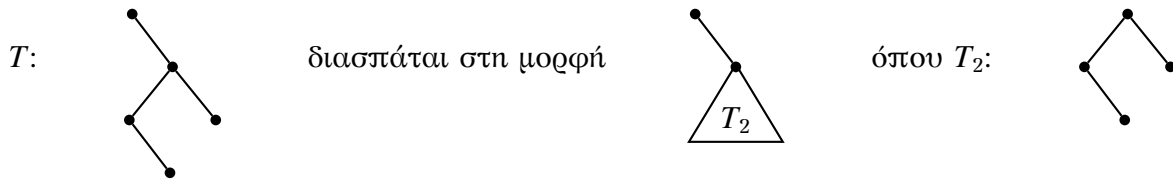
όπου T_1, T_2 είναι επίσης δυαδικά δένδρα (συμπεριλαμβανομένου και του κενού δυαδικού δένδρου), τα οποία ονομάζονται **αριστερό** (αντ. **δεξιό**) **υποδένδρο της ρίζας**. Στην περίπτωση όπου κάποιο από τα υποδένδρα της ρίζας είναι κενό τότε προφανώς δεν υπάρχει ο δεσμός που συνδέει τη ρίζα με τη ρίζα του αντίστοιχου υποδένδρου.

Παραδείγματα

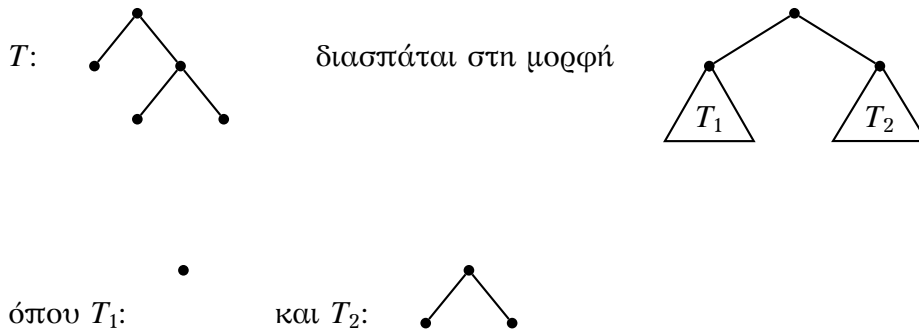
Το δένδρο



Το δένδρο

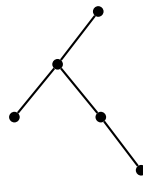


Το δένδρο

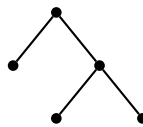


Έστω $\mathcal{B}_{n,k}$ το σύνολο όλων των δυαδικών δένδρων με n κόμβους στα οποία το αριστερό υπο-δένδρο της ρίζας περιέχει k κόμβους.

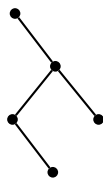
Για παράδειγμα το δένδρο



ανήκει στο σύνολο $\mathcal{B}_{5,4}$, το δένδρο



ανήκει στο σύνολο $\mathcal{B}_{5,1}$, το δένδρο



ανήκει στο σύνολο $\mathcal{B}_{5,0}$.

Προφανώς, επειδή κάθε μη κενό δυαδικό δένδρο T με n κόμβους ανήκει σε ένα μοναδικό σύνολο $\mathcal{B}_{n,k}$, τα σύνολα $\mathcal{B}_{n,0}, \mathcal{B}_{n,1}, \dots, \mathcal{B}_{n,n-1}$ αποτελούν μια διαμέριση του \mathcal{B}_n .

Επομένως, ισχύει ότι

$$|\mathcal{B}_n| = |\mathcal{B}_{n,0}| + |\mathcal{B}_{n,1}| + \dots + |\mathcal{B}_{n,n-1}| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{B}_{n,k}|, \text{ για κάθε } n \geq 1. \quad (1)$$

Επιπρόσθετα, κάθε δυαδικό δένδρο $T \in \mathcal{B}_{n,k}$ ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο της ρίζας T_1 και T_2 αντίστοιχα. Αν $T \in \mathcal{B}_{n,k}$ τότε $T_1 \in \mathcal{B}_k$ και $T_2 \in \mathcal{B}_{n-1-k}$.

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή

$$|\mathcal{B}_{n,k}| = |\mathcal{B}_k| |\mathcal{B}_{n-1-k}| \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

$$|\mathcal{B}_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{B}_k| |\mathcal{B}_{n-1-k}|, \text{ για κάθε } n \geq 1 \text{ και } |\mathcal{B}_0| = 1.$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται **τύπος του Segner**.

Έτσι,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1| &= \sum_{k=0}^0 |\mathcal{B}_k| |\mathcal{B}_{0-k}| = |\mathcal{B}_0| |\mathcal{B}_0| = 1 \cdot 1 = 1, \\ |\mathcal{B}_2| &= \sum_{k=0}^1 |\mathcal{B}_k| |\mathcal{B}_{1-k}| = |\mathcal{B}_0| |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_1| |\mathcal{B}_0| = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2, \\ |\mathcal{B}_3| &= \sum_{k=0}^2 |\mathcal{B}_k| |\mathcal{B}_{2-k}| = |\mathcal{B}_0| |\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_1| |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| |\mathcal{B}_0| = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5, \\ |\mathcal{B}_4| &= \sum_{k=0}^3 |\mathcal{B}_k| |\mathcal{B}_{3-k}| = |\mathcal{B}_0| |\mathcal{B}_3| + |\mathcal{B}_1| |\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_2| |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_3| |\mathcal{B}_0| \\ &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14. \end{aligned}$$

Η ακολουθία των αριθμών $|\mathcal{B}_n|$ ονομάζεται ακολουθία των **αριθμών Catalan** και συμβολίζεται με C_n .

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \text{ για κάθε } n \geq 1 \text{ και } C_0 = 1. \text{ (Τύπος του Segner)}$$

Μερικές από τις τιμές της ακολουθίας C_n δίδονται στον επόμενο πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Επομένως, για παράδειγμα, υπάρχουν 16796 δυαδικά δένδρα με 10 κόμβους.

Η ακολουθία C_n αυξάνει αρκετά γρήγορα, για παράδειγμα

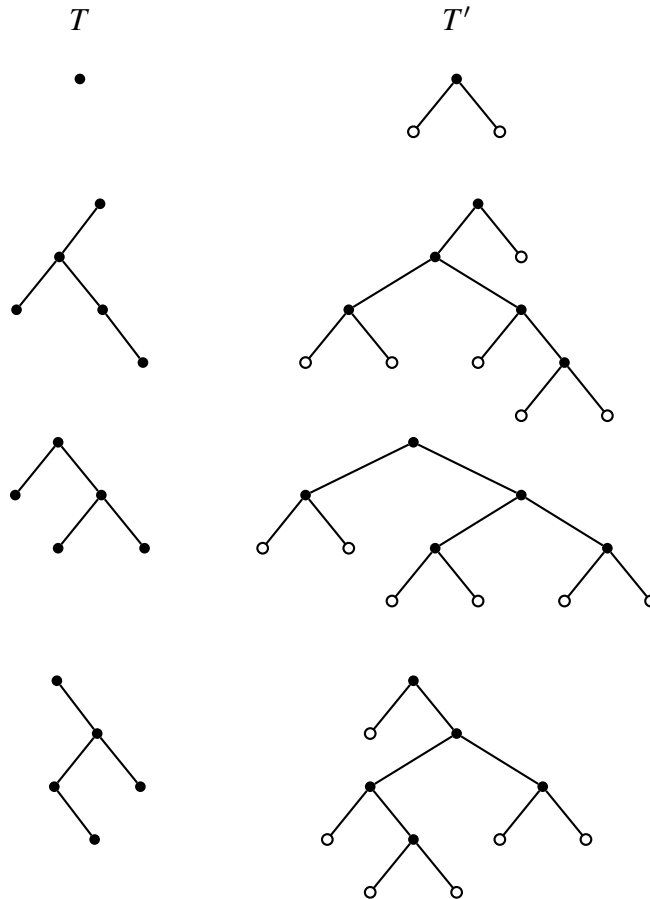
$$\begin{aligned} C_{15} &= 9\ 694\ 845 \\ C_{20} &= 6\ 564\ 120\ 420 \\ C_{25} &= 4\ 861\ 946\ 401\ 452 \\ C_{100} &= \underbrace{896 \dots 320}_{57 \text{ ψηφία}} \end{aligned}$$

έτσι, είναι ανέφικτη η κατασκευή όλων των δυαδικών δένδρων με περισσότερους από 25 κόμβους.

3.4.2 Λέξεις και μονοπάτια Dyck

Κάθε δυαδικό δένδρο T μπορεί να επεκταθεί κατά μοναδικό τρόπο σε ένα δυαδικό δένδρο T' (όπου κάθε κόμβος του έχει 0 ή 2 παιδιά) προσθέτωντας ένα αριστερό (αντ. δεξιό) παιδί σε κάθε κόμβο με δεξιό (αντ. αριστερό) παιδί, και δύο παιδιά σε κάθε φύλλο του T . Προφανώς, το δυαδικό δένδρο T μπορεί να προκύψει ξανά από το T' σβήνοντας όλα τα φύλλα του.

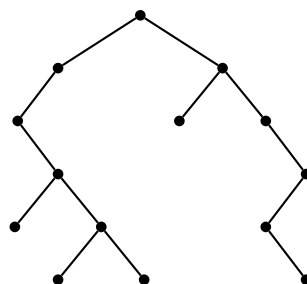
Παραδείγματα



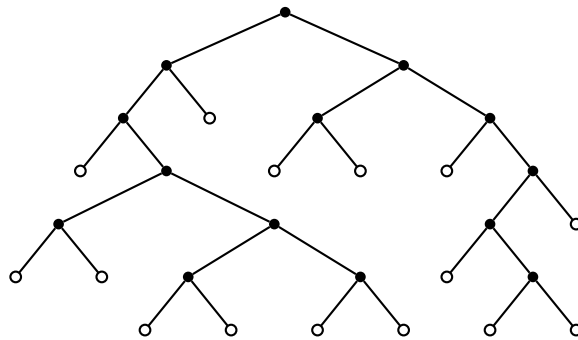
Κάθε δυαδικό δένδρο T με n κόμβους μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια δυαδική λέξη μήκους $2n$ ως εξής:

- (1) Επεκτείνουμε το δυαδικό δένδρο T στο δυαδικό δένδρο T'
- (2) Διασχίζουμε το δένδρο T' σε προδιάταξη και κάθε φορά που συναντάμε αριστερό παιδί σημειώνουμε 1, ενώ κάθε φορά που συναντάμε δεξιό παιδί σημειώνουμε 0.
- (3) Η κωδικοποίηση του δένδρου είναι η δυαδική λέξη που παράγεται από την παραπάνω διαδικασία.

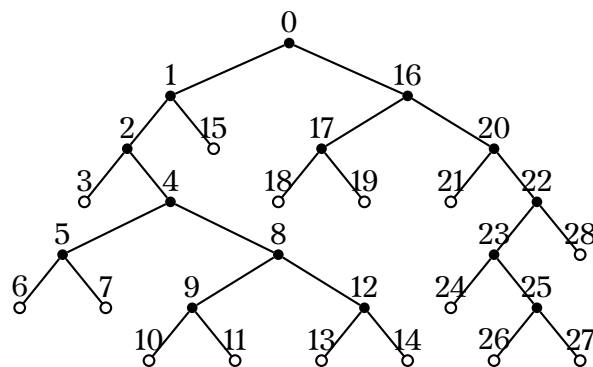
Παράδειγμα: Από το δένδρο T



προκύπτει το δένδρο T'



Αριθμούμε τους κόμβους του δένδρου T' σε προδιάταξη



Από την παραπάνω αρίθμηση προκύπτει η δυαδική λέξη

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0

Η δυαδική λέξη που προκύπτει κατά την κωδικοποίηση ενός δυαδικού δένδρου ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες και ονομάζεται λέξη Dyck.

Μια δυαδική λέξη a ονομάζεται **λέξη Dyck** αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- (i) Η a έχει το ίδιο πλήθος 1 και 0.
- (ii) Σε κάθε πρόθεμα (αρχικό τμήμα) της a ο αριθμός των 1 είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού των 0.

Προφανώς, όλες οι λέξεις Dyck έχουν άρτιο μήκος. Η κενή λέξη θεωρείται λέξη Dyck.

Παραδείγματα

- (1) Η λέξη $a = 1100110000$ δεν είναι λέξη Dyck διότι ο αριθμός των 1 δεν είναι ίσος με τον αριθμό των 0 στη λέξη a .
- (2) Η λέξη $a = 1100100110$ δεν είναι λέξη Dyck διότι στο πρόθεμα 1100100 ο αριθμός των 0 είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των 1.
- (3) Η λέξη $a = 1100101100$ είναι λέξη Dyck διότι ικανοποιεί και τις δύο ιδιότητες.

Το σύνολο όλων των λέξεων Dyck μήκους $2n$ συμβολίζεται με \mathcal{D}_n .

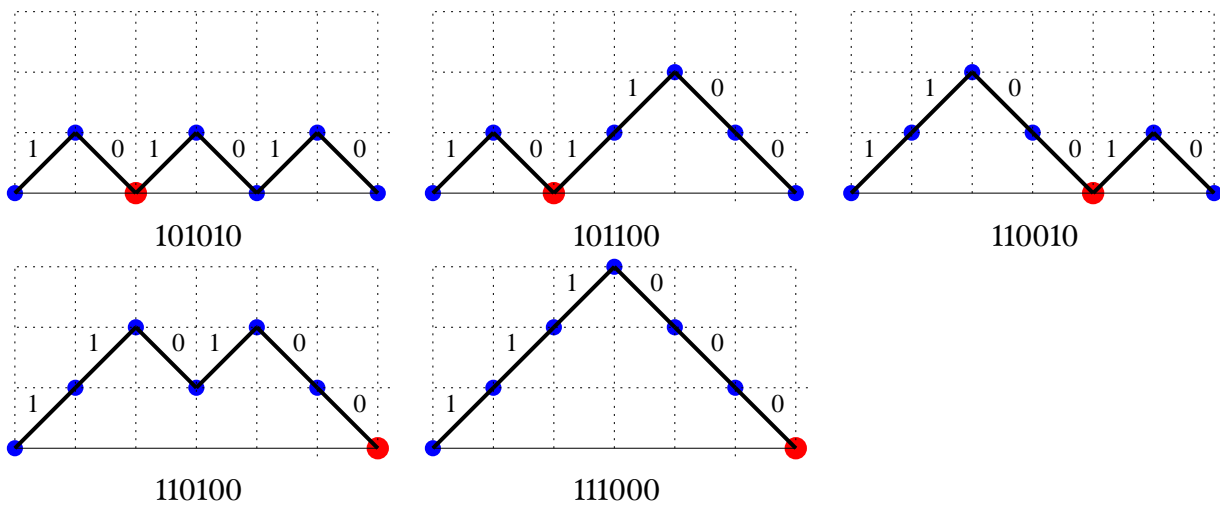
$$\mathcal{D}_0: \quad \epsilon \quad (\text{κενή λέξη}) \quad |\mathcal{D}_0| = 1$$

$$\mathcal{D}_1: \quad 10 \quad |\mathcal{D}_1| = 1$$

$$\mathcal{D}_2: \quad \begin{array}{l} 1010 \\ 1100 \end{array} \quad |\mathcal{D}_2| = 2$$

$$\mathcal{D}_3: \quad \begin{array}{l} 101010 \\ 101100 \\ 110010 \\ 110100 \\ 111000 \end{array} \quad |\mathcal{D}_3| = 5.$$

Οι λέξεις Dyck του \mathcal{D}_n μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά από μονοπάτια με βήματα $(1, 1)$ για κάθε άσσο και $(1, -1)$ για κάθε μηδενικό. Τα μονοπάτια που προκύπτουν αρχίζουν από το σημείο $(0, 0)$, περιέχουν $2n$ βήματα, τελειώνουν στο σημείο $(0, 2n)$, δεν διέρχονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα x και ονομάζονται **μονοπάτια Dyck** μήκους $2n$.



\mathcal{D}_3 : Τα μονοπάτια Dyck μήκους 6

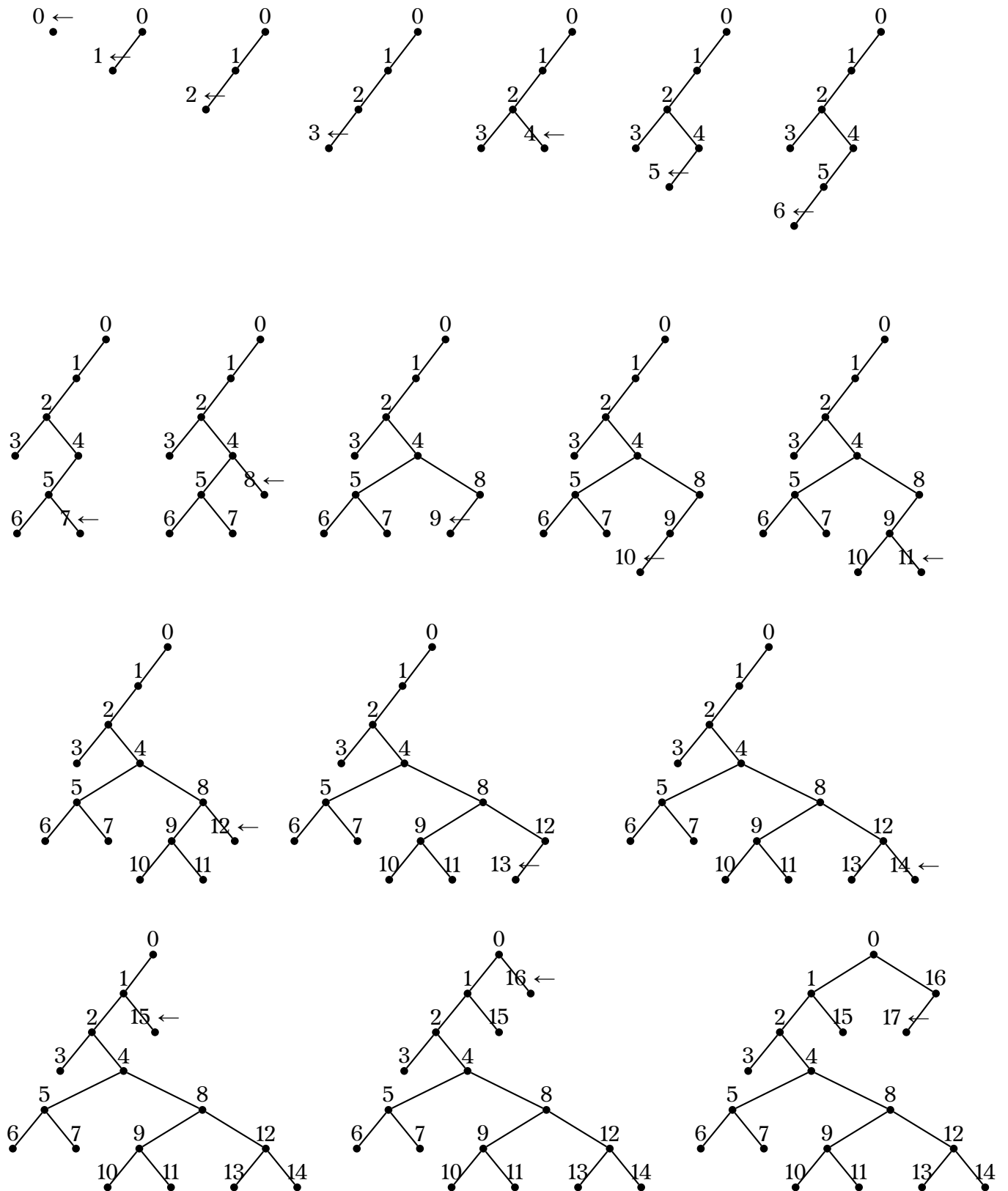
Σε κάθε λέξη Dyck α μήκους $2n$ αντιστοιχεί ένα δυαδικό δένδρο T με n κόμβους. Η εύρεση του δένδρου T (δηλαδή την αποκωδικοποίηση της λέξης Dyck α) μπορεί να γίνει ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία, η οποία κατασκευάζει βήμα-βήμα το αντίστοιχο δένδρο T' με τη βοήθεια ενός δείκτη:

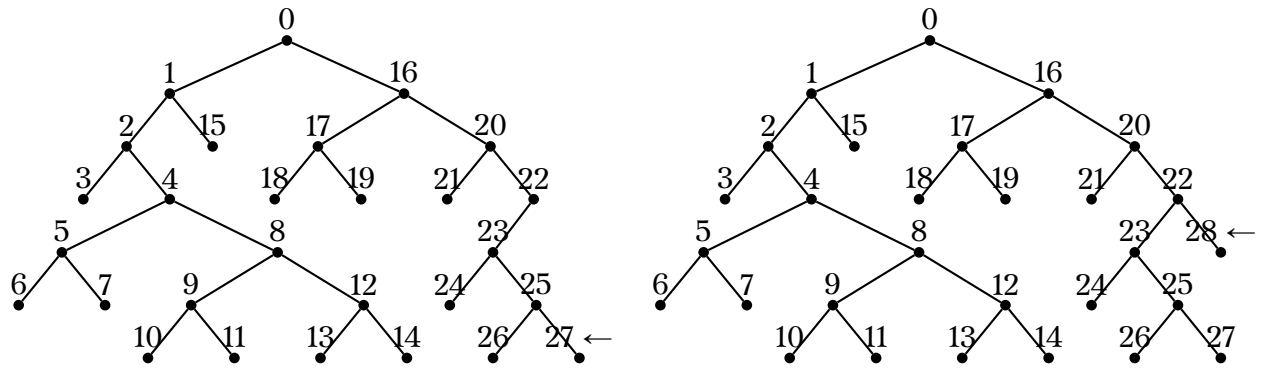
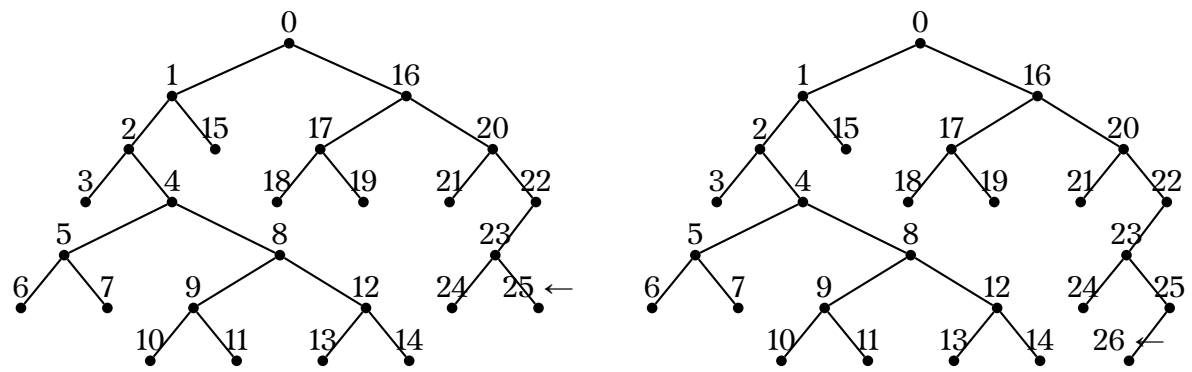
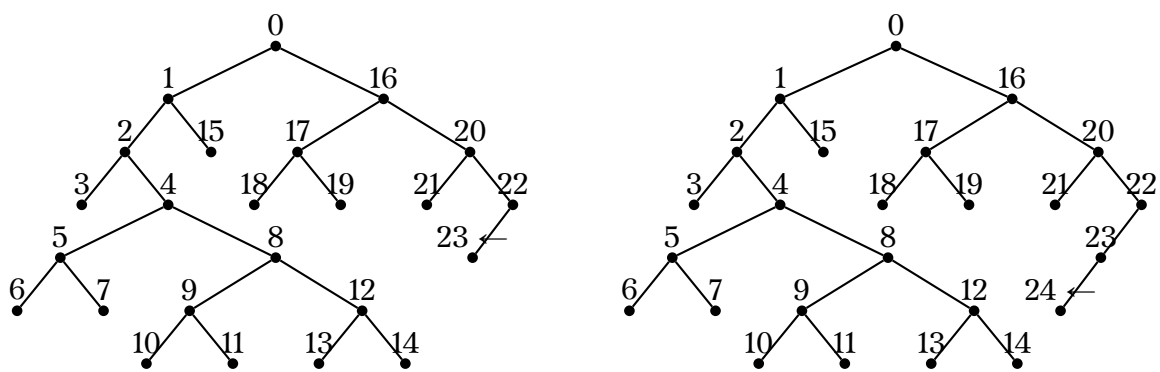
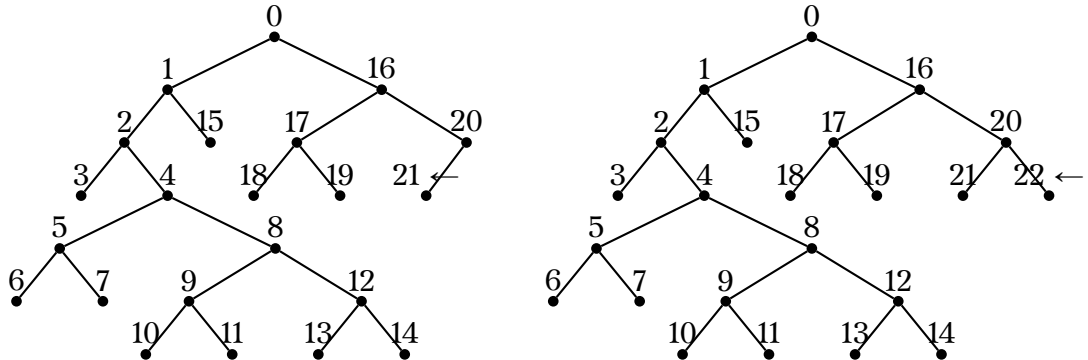
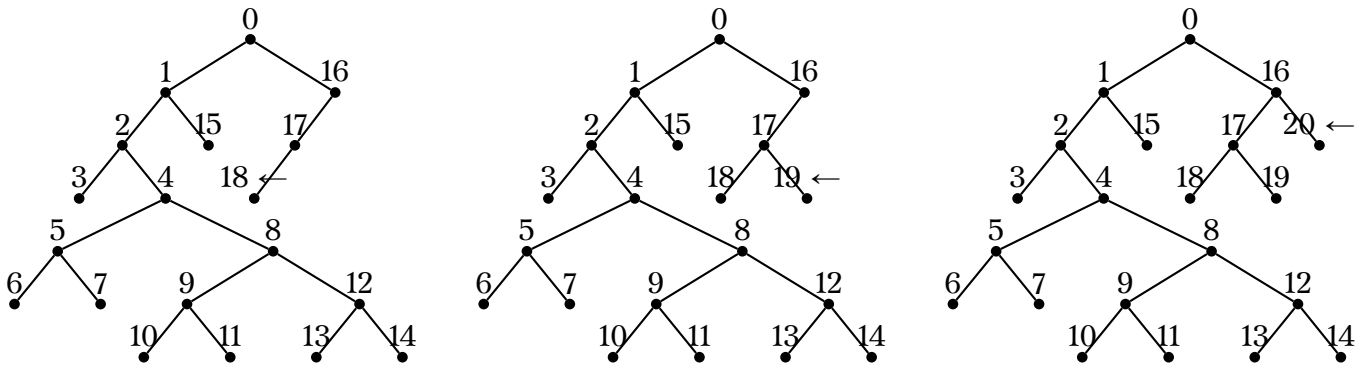
- (i) Αρχικά το δένδρο T' αποτελείται μόνο από τον κόμβο ρίζα και ο δείκτης βρίσκεται στη ρίζα του δένδρου.
- (ii) Διαβάζουμε τη λέξη Dyck α γράμμα-γράμμα (από τα αριστερά προς τα δεξιά). Όταν διαβάζουμε 1 τότε προσθέτουμε αριστερό παιδί στον κόμβο που βρίσκεται ο δείκτης και μεταφέρουμε τον δείκτη στο παιδί αυτό. Όταν διαβάζουμε 0 τότε προσθέτουμε δεξιό παιδί στον πλησιέστερο πρόγονο του κόμβου που βρίσκεται ο δείκτης και δεν έχει ήδη δεξιό παιδί, και μεταφέρουμε τον δείκτη στο παιδί αυτό.
- (iii) Το δυαδικό δένδρο T προκύπτει σβήνοντας όλα τα φύλλα του δένδρου T' .

Παράδειγμα: Για τη λέξη Dyck

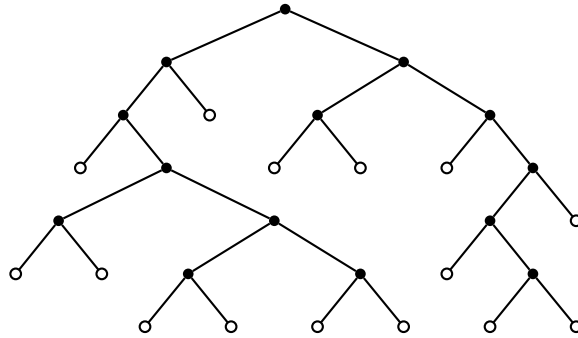
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0

έχουμε διαδοχικά τα δένδρα

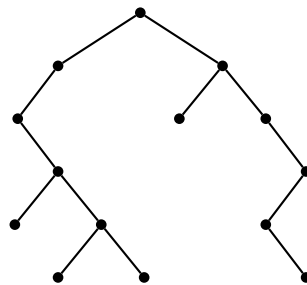




οπότε T' είναι το δένδρο:



Το ζητούμενο δένδρο T προκύπτει σβήνοντας όλα τα φύλλα του δένδρου T' οπότε έχουμε το δένδρο T :



Από τις προηγούμενες κατασκευές μπορεί να αποδειχθεί η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.4.1. Ο αριθμός των λέξεων Dyck μήκους $2n$ ισούται με τον n -στό αριθμό Catalan, δηλαδή $|\mathcal{D}_n| = C_n$.

Ο τύπος του Segner $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$, $C_0 = 1$ έχει το μειονέκτημα ότι στον υπολογισμό κάποιου όρου της ακολουθίας των αριθμών Catalan (C_n) απαιτείται η γνώση όλων των προηγούμενων όρων.

Με τη βοήθεια των λέξεων Dyck μπορούμε να βρούμε (και να αποδείξουμε) ένα απλούστερο τύπο για τους αριθμούς Catalan.

Πρόταση 3.4.2. Ο n -οστός αριθμός Catalan C_n δίδεται από τον τύπο

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Απόδειξη. Έστω \mathcal{A}_n το σύνολο των δυαδικών λέξεων που αποτελούνται από n μηδενικά και n άσσους, χωρίς κανένα άλλο περιορισμό.

Το σύνολο \mathcal{A}_n διαμερίζεται στα σύνολα:

- των λέξεων μήκους $2n$ στις οποίες σε κάθε αρχικό τμήμα τους τα 1 είναι τουλάχιστον όσα τα 0, δηλαδή λέξεις Dyck μήκους $2n$. (Συμβολισμός: \mathcal{D}_n .)
- των λέξεων μήκους $2n$ στις οποίες κάποιο αρχικό τμήμα τους έχει περισσότερα 0 από ότι 1. (Συμβολισμός: $\overline{\mathcal{D}}_n$.)

Επομένως, ισχύει ότι

$$|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{D}_n| + |\overline{\mathcal{D}}_n| = C_n + |\overline{\mathcal{D}}_n|$$

Για τον υπολογισμό του πληθάριθμου του \mathcal{A}_n παρατηρούμε τα εξής: Κάθε δυαδική λέξη με n μηδενικά και n άσσους καθορίζεται μονοσήμαντα αν επιλέξουμε σε ποιες από τις $2n$ θέσεις της βρίσκονται τα n μηδενικά. Άρα, ο πληθάριθμος του \mathcal{A}_n ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών $2n$ στοιχείων ανά n .

$$|\mathcal{A}_n| = \binom{2n}{n}.$$

Για τον υπολογισμό του πληθάριθμου του $\overline{\mathcal{D}}_n$ θα ακολουθήσουμε μια προσέγγιση, η οποία ονομάζεται **αρχή της ανάκλασης**. Θα αποδείξουμε ότι κάθε δυαδική λέξη του $\overline{\mathcal{D}}_n$ απεικονίζεται μονοσήμαντα σε μια δυαδική λέξη με $n - 1$ άσσους και $n + 1$ μηδενικά χωρίς άλλους περιορισμούς.

Έστω μια δυαδική λέξη α που ανήκει στο $\overline{\mathcal{D}}_n$. Επειδή τα μηδενικά είναι περισσότερα από τους άσσους, υπάρχει κάποιο αρχικό τμήμα β της α στο οποίο για πρώτη φορά τα 0 είναι περισσότερα από τα 1. Ας συμβολίσουμε με γ το υπόλοιπο τμήμα της α που ακολουθεί το β .

$$\alpha = \underbrace{\hspace{2cm}}_{\beta} \hspace{1cm} \gamma$$

Το ελάχιστο πρόθεμα με περισσότερα 0 από 1

Αν το β περιέχει k άσσους και $k + 1$ μηδενικά, όπου $k + 1 \leq n$, τότε το γ περιέχει $n - k$ άσσους και $n - k - 1$ μηδενικά.

Στη λέξη α εφαρμόζουμε τον εξής μετασχηματισμό: Αφήνουμε το τμήμα β όπως είναι και αλλάζουμε κάθε άσσο του τμήματος γ σε μηδέν και κάθε μηδενικό του τμήματος γ σε άσσο. Η λέξη α' που προκύπτει έχει $k + (n - k - 1) = n - 1$ άσσους, $k + 1 + (n - k) = n + 1$ μηδενικά και δεν έχει άλλους περιορισμούς.

$$\alpha' = \underbrace{\hspace{2cm}}_{\beta} \underbrace{\hspace{2cm}}_{\gamma'}$$

Το ελάχιστο πρόθεμα με περισσότερα 0 από 1 Εναλλάσσουμε τα 0 και τα 1 της γ

Για παράδειγμα, στη λέξη $\alpha = 1100010011 \in \overline{\mathcal{D}}_5$ έχουμε $\beta = 11000$ και $\gamma = 10011$, οπότε $\alpha' = 1100001100$. Επίσης, για τη λέξη $\alpha = 0011011010 \in \overline{\mathcal{D}}_5$ έχουμε $\beta = 0$ και $\gamma = 011011010$, οπότε $\alpha' = 0100100101$.

Αντίστροφα, έστω α' μια δυαδική λέξη με $n - 1$ άσσους και $n + 1$ μηδενικά.

Τότε επειδή τα μηδενικά είναι περισσότερα από τους άσσους, θα υπάρχει κάποιο αρχικό τμήμα β της α' στο οποίο για πρώτη φορά τα 0 είναι περισσότερα από τους 1, Ας συμβολίσουμε με γ' το υπόλοιπο τμήμα της α' που ακολουθεί το β .

$$\alpha' = \underbrace{\hspace{2cm}}_{\beta} \hspace{1cm} \gamma'$$

Το ελάχιστο πρόθεμα με περισσότερα 0 από 1

Αν το β αποτελείται από k άσσους και $k + 1$ μηδενικά, όπου $k + 1 \leq n + 1$, τότε το γ περιέχει $n - 1 - k$ άσσους και $n + 1 - (k + 1) = n - k$ μηδενικά.

Στη λέξη α' εφαρμόζουμε τον εξής μετασχηματισμό: Αφήνουμε το τμήμα β όπως είναι και αλλάζουμε κάθε άσσο του τμήματος γ' σε μηδέν και κάθε μηδενικό του τμήματος γ' σε άσσο. Η λέξη α που προκύπτει έχει $k + (n - k) = n$ άσσους, $k + 1 + (n - 1 - k) = n$ μηδενικά και ανήκει στο σύνολο $\overline{\mathcal{D}}_n$.

$$\alpha = \underbrace{\hspace{2cm}}_{\beta} \underbrace{\hspace{2cm}}_{\gamma}$$

το ελάχιστο πρόθεμα με περισσότερα 0 από 1 εναλλάσσουμε τα 0 και τα 1 της γ'

Για παράδειγμα, στην λέξη $\alpha' = 10100 0011010$ που περιέχει $n - 1 = 5$ άσσους και $n + 1 = 7$ μηδενικά έχουμε $\beta = 10100$ και $\gamma' = 0011010$, οπότε $\alpha = 10100 1100101$.

Επομένως, επειδή η διαδικασία αυτή είναι μονοσήμαντη προκύπτει ότι ο αριθμός των λέξεων του $\overline{\mathcal{D}}_n$ ισούται με τον αριθμό των δυαδικών λέξεων με $n - 1$ άσσους και $n + 1$ μηδενικά.

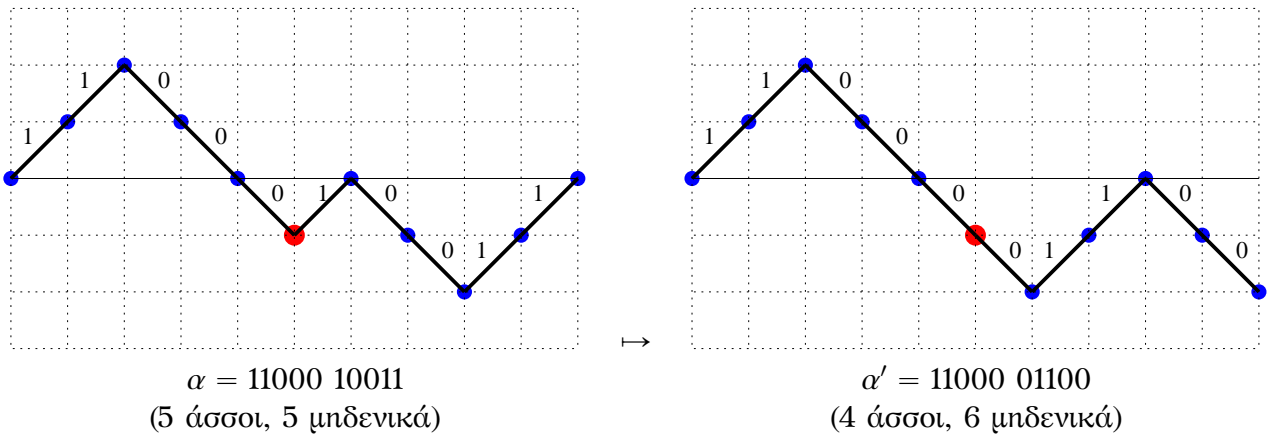
Ο αριθμός των δυαδικών λέξεων με $n - 1$ άσσους και $n + 1$ μηδενικά, υπολογίζεται εύκολα, όπως ο πληθάριθμος του \mathcal{A}_n . Κάθε τέτοια λέξη καθορίζεται μονοσήμαντα αν επιλέξουμε σε ποιες από τις $2n$ θέσεις της βρίσκονται οι $n - 1$ άσσοι, οπότε υπάρχουν $\binom{2n}{n-1}$ τέτοιες λέξεις, άρα

$$|\overline{\mathcal{D}}_n| = \binom{2n}{n-1}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} C_n = |\mathcal{D}_n| &= |\mathcal{A}_n| - |\overline{\mathcal{D}}_n| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \end{aligned} \quad \square$$

Παρατήρηση: Η ονομασία αρχή της ανάκλασης ερμηνεύεται αν αναπαραστήσουμε τις δυαδικές λέξεις από μονοπάτια με βήματα $(1, 1)$ για κάθε άσσο και $(1, -1)$ για κάθε μηδενικό. Τα στοιχεία του \mathcal{A}_n αντιστοιχούν σε μονοπάτια που αρχίζουν από το $(0, 0)$ και τελειώνουν στο $(2n, 0)$ χωρίς άλλους περιορισμούς. Τα στοιχεία του \mathcal{D}_n αντιστοιχούν σε μονοπάτια του \mathcal{A}_n που δεν διέρχονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα x , ενώ τα στοιχεία του $\overline{\mathcal{D}}_n$ αντιστοιχούν σε μονοπάτια του \mathcal{A}_n που διέρχονται τουλάχιστον μια φορά κάτω από τον οριζόντιο άξονα x .



Η διάσπαση που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη απεικόνιση, εντοπίζει το αριστερότερο σημείο ενός μονοπατιού του \mathcal{D}_n το οποίο βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα x , και αντανakλά τα βήματα που ακολουθούν μετά από αυτό το σημείο αλλάζοντας κάθε $(1, 1)$ σε $(1, -1)$ και αντίστροφως, οπότε το μονοπάτι που ξεκινά από αυτό το σημείο αντανakλάται πάνω - κάτω.

Επιπλέον, από τον προηγούμενο τύπο προκύπτει μια νέα αναδρομική σχέση για τους αριθμούς Catalan, η οποία είναι χρήσιμη για υπολογισμούς

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1}}{\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!}}{\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(2n+1)}{n+2}.$$

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n, \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Κατασκευή των λέξεων Dyck μήκους $2n$

Κάθε λέξη Dyck μήκους $2n$ καθορίζεται μοναδικά από τις θέσεις στις οποίες εμφανίζονται οι n άσσοι της, επομένως μια εναλλακτική κωδικοποίηση των λέξεων Dyck είναι η ακολουθία n ακεραίων a_1, a_2, \dots, a_n όπου a_i είναι η θέση εμφάνισης του i -οστού άσσου.

Παράδειγμα: Οι 14 λέξεις Dyck μήκους 8

11110000 11101000 11100100 11100010 11011000
 11010100 11010010 11001100 11001010 10111000
 10110100 10110010 10101100 10101010

μπορούν αντίστοιχα να κωδικοποιηθούν από τις ακολουθίες

1234 1235 1236 1237 1245
 1246 1247 1256 1257 1345
 1346 1347 1356 1357

Η κωδικοποίηση των λέξεων Dyck μέσω της ακολουθίας των άσσων είναι πολύ βολική για την λεξικογραφική κατασκευή. Συγκεκριμένα, ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.4.3. Αν $(a_i)_{i \in [n]}$ είναι η ακολουθία των θέσεων εμφάνισης του i -οστού άσσου σε μια λέξη Dyck τότε

- i) $a_i < a_{i+1}$ για κάθε $i \in [n - 1]$
- ii) $i \leq a_i \leq 2i - 1$ για κάθε $i \in [n]$ ισχύει ότι

Σε κάθε ακολουθία $(a_i)_{i \in [n]}$ με τις παραπάνω ιδιότητες αντιστοιχεί μια λέξη Dyck.

Με την αναπαράσταση αυτή

- η μικρότερη λεξικογραφικά λέξη Dyck μήκους $2n$ είναι η λέξη $12 \cdots i \cdots n$.
- η μεγαλύτερη λεξικογραφικά λέξη Dyck μήκους $2n$ είναι η λέξη $13 \cdots (2i - 1) \cdots (2n - 1)$.
- ο i -οστός άσσος βρίσκεται μεταξύ των θέσεων i και $2i - 1$.
- κάθε λέξη Dyck (εκτός από την μεγαλύτερη) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή

$$a_1 a_2 \cdots a_i \underbrace{(2i + 1)(2i + 3) \cdots (2n - 1)}_{n-i \text{ όροι}} \text{ όπου } i \leq n \text{ και } a_i < 2i - 1.$$

Με άλλα λόγια σε κάθε λέξη Dyck (εκτός από την μεγαλύτερη) υπάρχει ο δεξιότερος άσσος ο οποίος δεν βρίσκεται στην δεξιότερη δυνατή θέση που μπορεί να εμφανισθεί. Μετά από αυτόν, αν υπάρχουν άλλοι άσσοι αυτοί βρίσκονται όλοι στις δεξιότερες δυνατές θέσεις που μπορεί να εμφανίζεται ο καθένας.

- για κάθε λέξη Dyck (εκτός από την μεγαλύτερη) με κωδικοποίηση

$$a_1 a_2 \cdots a_i \underbrace{(2i + 1)(2i + 3) \cdots (2n - 1)}_{n-i \text{ όροι}} \text{ όπου } i \leq n \text{ και } a_i < 2i - 1$$

η (αμέσως) επόμενη είναι η λέξη

$$a_1 a_2 \cdots (a_i + 1) \underbrace{(a_i + 2)(a_i + 3) \cdots (a_i + (n - i) + 1)}_{n-i \text{ όροι}}.$$

Με άλλα λόγια η επόμενη λέξη Dyck προκύπτει μεταφέροντας τον δεξιότερο άσσο της διάσπασης μια θέση δεξιά και όλους τους υπόλοιπους άσσους που ακολουθούν αμέσως μετά τον άσσο αυτό.

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις ένας γρήγορος τρόπος κατασκευής όλων των λέξεων Dyck μήκους $2n$ δίδεται στο επόμενο πρόγραμμα.

```
#generate the first dyck word
#note that dyck[pos] = a_(pos+1)
dyck = [i for i in range(1,n+1)]
print(dyck)
#count words
counter = 1
#read the word from right to left
#pos is the position of the rightmost 1 that
#can be moved one position to the right
pos = n
while(pos > 1):
    pos -=1
    #if a_i < 2i - 1 aka dyck[pos] < 2(pos+1) -1
    #increase a_i by 1
    #set all remaining 1 (if any) to their min values
    if(dyck[pos] < 2*(pos+1)-1):
        dyck[pos] += 1
        for j in range(pos+1,n):
            dyck[j] = dyck[j-1]+1
        print(dyck)
        counter += 1
    pos = n
return counter
```

```
n = 4
print("In total, there are", genDyck(n), "Dyck words of length",2*n)
```

Output:

```
[1, 2, 3, 4]
[1, 2, 3, 5]
[1, 2, 3, 6]
[1, 2, 3, 7]
[1, 2, 4, 5]
[1, 2, 4, 6]
[1, 2, 4, 7]
[1, 2, 5, 6]
[1, 2, 5, 7]
[1, 3, 4, 5]
[1, 3, 4, 6]
[1, 3, 4, 7]
[1, 3, 5, 6]
[1, 3, 5, 7]
In total, there are 14 Dyck words of length 8
```

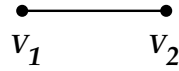
3.4.3 Τριγωνοποιήσεις κυρτού πολυγώνου

Τριγωνοποίηση ενός κυρτού πολυγώνου είναι η διαμέριση του σε τρίγωνα χρησιμοποιώντας μη τεμνόμενες διαγωνίους του.

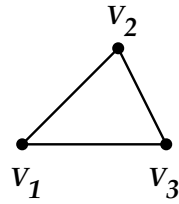
Έστω T_n ο αριθμός των τριγωνοποιήσεων ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ κορυφές σε n τρίγωνα.

Παραδείγματα

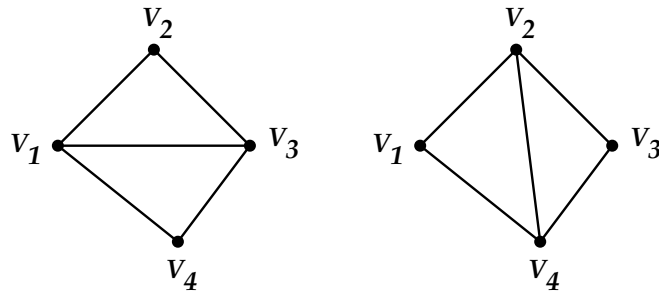
$$n = 0 \quad (T_0 = 1)$$



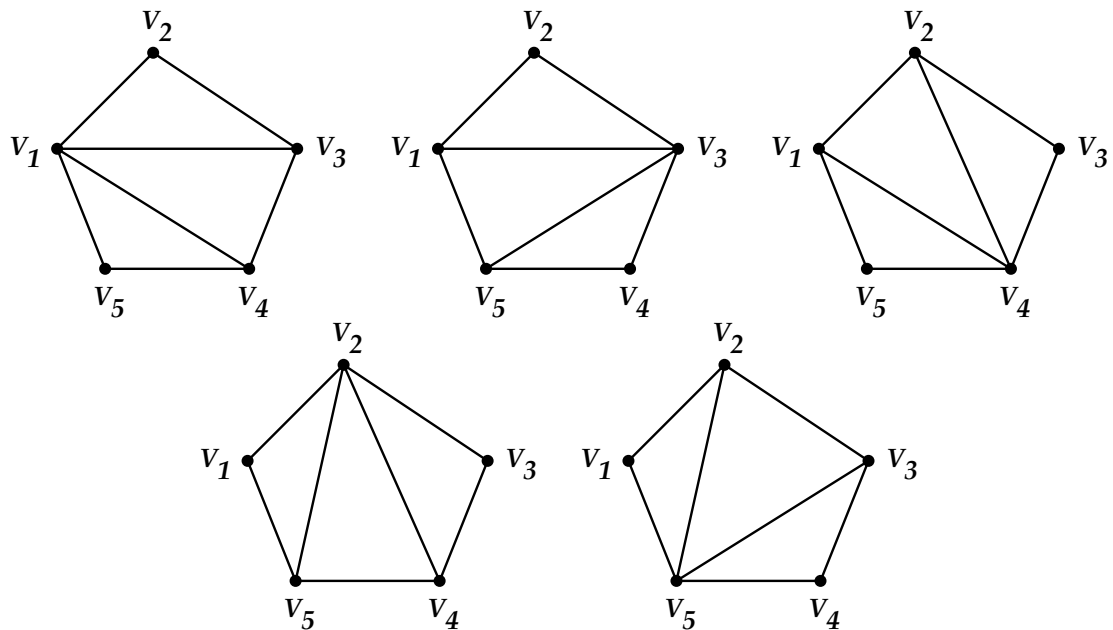
$$n = 1 \quad (T_1 = 1)$$



$$n = 2 \quad (T_2 = 2)$$

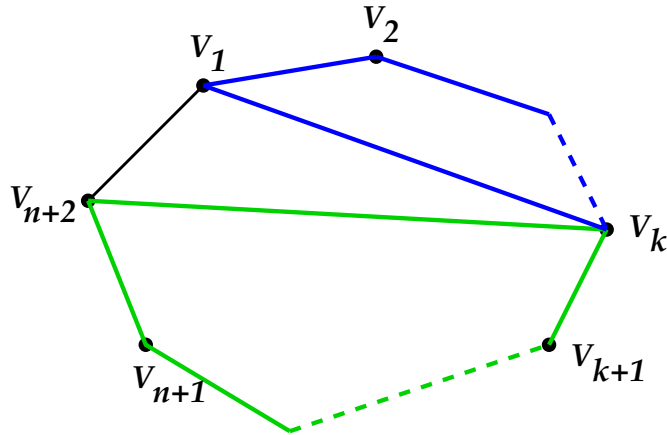


$$n = 3 \quad (T_3 = 5)$$



Πρόταση 3.4.4. Ο αριθμός T_n των τριγωνοποιήσεων ενός κυρτού πολυγώνου με $n + 2$ κορυφές σε n τρίγωνα από μη τεμνόμενες διαγωνίους του είναι ίσος με C_n .

Απόδειξη. Έστω το πολύγωνο με κορυφές V_1, V_2, \dots, V_{n+2} .



Για κάθε τριγωνοποίηση του πολυγώνου η πλευρά V_1V_{n+2} θα ανήκει σε μόνο ένα τρίγωνο της μορφής $V_1V_{n+2}V_k$ όπου $k = 2, 3, \dots, n + 1$.

Το τρίγωνο αυτό χωρίζει το αρχικό πολύγωνο σε δύο μικρότερα πολύγωνα με k και $n + 3 - k$ κορυφές αντίστοιχα.

Το πρώτο πολύγωνο τριγωνοποιείται με T_{k-2} τρόπους ενώ το δεύτερο με T_{n+1-k} τρόπους.

Έτσι σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή θα υπάρχουν $T_{k-2}T_{n+1-k}$ τριγωνοποιήσεις του αρχικού πολυγώνου στις οποίες εμφανίζεται το τρίγωνο $V_1V_{n+2}V_k$ όπου $k = 2, 3, \dots, n + 1$.

Κατόπιν τούτων ο αριθμός των τριγωνοποιήσεων του αρχικού πολυγώνου είναι

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=2}^{n+1} T_{k-2}T_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} T_kT_{n-1-k} \end{aligned}$$

Επειδή η ακολουθία (T_n) ικανοποιεί την αναγωγική εξίσωση του Segner και $T_0 = T_1 = 1$ έπεται ότι

$$T_n = C_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

□

3.4.4 Υπολογισμός γινομένου

Θα δειχθεί ότι ο αριθμός P_n , $n \in \mathbb{N}$, των τρόπων υπολογισμού του γινομένου

$$y_n = x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$$

με τη βοήθεια παρενθέσεων που περιέχουν ζεύγη συνεχόμενων παραγόντων είναι ίσος με C_n .

Προφανώς, $P_0 = 1, P_1 = 1$.

Το γινόμενο

$$y_2 = x_0 x_1 x_2$$

υπολογίζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους

$$(x_0 x_1) x_2 \text{ και } x_0 (x_1 x_2)$$

Άρα $P_2 = 2$.

Το γινόμενο

$$y_3 = x_0 x_1 x_2 x_3$$

υπολογίζεται με πέντε διαφορετικούς τρόπους

$$x_0(x_1(x_2 x_3)), \quad x_0((x_1 x_2)x_3),$$

$$(x_0 x_1)(x_2 x_3), \quad (x_0(x_1 x_2))x_3,$$

$$((x_0 x_1)x_2)x_3$$

Άρα $P_3 = 5$.

Για να αποδειχθεί ότι $P_n = C_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκεί να δειχθεί ότι η ακολουθία $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί την αναγωγική εξίσωση του Segner. Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πολλαπλασιασμός με τον οποίο τελειώνει ο υπολογισμός του γινομένου είναι

$$y_n = y_k y_{n-k-1}$$

όπου

$$y_k = x_0 x_1 \cdots x_k$$

και

$$y_{n-k-1} = x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_n$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Ο αριθμός των τρόπων υπολογισμού των γινομένων y_k και y_{n-k-1} είναι P_k και P_{n-k-1} αντίστοιχα.

Τότε σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο αριθμός των τρόπων υπολογισμού των y_k και y_{n-k-1} είναι $P_k P_{n-k-1}$.

Αθροίζοντας για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ προκύπτει ότι

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k P_{n-k-1}.$$

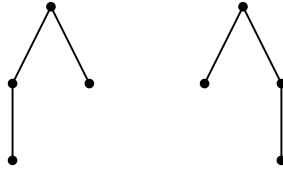
οπότε η ακολουθία P_n ικανοποιεί την σχέση του Segner και επομένως $P_n = C_n$.

3.4.5 Διατεταγμένα δένδρα

Ένα δένδρο με ρίζα ονομάζεται **διατεταγμένο** όταν τα παιδιά κάθε κόμβου του έχουν καθορισμένη σειρά.

(Στην περίπτωση αυτή το δένδρο απεικονίζεται έτσι ώστε αν ένα παιδί προηγείται κάποιου άλλου να βρίσκεται στα αριστερά του.)

Παράδειγμα: Τα παρακάτω διατεταγμένα δένδρα



δεν είναι ισόμορφα, δηλαδή είναι διαφορετικά.

Έστω \mathcal{T}_n , όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς.

Παραδείγματα

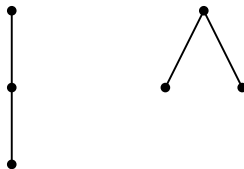
\mathcal{T}_0



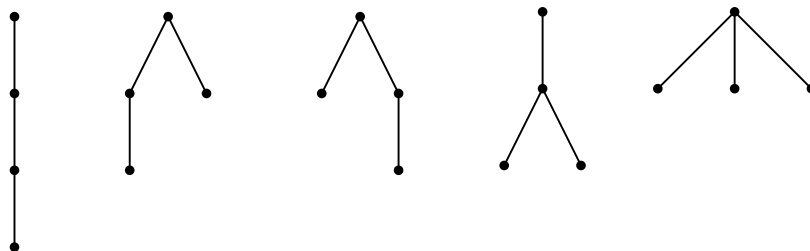
\mathcal{T}_1



\mathcal{T}_2



\mathcal{T}_3



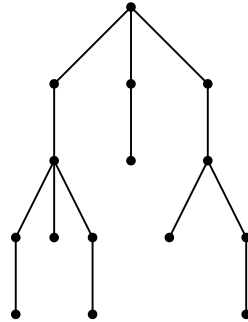
Προφανώς ισχύει ότι $|\mathcal{T}_0| = 1 = C_0$, $|\mathcal{T}_1| = 1 = C_1$, $|\mathcal{T}_2| = 2 = C_2$, $|\mathcal{T}_3| = 5 = C_3$. $|\mathcal{T}_4| = 14 = C_4$.

Πρόταση 3.4.5. Ο αριθμός των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς ισούται με τον n -οστό αριθμό Catalan, δηλαδή $|\mathcal{T}_n| = C_n$.

Απόδειξη. Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ ορίζουμε

$$\mathcal{T}_{n,k} = \{T \in \mathcal{T}_n : \text{το πρώτο δένδρο-παιδί του } T \text{ έχει } k \text{ δεσμούς}\}$$

Παράδειγμα:

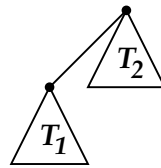


$$T \in \mathcal{T}_{14,6}$$

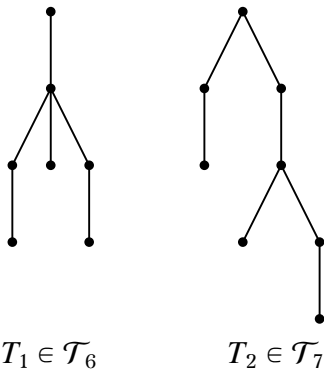
Προφανώς τα σύνολα $\mathcal{T}_{n,k}$, όπου $k = 0, 1, \dots, n-1$, αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου \mathcal{T}_n οπότε ισχύει ότι

$$|\mathcal{T}_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{T}_{n,k}| \quad (1)$$

Επιπλέον κάθε $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τα δένδρα $T_1 \in \mathcal{T}_k$ και $T_2 \in \mathcal{T}_{n-k-1}$.



Παράδειγμα: Για το δένδρο T του παραπάνω παραδείγματος έχουμε



$$T_1 \in \mathcal{T}_6$$

$$T_2 \in \mathcal{T}_7$$

Άρα

$$|\mathcal{T}_{n,k}| = |\mathcal{T}_k| |\mathcal{T}_{n-k-1}| \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$|\mathcal{T}_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{T}_k| |\mathcal{T}_{n-k-1}|$$

οπότε η ακολουθία $|\mathcal{T}_n|$ ικανοποιεί τη σχέση του Segner και επομένως $|\mathcal{T}_n| = C_n$. □

3.4.6 Αριθμοί Narayana και αριθμοί Riordan

Κάθε ένα από τα σύνολα συνδυαστικών αντικείμενων που απαριθμούνται από τον n -οστό αριθμό Catalan C_n , όπως για παράδειγμα τα δυαδικά δένδρα με n κορυφές, τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς, οι τριγωνοποιήσεις ενός $(n + 2)$ -πολυγώνου και οι λέξεις Dyck μήκους $2n$, μπορεί να διαμερισθεί σε υποσύνολα με βάση ένα δεύτερο χαρακτηριστικό τους.

Για παράδειγμα, το σύνολο \mathcal{T}_n των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς μπορεί να διαμερισθεί σε υποσύνολα με βάση τον αριθμό k των φύλλων που έχει κάθε δένδρο, ή με βάση τον βαθμό k της ρίζας του δένδρου. Τα υποσύνολα που ορίζουν οι αντίστοιχες διαμερίσεις απαριθμούνται από διπλές ακολουθίες αριθμών $a_{n,k}$ οι οποίες εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα απαρίθμησης, ιδιαίτερα σε προβλήματα όπου εμφανίζονται αντικείμενα που απαριθμούνται από τους αριθμούς Catalan.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάζονται δύο τέτοιες ακολουθίες: οι αριθμοί Narayana και οι αριθμοί Riordan. Με την βοήθεια αυτών θα μετρήσουμε τα διατεταγμένα δένδρα που έχουν n κορυφές και συγκεκριμένο αριθμό φύλλων ή/και συγκεκριμένο βαθμό ρίζας. Οι αποδείξεις των τύπων θα γίνουν στο κεφάλαιο 5 με την χρήση γεννητριών συναρτήσεων.

Αριθμοί Narayana

Οι αριθμοί Narayana $N(n, k)$, όπου $n, k \in \mathbb{N}^*$ με $k \leq n$, ορίζονται με τη βοήθεια των διωνυμικών συντελεστών:

$$N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1} \binom{n}{k}$$

Ο παρακάτω τριγωνικός πίνακας δίνει ορισμένες τιμές των αριθμών Narayana.

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	6	6	1		
5	1	10	20	10	1	
6	1	15	50	50	15	1

Αριθμοί Riordan

Οι αριθμοί Riordan $R(n, k)$, όπου $n, k \in \mathbb{N}^*$ με $k \leq n$, ορίζονται με τη βοήθεια των διωνυμικών συντελεστών:

$$R(n, k) = \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-1} = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n} = \binom{2n-k-1}{n-1} - \binom{2n-k-1}{n}$$

Ο παρακάτω τριγωνικός πίνακας δίνει ορισμένες τιμές των αριθμών Riordan.

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	2	2	1			
4	5	5	3	1		
5	14	14	9	4	1	
6	42	42	28	14	5	1

Πρόταση 3.4.6. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $\sum_{k=1}^n N(n, k) = \sum_{k=1}^n R(n, k) = C_n$.

Μια συνδυαστική ερμηνεία των δύο αυτών ακολουθιών είναι η επόμενη:

Πρόταση 3.4.7. Για κάθε $n, k \in \mathbb{N}^*$ με $k \leq n$ ισχύουν

- i) Το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς και k φύλλα είναι ίσο με $N(n, k)$.
- ii) Το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς και βαθμό ρίζας ίσο με k είναι ίσο με $R(n, k)$.

Παράδειγμα 3.2. Να υπολογιστεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων

- α) με 4 δεσμούς
- β) με 4 δεσμούς και 2 φύλλα
- γ) με 4 δεσμούς και βαθμό ρίζας 2

Λύση. α) Ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

$$C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 14.$$

β) Ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

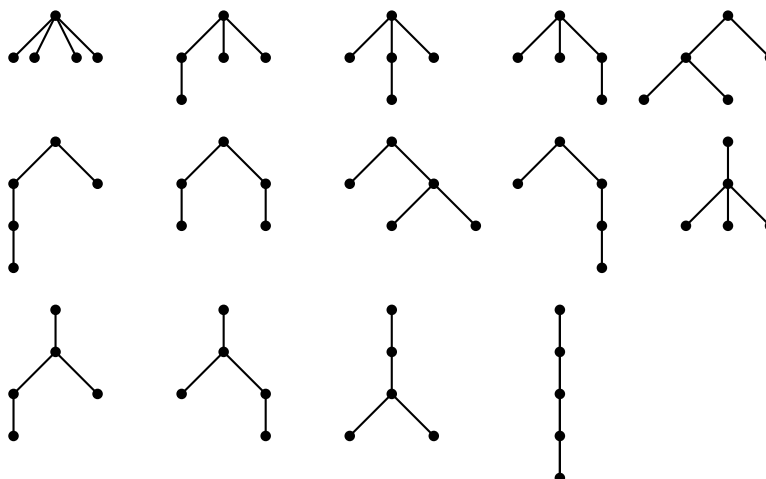
$$N(4, 2) = \frac{1}{4} \binom{4}{2} \binom{4}{1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

γ) Ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

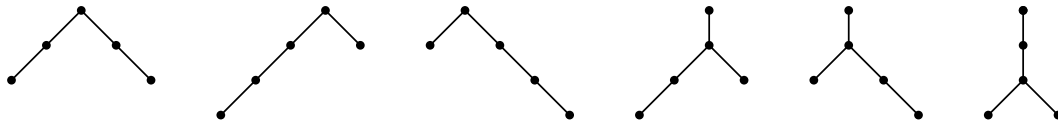
$$R(4, 2) = \frac{2}{4} \binom{2 \cdot 4 - 2 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \binom{5}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 5.$$

Τα διατεταγμένα δένδρα που απαριθμούνται στα α), β) και γ) είναι αντίστοιχα τα εξής:

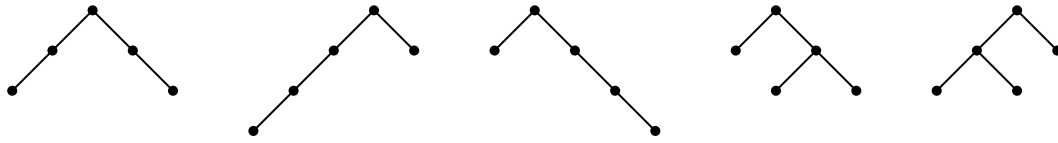
α)



β)



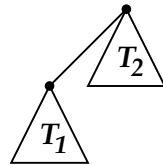
γ)



□

Παράδειγμα 3.3. Να υπολογιστεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με 7 δεσμούς που το πρώτο υποδένδρο της ρίζας έχει 3 φύλλα.

Λύση. Έστω T ένα διατεταγμένο δένδρο με $s(T) = 7$ και με το πρώτο υποδένδρο της ρίζας του να έχει 3 φύλλα. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση



προκύπτει ότι το T_2 είναι ένα οποιοδήποτε διατεταγμένο δένδρο ενώ το T_1 πρέπει να έχει 3 φύλλα. Επιπλέον ισχύουν

$$3 \leq s(T_1) \quad \text{και} \quad s(T_1) + s(T_2) = 6.$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) $s(T_1) = 3$ και $s(T_2) = 3$.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν C_3 στο πλήθος T_2 και $N(3,3)$ T_1 , οπότε τελικά $C_3 \cdot N(3,3)$ το πλήθος T .

(2) $s(T_1) = 4$ και $s(T_2) = 2$.

Εδώ υπάρχουν C_2 στο πλήθος T_2 και $N(4,3)$ στο πλήθος T_1 , οπότε τελικά $C_2 \cdot N(4,3)$ το πλήθος T .

(3) $s(T_1) = 5$ και $s(T_2) = 1$.

Εδώ υπάρχουν C_1 στο πλήθος T_2 και $N(5,3)$ στο πλήθος T_1 , οπότε τελικά $C_1 \cdot N(5,3)$ το πλήθος T .

(4) $s(T_1) = 6$ και $s(T_2) = 0$.

Εδώ υπάρχουν C_0 στο πλήθος T_2 και $N(6,3)$ στο πλήθος T_1 , οπότε τελικά $C_0 \cdot N(6,3)$ το πλήθος T .

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$C_3 \cdot N(3,3) + C_2 \cdot N(4,3) + C_1 \cdot N(5,3) + C_0 \cdot N(6,3) = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 50 = 87. \quad \square$$

Με την βοήθεια των αριθμών Narayana και Riordan μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό φύλλων και τον μέσο βαθμό ρίζας σε ένα διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς.

Πρόταση 3.4.8. Ο μέσος αριθμός φύλλων και ο μέσος βαθμός ρίζας σε ένα διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς ισούται με $\frac{n+1}{2}$ και $\frac{3n+2}{n+2}$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Ο μέσος αριθμός φύλλων ℓ_n σε ένα διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς ισούται με

$$\begin{aligned} \ell_n &= \frac{\text{συνολικός αριθμός φύλλων σε όλα τα διατεταγμένα δένδρα με } n \text{ δεσμούς}}{\text{αριθμός διατεταγμένων δένδρων με } n \text{ δεσμούς}} \\ &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n kN(n, k) = \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n k \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} \binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \binom{n-1}{k-1} = \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} = \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{n-1-k} \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Cauchy $\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$ προκύπτει ότι

$$\ell_n = \frac{1}{C_n} \binom{n-1+n}{n-1} = \frac{1}{C_n} \binom{2n-1}{n-1} = \frac{n!(n+1)! (2n-1)!}{(2n)! (n-1)!n!} = \frac{n+1}{2}$$

Ο μέσος βαθμός ρίζας r_n σε ένα διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς ισούται με

$$\begin{aligned} \ell_n &= \frac{\text{συνολικό άθροισμα βαθμών ρίζας σε όλα τα διατεταγμένα δένδρα με } n \text{ δεσμούς}}{\text{αριθμός διατεταγμένων δένδρων με } n \text{ δεσμούς}} \\ &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n kR(n, k) \stackrel{3}{=} \frac{1}{C_n} (C_{n+1} - C_n) = \frac{C_{n+1}}{C_n} - 1 = \frac{2(2n+1)}{n+2} - 1 = \frac{3n+2}{n+2} \quad \square \end{aligned}$$

³Μετά από πράξεις.

3.4.7 Tableaux Young

Διαμέριση ενός φυσικού αριθμού n είναι μια m -άδα $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, τέτοια ώστε

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m, \text{ όπου } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 1.$$

Ένα **διάγραμμα Ferrers** είναι μια συλλογή από κελιά διατεταγμένα σε αριστερά στοιχισμένες γραμμές, έτσι ώστε κάθε γραμμή να περιέχει το πολύ όσα κελιά περιέχει η προηγούμενή της.

Από μια διαμέριση $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ενός φυσικού αριθμού n , προκύπτει ένα μοναδικό διάγραμμα Ferrers (και αντίστροφα) το οποίο αποτελείται από n κελιά διατεταγμένα σε m γραμμές, έτσι ώστε η i -οστή γραμμή να αποτελείται από λ_i κελιά με $1 \leq i \leq m$. Θα συμβολίζουμε το διάγραμμα αυτό με $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

Για παράδειγμα, αν $n = 16$ και θεωρήσουμε τη διαμέριση $\lambda = (6, 4, 4, 2)$, τότε προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα Ferrers, το οποίο επίσης συμβολίζεται ως $\lambda = (6, 4, 4, 2)$:

Το διάγραμμα $\lambda = (6, 4, 4, 2)$

Ένα **tableau Young** προκύπτει αν γεμίσουμε τα κελιά ενός διαγράμματος Ferrers με διαδοχικούς θετικούς ακεραίους έτσι ώστε τα στοιχεία του να έχουν:

- αύξουσα σειρά από αριστερά προς τα δεξιά σε κάθε γραμμή και
- γνησίως αύξουσα σειρά από πάνω προς τα κάτω σε κάθε στήλη.

Στην περίπτωση που δεν έχουμε επαναλαμβανόμενα στοιχεία, τότε λέμε ότι πρόκειται για ένα **standard tableau Young**, ή απλά **standard tableau**, αλλιώς έχουμε ένα **γενικευμένο tableau Young**, ή απλά **tableau**.

1	2	2	3	3	5
2	3	5	5		
4	4	6	6		
5	6				

1	3	7	12	13	15
2	5	10	14		
4	8	11	16		
6	9				

Ένα tableau (αριστερά) και ένα standard tableau (δεξιά).

Το διάγραμμα Ferrers που αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο tableau, ονομάζεται **διάγραμμα** ή **σχήμα** του tableau. Το πλήθος των κελιών του διαγράμματος ονομάζεται **μέγεθος** του tableau.

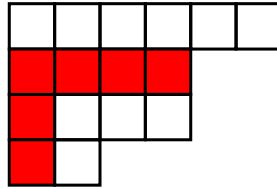
Σε ένα διάγραμμα Ferrers λ , ονομάζουμε **hook** ενός κελιού (i, j) και συμβολίζουμε με $H(i, j)$, το σύνολο όλων των κελιών που βρίσκονται στην ίδια γραμμή και δεξιά ή στην ίδια στήλη και κάτω από το κελί (i, j) , καθώς και το ίδιο το κελί (i, j) , δηλαδή,

$$H(i, j) = \{(i, j') : j' \geq j\} \cup \{(i', j) : i' \geq i\}.$$

Το **μήκος** $h(i, j)$ του hook είναι ίσο με το πλήθος των κελιών που ανήκουν στο hook του κελιού (i, j) , δηλαδή,

$$h(i, j) = |H(i, j)|.$$

Για παράδειγμα, στο διάγραμμα Ferrers $\lambda = (6, 4, 4, 2)$ το hook $H(2, 1)$ του κελιού $(2, 1)$ αποτελείται από τα κελιά $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$ (σκιασμένα κελιά) και έχει μήκος $h(2, 1) = 6$.



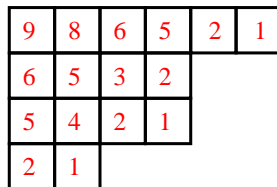
Ο αριθμός των standard tableaux σχήματος λ υπολογίστηκε ανεξάρτητα από τους Frame, Robinson και Thrall, το 1954 (την ίδια μέρα!).

Πρόταση 3.4.9 (hook-length formula). Το πλήθος f^λ των standard tableaux σχήματος λ και μεγέθους n δίνεται από τον τύπο:

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i,j)}$$

Παράδειγμα 3.4. Να βρεθεί το πλήθος των standard tableaux σχήματος $\lambda = (6, 4, 4, 2)$

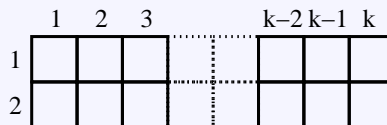
Λύση. Τα tableaux σχήματος $\lambda = (6, 4, 4, 2)$ έχουν μέγεθος $n = 6 + 4 + 4 + 2 = 16$. Τα μήκη των hooks των κελιών του αντίστοιχου διαγράμματος Ferrers είναι σημειωμένα στο αντίστοιχο κελί:



Επομένως, ο αριθμός των standard tableaux σχήματος $\lambda = (6, 4, 4, 2)$ είναι ίσος με

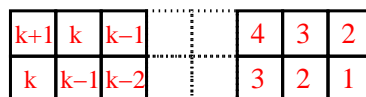
$$f^\lambda = \frac{16!}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 672672. \quad \square$$

Πρόταση 3.4.10. Το πλήθος των standard tableaux σχήματος $\lambda = (k, k)$ ισούται με C_k .



Απόδειξη. Τα tableaux σχήματος $\lambda = (k, k)$ έχουν μέγεθος $n = k + k = 2k$. Για κάθε $j \in [k]$ ισχύει ότι

$$h(1, j) = k - j + 2 \text{ και } h(2, j) = k - j + 1$$



Επομένως, ο αριθμός των standard tableaux σχήματος $\lambda = (k, k)$ είναι ίσος με

$$f^\lambda = \frac{(2k)!}{\underbrace{(k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{hooks των κελιών της 1ης γραμμής}} \cdot \underbrace{(k-1) \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{hooks των κελιών της 2ης γραμμής}}} = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} = C_k. \quad \square$$

Για παράδειγμα υπάρχουν $C_4 = 14$ standard tableaux με σχήμα $(4, 4)$.

1	2	3	4	1	2	3	5	1	2	3	6	1	2	3	7
5	6	7	8	4	6	7	8	4	5	7	8	4	5	6	8
1	2	4	5	1	2	4	6	1	2	4	7	1	2	5	6
3	6	7	8	3	5	7	8	3	5	6	8	3	4	7	8
1	2	5	7	1	3	4	5	1	3	4	6	1	3	4	7
3	4	6	8	2	6	7	8	2	5	7	8	2	5	6	8
1	3	5	6	1	3	5	7								
2	4	7	8	2	4	6	8								

Παρατήρηση: Παρατηρήστε ότι κάθε standard tableaux σχήματος $\lambda = (k, k)$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τα στοιχεία που βρίσκονται στα κελιά της πρώτης γραμμής.

Επίσης,

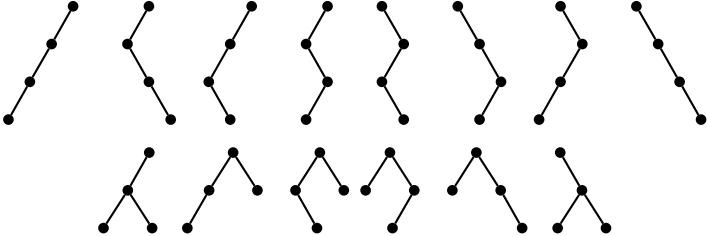
- η τιμή του κελιού $(1, j)$ μικρότερη από $(1, j + 1)$ για κάθε $i \in [k - 1]$
- η τιμή του κελιού $(1, j)$ είναι μεταξύ του j και του $2j - 1$.

με άλλα λόγια τα στοιχεία $(1, j)$ της πρώτης γραμμής αντιστοιχούν στην ακολουθία των θέσεων εμφάνισης του i -οστού άσσου στην αντίστοιχη λέξη Dyck μήκους $2n$ (και τα στοιχεία $(2, j)$ της δεύτερης γραμμής αντιστοιχούν στην ακολουθία των θέσεων εμφάνισης του j -οστού μηδενικού).

3.5 Συνδυαστικές κατασκευές

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τρόπους κατασκευής συνδυαστικών αντικειμένων.

Βασικά συνδυαστικά αντικείμενα

Αντικείμενο	Αριθμός	Παράδειγμα για $n = 4$ και $k = 2$
υποσύνολα του $[n]$	2^n	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$
k -υποσύνολα του $[n]$	$\binom{n}{k}$	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$
μεταθέσεις του $[n]$	$n!$	1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.
μεταθέσεις του $[n]$ με k ξένους κύκλους	$ S(n, k) $	(1)(234), (1)(243), (2)(134), (2)(143), (3)(124), (3)(142), (4)(123), (4)(132), (12)(34), (13)(24), (14)(23).
διαμερίσεις του $[n]$	B_n	$\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}, \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}, \{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}, \{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1234\}\}.$
διαμερίσεις του $[n]$ σε k υποσύνολα	$\overline{S}(n, k)$	$\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}, \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}.$
Διαμερίσεις του n (χωρίς σειρά)	p_n	4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1.
Διαμερίσεις του n σε k μέρη (χωρίς σειρά)	$p_{n,k}$	3 + 1, 2 + 2
Διαμερίσεις του n (με σειρά)	2^{n-1}	4, 3 + 1, 1 + 3, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1.
Διαμερίσεις του n σε k μέρη (με σειρά)	$\binom{n-1}{k-1}$	3 + 1, 1 + 3, 2 + 2
Δυαδικά δένδρα με n κόμβους	C_n	

3.5.1 Η τεχνική της ανάτρεξης

Υπάρχει μια γενική μέθοδος για την κατασκευή συνδυαστικών αντικειμένων: η τεχνική της ανάτρεξης (**backtracking**).

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι προσπαθούμε να κατασκευάσουμε ένα αντικείμενο βήμα - βήμα επεκτείνοντας μια “μερική κατασκευή”. Σε κάθε βήμα επεκτείνουμε την μερική κατασκευή μας επιλέγοντας μια πιθανή επέκταση, μέχρι ότου δημιουργήσουμε το αντικείμενο που μας ενδιαφέρει. Αν δεν μπορούμε να επεκτείνουμε άλλο την κατασκευή δοκιμάζουμε να αλλάξουμε την τελευταία επιλογή μας. Αν σε κάποιο βήμα φτάσουμε σε αδιέξοδο τότε γυρίζουμε πίσω (backtrack) συρρικνώνοντας την μερική κατασκευή και κάνουμε μια άλλη επιλογή.

Η τεχνική της ανάτρεξης λειτουργεί εφαρμόζοντας τρεις κινήσεις:

- κίνηση grow (G): Επεκτείνουμε την μερική κατασκευή
- κίνηση next (N): Αλλάζουμε την τελευταία επιλογή
- κίνηση shrink (S): Συρρικνώνουμε την μερική κατασκευή

Οι κινήσεις αυτές άλλες φορές είναι επιτυχείς (μπορούν να εφαρμοσθούν) και άλλες φορές είναι ανεπιτυχείς (δεν μπορούν να εφαρμοσθούν). Ανάλογα με την επιτυχία τους ή όχι ακολουθούμε τους παρακάτω κανόνες

- Αν η κίνηση grow είναι επιτυχής, μετά δοκιμάζουμε την κίνηση grow.
- Αν η κίνηση grow δεν είναι επιτυχής, μετά δοκιμάζουμε την κίνηση next.
- Αν η κίνηση next είναι επιτυχής, μετά δοκιμάζουμε την κίνηση grow.
- Αν η κίνηση next δεν είναι επιτυχής, μετά δοκιμάζουμε την κίνηση shrink.
- Αν η κίνηση shrink είναι επιτυχής, μετά δοκιμάζουμε την κίνηση next.
- Αν η κίνηση shrink δεν είναι επιτυχής, η διαδικασία ολοκληρώνεται.

Αρχίζουμε πάντα δοκιμάζοντας την κίνηση grow.

Μπορούμε να καταλάβουμε την τεχνική της ανάτρεξης βλέποντας κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.5. Να κατασκευασθούν όλα τα υποσύνολα του [5] με 3 στοιχεία (3 - υποσύνολα).

Λύση. Μια κατασκευή που χρησιμοποιεί την τεχνική της ανάτρεξης είναι να ξεκινήσουμε από το κενό σύνολο, το οποίο θα επεκτείνουμε προσθέτοντας ένα στοιχείο κάθε φορά μέχρι να δημιουργήσουμε ένα 3 - υποσύνολο του [5].

Κάθε υποσύνολο αναπαρίσταται από μια λίστα με στοιχεία σε αύξουσα σειρά.

Για παράδειγμα, έχουμε τα εξής βήματα (κινήσεις grow) που κατασκευάζουν ένα 3-υποσύνολο του [5] από το κενό υποσύνολο:

$$[] \xrightarrow{G} [1] \xrightarrow{G} [1, 2] \xrightarrow{G} [1, 2, 3]$$

Τώρα δεν μπορούμε να επεκτείνουμε άλλο το σύνολό μας (γιατί μας ενδιαφέρουν υποσύνολα με 3 στοιχεία), οπότε δοκιμάζουμε να αλλάξουμε την τελευταία επιλογή μας με μια άλλη επιλογή

(το τελευταίο στοιχείο του συνόλου μας με ένα άλλο στοιχείο) (κίνηση next). Υπάρχουν 2 τέτοιες αλλαγές που μπορούμε να κάνουμε:

$$\square \xrightarrow{G} [1] \xrightarrow{G} [1, 2] \xrightarrow{G} [1, 2, 3] \xrightarrow{N} [1, 2, 4] \xrightarrow{N} [1, 2, 5]$$

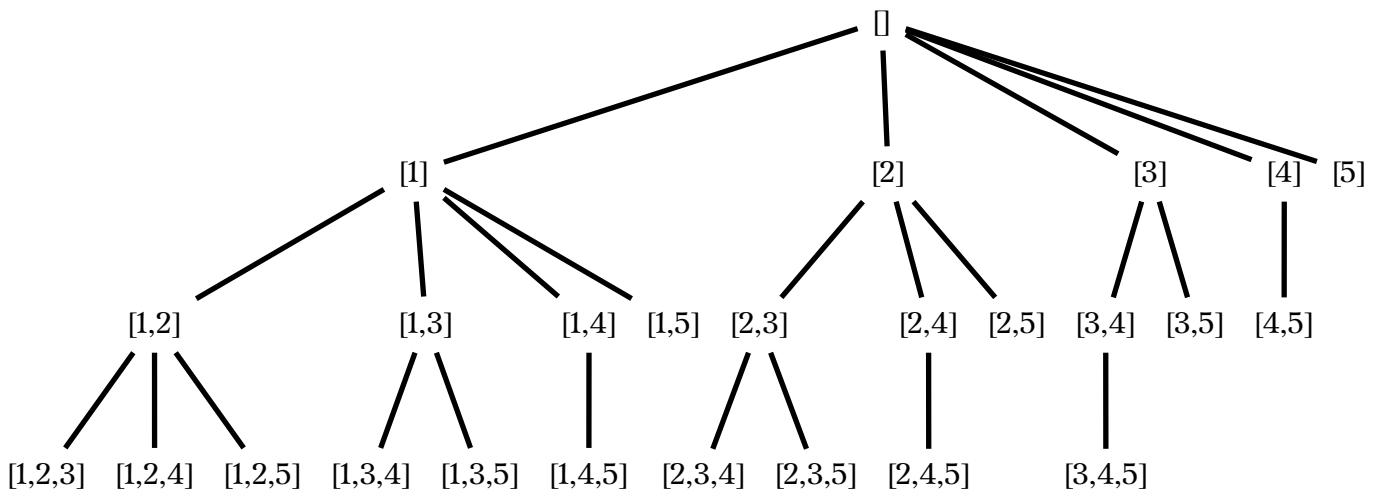
Τώρα ούτε μπορούμε να επεκτείνουμε άλλο το σύνολό μας, ούτε μπορούμε να αλλάξουμε την τελευταία επιλογή μας με κάποια άλλη, οπότε αναιρούμε την τελευταία επέκταση (κίνηση shrink) και δοκιμάζουμε να αλλάξουμε την τελευταία επιλογής με μια άλλη επιλογή.

$$\square \xrightarrow{G} [1] \xrightarrow{G} [1, 2] \xrightarrow{G} [1, 2, 3] \xrightarrow{N} [1, 2, 4] \xrightarrow{N} [1, 2, 5] \xrightarrow{S} [1, 2] \xrightarrow{N} [1, 3]$$

Εανά μπορούμε να επεκτείνουμε το σύνολο μας (κίνηση grow) και να συνεχίσουμε εφαρμόζοντας τις τρεις κινήσεις με βάση τους κανόνες της ανάτρεξης, οπότε θα έχουμε την παρακάτω ακολουθία κατασκευών

$$\begin{aligned} & \square \xrightarrow{G} [1] \xrightarrow{G} [1, 2] \xrightarrow{G} [1, 2, 3] \xrightarrow{N} [1, 2, 4] \xrightarrow{N} [1, 2, 5] \xrightarrow{S} [1, 2] \xrightarrow{N} [1, 3] \xrightarrow{G} [1, 3, 4] \xrightarrow{N} [1, 3, 5] \xrightarrow{S} [1, 3] \xrightarrow{N} \\ & [1, 4] \xrightarrow{G} [1, 4, 5] \xrightarrow{S} [1, 4] \xrightarrow{N} [1, 5] \xrightarrow{S} [1] \xrightarrow{N} [2] \xrightarrow{G} [2, 3] \xrightarrow{G} [2, 3, 4] \xrightarrow{N} [2, 3, 5] \xrightarrow{S} [2, 3] \xrightarrow{N} [2, 4] \xrightarrow{G} [2, 4, 5] \xrightarrow{S} \\ & [2, 4] \xrightarrow{N} [2, 5] \xrightarrow{S} [2] \xrightarrow{N} [3] \xrightarrow{G} [3, 4] \xrightarrow{G} [3, 4, 5] \xrightarrow{S} [3, 4] \xrightarrow{N} [3, 5] \xrightarrow{S} [3] \xrightarrow{N} [4] \xrightarrow{G} [4, 5] \xrightarrow{S} [4] \xrightarrow{N} [5] \xrightarrow{S} \square \end{aligned}$$

Ένας εποπτικότερος τρόπος αναπαράστασης της διαδικασίας είναι μέσω του δένδρου της ανάτρεξης: Το δένδρο της ανάτρεξης για την κατασκευή των 3 υποσυνόλων του [5]:



Στο επόμενο πρόγραμμα δίδεται μια υλοποίηση της μεθόδου της ανάτρεξης για το πρόβλημα της κατασκευής όλων των k-υποσυνόλων ενός συνόλου στοιχείων S.

```
#Create all k-subsets of S
#We assume that the elements of S are sorted
#Each k-subset is stored in list D

S = [1,2,3,4,5]
k = 3
size = len(S)

#expand the partial solution
def grow_solution(D):
    #if D has less than k elements, append the smallest element of S
    #which is larger than the last element of D
    if len(D) == 0: D.append(1)
    if len(D) < k and D[len(D)-1] < size:
        D.append(D[len(D)-1]+1)
    return True
```

```

    return False

#try the next available option
def next_solution(D):
    #replace the last element of D by the smallest element of S
    #which is larger than the last element of D
    if len(D) > 0 and D[len(D)-1] < size:
        D[len(D)-1] += 1
        return True
    return False

#backtrack to a previous option
def shrink_solution(D):
    #remove the last element of D
    if len(D) > 0:
        D.pop()
        return True
    return False

#initial construction
D = []
#backtracking mechanism
print("The",k,"subsets of",S,"are:")
state = 'grow'
while state != 'finished':
    #if D has length k then we found a solution
    if len(D) == k: print(D)
    if state == 'grow':
        if grow_solution(D): state = 'grow'
        else: state = 'next'
    if state == 'next':
        if next_solution(D): state = 'grow'
        else: state = 'shrink'
    if state == 'shrink':
        if shrink_solution(D): state = 'next'
        else: break

```

Output:

```

The 3 - subsets of [1, 2, 3, 4, 5] are:
[1, 2, 3]
[1, 2, 4]
[1, 2, 5]
[1, 3, 4]
[1, 3, 5]
[1, 4, 5]
[2, 3, 4]
[2, 3, 5]
[2, 4, 5]
[3, 4, 5]

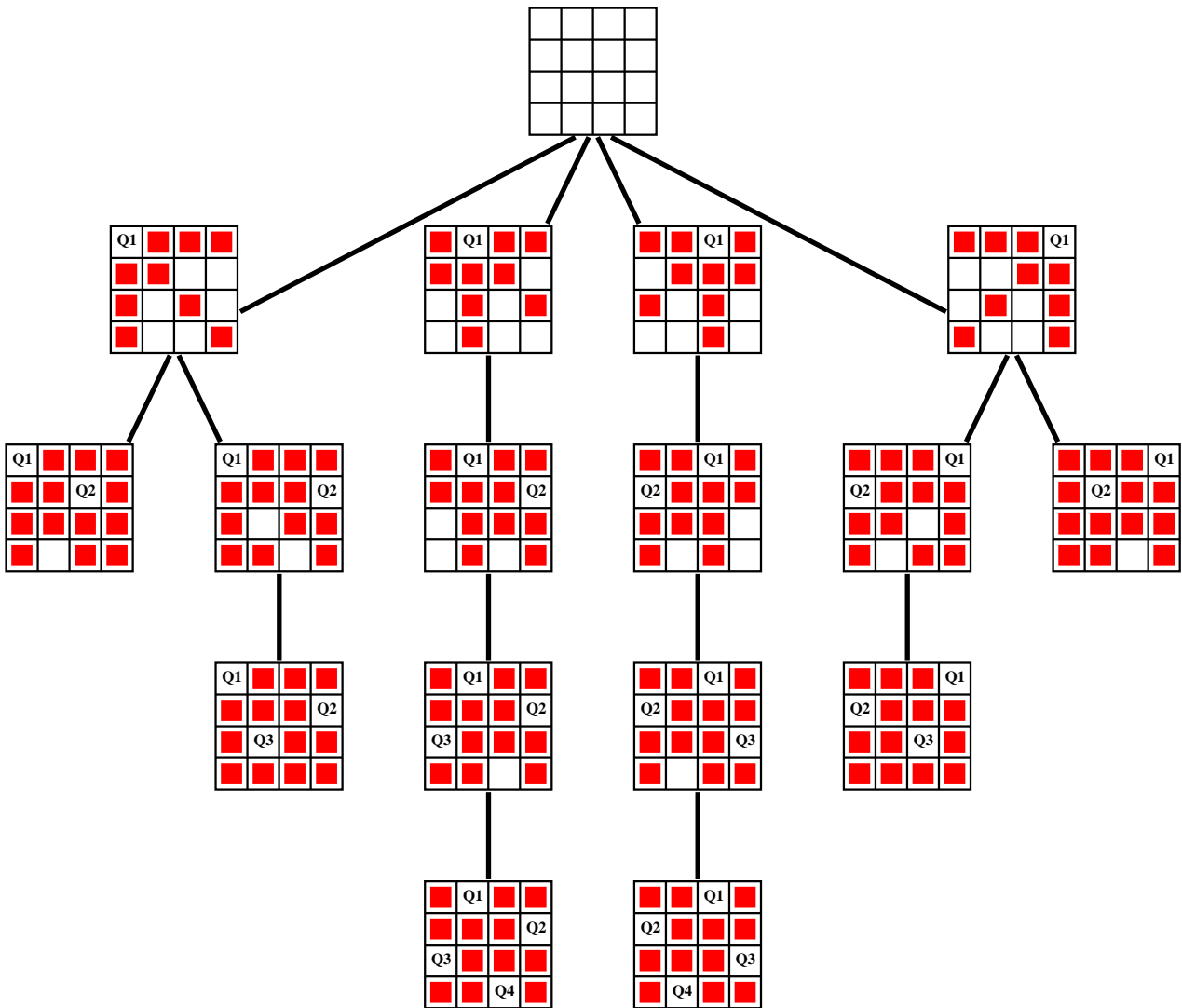
```

□

Παράδειγμα 3.6. Να βρεθούν όλοι τρόποι τοποθέτησης 4 βασιλισσών σε μια 4×4 σκακιέρα τέτοιοι ώστε οι βασίλισσες ανά δύο να μην απειλούνται (δηλαδή να μην βρίσκονται στην ίδια γραμμή, στήλη ή διαγώνιο).

Λύση. Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια τοποθέτηση ξεκινώντας από μια άδεια σκακιέρα και τοποθετώντας μια - μία τις 4 βασίλισσες έτσι ώστε κάθε φορά η νέα βασίλισσα να μην απειλεί τις προηγούμενες. Αν καταφέρουμε να τοποθετήσουμε και τις 4 τότε θα έχουμε βρει μια λύση στο πρόβλημα.

Το δένδρο της ανάτρεξης για το πρόβλημα αυτό είναι το επόμενο:



Επομένως, υπάρχουν δύο τέτοιες τοποθετήσεις των 4 βασιλισσών στην 4×4 σκακιέρα.

Στο επόμενο πρόγραμμα δίδεται μια υλοποίηση της μεθόδου της ανάτρεξης για το πρόβλημα εύρεσης όλων των τοποθετήσεων k μη απειλούμενων βασιλισσών σε μια $k \times k$ σκακιέρα.

```

#Place k nonattacking queens in a kxk board
#List D stores the positions of the queens
#If D[r] = c then a queen is placed in row r and col c

k = 4 #number of queens

#print a solution in 2D form with extra info
def print2Dext(D):
    c = r = len(D)
    for j in range(1,r):
        for k in range(1,c):
            if D[j] == k: print("Q", end = " ")
            else: print("*", end = " ")
        print(D[j])

#check if we can place a new queen at row r and col c
def isSafe(r,c):
    for j in range(1,r):
        if D[j]==c: return False #same column
        if abs(r-j) == abs(c - D[j]): return False #same diagonal
    return True

#increase the "size" of solution
def grow_solution(D):
    for c in range(1,k+1):
        if(len(D) < k+1):
            if isSafe(len(D),c):
                D.append(c) #place a new queen at row len(D) and col c
                return True
    return False

#try the next available option
def next_solution(D):
    if(len(D) == 1): return False #there are no queens on the board
    currentc = D[len(D)-1]
    for c in range(currentc+1,k+1):
        if(isSafe(len(D)-1,c)): #len(D)-1 is the last row
            D[len(D)-1] = c #move the last queen to col c
            return True
    return False

#backtrack to a previous option
def shrink_solution(D):
    if len(D) > 1: #at least one queen is in the board
        D.pop() #remove the last queen
        return True
    return False

#initial construction
D = [0] #the zero-th position is never used
#backtracking mechanism
state = 'grow'
counter = 0 #count solutions
while state != 'finished':
    if(len(D) == k+1):
        print2Dext(D)
        print("")
        counter += 1
    if state == 'grow':

```

```

        if(grow_solution(D)): state = 'grow'
        else: state = 'next'
    if state == 'next':
        if(next_solution(D)): state = 'grow'
        else: state = 'shrink'
    if state == 'shrink':
        if(shrink_solution(D)): state = 'next'
        else: break
print("Total number of solutions for", k, "x", k, "queens problem:",counter)

```

Output:

```

* Q * * 2
* * * Q 4
Q * * * 1
* * Q * 3

* * Q * 3
Q * * * 1
* * * Q 4
* Q * * 2

```

Total number of solutions for the 4 x 4 queen problem: 2

□

Παρατήρηση: Αν και η τεχνική της ανάτρεξης είναι γενική και εφαρμόζεται στα περισσότερα προβλήματα, όμως κάποιες φορές απαιτεί αρκετές αλληλοαναιρέσεις και για ορισμένα προβλήματα μπορεί να είναι πολύ αργή.

Υπάρχουν άλλες τεχνικές που βασίζονται στην δομή των συνδυαστικών αντικειμένων που μας ενδιαφέρουν και οι οποίες κατασκευάζουν με πιο ευθύ τρόπο αυτά τα αντικείμενα (με τον λιγότερο αριθμό αλληλοαναιρέσεων). Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε δύο τέτοιες γενικές τεχνικές κατασκευής συνδυαστικών αντικειμένων που βασίζονται στην μελέτη της δομής τους.

Παρόλα αυτά σημειώνουμε ότι η τεχνική της ανάτρεξης είναι πολύ σημαντική και μερικές φορές ίσως να είναι η μόνη διαθέσιμη τεχνική για την επίλυση κάποιων δύσκολων προβλημάτων.

3.5.2 Η αναδρομική και λεξικογραφική τεχνική

Υπάρχουν δυο βασικές γενικές μέθοδοι κατασκευής συνδυαστικών αντικειμένων οι οποίες λαμβάνουν υπόψη την δομή των αντικειμένων και την εύρεση κατάλληλης αναπαράστασης των αντικειμένων που πρόκειται να κατασκευασθούν.

- (i) Αναδρομική κατασκευή.
- (ii) Λεξικογραφική κατασκευή.

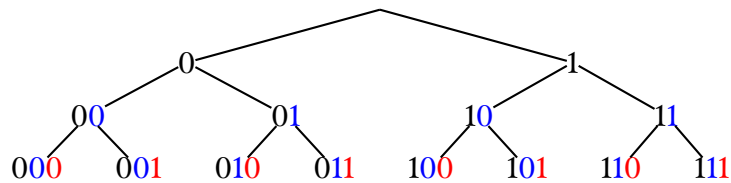
Συνήθως κάθε συνδυαστικό αντικείμενο έχει κάποιο “μέγεθος” ή “μήκος”.

Στην αναδρομική μέθοδο η κατασκευή των αντικειμένων “μεγέθους” n γίνεται χρησιμοποιώντας αντικείμενα μικρότερου “μεγέθους”.

Για παράδειγμα, επειδή κάθε μη κενή δυαδική λέξη b εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή

$$b = b'0, \text{ ή } b = b'1,$$

όπου b' είναι μια δυαδική λέξη με μήκος ένα λιγότερο από την b , (η b' μπορεί να είναι κενή) μπορούμε να κατασκευάσουμε αναδρομικά τις δυαδικές λέξεις μήκους n από τις δυαδικές λέξεις μήκους $n - 1$ προσθέτοντας στο τέλος κάθε δυαδικής λέξης μήκους $n - 1$ το ψηφίο 0 ή το ψηφίο 1.



Με την ίδια ιδέα μπορούμε να κατασκευάσουμε τις τριαδικές λέξεις μήκους n που χρησιμοποιούνται τα γράμματα a, b, c . Κάθε μη κενή τριαδική λέξη t εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή

$$t = at', \text{ ή } t = bt', \text{ ή } t = ct',$$

όπου t' είναι μια τριαδική λέξη με μήκος ένα λιγότερο από την t . (Η t' μπορεί να είναι κενή)

```
def RecTernary(n):
    if n==0: return [""]
    else:
        L = RecTernary(n-1)
        aL = ["a" + x for x in L]
        bL = ["b" + x for x in L]
        cL = ["c" + x for x in L]
        return aL + bL + cL

print(RecTernary(4))
```

Output:

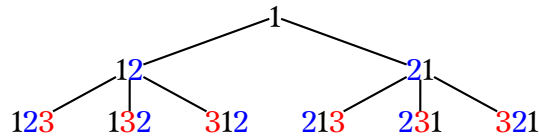
```
['aaaa', 'aaab', 'aaac', 'aaba', 'aabb', 'aabc', 'aaca', 'aacb', 'aacc', 'abaa', 'abab', 'abac', 'abba', 'abbb', 'abbc', 'abca', 'abcb', 'abcc', 'acaa', 'acab', 'acac', 'acba', 'acbb', 'acbc', 'acca', 'accb', 'accc', 'baaa', 'baab', 'baac', 'baba', 'babb', 'babc', 'baca', 'bach', 'bacc', 'bbaa', 'bbab', 'bbac', 'bbba', 'bbbb', 'bbbc', 'bbca', 'bbcb', 'bbcc', 'bcaa', 'bcab', 'bcac', 'bcba', 'bcbb', 'bcbc', 'bcc a', 'bccb', 'bccc', 'caaa', 'caab', 'caac', 'caba', 'cabb', 'cabc', 'caca', 'cacb', 'cacc', 'cbaa', 'cbab', 'cbac', 'cbba', 'cbbb', 'cbbc', 'cbca', 'cbcb', 'cbcc', 'ccaa', 'ccab', 'ccac', 'ccba', 'ccbb', 'ccbc', 'ccca', 'cccb', 'cccc']
```

Παρατηρείστε ότι στις παραπάνω εντολές προσθέτουμε το επιπλέον γράμμα στην αρχή κάθε λέξης t αλλά οι λέξεις at , bt , ct δεν είναι διαδοχικές στην λίστα.

Ένα ακόμη παράδειγμα αναδρομικής κατασκευής, αφορά τις μεταθέσεις του $[n]$. Κάθε μετάθεση του π του $[n]$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή

$$\pi = n\pi_1\pi_2 \cdots \pi_{n-1}, \text{ ή } \pi_1n\pi_2 \cdots \pi_{n-1}, \dots, \text{ ή } \pi_1\pi_2 \cdots \pi_{n-1}n$$

όπου $\pi_1\pi_2 \dots \pi_{n-1}$ είναι μια μετάθεση του $[n-1]$. Επομένως, μπορούμε να κατασκευάσουμε αναδρομικά τις μεταθέσεις μήκους n από τις μεταθέσεις μήκους $n-1$ εισάγοντας σε κάθε μετάθεση του $[n-1]$ το στοιχείο n σε όλες τις δυνατές θέσεις.



```
def recPermutations(n):
    if n==1:
        return ["1"]
    else:
        L = recPermutations(n-1)
        newL = []
        for p in L:
            for index in range(len(p),-1,-1):
                newp = p[:index] + str(n) + p[index:]
                newL.append(newp)
        return newL

print(recPermutations(4))
```

Output:

```
['1234', '1243', '1423', '4123', '1324', '1342', '1432', '4132', '3124', '3142',
 '3412', '4312', '2134', '2143', '2413', '4213', '2314', '2341', '2431', '4231',
 '3214', '3241', '3421', '4321']
```

Το πλεονέκτημα της αναδρομικής μεθόδου κατασκευής είναι ότι αν υπάρχει αναδρομική περιγραφή των συνδυαστικών αντικειμένων που μας ενδιαφέρουν τότε συνήθως είναι εύκολο να υλοποιηθεί και ο αντίστοιχος αλγόριθμος κατασκευής. Το προφανές μειονέκτημα είναι ότι για την κατασκευή των αντικειμένων “μεγέθους” n πρέπει να κατασκευάσουμε αντικείμενα μικροτέρων “μεγεθών”, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιώντας την τεχνική backtracking μπορούμε να αποφύγουμε την ανάγκη αυτή.

Η μέθοδος της λεξικογραφικής κατασκευής ακολουθεί την εξής διαδικασία:

- (1) Αρχικά, ορίζουμε στο σύνολο των συνδυαστικών αντικειμένων συγκεκριμένου “μεγέθους” μια (ολική) διάταξη. Συνήθως για την αναπαράσταση των αντικειμένων χρησιμοποιούνται λέξεις από κάποιο αλφάβητο και η διάταξη που χρησιμοποιείται είναι η λεξικογραφική διάταξη, εξ’ ου και η ονομασία της μεθόδου.
- (2) Αρχίζουμε την κατασκευή από το ελάχιστο στοιχείο αυτής της διάταξης.
- (3) Από κάθε αντικείμενο κατασκευάζουμε το αμέσως μεγαλύτερο (δηλαδή το επόμενο) αντικείμενο ως προς τη διάταξη αυτή.
- (4) Η κατασκευή τελειώνει όταν κατασκευασθεί το μέγιστο στοιχείο ως προς τη διάταξη.

Η λεξικογραφική κατασκευή έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να υλοποιηθεί παράλληλα αφού η διαδικασία μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε στοιχείο της διάταξης. Η δυσκολία της μεθόδου είναι η εύρεση μιας (ολικής) διάταξης σε ένα σύνολο αντικειμένων και ο υπολογισμός του επόμενου (ως προς τη διάταξη) ενός στοιχείου.

Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο της λεξικογραφικής κατασκευής εφαρμοζοντάς την στην κατασκευή των μεταθέσεων του $[n]$.

3.5.3 Λεξικογραφική κατασκευή των μεταθέσεων του $[n]$

Έστω $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n, \tau = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_n \in S_n$. Η λεξικογραφική διάταξη στο S_n ορίζεται ως εξής:

$$\sigma < \tau \Leftrightarrow \text{Υπάρχει } k \in [n] \text{ ώστε } \begin{cases} \sigma_j = \tau_j \text{ για κάθε } j < k. \\ \sigma_k < \tau_k \end{cases}$$

Παράδειγμα: Για τις μεταθέσεις $\sigma = 1372564, \tau = 1374256, \pi = 2673145, \rho = 2154763$ ισχύει ότι

$$\sigma < \tau < \rho < \pi.$$

Παρατήρησεις

- (i) Η διάταξη αυτή είναι ολική.
- (ii) Το ελάχιστο στοιχείο του S_n (ως προς τη διάταξη) είναι η μετάθεση

$$12 \cdots (n-2)(n-1)n.$$

- (iii) Το μέγιστο στοιχείο του S_n (ως προς τη διάταξη) είναι η μετάθεση

$$n(n-1)(n-2) \cdots 21.$$

- (iv) Γενικά, αν $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ με $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Η ελάχιστη μετάθεση του $S(X)$ (που είναι συμβιβαστή με τη λεξικογραφική διάταξη) είναι η

$$a_1a_2 \cdots a_n$$

και η μέγιστη μετάθεση είναι η

$$a_n \cdots a_2a_1.$$

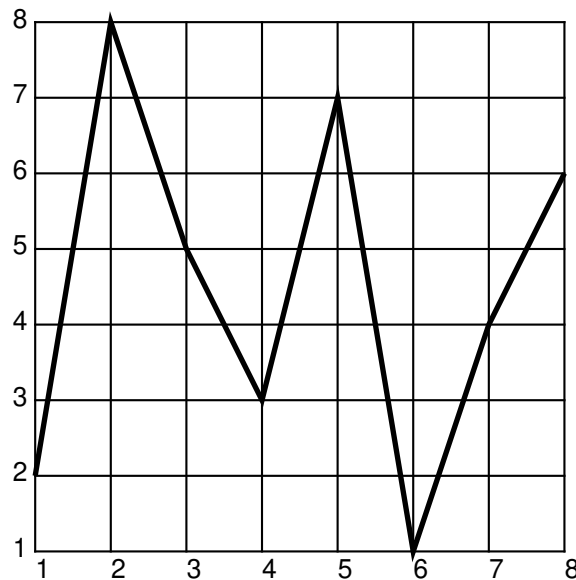
Προκειμένου να βρούμε το επόμενο στοιχείο που ακολουθεί μια μετάθεση θα χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο ορισμό.

Έστω $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n \in S_n$. Λέμε ότι η μετάθεση σ παρουσιάζει **ανάβαση** (ascent) στη θέση j αν $\sigma_j < \sigma_{j+1}$.

Παράδειγμα: Η μετάθεση $\tau = 28537146$ παρουσιάζει ανάβαση στις θέσεις 1, 4, 6 και 7, διότι $\tau_1 = 2 < 8 = \tau_2$, $\tau_4 = 3 < 7 = \tau_5$, $\tau_6 = 1 < 4 = \tau_7$ και $\tau_7 = 4 < 6 = \tau_8$. Η μετάθεση $\rho = 54321$ δεν παρουσιάζει ανάβαση.

Παρατήρησεις

- (i) Η ονομασία ανάβαση προέρχεται από την γεωμετρική εικόνα μιας ανάβασης στη γραφική αναπαράσταση μιας μετάθεσης.



Η μετάθεση $\tau = 28537146$

- (ii) Μια μετάθεση μπορεί να έχει πολλές αναβάσεις. Μετά την τελευταία ανάβαση (από τα αριστερά προς τα δεξιά) τα στοιχεία της μετάθεσης που ακολουθούν είναι σε φθίνουσα σειρά.

Πρόταση 3.5.1. Έστω $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j+1} \cdots \sigma_n \in S_n$ με τελευταία ανάβαση στη θέση j . Αν σ_k είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $\{\sigma_{j+1}, \sigma_{j+2}, \dots, \sigma_n\}$ που ξεπερνά το σ_j , τότε η επόμενη μετάθεση της σ είναι

$$\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}\sigma_k\sigma_n \cdots \sigma_{k+1}\sigma_j\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}$$

Με άλλα λόγια, ο υπολογισμός της επόμενης μετάθεσης της σ γίνεται ως εξής: Έστω ότι η τελευταία ανάβαση της σ παρουσιάζεται στη θέση j . Βρίσκουμε το ελάχιστο σ_k που ξεπερνά το σ_j μεταξύ των στοιχείων $\sigma_{j+1}, \dots, \sigma_n$. Εναλλάσσουμε τα στοιχεία σ_j, σ_k . Τέλος, αντιστρέφουμε τη σειρά των $\sigma_{j+1}, \dots, \sigma_n$.

Παραδείγματα

- (i) Η επόμενη της μετάθεσης $\tau = 28537146$ υπολογίζεται ως εξής: Η τελευταία ανάβαση της τ παρουσιάζεται στη θέση 7, αφού $4 < 6$. Το μικρότερο στοιχείο που ακολουθεί το 4 και ξεπερνά το 4 είναι το 6. Εναλλάσσουμε τα στοιχεία αυτά οπότε προκύπτει η μετάθεση 28537164 και αντιστρέφουμε τη σειρά των στοιχείων που ακολουθούν το 6. Εδώ υπάρχει μόνο το 4 οπότε δεν υπάρχει αλλαγή. Άρα, η επόμενη μετάθεση της τ είναι η $\sigma = 28537164$.

Η επόμενη της μετάθεσης $\sigma = 28537164$ υπολογίζεται ως εξής: Η τελευταία ανάβαση της σ παρουσιάζεται στη θέση 6, αφού $1 < 6$. Το μικρότερο στοιχείο που ακολουθεί το 1 και ξεπερνά το 1 είναι το 4. Εναλλάσσουμε τα στοιχεία αυτά οπότε προκύπτει η μετάθεση 28537461 και αντιστρέφουμε τη σειρά των στοιχείων που ακολουθούν το 4. Εδώ αντιστρέφουμε τα 61 οπότε η επόμενη μετάθεση της σ είναι η $\rho = 28537416$.

Η επόμενη της μετάθεσης $\rho = 28537416$ είναι η μετάθεση $\pi = 28537461$.

Η επόμενη της μετάθεσης $\pi = 28537461$ είναι η μετάθεση $\chi = 28537614$

Η επόμενη της μετάθεσης $\chi = 28537614$ είναι η μετάθεση $\psi = 28537641$

Η επόμενη της μετάθεσης $\psi = 28537641$ είναι η μετάθεση $\omega = 28541367$.

(ii) Οι 24 μεταθέσεις του $[4]$ έχουν την εξής σειρά ως προς τη λεξικογραφική διάταξη:

$$\begin{aligned} 1234 &< 1243 < 1324 < 1342 < 1423 < 1432 \\ &< 2134 < 2143 < 2314 < 2341 < 2413 < 2431 \\ &< 3124 < 3142 < 3214 < 3241 < 3412 < 3421 \\ &< 4123 < 4132 < 4213 < 4231 < 4312 < 4321 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη, κάθε μετάθεση σ του S_n έχει μια θέση στη διάταξη.

Έστω $\sigma \in S_n$. Ο αριθμός των μεταθέσεων του S_n που προηγούνται (στη διάταξη) της μετάθεσης σ ονομάζεται **rank** της σ και συμβολίζεται με $\text{rank}_n(\sigma)$, ή απλούστερα $\text{rank}(\sigma)$.

Παράδειγματα $\text{rank}(1234) = 0$, $\text{rank}(3124) = 12$, $\text{rank}(2134) = 6$, $\text{rank}(4321) = 23 = 4! - 1$.

Για κάθε $\sigma \in S_n$ ισχύει ότι $0 \leq \text{rank}(\sigma) \leq n! - 1$.

Στην συνέχεια δίδεται ένας τύπος υπολογισμού του $\text{rank}(\sigma)$ με την βοήθεια των αριθμού των αντιστροφών κάθε στοιχείου της μετάθεσης. Χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε το rank χωρίς να χρειαστεί να κατασκευάσουμε τις μεταθέσεις που προηγούνται.

Αν $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n \in S_n$ τότε για κάθε $k \in [n]$ ο αριθμός a_k των **αντιστροφών** (inversions) του k -οστού στοιχείου σ_k της σ ισούται με τον αριθμό των σ_j για τα οποία $k < j$ και $\sigma_j < \sigma_k$.

Η ακολουθία a_1, a_2, \dots, a_n ονομάζεται **ακολουθία αντιστροφών** της μετάθεσης σ .

Με άλλα λόγια το a_k ισούται με το πλήθος των στοιχείων σ_j που είναι δεξιότερα του σ_k και είναι μικρότερα από το σ_k . Προφανώς, ο αριθμός των αντιστροφών του n -οστού στοιχείου ισούται πάντα με 0.

Παράδειγμα: Η ακολουθία των αντιστροφών της μετάθεσης $\sigma = 432516$ είναι

$$a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0, a_6 = 0.$$

Παρατηρήστε ότι

- ο αριθμός a_k ισούται με το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι του σ_k και διαφορετικοί από τα $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}$.
- ο αριθμός a_k είναι φραγμένος από το $n - k$.

Αποδεικνύεται ότι η ακολουθία a_1, a_2, \dots, a_n είναι μοναδική για κάθε μετάθεση. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.5.2. Έστω το A το σύνολο των ακέραιων ακολουθιών $(a_k)_{k \in [n]}$ μήκους n με $0 \leq a_k \leq n - k$. Σε κάθε μετάθεση του S_n αντιστοιχεί μια και μοναδική ακολουθία του συνόλου A η οποία ισούται με την ακολουθία αντιστροφών των στοιχείων της σ .

Πρόταση 3.5.3. Έστω $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \in S_n$. Αν a_1, a_2, \dots, a_n είναι η ακολουθία των αντιστροφών των στοιχείων της σ , τότε

$$\text{rank}(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (n-k)! = a_1 \cdot (n-1)! + a_2 \cdot (n-2)! + \cdots + a_{n-1} \cdot 1!.$$

Απόδειξη. Έστω $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \in S_n$.

Οι μεταθέσεις τ του S_n που προηγούνται της σ διαμερίζονται στα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_{n-1} όπου

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\tau \in S_n : \tau_1 < \sigma_1\} \\ A_2 &= \{\tau \in S_n : \tau_1 = \sigma_1 \text{ και } \tau_2 < \sigma_2\} \\ &\vdots \\ A_i &= \{\tau \in S_n : \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{i-1} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1} \text{ και } \tau_i < \sigma_i\} \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= \{\tau \in S_n : \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \text{ και } \tau_{n-1} < \sigma_{n-1}\} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\text{rank}(\sigma) = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_i| + \cdots + |A_{n-1}|$$

Έστω $\tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n \in A_1$.

Για το τ_1 υπάρχουν $\sigma_1 - 1 = a_1$ επιλογές.

Για το τ_2 υπάρχουν $n - 1$ επιλογές.

\vdots

Για το τ_{n-1} υπάρχουν 2 επιλογές.

Για το τ_n υπάρχει 1 επιλογή.

Άρα, από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι $|A_1| = a_1(n-1)!$.

Γενικότερα, έστω $\tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n \in A_i, i \in [n-1]$.

Για τα $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{i-1}$ υπάρχει 1 επιλογή.

Για το τ_i υπάρχουν a_i επιλογές αφού πρέπει $\tau_i < \sigma_i$ και $\tau_i \neq \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}$.

Για το τ_{i+1} υπάρχουν $n - i$ επιλογές.

\vdots

Για το τ_{n-1} υπάρχουν 2 επιλογές.

Για το τ_n υπάρχει 1 επιλογή.

Άρα, από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι $|A_i| = a_i(n-i)!$.

Τελικά,

$$\text{rank}(\sigma) = a_1(n-1)! + a_2(n-2)! + \cdots + a_{n-1}1! \quad \square$$

Παραδείγματα

- 1) Για την μετάθεση 3124 η ακολουθία των αντιστροφών της είναι $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$. Άρα, $\text{rank}(3124) = 2 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 12$.
- 2) Για την μετάθεση 31542 η ακολουθία των αντιστροφών της είναι $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 0$. Άρα, $\text{rank}(31542) = 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 53$.

3) Για την μετάθεση 432516 η ακολουθία των αντιστροφών της είναι $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0, a_0$. Άρα, $\text{rank}(432516) = 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 360 + 48 + 6 + 2 = 416$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντίστροφο πρόβλημα:

Δοθέντος ενός $j \in \{0, 1, \dots, n! - 1\}$ να βρεθεί η μετάθεση $\sigma \in S_n$ με $\text{rank}(\sigma) = j$.

Η αντίστοιχη συνάρτηση ονομάζεται **unrank**: $\{0, 1, \dots, n! - 1\} \rightarrow S_n$. Ο υπολογισμός της συνάρτησης unrank βασίζεται στην ιδιότητα ότι κάθε φυσικός αριθμός $j \in \{0, 1, \dots, n! - 1\}$ μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$j = d_{n-1}(n-1)! + d_{n-2}(n-2)! + \dots + d_3 3! + d_2 2! + d_1 1!,$$

όπου $0 \leq d_i \leq i$, για κάθε $i \in [n-1]$.

Αυτό το σύστημα αρίθμησης ονομάζεται **παραγοντικό σύστημα αρίθμησης** ή **σύστημα αρίθμησης του Cantor**.

Παραδείγματα

(1) Για $j = 53$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 53 &= 2 \cdot 4! + 5 \\ &= 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 5 \\ &= 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \\ &= 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \end{aligned}$$

δηλαδή $d_4 = 2, d_3 = 0, d_2 = 2, d_1 = 1$.

(2) Για $j = 160$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 160 &= 1 \cdot 5! + 40 \\ &= 1 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 16 \\ &= 1 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \\ &= 1 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! \end{aligned}$$

δηλαδή $d_5 = 1, d_4 = 1, d_3 = 2, d_2 = 1, d_1 = 0$.

Υπολογισμός της απεικόνισης unrank

Έστω $j \in \{0, 1, \dots, n! - 1\}$ και $j = d_{n-1}(n-1)! + d_{n-2}(n-2)! + \dots + d_2 2! + d_1 1!$ η αντίστοιχη αναπαράσταση του j στο παραγοντικό σύστημα αρίθμησης.

Η βασική παρατήρηση για τον υπολογισμό της unrank) είναι η ακόλουθη:

Η ακολουθία (d_i) είναι η ακολουθία (a_i) των αντιστροφών της σ με αντίθετη σειρά.

Παραδείγματα

(1) Για $n = 6$ και $j = 53$ έχουμε ότι

$$53 = 0 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$$

δηλαδή $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 2, a_5 = 1$ και $a_6 = 0$.

Επειδή $a_1 = 0$ προκύπτει ότι $\sigma_1 = 1$.

Επειδή $a_2 = 2$ προκύπτει ότι $\sigma_2 = 4$.

Επειδή $a_3 = 0$ προκύπτει ότι $\sigma_3 = 2$.

Επειδή $a_4 = 2$ προκύπτει ότι $\sigma_4 = 6$.

Επειδή $a_5 = 1$ προκύπτει ότι $\sigma_5 = 5$.

Άρα, $\sigma_6 = 3$.

Άρα, η ζητούμενη μετάθεση είναι η $\sigma = 142653$.

(2) Για $n = 6$ και $j = 416$ έχουμε ότι

$$416 = 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$$

δηλαδή $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0$ και $a_6 = 0$.

Επειδή $a_1 = 3$ προκύπτει η $\sigma_1 = 4$.

Επειδή $a_2 = 2$ προκύπτει η $\sigma_2 = 3$.

Επειδή $a_3 = 1$ προκύπτει η $\sigma_3 = 2$.

Επειδή $a_4 = 1$ προκύπτει η $\sigma_4 = 5$.

Επειδή $a_5 = 0$ προκύπτει η $\sigma_5 = 1$.

Άρα, $\sigma_6 = 6$.

Άρα, η ζητούμενη μετάθεση είναι η $\sigma = 432516$.

(3) Για $n = 6$ και $j = 300$ έχουμε

$$300 = 2 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$$

δηλαδή $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 0, a_5 = 0$ και $a_6 = 0$.

Επειδή $a_1 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 3$.

Επειδή $a_2 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 4$.

Επειδή $a_3 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 5$.

Επειδή $a_4 = 0$ προκύπτει η $\sigma = 1$.

Επειδή $a_5 = 0$ προκύπτει η $\sigma = 2$.

Άρα, $\sigma_6 = 6$

Άρα, η ζητούμενη μετάθεση είναι η $\sigma = 345126$.

Παρατήρηση: Ένας εναλλακτικός τρόπος να κατασκευάσουμε την μετάθεση $\sigma \in S_n$ με $\text{rank}_n(\sigma) = j$ όπου $j = d_{n-1}(n-1)! + d_{n-2}(n-2)! + \dots + d_2 2! + d_1 1!$ είναι ο επόμενος επαναληπτικός αλγόριθμος:

Αρχικά θέτουμε $\sigma = 1$.

Για κάθε d_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$ αυξάνουμε κατά ένα όλα τα στοιχεία της σ που είναι μεγαλύτερα από το d_i και προσθέτουμε το $d_i + 1$ ως πρώτο στοιχείο της σ .

Παραδείγματα

(1) Για $n = 6$ και $j = 53$ έχουμε ότι

$$53 = 0 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$$

δηλαδή $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 0$, $d_4 = 2$ και $d_5 = 0$.

Άρα, η $\sigma \in S_6$ με $\text{rank}_6(\sigma) = 53$ κατασκευάζεται ως εξής:

Αρχικά, θέτουμε $\sigma = 1$.

Επειδή $d_1 = 1$ προκύπτει η $\sigma = 21$.

Επειδή $d_2 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 321$.

Επειδή $d_3 = 0$ προκύπτει η $\sigma = 1432$.

Επειδή $d_4 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 31542$.

Επειδή $d_5 = 0$ προκύπτει η $\sigma = 142653$.

Άρα, η ζητούμενη μετάθεση είναι η $\sigma = 142653$.

(2) Για $n = 6$ και $j = 416$ έχουμε ότι

$$416 = 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$$

δηλαδή $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$, $d_4 = 2$, $d_5 = 3$.

Άρα, η $\sigma \in S_6$ με $\text{rank}_6(\sigma) = 416$ κατασκευάζεται ως εξής:

Αρχικά, θέτουμε $\sigma = 1$.

Επειδή $d_1 = 0$ προκύπτει η $\sigma = 12$.

Επειδή $d_2 = 1$ προκύπτει η $\sigma = 213$.

Επειδή $d_3 = 1$ προκύπτει η $\sigma = 2314$.

Επειδή $d_4 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 32415$.

Επειδή $d_5 = 3$ προκύπτει η $\sigma = 432516$.

Άρα, η ζητούμενη μετάθεση είναι η $\sigma = 432516$.

(3) Για $n = 6$ και $j = 300$ έχουμε

$$300 = 2 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$$

δηλαδή $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 2$, $d_4 = 2$, $d_5 = 2$.

Αρχικά, θέτουμε $\sigma = 1$.

Επειδή $d_1 = 0$ προκύπτει η $\sigma = 12$.

Επειδή $d_2 = 0$ προκύπτει η $\sigma = 123$.

Επειδή $d_3 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 3124$.

Επειδή $d_4 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 34125$.

Επειδή $d_5 = 2$ προκύπτει η $\sigma = 345126$.

Άρα, η ζητούμενη μετάθεση είναι η $\sigma = 345126$.

3.5.4 Λεξικογραφική κατασκευή των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για την λεξικογραφική κατασκευή των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τα υποσύνολα του $[n]$ θα χρησιμοποιήσουμε μια αναπαράσταση τους που βασίζεται σε δυαδικές λέξεις. Κάθε υποσύνολο A του $[n]$ με k στοιχεία μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια δυαδική λέξη $w = w_1w_2 \cdots w_n$ μήκους n με ακριβώς k άσσους ως εξής:

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in A \\ 0, & \text{αν } i \notin A \end{cases}$$

Παράδειγμα: Το υποσύνολο $\{1, 4, 5, 7\}$ του $[8]$ αντιστοιχεί στην επόμενη δυαδική λέξη μήκους 8 με 4 άσσους:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Ενώ, η δυαδική λέξη

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

αντιστοιχεί στο υποσύνολο $\{2, 5, 6, 7, 8\}$ του $[8]$.

Με βάση αυτή την αναπαράσταση το πρόβλημα κατασκευής των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία ανάγεται στο επόμενο ισοδύναμο πρόβλημα.

Πρόβλημα κατασκευής δυαδικών λέξεων μήκους n με k άσσους. Να κατασκευασθούν όλες οι δυαδικές λέξεις μήκους n με k άσσους και $n - k$ μηδενικά.

Λεξικογραφική διάταξη των δυαδικών λέξεων. Αν x, y είναι δύο διαφορετικές δυαδικές λέξεις τότε η λεξικογραφική διάταξη ορίζεται ως εξής: Θα λέμε ότι η x **προηγείται** της y ή ότι η y **έπεται** της x ή ότι η x **είναι μικρότερη** από την y ή ότι η y **είναι μεγαλύτερη** από την x και θα γράφουμε

$$x < y \text{ αν } \begin{cases} y = xa, & \text{όπου } a \text{ μια μη κενή δυαδική λέξη, ή} \\ x = z0x', & \\ y = z1y', & \end{cases} \text{όπου } z, x', y' \text{ είναι δυαδικές λέξεις.}$$

Παραδείγματα

i) Σύμφωνα με την προηγούμενη διάταξη είναι

$$01 < 010110 < 01100 < 01101$$

ii) Οι 10 δυαδικές λέξεις μήκους 5 με 2 άσσους και 3 μηδενικά σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη έχουν την εξής σειρά: $00011 < 00101 < 00110 < 01001 < 01010 < 01100 < 10001 < 10010 < 10100 < 11000$

Έστω A ένα σύνολο δυαδικών λέξεων και $x, y \in A$ είναι δύο δυαδικές λέξεις, ίσου μήκους, η y ονομάζεται **η επόμενη** της x ή η x ονομάζεται **η προηγούμενη** της y αν

$$x < y$$

και δεν υπάρχει άλλη λέξη $z \in A$ ώστε

$$x < z < y$$

Παράδειγμα: Αν $A = \{00011, 00101, 00110, 01001, 01010, 11000\}$ τότε η επόμενη της λέξης 00101 είναι η λέξη 00110, η προηγούμενη της λέξης 11000 είναι η λέξη 01010, ενώ η λέξη 11000 δεν έχει επόμενη λέξη.

Πρόταση 3.5.4. Έστω A το σύνολο των δυαδικών λέξεων μήκους n με ακριβώς k άσσους. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- i) Το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου A είναι η λέξη $0^{n-k}1^k$.
- ii) Το μέγιστο στοιχείο του συνόλου A είναι η λέξη 1^k0^{n-k} .
- iii) Αν $x \in A$ και $x \neq 1^k0^{n-k}$ τότε η x γράφεται στη μορφή

$$x = z 01 1^\mu 0^\nu, \text{ όπου } \mu, \nu \in \mathbb{N}, z \text{ δυαδική λέξη}$$

(διάσπαση με βάση το τελευταίο 01)

- iv) Αν $x \in A$, $x \neq 1^k0^{n-k}$ και $x = z 01 1^\mu 0^\nu$ τότε η επόμενη λέξη της x είναι η λέξη

$$x = z 10 0^\nu 1^\mu$$

Παραδείγματα Έστω A το σύνολο των δυαδικών λέξεων μήκους 16 με 6 άσσους.

- i) Η λέξη $x = 0001101001110000$ του συνόλου A με βάση το τελευταίο 01 γράφεται στη μορφή

$$x = z 01 1^2 0^4, \text{ όπου } z = 00011010$$

Η επόμενη της λέξης x είναι η λέξη

$$z 10 0^4 1^2 = 00011010 10 000011$$

- ii) Η λέξη $x' = 0100011100000011$ του συνόλου A με βάση το τελευταίο 01 γράφεται στη μορφή

$$x' = z' 01 1^1 0^0, \text{ όπου } z' = 010001110000$$

Η επόμενη της λέξης x' είναι η λέξη

$$z' 10 0^0 1^1 = 010001110000 10 1$$

Αλγόριθμος για την εύρεση της επόμενης λέξης ως προς την λεξικογραφική διάταξη

Είσοδος: Μια δυαδική λέξη $c = c[0]c[1] \dots c[n-1]$ με k άσσους.

Έξοδος: Η επόμενη της δυαδικής λέξης x

```

numberofzeros = 0;
for(int j=n-1; j>=1; j--)
if(c[j]==0) {numberofzeros++;}
else{
    if(c[j]==1 && c[j-1]==0){
        c[j]=0;    c[j-1]=1;
        for(int i=j+1; i<=j+numberofzeros; i++){
            c[i]=0;
        }
        for(int i=j+numberofzeros+1; i<n-1; i++){
            c[i]=1;
        }
        break;
    }
}
}

```

Με λόγια: Διαβάζουμε την λέξη c από το τέλος προς την αρχή μέχρι να βρούμε το τελευταίο 01 και ταυτόχρονα μετράμε τα 0 που συναντήσαμε. Όταν το βρούμε, αλλάζουμε κατεύθυνση, το

μετατρέπουμε σε 10, θέτουμε στις επόμενες θέσεις τόσα μηδέν 0 όσα μετρήσαμε και στις υπόλοιπες θέσεις τοποθετούμε 1.

Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο αλγόριθμο μπορούμε να κατασκευάσουμε όλες τις δυαδικές λέξεις μήκους n με k άσσους, ως εξής:

- Ξεκινάμε από το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου, δηλαδή την λέξη $0^{n-k}1^k$.
- Κάθε φορά υπολογίζουμε την επόμενη λέξη.
- Σταματάμε όταν φτάσουμε στο μέγιστο στοιχείο του συνόλου την λέξη 1^k0^{n-k} .

3.6 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 3.1 (Λέξεις Fibonacci). Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους $n \geq 1$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικά 1 ισούται με τον $(n + 1)$ -οστό αριθμό Fibonacci

Λύση. Έστω A_n το σύνολο των δυαδικών λέξεων μήκους n που δεν περιέχουν δύο διαδοχικά 1.

$$A_1 = \{0, 1\}, \text{ οπότε } |A_1| = 2 = f_2.$$

$$A_2 = \{00, 01, 10\}, \text{ οπότε } |A_2| = 3 = f_3.$$

$$A_3 = \{000, 001, 010, 100, 101\}, \text{ οπότε } |A_3| = 5 = f_4.$$

$$A_4 = \{0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010\}, \text{ οπότε } |A_4| = 8 = f_5.$$

(1ος τρόπος) Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $|A_n|$ ικανοποιεί την αναγωγική σχέση

$$\underbrace{|A_n|}_{f_{n+1}} = \underbrace{|A_{n-1}|}_{f_n} + \underbrace{|A_{n-2}|}_{f_{n-1}} \text{ για } n \geq 3$$

(Ήδη ελέγξαμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι σωστές δηλαδή $|A_1| = f_2 = 2$ και $|A_2| = f_3 = 3$).

Το σύνολο A_n , όπου $n \geq 3$, διαμερίζεται σε δύο υποσύνολα: Στο σύνολο E_n που περιέχει τις λέξεις που τελειώνουν με 1 και στο σύνολο M_n που περιέχει τις λέξεις που τελειώνουν με 0. Επομένως

$$A_n = E_n \cup M_n \text{ και } |A_n| = |E_n| + |M_n|$$

Αν σε κάθε λέξη του M_n (τελειώνει σε 0) σβήσουμε το τελευταίο 0 προκύπτει μια λέξη μήκους $n - 1$ η οποία δεν περιέχει δύο διαδοχικά 1 και άρα ανήκει στο A_{n-1} (και αντιστρόφως). Άρα $|M_n| = |A_{n-1}|$. Κάθε λέξη του E_n (τελειώνει σε 1) υποχρεωτικά τελειώνει σε 01. Αν σβήσουμε την κατάληξη 01 στις λέξεις του E_n προκύπτουν λέξεις μήκους $n - 2$ οι οποίες δεν περιέχουν δύο διαδοχικά 1 και άρα ανήκει στο A_{n-2} (και αντιστρόφως). Άρα $|E_n| = |A_{n-2}|$.

Οπότε, για $n \geq 3$ ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|$$

(2ος τρόπος) Αρκεί να βρούμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των δυαδικών λέξεων μήκους n που δεν περιέχουν διαδοχικά 1 και των υποσυνόλων του $[n]$ που δεν περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς (για τα οποία γνωρίζουμε ότι απαριθμούνται από το f_{n+1}).

Θεωρούμε την παρακάτω (απλή) απεικόνιση: Σε κάθε υποσύνολο A του $[n]$ αντιστοιχίζουμε την δυαδική λέξη $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ όπου

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \in A \\ 0 & \text{αν } i \notin A \end{cases}$$

Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη.

Στο υποσύνολο $\{1, 3, 7\}$ του $[8]$ αντιστοιχεί η δυαδική λέξη

1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	1	0
w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8

Στην δυαδική λέξη 0 1 0 1 0 0 1 1 αντιστοιχεί το υποσύνολο $\{2, 4, 7, 8\}$ του $[8]$.

1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	1	0	0	1	1
w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8

Η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ του συνόλου όλων των υποσυνόλων του $[n]$ και του συνόλου όλων των δυαδικών λέξεων μήκους n . (Τα σύνολα αυτά περιέχουν 2^n στοιχεία.)

Αν θεωρήσουμε τον περιορισμό της απεικόνισης στα υποσύνολα του $[n]$ χωρίς διαδοχικούς αριθμούς προκύπτουν δυαδικές λέξεις χωρίς διαδοχικά 1 (και αντιστρόφως).

Άρα, τα δύο σύνολα είναι ισοπληθικά, δηλαδή $|A_n| = f_{n+1}$. □

Χρησιμοποιώντας την αναγωγική εξίσωση των αριθμών Fibonacci μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των αριθμών Fibonacci.

Άσκηση 3.2 (Μερικά αθροίσματα ακολουθίας Fibonacci). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$(i) \sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1.$$

$$(ii) \sum_{k=0}^n f_{2k} = f_{2n+1}.$$

$$(iii) \sum_{k=0}^n f_{2k+1} = f_{2n+2} - 1.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς n .

(i) Για $n = 0$ έχουμε ότι $f_0 = 1 = 2 - 1 = f_2 - 1$, άρα η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό μικρότερο του n , όπου $n \geq 1$. Θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για το n .

$$\sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_k + f_n = f_{n+1} - 1 + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Για $n = 0$ έχουμε ότι $\sum_{k=0}^0 f_{2k} = f_0 = 1 = f_1$, άρα η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό μικρότερο του n , όπου $n \geq 1$. Θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για το n .

$$\sum_{k=0}^n f_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} f_{2k} + f_{2n} = f_{2(n-1)+1} + f_{2n} = f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n+1}.$$

Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Για $n = 0$ έχουμε ότι $\sum_{k=0}^0 f_{2k+1} = f_1 = 1 = 2 - 1 = f_2 - 1$, άρα η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό μικρότερο του n , όπου $n \geq 1$. Θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για το n .

$$\sum_{k=0}^n f_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+1} + f_{2n+1} = f_{2(n-1)+2} - 1 + f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n+1} - 1 = f_{2n+2} - 1.$$

Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Άσκηση 3.3 (Αναγωγική σχέση τύπου Fibonacci). Έστω (a_n) μια ακολουθία n οποία ικανοποιεί την αναγωγική σχέση

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \text{ για } n \geq 1$$

με αρχικές συνθήκες $a_0 = a, a_1 = b$, όπου $a, b \geq 0$.

i) Δεδομένου ότι υπάρχει, να βρεθεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

ii) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει ότι $a_n = b f_{n-1} + a f_{n-2}$, όπου f_n είναι ο n -οστός αριθμός Fibonacci.

Λύση. i) Έστω ότι το όριο υπάρχει και ισούται με $x \neq 0$ τότε από την αναγωγική σχέση προκύπτει ότι

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{x}$$

Επομένως, $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. (Η δεύτερη ρίζα απορρίπτεται επειδή είναι αρνητική). Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Παρατήρηση: Για $a = b = 1$ η ακολουθία a_n είναι η ακολουθία των αριθμών Fibonacci. Επίσης, παρατηρήστε ότι ο ρυθμός αύξησης της ακολουθίας a_n δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες a, b αλλά είναι κοινός για όλες τις ακολουθίες (a_n) που ορίζονται από την αναγωγική σχέση $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

ii) Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς n .

Για $n = 2$, έχουμε ότι $a_2 = a_1 + a_0 = b + a = bf_1 + af_0$, άρα ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 2$.

Για $n = 3$, έχουμε ότι $a_3 = a_2 + a_1 = b + a + b = 2b + a = bf_2 + af_1$, άρα ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 3$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του n , όπου $n \geq 3$. Θα αποδειχθεί ότι ισχύει για το $n + 1$.

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = (f_{n-1}b + f_{n-2}a) + (f_{n-2}b + f_{n-3}a) = (f_{n-1} + f_{n-2})b + (f_{n-2} + f_{n-3})a = f_nb + f_{n-1}a.$$

Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \geq 2$.

Παρατήρηση: Όλες οι ακολουθίες (a_n) που ορίζονται από την αναγωγική σχέση $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ είναι γραμμικός συνδυασμός δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci. \square

Άσκηση 3.4 (Σύστημα αναπαράστασης Fibonacci). Να εκφραστεί ο αριθμός 800 ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών αριθμών Fibonacci.

Λύση. Έστω n ο αριθμός που θέλουμε να εκφράσουμε ως άθροισμα διαφορετικών μη διαδοχικών αριθμών Fibonacci. Η εύρεση των όρων του αθροίσματος υπολογίζεται αναδρομικά. Κάθε φορά υπολογίζουμε τον μέγιστο όρο f_k της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci που δεν ξεπερνά το n . Μετά, θέτουμε n ίσο με $n - f_k$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία έως ότου $n = 0$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Αρχικά, $n = 800$.

Ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το $n = 800$ είναι ο $f_{14} = 610$. Θέτουμε $n = 800 - 610 = 190$ και συνεχίζουμε.

Ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το $n = 190$ είναι ο $f_{11} = 144$. Θέτουμε $n = 190 - 144 = 46$ και συνεχίζουμε.

Ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το $n = 46$ είναι ο $f_8 = 34$. Θέτουμε $n = 46 - 34 = 12$ και συνεχίζουμε.

Ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το $n = 12$ είναι ο $f_5 = 8$. Θέτουμε $n = 12 - 8 = 4$ και συνεχίζουμε.

Ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το $n = 4$ είναι ο $f_3 = 3$. Θέτουμε $n = 4 - 3 = 1$ και συνεχίζουμε.

Ο μεγαλύτερος αριθμός Fibonacci που δεν ξεπερνά το $n = 1$ είναι ο $f_1 = 1$. Θέτουμε $n = 1 - 1 = 0$. Άρα, η διαδικασία ολοκληρώθηκε.

Το ζητούμενο άθροισμα αποτελείται από τους όρους που υπολογίσαμε στα ενδιάμεσα βήματα της διαδικασίας:

$$800 = f_{14} + f_{11} + f_8 + f_5 + f_3 + f_1 \quad \square$$

Άσκηση 3.5 (Πρόσημο αριθμών Stirling πρώτου είδους). Ναδειχθεί ότι $(-1)^{n+k}S(n, k) \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $0 \leq k \leq n$.

Λύση. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή ως προς το άθροισμα $n + k$.

Για $n + k = 1$ έχουμε $(-1)^{1+0}S(1, 0) = (-1) \cdot 0 \geq 0$, οπότε στην περίπτωση αυτή η υπόθεση ισχύει.

Υποθέτοντας ότι η ανισότητα ισχύει για όλα τα αθροίσματα που είναι μικρότερα από το $n + k$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (-1)^{n+k}S(n, k) &= (-1)^{n+k} (S(n-1, k-1) - (n-1)S(n-1, k)) \\ &= (-1)^{n+k}S(n-1, k-1) - (-1)^{n+k}(n-1)S(n-1, k) \\ &= (-1)^{(n-1)+(k-1)}S(n-1, k-1) + (n-1)(-1)^{(n-1)+k}S(n-1, k) \geq 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Άρα, η ανισότητα ισχύει για κάθε ζεύγος n, k . □

Άσκηση 3.6. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε το πολυώνυμο

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1) = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)$$

Επίσης, ορίζουμε $x^{\overline{0}} = 1$.

Οι συντελεστές αυτού του πολυωνύμου θα συμβολίζονται με $c(n, k)$, δηλαδή ισχύει ότι

$$x^{\overline{n}} = c(n, n)x^n + c(n, n-1)x^{n-1} + \cdots + c(n, 1)x + c(n, 0) = \sum_{k=0}^n c(n, k)x^k.$$

Προφανώς, ισχύει ότι $c(n, k) = 0$ όταν $k > n$, $c(n, n) = 1$ και $c(n, 0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Ναδειχθεί ότι

$$x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1), \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

ii) Να υπολογισθούν οι αριθμοί $c(n, k)$ για κάθε $0 \leq k \leq n \leq 5$.

iii) Να αποδειχθεί ότι

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$$

για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

iv) Να αποδειχθεί ότι

$$c(n, k) = (-1)^{n+k} S(n, k)$$

όπου $S(n, k)$ είναι οι αριθμοί Stirling πρώτου είδους.

Απόδειξη.

i) Από τον ορισμό του $x^{\bar{n}}$ για $n \geq 1$ έχουμε ότι

$$x^{\bar{n}} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-2)(x+n-1) = x^{\overline{n-1}}(x+n-1).$$

ii) Ισχύει ότι

(1) $x^{\bar{0}} = 1.$

Άρα, $c(0, 0) = 1.$

(2) $x^{\bar{1}} = x.$

Άρα, $c(1, 1) = 1, c(1, 0) = 0.$

(3) $x^{\bar{2}} = x(x+1) = x^2 + x.$

Άρα, $c(2, 2) = 1, c(2, 1) = 1, c(2, 0) = 0.$

(4) $x^{\bar{3}} = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x.$

Άρα, $c(3, 3) = 1, c(3, 2) = 3, c(3, 1) = 2, c(3, 0) = 0.$

(5) $x^{\bar{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.$

Άρα, $c(4, 4) = 1, c(4, 3) = 6, c(4, 2) = 11, c(4, 1) = 6, c(4, 0) = 0.$

(6) $x^{\bar{5}} = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x.$

Άρα, $c(5, 5) = 1, c(5, 4) = 10, c(5, 3) = 35, c(5, 2) = 50, c(5, 1) = 24, c(5, 0) = 0.$

iii) Ισχύουν ισοδύναμα οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} x^{\bar{n}} &= x^{\overline{n-1}}(x+n-1) \\ \sum_{k=0}^n c(n, k)x^k &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} c(n-1, k)x^k \right) (x+n-1) \\ \sum_{k=0}^n c(n, k)x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1, k)x^{k+1} + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1, k)x^k \\ \sum_{k=1}^n c(n, k)x^k &= \sum_{k=1}^n c(n-1, k-1)x^k + (n-1) \sum_{k=1}^n c(n-1, k)x^k \\ \sum_{k=1}^n c(n, k)x^k &= \sum_{k=1}^n \left[c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k) \right] x^k \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k).$$

iv) Ισχύει ότι $c(1, 0) = 0 = (-1)^{1+0}S(1, 0)$ και $c(1, 1) = 1(-1)^{1+1}S(1, 1)$. Αρκεί να δειχθεί ότι η ακολουθία $(-1)^{n+k}S(n, k)$ ικανοποιεί την σχέση

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k).$$

Πράγματι, αντικαθιστώντας έχουμε ισοδύναμα ότι

$$(-1)^{n+k}S(n, k) = (-1)^{n-1+k-1}S(n-1, k-1) + (n-1)(-1)^{n-1+k}S(n-1, k)$$

$$(-1)^{n+k}S(n, k) = (-1)^{n+k}S(n-1, k-1) - (n-1)(-1)^{n+k}S(n-1, k)$$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) - (n-1)S(n-1, k)$$

το οποίο ισχύει. □

Άσκηση 3.7 (Τύπος αριθμών Stirling δευτέρου είδους). *Να δειχθεί ο τύπος*

$$\bar{S}(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \nu^n$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Από τον ορισμό των αριθμών Stirling δευτέρου είδους έχουμε ότι

$$x^n = \sum_{k=0}^n \bar{S}(n, k) F_k(x).$$

Από τον τύπο του Gregory

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(\Delta^k p)(0)}{k!} F_k(x)$$

για $p(x) = x^n$ έχουμε ότι

$$x^n = \sum_{k=0}^n \frac{(\Delta^k x^n)(0)}{k!} F_k(x)$$

οπότε

$$\bar{S}(n, k) = \frac{(\Delta^k x^n)(0)}{k!}. \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο

$$\Delta^k y(x) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \binom{k}{\nu} y(x+k-\nu)$$

για $y(x) = x^n$ έχουμε ότι

$$(\Delta^k x^n)(0) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \binom{k}{\nu} (0+k-\nu)^n$$

οπότε από τον τύπο (3) έχουμε ότι

$$\bar{S}(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \binom{k}{\nu} (k-\nu)^n = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{k-\nu} \nu^n = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \nu^n \quad \square$$

Άσκηση 3.8 (Κωδικοποιήσεις διαμερίσεων). *i) Να βρεθεί η διαμέριση του [10] που κωδικοποιείται από την ακολουθία με περιορισμούς αύξησης 0 0 1 0 2 1 0 3 4 4.*

ii) Να κωδικοποιηθεί η διαμέριση $\{5, 7\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{1, 9, 10\}$, $\{3\}$ του [10] από μια ακολουθία με περιορισμούς αύξησης.

Λύση. i)
$$\begin{array}{r} a_i \\ i \end{array} \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Επειδή το μέγιστο στοιχείο της ακολουθίας είναι το 4 έπεται ότι η διαμέριση αποτελείται από 5 υποσύνολα.

Το 1ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 1, 2, 4, 7.

Το 2ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 3, 6.

Το 3ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 5.

Το 4ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 8.

Το 5ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 9, 10.

Επομένως, η ζητούμενη διαμέριση του $[10]$ είναι η $\{1, 2, 4, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{5\}$, $\{8\}$, $\{9, 10\}$, ή με εναλλακτική γραφή: 1 2 4 7/3 6/5/8/9 10.

ii) Αρχικά διατάσσουμε τα υποσύνολα της διαμέρισης με βάση το ελάχιστο στοιχείο τους και τα αριθμούμε με βάση την διάταξη που τοποθετήθηκαν ξεκινώντας από το 0.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \{1, 9, 10\} & \{2, 4, 6, 8\} & \{3\} & \{5, 7\} \end{array}$$

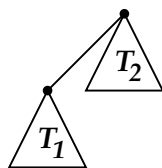
Για κάθε $i \in [n]$ το a_i ισούται με την αρίθμηση του υποσυνόλου στο οποίο ανήκει στο στοιχείο i . Επομένως, προκύπτει η παρακάτω ακολουθία με περιορισμούς αύξησης.

$$\begin{array}{r} a_i \\ i \end{array} \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

□

Άσκηση 3.9 (Απαριθμήσεις διατεταγμένων δένδρων). Να υπολογισθεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με 12 δεσμούς που έχει βαθμό ρίζας 6 και το πρώτο υποδένδρο του έχει 4 φύλλα.

Λύση. Έστω T ένα διατεταγμένο δένδρο με $s(T) = 12$ που έχει βαθμό ρίζας 6 και το πρώτο υποδένδρο έχει 4 φύλλα. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση



προκύπτει ότι το T_2 έχει βαθμο ρίζας 5 ενώ το T_1 έχει 4 φυλλα. Επιπλέον ισχύουν

$$4 \leq s(T_1), \quad 5 \leq s(T_2) \quad \text{και} \quad s(T_1) + s(T_2) = 11$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) $s(T_1) = 4, s(T_2) = 7$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν

$$N(4, 4) = 1 T_1 \quad \text{και} \quad R(7, 5) = \frac{5}{7} \binom{2 \cdot 7 - 5 - 1}{7-1} = \frac{5}{7} \binom{8}{6} = 20 T_2$$

οπότε τελικά υπάρχουν 20 δένδρα T .

$$(2) s(T_1) = 5, s(T_2) = 6$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν

$$N(5, 4) = 10 T_1 \text{ και } R(6, 5) = \frac{5}{6} \binom{2 \cdot 6 - 5 - 1}{6-1} = \frac{5}{6} \binom{6}{5} = 5 T_2$$

οπότε τελικά υπάρχουν 50 δένδρα T .

$$(3) s(T_1) = 6, s(T_2) = 5$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν

$$N(6, 4) = 50 T_1 \text{ και } R(5, 5) = \frac{5}{5} \binom{2 \cdot 5 - 5 - 1}{5-1} = 1 T_2$$

οπότε τελικά υπάρχουν 50 δένδρα T .

Συνολικά υπάρχουν $20 + 50 + 50 = 120$ δένδρα T . □

Άσκηση 3.10 (Λεξικογραφική διάταξη μεταθέσεων). Έστω $\sigma = 7 5 8 3 1 4 10 9 6 2$ και $\rho = 9 4 8 6 1 5 2 3 7 10$.

- i) Να βρεθούν τα στοιχεία της σ στα οποία εμφανίζει ανάβαση.
- ii) Να βρεθεί η μετάθεση $\tau \in S_{10}$ η οποία έπεται της σ (στην λεξικογραφική διάταξη).
- iii) Να βρεθεί η μετάθεση $\pi \in S_{10}$ η οποία προηγείται της ρ (στην λεξικογραφική διάταξη).
- iv) Να βρεθεί η ακολουθία των αντιστροφών (των στοιχείων) της σ .
- v) Να βρεθεί το rank της σ (δηλαδή το πλήθος των μεταθέσεων του S_{10} που είναι μικρότερες από την σ (στην λεξικογραφική διάταξη)).
- vi) Να βρεθεί η μετάθεση ω του S_{10} με rank 20000.

Λύση. i) Η $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 1 & 4 & 10 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ παρουσιάζει ανάβαση στις θέσεις 2, 5, 6 όπου εμφανίζονται αντίστοιχα τα στοιχεία 5, 1, 4.

ii) Στην τελευταία ανάβαση της σ εμφανίζεται το στοιχείο 4. Στα επόμενα στοιχεία, το μικρότερο από αυτά που είναι μεγαλύτερο από το 4 είναι το 6. Εναλλάσσουμε το 6 με το 4 και αντιστρέφουμε την λίστα των στοιχείων μετά το 6. Επομένως, η επόμενη μετάθεση είναι η $\tau = 7 5 8 3 1 6 2 4 9 10$.

iii) Έστω π η ζητούμενη μετάθεση. Παρατηρούμε ότι η ρ προκύπτει από την π εντοπίζοντας το στοιχείο x που βρίσκεται την τελευταία ανάβαση της π , εναλλάσσοντας το μικρότερο στοιχείο y που είναι μεγαλύτερο από το x με το x και αντιστρέφοντας την λίστα των επόμενων στοιχείων.

- στην ρ αμέσως μετά το y θα υπάρχει μικρότερο στοιχείο
- τα υπόλοιπα στοιχεία θα βρίσκονται σε αύξουσα σειρά
- το x θα είναι το μεγαλύτερο από αυτά που είναι μικρότερα από το y .

Στην ρ στην τελευταία θέση που υπάρχει ελάττωση των στοιχείων της εμφανίζεται το 5. Το μεγαλύτερο στοιχείο που είναι μικρότερο από το 5 είναι το 3. Εναλλάσσουμε το 5 με το 3 και αντιστρέφουμε την λίστα των στοιχείων μετά το 3 οπότε προκύπτει η προηγούμενη μετάθεση $\pi = 9 4 8 6 1 3 10 7 5 2$.

iv) Η ακολουθία των αντιστροφών της $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 1 & 4 & 10 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ είναι

$$a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 5, a_4 = 2, a_5 = 0, a_6 = 1, a_7 = 3, a_8 = 2, a_9 = 1, a_{10} = 0$$

v) Με βάση την ακολουθία των αντιστροφών της σ προκύπτει ότι $\text{rank}(\sigma) = 6 \cdot 9! + 4 \cdot 8! + 5 \cdot 7! + 2 \cdot 6! + 0 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 2177280 + 161280 + 25200 + 1440 + 24 + 18 + 4 + 1 = 2365247$.

vi) Αρχικά θα εκφράσουμε το 20000 ως γραμμικό συνδυασμό των $9! = 362880$, $8! = 40320$, $7! = 5040$, $6! = 720$, $5! = 120$, $4! = 24$, $3! = 6$, $2! = 2$, $1! = 1$ με συντελεστές a_1, a_2, \dots, a_{10} που ικανοποιούν τις ανισότητες $0 \leq a_k \leq 10 - k$.

$$\begin{aligned} 20000 &= 0 \cdot 9! + 0 \cdot 8! + 3 \cdot 7! + 4880 \\ &= 0 \cdot 9! + 0 \cdot 8! + 3 \cdot 7! + 6 \cdot 6! + 560 \\ &= 0 \cdot 9! + 0 \cdot 8! + 3 \cdot 7! + 6 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 80 \\ &= 0 \cdot 9! + 0 \cdot 8! + 3 \cdot 7! + 6 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 8 \\ &= 0 \cdot 9! + 0 \cdot 8! + 3 \cdot 7! + 6 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! \end{aligned}$$

Επομένως, η ακολουθία των αντιστροφών της ζητούμενης μετάθεσης ω είναι $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 3$, $a_4 = 6$, $a_5 = 4$, $a_6 = 3$, $a_7 = 2$, $a_8 = 1$, $a_9 = 0$ και $a_{10} = 0$.

Επειδή $a_1 = 0$, έπεται ότι $\omega_1 = 1$.

Επειδή $a_2 = 0$, έπεται ότι $\omega_2 = 2$.

Επειδή $a_3 = 3$, έπεται ότι $\omega_3 = 6$.

Επειδή $a_4 = 6$, έπεται ότι $\omega_4 = 10$.

Επειδή $a_5 = 4$, έπεται ότι $\omega_5 = 8$.

Επειδή $a_6 = 3$, έπεται ότι $\omega_6 = 7$.

Επειδή $a_7 = 2$, έπεται ότι $\omega_7 = 5$.

Επειδή $a_8 = 1$, έπεται ότι $\omega_8 = 4$.

Επειδή $a_9 = 0$, έπεται ότι $\omega_9 = 3$.

Άρα, $\omega_{10} = 9$. Δηλαδή, η ζητούμενη μετάθεση είναι η $\omega = 1 \ 2 \ 6 \ 10 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 3 \ 9$. □

Παρατήρηση: Μπορούμε να υπολογίσουμε το rank μιας μετάθεσης αναδρομικά.

Άσκηση 3.11 (Αναδρομικός υπολογισμός rank μεταθέσεων). Έστω $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \in S_n$. Τότε ισχύει ότι

$$\text{rank}_1(1) = 0$$

και

$$\text{rank}_n(\sigma) = (\sigma_1 - 1)(n - 1)! + \text{rank}_{n-1}(\sigma'),$$

όπου $\sigma' = \sigma'_1 \sigma'_2 \cdots \sigma'_{n-1}$ η μετάθεση του S_{n-1} που προκύπτει από τη σ διαγράφοντας το στοιχείο σ_1 και μειώνοντας κατά ένα όλα τα άλλα στοιχεία της που είναι μεγαλύτερα από το σ_1 .

Λύση. Έστω $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \in S_n$.

Οι μεταθέσεις τ του S_n που προηγούνται της σ διαμερίζονται στα σύνολα A_1, A_2 όπου $A_1 = \{\tau \in S_n : \tau_1 < \sigma_1\}$ και $A_2 = \{\tau \in S_n : \tau_1 = \sigma_1 \text{ και } \tau_2 \cdots \tau_n < \sigma_2 \cdots \sigma_n\}$.

Επομένως,

$$\text{rank}(\sigma) = |A_1| + |A_2|.$$

Έστω $\tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n \in A_1$.

Για το τ_1 υπάρχουν $\sigma_1 - 1$ επιλογές.

Για το τ_2 υπάρχουν $n - 1$ επιλογές.

⋮

Για το τ_{n-1} υπάρχουν 2 επιλογές.

Για το τ_n υπάρχει 1 επιλογή.

Άρα, από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι $|A_1| = (\sigma_1 - 1)(n - 1)!$.

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$|A_2| = |\{\tau \in S_n \setminus \{\tau_1\} : \tau_2 \cdots \tau_n < \sigma_2 \cdots \sigma_n\}|$$

Όμως, κάθε $\tau \in S_n \setminus \{\tau_1\}$ (αντίστοιχα $\sigma \in S_n \setminus \{\tau_1\}$), όπου $\tau_1 \in [n]$ ορίζει μονοσήμαντα μια μετάθεση τ' (αντίστοιχα σ') του $[n - 1]$ που προκύπτει μειώνοντας κατά ένα όλα τα στοιχεία του που είναι μεγαλύτερα του τ_1 . Επιπλέον αν $\tau < \sigma$ έπεται ότι $\tau' < \sigma'$ (γιατί;) άρα

$$|A_2| = |\{\tau' \in S_{n-1} : \tau' < \sigma'\}| = \text{rank}_{n-1}(\sigma').$$

Παραδείγματα

$$(1) \text{rank}_4(3124) = 2 \cdot 3! + \text{rank}_3(123) = 2 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + \text{rank}_2(12) = 2 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1! + \text{rank}_1(1) = 2 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1! + 0 = 2 \cdot 6 = 12.$$

$$(2) \text{rank}_5(31542) = 2 \cdot 4! + \text{rank}_4(1432) = 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + \text{rank}_3(321) = 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + \text{rank}_2(21) = 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + \text{rank}_1(1) = 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 53.$$

$$(3) \text{rank}_6(432516) = 3 \cdot 5! + \text{rank}_5(32415) = 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + \text{rank}_4(2314) = 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + \text{rank}_3(213) = 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + \text{rank}_2(12) = 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! + \text{rank}_1(1) = 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 360 + 48 + 6 + 2 = 416. \quad \square$$

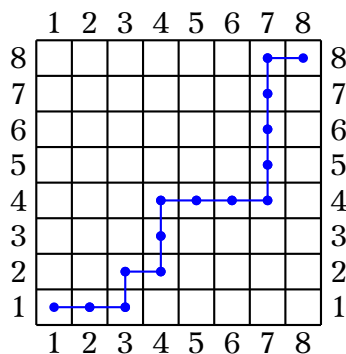
Άσκηση 3.12 (Ελέγχοντας όλες τις περιπτώσεις). Να βρεθούν όλες οι διαδρομές που αρχίζουν από το τετράγωνο (1,1), καταλήγουν στο τετράγωνο (8,8), σε κάθε βήμα επιτρέπεται μόνο n κίνηση προς τα δεξιά ή προς τα πάνω ακριβώς κατά ένα τετράγωνο και έχουν συνολικό άθροισμα τιμών στα τετράγωνα που χρησιμοποιούν άρτιο αριθμό.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
8	3	6	0	5	5	5	1		8
7	7	5	4	6	3	9	8	9	7
6	3	1	1	9	2	2	1	2	6
5	6	7	4	7	0	4	9	5	5
4	9	4	6	2	5	1	2	9	4
3	6	5	7	3	8	4	5	2	3
2	4	6	2	1	2	7	1	0	2
1		5	3	0	5	6	2	2	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	

Λύση. Για το πρόβλημα αυτό δεν υπάρχει κάποιος (προφανής) σύντομος τρόπος αλλά είμαστε αναγκασμένοι να εξετάσουμε όλες τις περιπτώσεις. Να βρούμε δηλαδή όλες τις δυνατές διαδρομές με αρχή το τετράγωνο (1,1) και τέλος το (8,8) και να εξετάσουμε αν το συνολικό άθροισμα των τιμών στα τετράγωνα που χρησιμοποιούν είναι άρτιος ή όχι.

Επειδή σε κάθε τετράγωνο μπορούμε να φτάσουμε μόνο από τα τετράγωνα που γειτονεύουν μαζί του στα αριστερά ή κατακόρυφα (αν υπάρχουν τέτοια τετράγωνα) προκύπτει ότι πλήθος των διαφορετικών διαδρομών που πρέπει να εξετάσουμε ισούται με 3432.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	8
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	7
6	1	6	21	56	126	252	462	792	6
5	1	5	15	35	70	126	210	330	5
4	1	4	10	20	35	56	84	120	4
3	1	3	6	10	15	21	28	36	3
2	1	2	3	4	5	6	7	8	2
1		1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	



Με ποιο τρόπο θα εξετάσουμε όλες τις διαφορετικές διαδρομές, χωρίς να εξετάσουμε μια διαδρομή δύο φορές και χωρίς να παραλείψουμε κάποια διαδρομή;

Οποιαδήποτε διαδρομή από τα (1,1) στο (8,8) αποτελείται ακριβώς από 7 οριζόντια και 7 κατακόρυφα βήματα. Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε κάθε διαδρομή με μια δυαδική λέξη: Σε κάθε οριζόντιο βήμα αντιστοιχεί το 0 και σε κάθε κατακόρυφο το 1. Στην προηγούμενη διαδρομή αντιστοιχεί η δυαδική λέξη

0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0.

Με αυτή την κωδικοποίηση σε κάθε διαδρομή αντιστοιχεί μια δυαδική λέξη μήκους 14 με 7 άσσους και 7 μηδέν. Αντίστροφα, από κάθε δυαδική λέξη μήκους 14 με 7 άσσους και 7 μηδέν μπορούμε να φτιάξουμε μια διαδρομή από το (0,0) στο (8,8). Επομένως το πρόβλημα του ελέγχου όλων των διαδρομών ανάγεται στο πρόβλημα της κατασκευής όλων των δυαδικών λέξεων μήκους 14 με 7 άσσους και 7 μηδενικά.⁴

Με τη βοήθεια του αλγορίθμου της λεξικογραφικής κατασκευής των δυαδικών λέξεων μήκους 14 με 7 άσσους μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα της εύρεσης των διαδρομών από το (0,0) στο (8,8) με συνολικό άθροισμα τιμών άρτιο αριθμό.

Συνολικά, υπάρχουν 1734 διαφορετικές διαδρομές με αυτή την ιδιότητα. □

⁴Χρησιμοποιώντας αυτή την κωδικοποίηση μπορούμε να μετρήσουμε άμεσα το πλήθος όλων των πιθανών διαδρομών το οποίο ισούται με $\binom{14}{7} = 3432$.

Άσκηση 3.13 (Διαδρομές ίππου σε σκακιέρα). Να βρεθεί μια διαδρομή του ίππου σε μια 6×6 σκακιέρα η οποία διέρχεται από κάθε τετράγωνο της σκακιέρας ακριβώς μια φορά.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της ανάτρεξης.

Για την υλοποίηση θα χρειαστούμε ένα πίνακα (Board) πάνω στον οποίο θα σημειώνουμε όσα τετράγωνα χρησιμοποιεί η τρέχουσα διαδρομή και μια λίστα (D) η οποία αποθηκεύει την ακολουθία των συντεταγμένων των τετραγώνων της τρέχουσας διαδρομής.

```
import sympy as sp

#check if we can move to position [x,y]
def isAvail(x,y):
    if x < 0 or y < 0 or x > n-1 or y > n-1: return False
    if Board[x,y] == 1: return False
    return True

#increase the "size" of solution
def grow_solution(D):
    global length
    x,y = D[length-1] #find the last position of
    for [a,b] in Deltas:
        if isAvail(x+a,y+b):
            D.append([x+a,y+b])
            Board[x+a,y+b] = 1
            length += 1
            return True
    return False

#try the next available option
def next_solution(D):
    global length
    if(length == 1): return False #there are no moves on the board
    x, y = D[length-2]
    xlast, ylast = D[length-1]
    found = False
    for [a,b] in Deltas:
        if a == (xlast-x) and b == (ylast-y):
            found = True
        if found and isAvail(x+a,y+b):
            D[length-1] = [x+a,y+b]
            Board[x+a,y+b] = 1
            Board[xlast,ylast] = 0
            return True
    return False

#backtrack to a previous option
def shrink_solution(D):
    global length
    if length > 1: #at least one move is done on the checkboard
        [x,y] = D[length-1]
        D.pop() #backtrack
        Board[x,y] = 0 #clear the square
        length -= 1
        return True
    return False

#print a solution in 2D form
def print2D(D):
    counter = 1
```

```

Board = sp.zeros(n,n)
for [a,b] in D:
    Board[a,b] = counter
    counter += 1
print(Board.table(sp.StrPrinter()))

n = 6 #size of chessboard
#initial construction
Board = sp.zeros(n,n)
Board[1,1] = 1 #this square is already visited
D = [[1,1]] #starting position
length = 1 #number of visited squares
#Deltas stores available knight moves
Deltas = [[1,2],[2,1],[2,-1],[1,-2],
          [-1,-2],[-2,-1],[-2,1],[-1,2]]
#backtracking mechanism
state = 'grow'
counter = 0 #count solutions
while state != 'finished':
    if(length == n*n):
        #print2D(D)
        counter += 1
        break
    if state == 'grow':
        if(grow_solution(D)): state = 'grow'
        else: state = 'next'
    if state == 'next':
        if(next_solution(D)): state = 'grow'
        else: state = 'shrink'
    if state == 'shrink':
        if(shrink_solution(D)): state = 'next'
        else: break
if counter > 0:
    print("A Hamiltonian path for the knight on the", n, "x", n, "chessboard is:")
    print2D(D)
else:
    print("No solution exists for the", n, "x", n, "chessboard starting from",D[0])

```

Output:

No solution exists for the 4 x 4 chessboard starting from [1, 1]

A Hamiltonian path for the knight on the 5 x 5 chessboard is:

```

[23, 16, 11, 6, 21]
[10, 1, 22, 17, 12]
[15, 24, 5, 20, 7]
[ 2, 9, 18, 13, 4]
[25, 14, 3, 8, 19]

```

A Hamiltonian path for the knight on the 6 x 6 chessboard is:

```

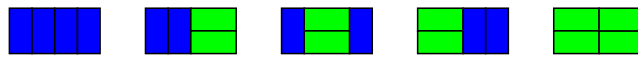
[19, 36, 29, 12, 17, 14]
[28, 1, 18, 15, 30, 11]
[35, 20, 27, 2, 13, 16]
[26, 7, 24, 31, 10, 3]
[21, 34, 5, 8, 23, 32]
[ 6, 25, 22, 33, 4, 9]

```

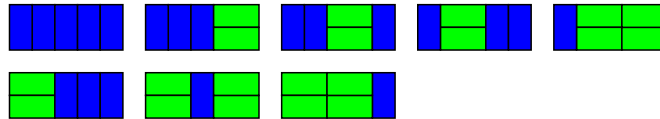
□

3.7 Ασκήσεις προς επίλυση

- 1) (Καλύψεις σκακιέρας με ντόμινο) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των καλύψεων μιας $2 \times n$ σκακιέρας από n μη επικαλυπτόμενα ντόμινο ισούται με f_n . Για παράδειγμα, οι τρόποι κάλυψης μιας 2×4 σκακιέρας είναι οι εξής:



Επίσης, οι τρόποι κάλυψης μιας 2×5 σκακιέρας είναι οι εξής:



- 2) (Εναλλασσόμενα σύνολα) Ένα υποσύνολο A του $[n]$ ονομάζεται **εναλλασσόμενο** αν τα στοιχεία του σε αύξουσα σειρά έχουν την εξής αρτιότητα: περιττός, άρτιος, περιττός, άρτιος, κ.ο.κ. Το κενό σύνολο θεωρείται εναλλασσόμενο καθώς επίσης και όλα τα μονοσύνολα με περιττούς αριθμούς. Για παράδειγμα, τα υποσύνολα του $[3]$ με την παραπάνω ιδιότητα είναι τα εξής:

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3\}$$

Επίσης, τα υποσύνολα του $[4]$ με την παραπάνω ιδιότητα είναι τα εξής:

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{3\}, \{3, 4\}$$

- i) Να βρεθούν τα εναλλασσόμενα υποσύνολα του $[5]$.
 ii) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των εναλλασσόμενων υποσυνόλων του $[n]$ ισούται με f_{n+1}
- 3) (Μεγάλα υποσύνολα) Ένα υποσύνολο A του $[n]$ ονομάζεται **μεγάλο** αν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $x \geq |A|$. Το κενό σύνολο θεωρείται μεγάλο. Για παράδειγμα το σύνολο $\{2, 3\}$ είναι μεγάλο, ενώ το σύνολο $\{2, 3, 5\}$ δεν είναι μεγάλο.
- i) Να βρεθούν όλα τα μεγάλα υποσύνολα του $[3]$ και του $[4]$.
 ii) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των μεγάλων υποσυνόλων του $[n]$ ισούται με f_{n+1} .
- 4) (Τριάδες διαδοχικών αριθμών Fibonacci) Ναδειχθεί ότι $f_n^2 + (-1)^{n+1} = f_{n+1}f_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$.
- 5) (Ρυθμός αύξησης αριθμών Fibonacci) Ναδειχθεί ότι για την ακολουθία των αριθμών Fibonacci ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

- 6) (MKΔ αριθμών Fibonacci) Ναδειχθεί ότι $\gcd(f_n, f_m) = f_{\gcd(n+1, m+1)-1}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}^*$.
- 7) (Άρτιοι αριθμοί Fibonacci) Να βρεθούν τα $n \in \mathbb{N}$ για τα οποία οι αριθμοί Fibonacci f_n είναι άρτιοι. (Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση.)
- 8) (Πρόσθεση στο σύστημα αρίθμησης Fibonacci) Εξηγήστε πως μπορούμε να προσθέσουμε δύο αριθμούς στο σύστημα αρίθμησης Fibonacci.
- 9) (Μεταθέσεις του $[n]$ με k κύκλους) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των μεταθέσεων του $[n]$ με k κύκλους ισούται με $|S(n, k)|$.
- 10) (Ειδικές μεταθέσεις του $[n]$) Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$i) S(n, n-1) = -\binom{n}{2}.$$

$$ii) S(n, 1) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

- 11) (Συνδυαστική ερμηνεία κατακόρυφης αναγωγικής σχέσεις αριθμών Stirling δευτέρου είδους) Να δοθεί μια συνδυαστική απόδειξη της (επόμενης ισοδύναμης) κατακόρυφης αναγωγικής σχέσης των αριθμών Stirling δευτέρου είδους

$$\bar{S}(n+1, k+1) = \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n}{\nu} \bar{S}(n-\nu, k)$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και $n \in \mathbb{N}$. (Υπόδειξη: Διαμερίστε το υποσύνολο που περιέχει το $n+1$ με βάση το πλήθος ν των υπολοίπων στοιχείων που περιέχονται σ' αυτό.)

- 12) (Ειδικές διαμερίσεις του $[n]$) Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$i) \bar{S}(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

$$iii) \bar{S}(n, 2) = 2^{n-1} - 1.$$

$$ii) \bar{S}(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2}.$$

$$iv) \bar{S}(n, 3) = \frac{1}{2} (3^{n-1} - 2^n + 1).$$

- 13) (Φράγματα για τους αριθμούς Stirling δευτέρου είδους)

i) Ναδειχθεί ότι $\bar{S}(n, k) \geq k\bar{S}(n-1, k)$, για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Ναδειχθεί ότι $k^{n-k} \leq \bar{S}(n, k) \leq \binom{n-1}{k-1} k^{n-k}$, για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η αναγωγική σχέση $\bar{S}(n, k) = \bar{S}(n-1, k-1) + k\bar{S}(n-1, k)$.)

- 14) (Αριθμός επί απεικονίσεων)

i) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των επί απεικονίσεων από το $[n]$ στο $[k]$ ισούται με $k!\bar{S}(n, k)$.

ii) Να βρεθεί ο αριθμός των απεικονίσεων $f: A \rightarrow B$ με $|A| = n$, $|B| = k$ και $f(A) = m$, όπου $m \leq k$.

- 15) (Αναθέσεις διαφορετικών εργασιών σε διαφορετικούς ανθρώπους) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να αναθέσουμε 20 διαφορετικές εργασίες σε 15 διαφορετικούς ανθρώπους έτσι ώστε κάθε άνθρωπος να αναλάβει τουλάχιστον μια εργασία.

- 16) (Αθροίσματα δυνάμεων) Ναδειχθεί ότι για κάθε $n, k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k = \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j+1} j! \bar{S}(k, j).$$

- 17) (Διαμερίσεις χωρίς διαδοχικούς αριθμούς) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των διαμερίσεων του $[n+1]$ σε $k+1$ υποσύνολα καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαδοχικούς αριθμούς ισούται με $\bar{S}(n, k)$.

- 18) Ναδειχθεί ότι

$$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

19) i) Ναδειχθεί ότι οι αριθμοί Catalan ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} C_2 &= 2C_1 \\ C_3 &= 3C_2 - C_1 \\ C_4 &= 4C_3 - 3C_2 \\ C_5 &= 5C_4 - 6C_3 + C_2 \\ C_6 &= 6C_5 - 10C_4 + 4C_3 \\ C_7 &= 7C_6 - 15C_5 + 10C_4 - C_3 \end{aligned}$$

ii) Ναδειχθεί ότι

$$C_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-k}{k} C_{n-k}.$$

20) Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι

$$(n-3)C_{n-2} = \frac{n}{2} (C_1C_{n-3} + C_2C_{n-4} + \dots + C_{n-3}C_1).$$

21) (Κυρίαρχες ακολουθίες) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός S_n των διατεταγμένων n -άδων από μη αρνητικούς φυσικούς a_1, a_2, \dots, a_n για τους οποίους

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$$

και

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq k, \text{ για κάθε } k \leq n,$$

ισούται με C_n .

22) Να βρεθεί ο αριθμός των διατεταγμένων n -άδων ακεραίων a_1, a_2, \dots, a_n για τους οποίους ισχύει ότι

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

και

$$a_1 \leq 1, a_2 \leq 2, \dots, a_n \leq n.$$

23) (Μη τεμνόμενες χορδές) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους n μη τεμνόμενες χορδές ενώνουν $2n$ σημεία τα οποία βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου ισούται με C_n .

24) (Μεταθέσεις που αποφεύγουν το 123) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός των μεταθέσεων σ του $[n]$ για τις οποίες δεν υπάρχουν δείκτες i, j, k με $i < j < k$ και $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j)$ ισούται με C_n .

25) (Δυαδικά δένδρα και λέξεις Dyck) Να κωδικοποιηθούν όλα τα δυαδικά δένδρα με 4 κόμβους από την αντίστοιχη λέξη Dyck.

26) (Δυαδικά δένδρα και λέξεις Dyck) Να βρεθούν τα δυαδικά δένδρα που κωδικοποιούνται από τις παρακάτω λέξεις Dyck:

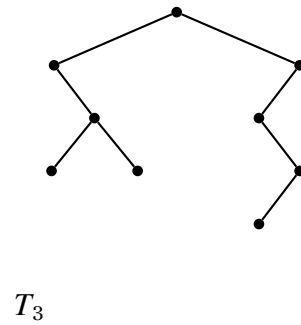
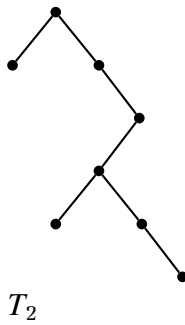
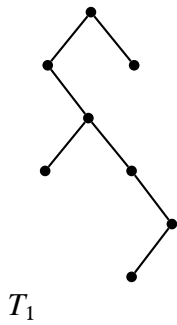
i) 11001011110101100000.

iii) 11010100110010101100.

ii) 10111010010011001010.

iv) 10101110101001100100.

27) (Δυαδικά δένδρα και λέξεις Dyck) Να βρεθούν οι δυαδικές λέξεις Dyck που κωδικοποιούν τα παρακάτω δυαδικά δένδρα:



28) (Ρυθμός αύξησης αριθμών Catalan) Να αποδειχθεί ότι για την ακολουθία των αριθμών Catalan ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = 4.$$

29) (Απαριθμήσεις διατεταγμένων δένδρων) Να υπολογισθεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με 12 δεσμούς

- i) χωρίς περιορισμό.
- ii) που έχουν 4 φύλλα.
- iii) που έχουν βαθμό ρίζας ίσο με 5.
- iv) που το πρώτο υποδένδρο της ρίζας τους έχει 6 φύλλα.
- v) που το πρώτο υποδένδρο της ρίζας τους έχει βαθμό ρίζας ίσο με 5.
- vi) που έχουν ρίζα βαθμού 3 με το πρώτο υποδένδρο της να έχει 3 φύλλα.
- vii) που έχουν 5 φύλλα, 2 από τα οποία είναι φύλλα του πρώτου υποδένδρου.
- viii) που έχουν ρίζα βαθμού 4 με το πρώτο υποδένδρο της να έχει βαθμό ρίζας 2.

30) (Παραγοντικό σύστημα αρίθμησης) Να δειχθεί ότι κάθε αριθμός μικρότερος του $n!$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο στο παραγοντικό σύστημα αρίθμησης.

31) (Μεταθέσεις και rank)

- i) Να βρεθεί το rank των μεταθέσεων 21534876 και 921534876.
- ii) Να βρεθεί ο αριθμός των μεταθέσεων $\tau \in S_6$ για τις οποίες $431562 < \tau < 536124$.
- iii) Να βρεθούν οι μεταθέσεις του S_7 με rank 1000 και 2000 αντίστοιχα.
- iv) Να βρεθεί η μετάθεση σ του S_7 η οποία βρίσκεται 100 θέσεις μετά (κατά την λεξικογραφική διάταξη) την μετάθεση 5176423.

32) (Υπολογισμός μεγάλων αριθμών) Δεδομένου ότι διαθέτετε βιβλιοθήκες για πράξεις με μεγάλους ακεραίους, εξηγήστε με ποια μέθοδο θα υπολογίζατε τους αριθμούς

- i) f_n (Fibonacci)
- ii) C_n (Catalan)
- iii) $\bar{S}(n, k)$ (Stirling)

Κεφάλαιο 4

Αναγωγικές εξισώσεις

4.1 Εξισώσεις Διαφορών

Κάθε συναρτησιακή εξίσωση στην οποία εμφανίζονται η ανεξάρτητη μεταβλητή x , η εξαρτημένη μεταβλητή $y(x)$ (δηλαδή η άγνωστη συνάρτηση) και n διαφορές της $\Delta y(x), \Delta^2 y(x), \dots, \Delta^n y(x)$ ονομάζεται **εξίσωση διαφορών n -τάξεως**.

Στα επόμενα θα γράφουμε y_x αντί για $y(x)$.

Παράδειγμα:

$$\Delta^3 y_x - 2\Delta^2 y_x + 5\Delta y_x + 7y_x = 3 \cos x.$$

4.2 Αναγωγικές εξισώσεις

Αν υποθέσουμε ότι y_x είναι μια συνάρτηση, όπου ο y_{x+n} εκφράζεται συναρτήσει των προηγούμενων n όρων $y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n-1}$ δηλαδή ισχύει

$$y_{x+n} = F(y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n-1}) \quad (1)$$

για κάθε x , τότε η σχέση (1) ορίζει μια συναρτησιακή εξίσωση με άγνωστη τη συνάρτηση y_x που την ικανοποιεί.

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **αναγωγική εξίσωση n -τάξεως**.

Με άλλα λόγια, η αναγωγική εξίσωση είναι μια συναρτησιακή εξίσωση στην οποία εμφανίζονται η ανεξάρτητη μεταβλητή x και ορισμένες διαδοχικές τιμές $y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}$ της άγνωστης συνάρτησης.

Παράδειγμα:

$$y_{x+3} - 5y_{x+2} + 12y_{x+1} - y_x = 3 \cos x.$$

Εκφράζοντας κάθε διαφορά $\Delta^k y_x$ ως γραμμικό συνδυασμό των

$$y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}$$

σύμφωνα με τον τύπο

$$\Delta^n y_x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y_{x+n-k}$$

η εξίσωση διαφορών μετατρέπεται σε μια αναγωγική εξίσωση.

Έτσι, αν θέσουμε

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

$$\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$$

στην εξίσωση διαφορών του παραδείγματος

$$\Delta^3 y_x - 2\Delta^2 y_x + 5\Delta y_x + 7y_x = 3 \cos x$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & (y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x) \\ & - 2(y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x) \\ & + 5(y_{x+1} - y_x) + 7y_x = 3 \cos x \Leftrightarrow \\ & y_{x+3} - 5y_{x+2} + 12y_{x+1} - y_x = 3 \cos x. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων οι εξισώσεις διαφορών και οι αναγωγικές εξισώσεις είναι ισοδύναμες.

Λύση μιας αναγωγικής εξίσωσης ονομάζεται κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Γενική λύση μιας αναγωγικής εξίσωσης ονομάζεται η λύση της οποίας ο τύπος περιέχει όλες τις λύσεις.

Παράδειγμα:

1. Η συνάρτηση $y_x = 3^x$ είναι **λύση** της εξίσωσης

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} - 3y_x = 0$$

διότι

$$3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} - 3 \cdot 3^x = 9 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x = 0.$$

2. Η γενική λύση της εξίσωσης

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$$

είναι (όπως θα δούμε αργότερα) η

$$y_x = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot 3^x.$$

4.3 Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Γενική μορφή:

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = \beta(x). \quad (1)$$

Ομογενής: Αν $\beta(x) = 0$, δηλαδή

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0. \quad (2)$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$P(\lambda) = 0.$$

Επίλυση της ομογενούς εξίσωσης

Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της ομογενούς είναι όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των βασικών λύσεων, που προκύπτουν από τις ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές) της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

Εύρεση των βασικών λύσεων.

1. Αν λ είναι απλή πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε η συνάρτηση λ^x είναι βασική λύση.

2. Αν λ είναι πραγματική ρίζα πολλαπλότητας k της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε οι συναρτήσεις:

$$\lambda^x, x\lambda^x, \dots, x^{k-1}\lambda^x$$

είναι βασικές λύσεις.

3. Αν $\lambda = \alpha + \beta i$ είναι μιγαδική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε θα είναι ρίζα και η συζυγής της $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$.

Γι' αυτές τις δύο πρέπει να βρούμε δύο βασικές λύσεις.

Γράφουμε

$$\lambda = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

(τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού).

Τότε οι βασικές λύσεις που αντιστοιχούν στις $\lambda, \bar{\lambda}$ είναι οι:

$$\rho^x \cos \theta x \text{ και } \rho^x \sin \theta x$$

Μιγαδικοί αριθμοί \mathbb{C} : Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

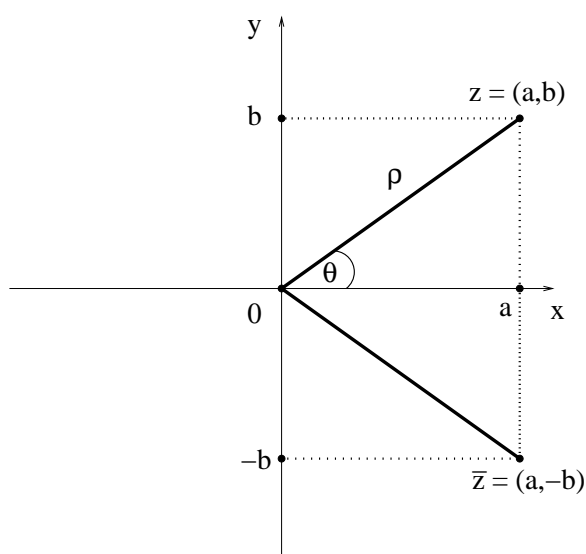
- **Αλγεβρική μορφή:** $z = a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

Το $a = \Re z$ (αντ. $b = \Im z$) ονομάζεται **πραγματικό μέρος** (αντ. **φανταστικό μέρος**) του z .

Αν $b = 0$ (το φανταστικό μέρος ισούται με 0) τότε z είναι ο πραγματικός αριθμός a .

Ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = a - bi$ ονομάζεται **συζυγής μιγαδικός αριθμός** του $z = a + bi$.

- **Γεωμετρική αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο:**



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} = \frac{\Im z}{\Re z}.$$

Το μήκος $\rho = |z|$ ονομάζεται **μέτρο** του z .

Η γωνία $\theta = \arg z \in [0, 2\pi)$ ονομάζεται **(πρωτεύον) όρισμα** του z και ορίζεται για $z \neq 0$.

- **Τριγωνομετρική μορφή:** $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho \operatorname{cis} \theta$, όπου $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

• **Πράξεις στους μιγαδικούς αριθμούς:**

Έστω $z = a + bi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$ και

έστω $z_1 = a + bi = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ και $z_2 = c + di = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ τότε

Ισότητα: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ και $b = d$.

Πρόσθεση: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

Πολλαπλασιασμός: $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

Ειδικά: $z \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$.

Δυνάμεις: $z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Διαίρεση: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$, όπου $z_2 \neq 0$.

Ρίζες: Υπάρχουν πάντα n διαφορετικές n -οστές ρίζες του z που δίνονται από τον τύπο:

$$\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right), \text{ όπου } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Ειδικά: Οι n -οστές ρίζες της μονάδας ($1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$) δίνονται από τον τύπο:

$$\omega_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \text{ όπου } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- **Μιγαδικές ρίζες εξισώσεων δευτέρου βαθμού:** Αν $ax^2 + bx + c = 0$ με $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ τότε n εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες z_1, \bar{z}_1 που δίνονται από τον τύπο

$$z_1, \bar{z}_1 = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i$$

οπότε $z_1 + \bar{z}_1 = -\frac{b}{a}$ και $z_1 \bar{z}_1 = \frac{c}{a} = |z_1|^2$.

Οι ρίζες αυτές γράφονται σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$z_1, \bar{z}_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} (\cos \theta \pm i \sin \theta) \text{ όπου } \cos \theta = -\frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

- **Μιγαδικές ρίζες πολυωνύμων:** Κάθε πολυώνυμο n -οστού βαθμού έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες (με επαναλήψεις). Επιπλέον, αν ο $z = a + bi$ είναι ρίζα, έπεται ότι και ο συζυγής του $\bar{z} = a - bi$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου. Δηλαδή οι μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.1. Να λυθεί n ομογενής εξίσωση $y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 3.$$

Άρα,

$$y_x = c_1 2^x + c_2 3^x. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.2. Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_x = 2y_{x-1} + 4y_{x-2}$.

Λύση. Με μετατόπιση του x κατά δύο μονάδες προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση $y_{x+2} = 2y_{x+1} + 4y_x$.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 + \sqrt{5} \text{ ή } \lambda = 1 - \sqrt{5}.$$

Άρα,

$$y_x = c_1(1 + \sqrt{5})^x + c_2(1 - \sqrt{5})^x. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.3. Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+3} + 3y_{x+2} - 9y_{x+1} + 5y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -5 \text{ ή } \lambda = 1 \text{ (διπλή)}.$$

Άρα,

$$y_x = c_1(-5)^x + c_2(1)^x + c_3x(1)^x. \quad \square$$

Σχήμα Horner για την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου (3ου βαθμού): $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ (με πιθανές ριζές τις $\pm 1, \pm 5$), για την $x = 1$.

1	3	-9	5	1
	1	4	-5	
1	4	-5	0	

Άρα,

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x - 1)(x^2 + 4x - 5) = (x - 1)(x - 1)(x + 5) = (x - 1)^2(x + 5)$$

Αν θέλαμε να ελέγξουμε αρχικά την πιθανή ρίζα $x = -5$ (αντί την $x = 1$):

1	3	-9	5	-5
	-5	10	-5	
1	-2	1	0	

Άρα,

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x + 5)(x^2 - 2x + 1) = (x + 5)(x - 1)^2$$

Παράδειγμα 4.4. Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $2y_{x+3} + 3y_{x+2} - 8y_{x+1} + 3y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -3.$$

Άρα,

$$y_x = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^x + c_2(1)^x + c_3(-3)^x. \quad \square$$

Ριζές ριζές πολυωνύμων: Έστω $r(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές. Αν $\frac{p}{q}$ είναι (ανάγωγη) ρητή ρίζα του πολυωνύμου $r(x)$ τότε $p|a_0$ και $q|a_n$.

Παράδειγμα 4.5. Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+3} + 7y_{x+2} + 16y_{x+1} + 12y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ διπλά, ή } \lambda = -3.$$

Άρα,

$$y_x = c_1(-2)^x + c_2x(-2)^x + c_3(-3)^x. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.6. Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+3} - 4y_{x+2} + 4y_{x+1} - 3y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Μετατροπή της $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ σε τριγωνομετρική μορφή:

Γενικά, αν $\lambda = \alpha + \beta i$, ισχύει ότι

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \rho \cos \theta \\ \beta = \rho \sin \theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{\beta}{\alpha} \end{array} \right.$$

όπου $\rho > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$. Έτσι, εδώ είναι:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

(αφού $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο).

Άρα,

$$y_x = c_1 3^x + c_2 1^x \cos \frac{\pi}{3}x + c_3 1^x \sin \frac{\pi}{3}x. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.7. Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+5} - 32y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow \lambda_k = 2 \left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \right), \text{ όπου } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

όπου λ_k είναι οι 5 πέμπτες ρίζες του 32. Για $k = 0$ προκύπτει η πραγματική λύση $\lambda = 2$, και τα ζευγάρια συζυγών λύσεων λ_1, λ_4 και λ_2, λ_3 . Άρα,

$$y_x = c_1 2^x + c_2 2^x \cos \frac{2\pi x}{5} + c_3 2^x \sin \frac{2\pi x}{5} + c_4 2^x \cos \frac{4\pi x}{5} + c_5 2^x \sin \frac{4\pi x}{5} \quad \square$$

4.4 Γραμμικές μη ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Πρόταση 4.4.1. Έστω

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = \beta(x)$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$y_x = y_x^0 + \psi_x,$$

όπου

y_x : γενική λύση της μη ομογενούς,

y_x^0 : γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς,

ψ_x : μια μερική λύση της μη ομογενούς.

Εύρεση της ψ_x

1η περίπτωση: $\beta(x) = \alpha \cdot \gamma^x$. Τότε, η ψ_x θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\psi_x = \begin{cases} c \cdot \gamma^x, & \text{αν } \gamma \text{ δεν είναι ρίζα της} \\ & \text{χαρακτηριστικής εξίσωσης.} \\ c \cdot x^k \cdot \gamma^x, & \text{αν } \gamma \text{ είναι ρίζα πολλαπλότητας} \\ & k \text{ της χαρακτηριστικής εξίσωσης.} \end{cases}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.8. Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - 2y_x = 2 \cdot 3^x$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Συνεπώς, για $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ είναι $\lambda = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ και

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 \cos \frac{\pi}{3} x + c_3 \sin \frac{\pi}{3} x.$$

Για την εύρεση της $\psi_x = c \cdot 3^x$ της έχουμε

$$c3^{x+3} - 3c3^{x+2} + 3c3^{x+1} - 2c3^x = 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow 7c3^x = 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow c = \frac{2}{7}.$$

Άρα,

$$\psi_x = \frac{2}{7} 3^x$$

και τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 \cos \frac{\pi}{3} x + c_3 \sin \frac{\pi}{3} x + \frac{2}{7} 3^x. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.9. Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+3} - 7y_{x+2} + 16y_{x+1} - 12y_x = 8 \cdot 2^x$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ διπλή ρίζα, ή } \lambda = 3.$$

Άρα,

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 x 2^x + c_3 3^x.$$

Για την εύρεση της $\psi_x = c \cdot x^2 \cdot 2^x$ έχουμε,

$$\begin{aligned} c(x+3)^2 2^{x+3} - 7c(x+2)^2 2^{x+2} + 16c(x+1)^2 2^{x+1} - 12cx^2 2^x &= 8 \cdot 2^x \\ \Leftrightarrow 8c(x^2 + 6x + 9) - 28c(x^2 + 4x + 4) + 32c(x^2 + 2x + 1) - 12cx^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow 72c - 112c + 32c &= 8. \end{aligned}$$

Άρα, $c = -1$ και $\psi_x = -x^2 2^x$,
οπότε τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 x 2^x + c_3 3^x - x^2 2^x. \quad \square$$

2η περίπτωση: $\beta(x) = ax^t$, όπου $t \in \mathbb{N}^*$.

Τότε, η ψ_x θα έχει την μορφή $\psi_x = x^k \cdot Q(x)$, όπου $Q(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού t και k ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση x^k δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.10. Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = x^2$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ διπλή ρίζα.}$$

Άρα, $y_x^0 = c_1 2^x + c_2 x 2^x$.

Για την εύρεση της $\psi_x = x^0(Ax^2 + Bx + \Gamma)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} A(x+2)^2 + B(x+2) + \Gamma - 4(A(x+1)^2 + B(x+1) + \Gamma) + \\ + 4(Ax^2 + Bx + \Gamma) &= x^2 \\ \Leftrightarrow A(x^2 + 4x + 4) + Bx + 2B + \Gamma - 4A(x^2 + 2x + 1) - 4Bx - 4B - 4\Gamma \\ + 4Ax^2 + 4Bx + 4\Gamma &= x^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -4A + B = 0 \\ -2B + \Gamma = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ \Gamma = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα, $\psi_x = x^2 + 4x + 8$, οπότε τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 x 2^x + x^2 + 4x + 8. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.11. Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 3y_x = x$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3.$$

Άρα, $y_x^0 = c_1 + c_2 3^x$.

Για την εύρεση της $\psi_x = x^1(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ έχουμε

$$\begin{aligned} & A(x+2)^2 + B(x+2) - 4(A(x+1)^2 + B(x+1)) + 3(Ax^2 + Bx) = x \\ \Leftrightarrow & A(x^2 + 4x + 4) + Bx + 2B - 4A(x^2 + 2x + 1) - 4Bx - 4B + 3Ax^2 + 3Bx = x \\ \Leftrightarrow & -4Ax - 2B = x \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}, B = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\psi_x = -\frac{1}{4}x^2$, οπότε τελικά

$$y_x = c_1 + c_2 3^x - \frac{1}{4}x^2. \quad \square$$

3η περίπτωση: Συνδυασμός των δυο προηγούμενων.

Παράδειγμα 4.12. Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+3} - 6y_{x+2} + 11y_{x+1} - 6y_x = 4x + 3 \cdot 2^x - 5^x$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 3$$

Άρα, $y_x^0 = c_1 + c_2 2^x + c_3 3^x$.

Για την εύρεση της

$$\psi_x = x(Ax + B) + \Gamma x 2^x + \Delta 5^x = Ax^2 + Bx + \Gamma x 2^x + \Delta 5^x$$

έχουμε

$$\begin{aligned} & A(x+3)^2 + B(x+3) + \Gamma(x+3)2^{x+3} + \Delta 5^{x+3} - \\ & 6A(x+2)^2 - 6B(x+2) - 6\Gamma(x+2)2^{x+2} - 6\Delta 5^{x+2} + \\ & 11A(x+1)^2 + 11B(x+1) + 11\Gamma(x+1)2^{x+1} + 11\Delta 5^{x+1} \\ & - 6Ax^2 - 6Bx - 6\Gamma x 2^x - 6\Delta 5^x = 4x + 3 \cdot 2^x - 5^x \Leftrightarrow \\ & 4Ax - 4A + 2B - 2\Gamma 2^x + 24\Delta 5^x = 4x + 3 \cdot 2^x - 5^x \Leftrightarrow \\ & A = 1, B = 2, \Gamma = -\frac{3}{2}, \Delta = -\frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$y_x = c_1 + c_2 2^x + c_3 3^x + x(x+2) - \frac{3}{2}x 2^x - \frac{1}{24}5^x. \quad \square$$

Αρχικές συνθήκες

Παράδειγμα 4.13. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$$

όταν $y_0 = 3$ και $y_1 = 11$.

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε τη γενική λύση:

$$y_x = c_1 2^x + c_2 3^x$$

και έπειτα, εφαρμόζοντας σ' αυτή τις αρχικές συνθήκες, υπολογίζουμε τις σταθερές.

$$\begin{aligned} c_1 2^0 + c_2 3^0 &= y_0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 2^1 + c_2 3^1 &= y_1 \Leftrightarrow 2c_1 + 3c_2 = 11 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει:

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 5.$$

Άρα,

$$y_x = -2 \cdot 2^x + 5 \cdot 3^x. \quad \square$$

Ακολουθίες

Οι ακολουθίες που ορίζονται με αναδρομικό τύπο, μπορούν να θεωρηθούν γραμμικές Ε. Δ. (με a_n αντί y_x) και να λυθούν, δίνοντας τον τύπο της ακολουθίας a_n .

Παράδειγμα 4.14. Να βρεθεί ο τύπος της ακολουθίας (a_n) για την οποία $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n$, και $a_1 = 5$, $a_2 = 1$,

Απόδειξη. Λύνουμε την

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 0.$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = -3.$$

Άρα, $a_n = c_1 1^n + c_2 (-3)^n = c_1 + c_2 (-3)^n$.

$$\begin{cases} \text{Για } n = 1 : 5 = c_1 + c_2(-3) \\ \text{Για } n = 2 : 1 = c_1 + c_2(-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - 3c_2 = 5 \\ c_1 + 9c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα, τελικά

$$a_n = 4 - \frac{1}{3}(-3)^n. \quad \square$$

4.5 Άλλες κατηγορίες γραμμικών αναγωγικών εξισώσεων

Δεν υπάρχουν γενικοί τύποι που να δίνουν τις λύσεις των μη γραμμικών αναγωγικών εξισώσεων όπως η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξίσωσης για τις γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Στην ενότητα αυτή δίνονται ορισμένα αποτελέσματα για κάποιες σημαντικές κατηγορίες μη γραμμικών αναγωγικών εξισώσεων που εμφανίζονται σε προβλήματα ανάλυσης αλγορίθμων.

Πρόταση 4.5.1 (Αναγωγικές εξισώσεις διαίρει και βασίλευε). Έστω $f(n)$ μια αύξουσα ακολουθία n οποία ικανοποιεί την αναγωγική σχέση

$$f(n) = af(n/b) + cn^d$$

όπου $n = b^k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 1$, $b \in \mathbb{N}$ με $b \geq 2$, $c > 0$, $d \geq 0$. Τότε

$$f(n) = \begin{cases} f(1)n^d + cn^d \log_b n & \text{αν } \log_b a = d \\ c_1 n^d + c_2 n^{\log_b a}, \text{ όπου } c_1 = \frac{b^d c}{b^d - a}, c_2 = f(1) - c_1 & \text{αν } \log_b a \neq d \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.15. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση της δυαδικής αναζήτησης

$$b(n) = b(n/2) + 2$$

Λύση. Εδώ $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ και $d = 0$, οπότε $\log_b a = \log_2 1 = 0 = d$. Άρα

$$b(n) = b(1)n^d + cn^d \log_b n = b(1)n^0 + 2n^0 \log_2 n = b(1) + 2 \log_2 n. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.16. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση του mergesort

$$M(n) = 2M(n/2) + n$$

Λύση. Εδώ $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ και $d = 1$, οπότε $\log_b a = \log_2 2 = 1 = d$. Άρα

$$M(n) = M(1)n^d + cn^d \log_b n = M(1)n^1 + n^1 \log_2 n = M(1)n + n \log_2 n = n(M(1) + \log_2 n). \quad \square$$

Παράδειγμα 4.17. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση του μεγιστοελάχιστου

$$m(n) = 2m(n/2) + 2$$

Λύση. Εδώ $a = 2$, $b = 2$, $c = 2$ και $d = 0$, οπότε $\log_b a = \log_2 2 = 1 \neq d$. Άρα

$$m(n) = c_1 n^d + c_2 n^{\log_b a} = c_1 + c_2 n$$

όπου $c_1 = \frac{b^d c}{b^d - a} = \frac{2^0 \cdot 2}{2^0 - 2} = -2$ και $c_2 = m(1) - c_1 = m(1) + 2$, οπότε

$$m(n) = -2 + (m(1) + 2)n$$

□

4.6 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 4.1. Να βρεθεί η γενική λύση y_x^0 της ομογενούς εξίσωσης στις παρακάτω περιπτώσεις που η χαρακτηριστική της εξίσωση έχει ρίζες:

i) 2, -3, -3, -3, 4, 4

$$\text{Λύση. } y_x^0 = c_1 2^x + c_2 (-3)^x + c_3 x (-3)^x + c_4 x^2 (-3)^x + c_5 4^x + c_6 x 4^x \quad \square$$

ii) 4-πλη ρίζα το $\frac{1}{3}$

$$\text{Λύση. } y_x^0 = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_2 x \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_3 x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_4 x^3 \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \square$$

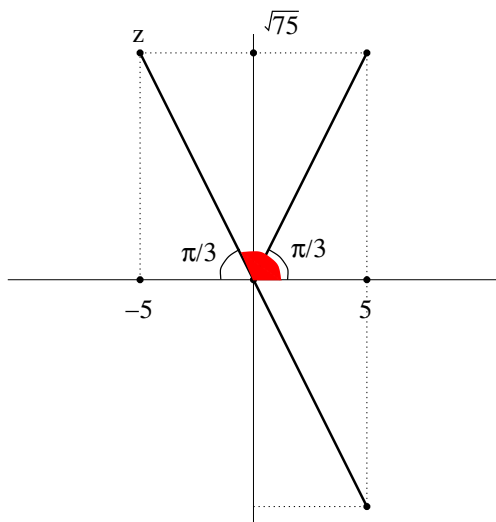
iii) 2, 3, 3, $-5 \pm \sqrt{75}i$.

Λύση. Θα εκφράσουμε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό αριθμό $-5 + \sqrt{75}i$.

Αν $z = a + bi$, τότε $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ όπου $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ και $\text{tg } \theta = \frac{b}{a}$.

Οπότε, $\rho = \sqrt{(-5)^2 + \sqrt{75}^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10$.

$$\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{75}}{-5} = \frac{\sqrt{75}}{-\sqrt{25}} = -\sqrt{3}.$$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \phi$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \phi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\text{tg } \phi$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-
$\text{ctg } \phi$	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Γνωρίζουμε ότι $\text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ οπότε $\text{tg } \theta = -\sqrt{3}$ όταν $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ ή όταν $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$.

Επειδή το $z = -5 + \sqrt{75}i$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο, έπεται ότι $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

$$\text{Άρα, } -5 + \sqrt{75}i = 10 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$\text{Επομένως, } y_x^0 = c_1 2^x + c_2 3^x + c_3 x 3^x + c_4 10^x \cos \left(\frac{2\pi x}{3} \right) + c_5 10^x \sin \left(\frac{2\pi x}{3} \right) \quad \square$$

Άσκηση 4.2. Να βρεθούν οι μερικές λύσεις ψ_x των παρακάτω αναγωγικών εξισώσεων

i) $y_{x+3} + y_x = 5 \cdot 3^x$

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3 + 1 = 0$.

Το 3 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε η μερική λύση θα έχει την μορφή

$$\psi_x = A \cdot 3^x$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε ισοδύναμα:

$$\psi_{x+3} + \psi_x = 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$A3^{x+3} + A3^x = 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$27A3^x + A3^x = 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$28A = 5 \Leftrightarrow A = \frac{5}{28}$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = \frac{5}{28}3^x$. □

ii) $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x$

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$, άρα το 2 είναι διπλή ρίζα.

Το 3 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε η μερική λύση θα έχει την μορφή

$$\psi_x = Ax^2 \cdot 2^x + B3^x$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε ισοδύναμα:

$$\psi_{x+2} - 4\psi_{x+1} + 4\psi_x = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$(A(x+2)^2 2^{x+2} + B3^{x+2}) - 4(A(x+1)^2 2^{x+1} + B3^{x+1}) + 4(Ax^2 2^x + B3^x) = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$(9B3^x - 12B3^x + 4B3^x) + (16A2^x - 8A2^x) = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$B3^x + 8A2^x = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{7}{8}, B = 6$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = \frac{7}{8}x^2 2^x + 6 \cdot 3^x$. □

iii) $y_{x+3} - y_x = 2x + 3$

Λύση. Επειδή το $2x + 3$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού, η μερική λύση της εξίσωσης έχει την μορφή

$$\psi_x = x^k(Ax + B)$$

όπου k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση $y_x = x^k$ δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

Για $k = 0$, $y_x = x^0 = 1$.

Αντικαθιστούμε την $y_x = 1$ στην ομογενή εξίσωση

$$y_{x+3} - y_x = 1 - 1 = 0$$

άρα είναι λύση της ομογενούς.

Για $k = 1$, $y_x = x^1 = x$.

Αντικαθιστούμε την $y_x = x$ στην ομογενή εξίσωση

$$y_{x+3} - y_x = x + 3 - x = 3$$

άρα δεν είναι λύση της ομογενούς.

Επομένως, $k = 1$ και η μερική λύση έχει την μορφή

$$\psi_x = x^1(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση για να βρούμε τα A , B :

$$\begin{aligned} \psi_{x+3} - \psi_x &= 2x + 3 \Leftrightarrow \\ A(x+3)^2 + B(x+3) - (Ax^2 + Bx) &= 2x + 3 \Leftrightarrow \\ (9A + 3B) + 6Ax + Bx - Bx &= 2x + 3 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 9A + 3B = 3 \\ 6A = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow A = \frac{1}{3}, B = 0 \end{aligned}$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = x \left(\frac{1}{3}x \right) = \frac{1}{3}x^2$.

(Επιβεβαίωση: $\frac{1}{3}(x+3)^2 - \frac{1}{3}x^2 = \dots = 2x + 3$) □

Άσκηση 4.3. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση

$$y_{x+3} - y_x = 2x + 3.$$

Λύση. Από την προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι η μερική λύση της είναι $\psi = \frac{1}{3}x^2$.

Θα βρούμε την γενική λύση y_x^0 της ομογενούς.

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3 - 1 = 0$. Μια ρίζα είναι το 1. Άρα, το πολυώνυμο $\lambda^3 + 1$ διαιρείται με το $\lambda - 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης

1	0	0	-1	1
	1	1	1	
1	1	1	0	

Άρα, $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Επομένως, οι άλλες δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Θα εκφράσουμε τον $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ και } \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}.$$

Επειδή $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο έπεται ότι $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Άρα, $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ και επομένως

$$y_x^0 = c_1 1^x + c_2 1^x \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + c_3 1^x \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$$

Τελικά, η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y_x = y_x^0 + \psi_x = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + c_3 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + \frac{1}{3}x^2 \quad \square$$

Παρατήρηση: Για $a > 0$, η συνάρτηση $(-a)^x$ λαμβάνει και μη πραγματικές τιμές (μιγαδικές τιμές), όταν για παράδειγμα $x = \frac{1}{2}$ ή $x = \frac{2k+1}{2\lambda}$, $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$. Επειδή ψάχνουμε μόνο πραγματικές λύσεις θα εκφράσουμε το $-a$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$$-a = |a| (\cos \pi + i \sin \pi)$$

Άρα, αντί για την συνάρτηση $(-a)^x$ μπορούμε να γράφουμε

$$|a|^x \cos(\pi x) + |a|^x \sin(\pi x).$$

Για παράδειγμα, αντί για $(-1)^x$ γράφουμε

$$1^x \cos(\pi x) + 1^x \sin(\pi x)$$

Άσκηση 4.4. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση

$$y_{x+2} + y_{x+1} + y_x = 0, \text{ όπου } y_0 = 0, y_1 = 2.$$

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Θα εκφράσουμε τον $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ σε τριγωνομετρική μορφή: $\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ και $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$. Επειδή $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο έπεται ότι $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Άρα, $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ και επομένως

$$y_x = y_x^0 = c_1 1^x \cos \frac{2\pi x}{3} + c_2 1^x \sin \frac{2\pi x}{3}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι

$$y_0 = 0 \Leftrightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$y_1 = 2 \Leftrightarrow c_2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \Leftrightarrow c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Επομένως, η λύση της εξίσωσης είναι η συνάρτηση $y_x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\pi x}{3}$ □

Άσκηση 4.5. Να λυθεί η μη γραμμική αναγωγική εξίσωση

$$a_n = \frac{1}{1 + 6a_{n-1}}$$

Λύση. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε γραμμική αν θέσουμε

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

Τότε

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{1 + 6\frac{b_{n-1}}{b_n}} \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_n}{b_n + 6b_{n-1}} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + 6b_{n-1}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της b_n είναι $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ή $\lambda = -2$.
Επομένως, η γενική μορφή της ακολουθίας b_n είναι

$$b_n = c_1 3^n + c_2 (-2)^n$$

Άρα, η ακολουθία a_n έχει την μορφή

$$a_n = \frac{c_1 3^n + c_2 (-2)^n}{c_1 3^{n+1} + c_2 (-2)^{n+1}} \quad \square$$

Άσκηση 4.6. Να λυθεί η μη γραμμική αναγωγική εξίσωση

$$a_n = a_{n-1}^3 / a_{n-2}, \text{ όπου } a_n > 0.$$

Λύση. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε γραμμική αν λάβουμε τον λογάριθμο κάθε μέλους.

$$a_n = a_{n-1}^3 / a_{n-2} \Leftrightarrow \ln_2 a_n = 3 \ln_2 a_{n-1} - \ln_2 a_{n-2}$$

Θέτουμε $b_n = \ln_2 a_n$ οπότε προκύπτει η αναγωγική εξίσωση

$$b_n - 3b_{n-1} + b_{n-2} = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 3\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Επομένως, } b_n = c_1 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Άρα, η ακολουθία a_n έχει την μορφή

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{c_1 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n} \quad \square$$

Άσκηση 4.7. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση

$$y_{x+4} - 2y_{x+3} - 2y_{x+2} + 8y_{x+1} - 8y_x = 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x, \text{ όπου } y_0 = \frac{2}{25}, y_1 = \frac{123}{200}, y_2 = \frac{111}{50}, y_3 = \frac{383}{50}.$$

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε τη γενική λύση y_x^0 της αντίστοιχης ομογενούς:

Υπολογίζουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0.$$

Επειδή, η εξίσωση είναι 4ου βαθμού, δοκιμάζουμε για τυχόν ρίζες μεταξύ των διαιρετών του 8. Οι διαιρετές του 8 είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

Είναι

$$1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 8 = -3 \neq 0.$$

$$(-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 8 = -15 \neq 0.$$

$$2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 8 = 0.$$

άρα, το 2 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

$$(-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 8 = 0.$$

άρα, το -2 είναι επίσης ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Επομένως, το πολυώνυμο $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$ διαιρείται από το πολυώνυμο $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$.

Προκειμένου να βρούμε τις υπόλοιπες ρίζες εκτελούμε τη διαίρεση των δύο πολυώνυμων:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & -2x^3 & -2x^2 & +8x & -8 & | & x^2 - 4 \\ -x^4 & & +4x^2 & & & | & x^2 \\ \hline & -2x^3 & +2x^2 & +8x & -8 & | & \\ & 2x^3 & & -8x & & | & -2x \\ \hline & & 2x^2 & & -8 & | & \\ & & -2x^2 & & +8 & | & +2 \\ \hline & & & & 0 & | & \end{array}$$

Άρα

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = (x^2 - 4)(x^2 - 2x + 2).$$

Το πολυώνυμο $x^2 - 2x + 2$ είναι δευτέρου βαθμού και οι ρίζες του είναι οι αριθμοί

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i.$$

Άρα, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί: $2, -2, 1 + i, 1 - i$.

Επειδή, οι ρίζες $1 + i$ και $1 - i$ είναι μιγαδικές θα τις εκφράσουμε σε τριγωνομετρική μορφή $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Για τη ρίζα $1 - i$ είναι

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

και

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} \text{ (αφού } (1, -1) \text{ ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο),}$$

οπότε

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

(Άρα για την συζυγή της ρίζα είναι $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$.)

Επομένως, η γενική λύση y_x^0 της ομογενούς δίδεται από την ισότητα

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 (-2)^x + c_3 (\sqrt{2})^x \cos \frac{7\pi}{4} x + c_4 (\sqrt{2})^x \sin \frac{7\pi}{4} x.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε μια μερική λύση ψ_x της δοθείσας μη ομογενούς.

Επειδή, το 2 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης πολλαπλότητας 1, ενώ το 3 δεν είναι ρίζα, η μερική λύση ψ_x της μη ομογενούς θα έχει τη μορφή

$$\psi_x = A \cdot x^1 \cdot 2^x + B \cdot 3^x.$$

Για να βρούμε τα A, B αντικαθιστούμε την ψ_x στην αρχική αναγωγική εξίσωση οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & A(x+4)2^{x+4} + B \cdot 3^{x+4} - 2A(x+3)2^{x+3} - 2B \cdot 3^{x+3} - 2A(x+2)2^{x+2} - 2B \cdot 3^{x+2} \\ & + 8A(x+1)2^{x+1} + 8B \cdot 3^{x+1} - 8Ax2^x - 8B \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\ & 16A(x+4)2^x + 81B \cdot 3^x - 16A(x+3)2^x - 54B \cdot 3^x - 8A(x+2)2^x - 18B \cdot 3^x \\ & + 16A(x+1)2^x + 24B \cdot 3^x - 8Ax2^x - 8B \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\ & (16Ax + 64A - 16Ax - 48A - 8Ax - 16A + 16Ax + 16A - 8Ax) 2^x \\ & + (81B - 54B - 18B + 24B - 8B) \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\ & 16A \cdot 2^x + 25B \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\ & A = \frac{3}{16}, \quad B = \frac{2}{25}. \end{aligned}$$

Επομένως, η ζητούμενη μερική λύση ψ_x είναι η

$$\psi_x = \frac{3}{16} x 2^x + \frac{2}{25} 3^x.$$

Τέλος, η γενική λύση y_x της αναγωγικής εξίσωσης είναι το άθροισμα των δύο λύσεων που βρήκαμε, δηλαδή

$$\begin{aligned} y_x &= y_x^0 + \psi_x \\ &= c_1 2^x + c_2 (-2)^x + c_3 (\sqrt{2})^x \cos \frac{7\pi}{4} x + c_4 (\sqrt{2})^x \sin \frac{7\pi}{4} x + \frac{3}{16} x 2^x + \frac{2}{25} 3^x. \end{aligned}$$

Προκειμένου, να βρούμε τους συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 , και επειδή γνωρίζουμε ότι $y_0 = \frac{2}{25}$, $y_1 = \frac{123}{200}$, $y_2 = \frac{11}{50}$, $y_3 = \frac{2333}{50}$, θέτουμε στη γενική λύση $x = 0, 1, 2, 3$ αντίστοιχα.

Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \\ 4c_1 + 4c_2 - 2c_4 &= 0 \\ 8c_1 - 8c_2 - 2c_3 - 2c_4 &= 40, \end{aligned}$$

το οποίο έχει τη μοναδική λύση

$$c_1 = 5, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = -4, \quad c_4 = 8.$$

Άρα, τελικά, ισχύει ότι

$$y_x = 5 \cdot 2^x - (-2)^x - 4c_3 (\sqrt{2})^x \cos \frac{7\pi}{4} x + 8 (\sqrt{2})^x \sin \frac{7\pi}{4} x + \frac{3}{16} x 2^x + \frac{2}{25} 3^x. \quad \square$$

Άσκηση 4.8. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση

$$2y_{x+3} - 6y_{x+2} + 6y_{x+1} - 2y_x = 2x, \text{ όπου } y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3.$$

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε τη γενική λύση y_x^0 της αντίστοιχης ομογενούς:

Υπολογίζουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0.$$

Επειδή, η εξίσωση είναι 3ου βαθμού δοκιμάζουμε για τυχόν ρίζες μεταξύ των διαιρετών του 2. Οι διαιρετές του 2 είναι $\pm 1, \pm 2$.

Είναι

$$2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 2 = 0.$$

Άρα, το 1 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Επομένως, το πολυώνυμο $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x - 1$.

Προκειμένου να βρούμε τις υπόλοιπες ρίζες εκτελούμε τη διαίρεση των δύο πολυώνυμων:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & -6x^2 & +6x & -2 & | & x-1 \\ -2x^3 & +2x^2 & & & | & 2x^2 \\ \hline & -4x^2 & +6x & -2 & | & \\ & 4x^2 & -4x & & | & -4x \\ \hline & & 2x & -2 & | & \\ & & -2x & +2 & | & +2 \\ \hline & & & 0 & | & \end{array}$$

Άρα

$$2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = (x - 1)(2x^2 - 4x + 2) = 2(x - 1)(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^3.$$

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό 1 με πολλαπλότητα 3.

Επομένως, η γενική λύση y_x^0 της ομογενούς έχει τη μορφή

$$y_x^0 = c_1 \cdot 1^x + c_2 x \cdot 1^x + c_3 x^2 \cdot 1^x = c_1 + c_2 x + c_3 x^2.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε μια μερική λύση ψ_x της δοθείσας μη ομογενούς.

Επειδή το $2x$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού η μερική λύση ψ_x θα έχει τη μορφή

$$\psi_x = x^k(Ax + B),$$

όπου k ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση $y_x = x^k$ δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Για $k = 0$ είναι $y_x = x^0 = 1$, και επειδή το 1 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, η $y_x = x^0$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Συνεχίζουμε με τον επόμενο φυσικό αριθμό k . Για $k = 1$ είναι $y_x = x^1 = x$. Αντικαθιστώντας την στην αναγωγική εξίσωση έχουμε ότι

$$2(x + 3) - 6(x + 2) + 6(x + 1) - 2x = 2x + 6 - 6x - 12 + 6x + 6 - 2x = 0,$$

οπότε η $y_x = x^1$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Συνεχίζουμε με τον επόμενο φυσικό αριθμό k . Για $k = 2$ είναι $y_x = x^2$. Αντικαθιστώντας την στην αναγωγική εξίσωση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & 2(x + 3)^2 - 6(x + 2)^2 + 6(x + 1)^2 - 2x^2 = \\ & 2x^2 + 12x + 18 - 6x^2 - 24x - 24 + 6x^2 + 12x + 6 - 2x^2 = 0, \end{aligned}$$

οπότε η $y_x = x^2$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Συνεχίζουμε με τον επόμενο φυσικό αριθμό k . Για $k = 3$ είναι $y_x = x^3$. Αντικαθιστώντας την στην αναγωγική εξίσωση έχουμε ότι

$$2(x+3)^3 - 6(x+2)^3 + 6(x+1)^3 - 2x^3 = \dots = 12 \neq 0,$$

οπότε η $y_x = x^3$ **δεν** είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Επομένως $k = 3$.

Άρα, η μερική λύση ψ_x θα έχει τη μορφή

$$\psi_x = x^3(Ax + B).$$

Για να βρούμε τα A, B αντικαθιστούμε την ψ_x στην αρχική αναγωγική εξίσωση οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & 2(x+3)^3(A(x+3) + B) - 6(x+2)^3(A(x+2) + B) \\ & + 6(x+1)^3(A(x+1) + B) - 2x^3(Ax + B) = 2x \Leftrightarrow \\ & (2x^3 + 18x^2 + 54x + 54)(Ax + 3A + B) - (6x^3 + 36x^2 + 72x + 48)(Ax + 2A + B) \\ & + (6x^3 + 18x^2 + 18x + 6)(Ax + A + B) - 2x^3(Ax + B) = 2x \Leftrightarrow \\ & \dots \Leftrightarrow \\ & 48Ax + 72A + 12B = 2x \Leftrightarrow \\ & A = \frac{1}{24}, B = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Επομένως, η ζητούμενη μερική λύση ψ_x είναι η

$$\psi_x = x^3 \left(\frac{1}{24}x - \frac{1}{4} \right)$$

Τέλος, η γενική λύση y_x της αναγωγικής εξίσωσης είναι το άθροισμα των δύο λύσεων που βρήκαμε, δηλαδή

$$\begin{aligned} y_x &= y_x^0 + \psi_x \\ &= c_1 + c_2x + c_3x^2 + x^3 \left(\frac{1}{24}x - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Προκειμένου, να βρούμε τους συντελεστές c_1, c_2, c_3 , και επειδή γνωρίζουμε ότι $y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3$, θέτουμε στη γενική λύση $x = 0, 1, 2$ αντίστοιχα.

Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 - \frac{5}{24} &= 2 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 - \frac{4}{3} &= 3, \end{aligned}$$

το οποίο έχει τη μοναδική λύση

$$c_1 = 1, c_2 = \frac{3}{4}, c_3 = \frac{11}{24}.$$

Άρα, τελικά, ισχύει ότι

$$y_x = 1 + \frac{3}{4}x + \frac{11}{24}x^2 + x^3 \left(\frac{1}{24}x - \frac{1}{4} \right). \quad \square$$

4.7 Ασκήσεις προς επίλυση

1) Να λυθούν οι ομογενείς γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις

- i) $y_{x+2} + 3y_{x+1} - 10y_x = 0, y_0 = 7, y_1 = -14.$
- ii) $y_{x+2} - 8y_{x+1} + 16y_x = 0, y_0 = 5, y_1 = 12.$
- iii) $2y_{x+2} + 3y_{x+1} - 2y_x = 0, y_0 = 0, y_1 = -3.$
- iv) $4y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x = 0, y_0 = -2, y_1 = 0.$
- v) $y_{x+3} - 2y_{x+1} - \sqrt{3}y_x = 0, y_0 = -2, y_1 = 3, y_2 = 4 - 3\sqrt{3}.$
- vi) $y_{x+3} - 2y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0, y_0 = -12, y_1 = 2, y_2 = 22.$
- vii) $y_{x+2} + y_{x+1} + y_x = 0, y_0 = 0, y_1 = 1.$
- viii) $y_{x+3} - y_{x+2} - 8y_{x+1} + 12y_x = 0, y_0 = 5, y_1 = -8, y_2 = -2.$
- ix) $y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x = 0, y_0 = 4, y_1 = 2, y_2 = 0.$
- x) $y_{x+3} - y_{x+2} + 4y_{x+1} - 4y_x = 0, y_0 = 2, y_1 = 3, y_2 = -3.$
- xi) $y_{x+4} - 3y_{x+2} + 14y_{x+1} - 12y_x = 0, y_0 = 9, y_1 = 3 + 2\sqrt{3}, y_2 = 21 + 4\sqrt{3}, y_3 = -63.$
- xii) $y_{x+4} - 2y_{x+3} - 11y_{x+2} + 12y_{x+1} + 36y_x = 0, y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 7, y_3 = -137.$
- xiii) $y_{x+5} - 3y_{x+4} - 2y_{x+3} + 4y_{x+2} + 24y_{x+1} - 32y_x = 0, y_0 = 3, y_1 = 2, y_2 = 38, y_3 = 76, y_4 = 418.$
- xiv) $y_{x+5} - 7y_{x+4} + 17y_{x+3} - 19y_{x+2} + 16y_{x+1} - 12y_x = 0, y_0 = 0, y_1 = -2, y_2 = -13, y_3 = -55, y_4 = -179.$
- xv) $y_{x+6} - 2y_{x+5} + 3y_{x+4} - 4y_{x+3} + 3y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = 0, y_0 = -3, y_1 = 1, y_2 = -3, y_3 = -1, y_4 = 13, y_5 = 17.$

2) Να λυθούν οι γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις

- i) $y_{x+2} - 4y_x = 12(-2)^x, y_0 = 4, y_1 = -4.$
- ii) $y_{x+2} + y_x = 5 \cdot 2^x, y_0 = 2, y_1 = 1.$
- iii) $y_{x+2} - 2y_{x+1} - 3y_x = 8(-1)^x, y_0 = 7, y_1 = -3.$
- iv) $y_{x+2} + 4y_{x+1} + 4y_x = (-2)^{x+4}, y_0 = 1, y_1 = 3.$
- v) $y_{x+2} - 3y_{x+1} - 10y_x = 7 \cdot 5^{x+1}, y_0 = 8, y_1 = 3.$
- vi) $y_{x+2} - 2\sqrt{2}y_{x+1} + 4y_x = \sqrt{2} \cdot 2^{x+2}, y_0 = \sqrt{2}, y_1 = \sqrt{2}.$
- vii) $y_{x+2} + y_{x+1} - 2y_x = 18x + 12(-2)^x + 10 \cdot 3^x.$
- viii) $y_{x+4} - y_x = 8(2x - 1) + 16(-1)^x + 15 \cdot 2^x.$
- ix) $y_{x+2} - 8y_{x+1} + 16y_x = 18x, y_0 = \frac{2}{3}, y_1 = \frac{26}{3}.$
- x) $y_{x+2} + 4y_{x+1} - 12y_x = 6x^2 - 19x + 10, y_0 = 1, y_1 = -1.$
- xi) $y_{x+2} + 3y_{x+1} - 4y_x = 20x + 19, y_0 = 2, y_1 = 4.$
- xii) $y_{x+3} - 2y_{x+2} + y_{x+1} - 2y_x = 8 \cdot 2^x + 7 \cdot 5^x.$
- xiii) $y_{x+3} - 11y_{x+2} + 39y_{x+1} - 45y_x = 10 \cdot 3^x + 8 \cdot 5^x.$

3) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (a_n) όταν

$$a_0 = 4, a_1 = 5, a_2 = 6 \text{ και } a_n = \frac{29a_{n-1} - 23a_{n-2} + 6a_{n-3}}{12},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, με $n \geq 3$.

4) Να λυθούν οι μη γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις, αφού μετασχηματισθούν σε γραμμικές με τη βοήθεια των υποδείξεων.

i) $a_n = a_{n-1} - a_n a_{n-1}$. (Υπόδειξη: Διαρέστε κατά μέλη με $a_n a_{n-1}$).

ii) $a_n = 7a_{n/2} + n^2$. (Υπόδειξη: Να τεθεί $b_n = \frac{a_{2^n}}{7^n}$).

5) Να βρεθεί ο αριθμός των λέξεων μήκους n που μπορούν να κατασκευασθούν χρησιμοποιώντας δύο γράμματα a, b έτσι ώστε αυτές να μην περιέχουν δύο διαδοχικά a .

Κεφάλαιο 5

Γεννήτριες συναρτήσεις

5.1 Συνήθειες γεννήτριες συναρτήσεις

Για κάθε ακολουθία¹ f/\mathbb{N} πραγματικών αριθμών, ορίζεται μια συνάρτηση f^* με

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n/(-\rho, \rho),$$

όπου $\rho > 0$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, η οποία ονομάζεται **(συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση της f** .

Οι γεννήτριες συναρτήσεις μετατρέπουν πολλά προβλήματα που εμφανίζονται στο διακριτό χώρο (όπου ορίζεται η f) σε προβλήματα του συνεχούς χώρου (όπου ορίζεται η f^*) τα οποία είναι ευκολότερο να λυθούν, αφού γι' αυτό υπάρχει η δυνατότητα χρήσης των εργαλείων της Μαθηματικής Ανάλυσης (παραγώγιση, ολοκλήρωση κ.λπ.). Πιο συγκεκριμένα, με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων μπορεί να ευρεθεί ο τύπος ορισμένων ακολουθιών που δίδονται σε αναδρομική μορφή, να αποδειχθούν με σύντομο τρόπο πολλοί τύποι της Συνδυαστικής Ανάλυσης, να προσδιορισθούν ορισμένες ασυμπτωτικές σχέσεις ακολουθιών και να επιλυθούν διάφορα προβλήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Από το Πρόγραμμα 4.3, σελ. 403, του βιβλίου Α. Σαπουνάκης και Ε. Φούντας, Ανάλυση και Εφαρμογές, τόμος II, προκύπτει ότι αν $\rho > 0$, ισχύει ότι

$$f^*(x) = g^*(x), \text{ για κάθε } x \in (-\rho, \rho) \Rightarrow f(n) = g(n), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

οπότε η απεικόνιση $f \rightarrow f^*$ είναι 1-1, δηλαδή η συνάρτηση f^* δεν μπορεί να δημιουργηθεί από δύο διαφορετικές συναρτήσεις, πράγμα στο οποίο οφείλει και το όνομά της.

Γενικότερα, οι γεννήτριες συναρτήσεις ορίζονται για μιγαδική μεταβλητή z . Τότε η f^* ορίζεται στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ το οποίο γεωμετρικά παριστάνει το εσωτερικό ενός κύκλου κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας ρ . Έτσι, πολλές φορές χρησιμοποιείται η μεταβλητή z αντί της μεταβλητής x και η f^* ονομάζεται **μετασχηματισμός z** .

Τέλος, πρέπει να τονισθεί ότι σε πολλά βιβλία χρησιμοποιείται το κλασικό σύμβολο f_n της ακολουθίας (αντί του $f(n)$ που χρησιμοποιείται εδώ) και το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα για τη γεννήτριά της, δηλαδή

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

¹Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $f(n)$ για τις ακολουθίες και η μεταβλητή n θα παίρνει τιμές στο \mathbb{N} .

Βασικές γεννήτριες συναρτήσεις

1. Αν $f(n) = a^n/\mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}^*$, τότε $f^*(x) = \frac{1}{1-ax}/\left(-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}\right)$, διότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n = \frac{1}{1-ax}.$$

2. Αν $f(n) = \frac{a^n}{n!}/\mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε $f^*(x) = e^{ax}/\mathbb{R}$, διότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}.$$

3. Αν $f(n) = \binom{a}{n}/\mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε $f^*(x) = (1+x)^a/\mathbb{R}$, διότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = (1+x)^a.$$

Ιδιότητες γεννητριών συναρτήσεων

1. Αν $f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$f^*(x) = c_1 f_1^*(x) + c_2 f_2^*(x).$$

2. Αν $f(n) = a^n \phi(n)$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$f^*(x) = \phi^*(ax).$$

3. Αν $f(n) = \phi(n+k)$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$f^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{x^k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\phi(i)}{x^{k-i}}.$$

Για παράδειγμα

$$(\phi(n+1))^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{x} - \frac{\phi(0)}{x}$$

και

$$(\phi(n+2))^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{x^2} - \frac{\phi(0)}{x^2} - \frac{\phi(1)}{x}$$

4. Αν $f(n) = F_k(n)\phi(n) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\phi(n)$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$ τότε

$$f^*(x) = x^k (\phi^*(x))^{(k)}.$$

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης. Ειδικά για την απόδειξη της τέταρτης ιδιότητας, εφαρμόζεται το Πόρισμα 4.3, σελ. 403 του βιβλίου Α. Σαπουνάκης και Ε. Φούντας, Ανάλυση και Εφαρμογές, τόμος II.

Παρατήρηση: Όπως είναι γνωστό από τη Συνδυαστική Ανάλυση, τα πολυώνυμα $F_i(x)$, όπου $i \in \mathbb{N}$, με $F_0(x) = 1$ και $F_i(x) = x(x-1) \cdots (x-i+1)$ ονομάζονται **παραγοντικά πολυώνυμα**, και έχουν την ιδιότητα ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού k εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των F_0, F_1, \dots, F_k . Οι συντελεστές των F_i στην έκφραση αυτή του μονωνύμου x^k , ονομάζονται **αριθμοί Stirling δευτέρου είδους**² και σημειώνονται με $\overline{S}(k, i)$, δηλαδή ισχύει ότι

$$x^k = \sum_{i=0}^k \overline{S}(k, i) F_i(x).$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ο τύπος

$$5. (n^k \phi(n))^*(x) = \sum_{i=1}^k \overline{S}(k, i) x^i (\phi^*(x))^{(i)}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Πράγματι, για $n = k$ έχουμε ότι

$$n^k = \sum_{i=0}^k \overline{S}(k, i) F_i(n)$$

$$n^k \phi(n) = \sum_{i=0}^k \overline{S}(k, i) F_i(n) \phi(n).$$

Από την πρώτη (1) και τέταρτη (4) ιδιότητα προκύπτει ότι

$$(n^k \phi(n))^*(x) = \sum_{i=0}^k \overline{S}(k, i) (F_i(n) \phi(n))^* \stackrel{3}{=} \sum_{i=1}^k \overline{S}(k, i) x^i (\phi^*(x))^{(i)}.$$

Παράδειγμα: Αν εφαρμοσθεί ο προηγούμενος τύπος για $k = 1, 2$ και $\phi(n) = a^n$, όπου $a \in \mathbb{R}$, προκύπτουν διαδοχικά οι τύποι:

$$(na^n)^*(x) = \overline{S}(1, 1) x ((a^n)^*(x))' \stackrel{4}{=} 1 \cdot x \left(\frac{1}{1-ax} \right)' = \frac{ax}{(1-ax)^2}$$

και

$$(n^2 a^n)^*(x) = \overline{S}(2, 1) x ((a^n)^*(x))' + \overline{S}(2, 2) x^2 ((a^n)^*(x))''$$

$$\stackrel{5}{=} 1 \cdot x \left(\frac{1}{1-ax} \right)' + 1 \cdot x^2 \left(\frac{1}{1-ax} \right)'' = \frac{ax(1+ax)}{(1-ax)^3}.$$

Συνέλιξη

Αν $f, g/\mathbb{N}$ είναι δύο ακολουθίες, τότε το άθροισμα $\sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)$ ορίζει μια ακολουθία που ονομάζεται **συνέλιξη** αυτών και σημειώνεται με $f \circledast g$, δηλαδή

$$(f \circledast g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k).$$

²Βλέπε και ενότητα 3.2.2, σελ. 148.

³Διότι $\overline{S}(k, 0) = 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

⁴Διότι $\overline{S}(1, 1) = 1$, αφού $x = F_1(x)$.

⁵Διότι $\overline{S}(2, 1) = \overline{S}(2, 2) = 1$, αφού $x^2 = F_2(x) + F_1(x)$.

Προφανώς, ισχύει ότι $f \circledast g = g \circledast f$.

Παρατήρηση: Ο ορισμός της συνέλιξης συμφωνεί με τον αντίστοιχο ορισμό για συναρτήσεις στο $[0, +\infty)$, βλέπε Κεφάλαιο 10, παράγραφο 6, του βιβλίου Α. Σαπουνάκης και Ε. Φούντας, Ανάλυση και Εφαρμογές, τόμος II.

Επιπλέον, ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.1.1. Η γεννήτρια συνάρτηση της συνέλιξης δύο ακολουθιών $f, g/\mathbb{N}$ ισούται με το γινόμενο των γεννητριών τους, δηλαδή ισχύει ότι

$$((f \circledast g)(n))^* = (f(n))^*(g(n))^*.$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} ((f \circledast g)(n))^* &= \sum_{n=0}^{\infty} (f \circledast g)(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f(k)g(n-k)x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)x^k \sum_{n=k}^{\infty} g(n-k)x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)x^k \sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)x^k \cdot g^*(x) = g^*(x) \sum_{k=0}^{\infty} f(k)x^k = f^*(x)g^*(x). \quad \square \end{aligned}$$

Εφαρμογές (της Πρότασης 5.1.1)

Εφαρμογή 5.1. Αν $f(n) = \phi(0) + \phi(1) + \dots + \phi(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε είναι

$$f^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{1-x}.$$

Λύση. Πράγματι, εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.1.1 για την ακολουθία $\phi(n)$ και την σταθερή ακολουθία 1, προκύπτει ότι

$$f^*(x) = \left(\sum_{k=0}^n \phi(k) \right)^* = (\phi \circledast 1)^* = \phi^*(x)1^*(x) = \phi^*(x) \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n = \frac{\phi^*(x)}{1-x}. \quad \square$$

Εφαρμογή 5.2. Να αποδειχθεί ο τύπος του Cauchy

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$$

όπου $r, s \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$,

Λύση. Για την απόδειξη του τύπου του Cauchy τίθεται

$$f(n) = \binom{r}{n}, \quad g(n) = \binom{s}{n} \quad \text{και} \quad h(n) = \binom{r+s}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε από την Πρόταση 5.1.1 προκύπτει ότι

$$h^*(x) = (1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s = f^*(x)g^*(x) = (f \circledast g)^*(x).$$

Άρα,

$$h(n) = (f \otimes g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)$$

και επομένως,

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Παρατήρηση: Στα Μαθηματικά των Υπολογιστών είχε δοθεί ο τύπος του Vandermonde για τα παραγοντικά πολυώνυμα:

$$F_n(r+s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k(r) F_{n-k}(s)$$

ο οποίος είχε αποδειχθεί με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Οι τύποι των Cauchy και Vandermonde είναι όμως ισοδύναμοι. Πράγματι, επειδή ισχύει $\binom{x}{n} = \frac{F_n(x)}{n!}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \binom{r+s}{n} &= \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} \Leftrightarrow \\ \frac{F_n(r+s)}{n!} &= \sum_{k=0}^n \frac{F_k(r)}{k!} \frac{F_{n-k}(s)}{(n-k)!} \Leftrightarrow \\ F_n(r+s) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} F_k(r) F_{n-k}(s) \Leftrightarrow \\ F_n(r+s) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k(r) F_{n-k}(s). \end{aligned}$$

5.1.1 Παραδείγματα εύρεσης γεννήτριας συνάρτησης

Παράδειγμα 5.1. Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n) = 3^n(n+1)^2$.

Λύση. Αν $\phi(n) = n^2$, τότε είναι

$$\begin{aligned} \phi^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (n x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)' = x \left(x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \right)' = x \left(x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \right)' \\ &= x \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \right)' = x \left(x \left(\frac{1}{1-x} \right)' \right)' = x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις ιδιότητες **3** και **2** των γεννητριών συναρτήσεων, προκύπτει ότι

$$((n+1)^2)^* = \frac{\phi^*(x)}{x} - \phi(0) = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

και τελικά,

$$f^*(x) = \frac{3x+1}{(1-3x)^3}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.2. Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Λύση. Αν εφαρμοσθεί η εφαρμογή 5.1 της Πρότασης 5.1.1 για την ακολουθία $\phi(n) = n^2$, με γεννήτρια συνάρτηση

$$(n^2)^*(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

προκύπτει ότι

$$f^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{1-x} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^4}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.3. Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n) = \frac{3^n(2-n)}{(n+1)!}$.

Λύση. Αν τεθεί $\phi(n) = \frac{3^n}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε είναι $\phi^*(x) = e^{3x}$.

Επιπλέον, είναι

$$f(n) = \frac{3^n(3 - (n+1))}{(n+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{3^n}{n!} = \phi(n+1) - \phi(n),$$

οπότε, σύμφωνα με τις ιδιότητες 1 και 3 των γεννητριών συναρτήσεων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= (\phi(n+1))^*(x) - \phi^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{x} - \frac{\phi(0)}{x} - \phi^*(x) \\ &= \frac{e^{3x}}{x} - \frac{1}{x} - e^{3x} = \frac{(1-x)e^{3x} - 1}{x}. \end{aligned} \quad \square$$

5.1.2 Ο συμβολισμός $[x^n]f^*(x)$

Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $[x^n]f^*(x)$ για το συντελεστή του x^n της γεννήτριας συνάρτησης $f^*(x)$, δηλαδή

$$[x^n]f^*(x) = f(n).$$

Παράδειγμα: $[x^n]e^{3x} = \frac{3^n}{n!}$, διότι $e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$.

Παρακάτω δίδονται ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες του συμβολισμού $[x^n]f^*(x)$.

$$1. [x^n](f^*(x) + g^*(x)) = [x^n]f^*(x) + [x^n]g^*(x)$$

$$2. [x^n](f^*(x)g^*(x)) = \sum_{k=0}^n [x^k]f^*(x)[x^{n-k}]g^*(x).$$

$$3. [x^n]x^m f^*(x) = \begin{cases} [x^{n-m}]f^*(x), & \text{αν } n \geq m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

Πράγματι

$$x^m f^*(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^{n+m} \stackrel{k=m+n}{=} \sum_{k=m}^{\infty} f(k-m)x^k = \sum_{n=m}^{\infty} f(n-m)x^n.$$

$$4. [x^n](af^*(x)) = a[x^n]f^*(x), \text{ όπου } a \text{ δεν εξαρτάται από το } x.$$

$$5. [x^n](1+x)^a = \binom{a}{n}, a \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 5.4. Να βρεθεί ο συντελεστής του x^n για το πολυώνυμο $(1+x+x^2)^n$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$[x^n](1+x(1+x))^n = [x^n] \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1+x)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [x^{n-k}](1+x)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{n-k}.$$

$$\text{Άρα, } [x^n](1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{n-k}.$$

□

5.2 Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Υπάρχουν ορισμένα προβλήματα τα οποία δεν επιλύονται με τις συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις αλλά με μια παραλλαγή τους, τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις.

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση f^{**} μιας ακολουθίας f/\mathbb{N} ορίζεται ως εξής:

$$f^{**}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n.$$

Σε ορισμένα βιβλία οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις σημειώνονται με $E(x)$ ή $e(x)$.

Επειδή ισχύει η σχέση

$$(f(n))^{**} = \left(\frac{f(n)}{n!} \right)^*,$$

πολλά από τα αποτελέσματα που είδαμε για τις συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις δίνουν αντίστοιχες ιδιότητες για τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις.

Μερικές από αυτές είναι οι εξής:

$$i) (n!)^{**} = \frac{1}{1-x}$$

Πραγματικά,

$$(n!)^{**} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$ii) (a^n)^{**} = e^{ax}.$$

Πραγματικά,

$$(a^n)^{**} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}.$$

iii) Οι ιδιότητες **1**, **2** και **4** των συνήθων γεννητριών συναρτήσεων ισχύουν και για τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις, δηλαδή

$$1. (c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n))^{**}(x) = c_1 f_1^{**}(x) + c_2 f_2^{**}(x), \text{ όπου } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$2. (a^n \phi(n))^{**}(x) = \phi^{**}(ax), \text{ όπου } a \in \mathbb{R}.$$

$$4. (F_k(n) \phi(n))^{**}(x) = x^k (\phi^{**}(x))^{(k)}, \text{ όπου } k \in \mathbb{N}^*.$$

iv) Αντίθετα, η ιδιότητα 3 των γεννητριών συναρτήσεων αντικαθίσταται από την ιδιότητα:

$$3. (\phi(n+k))^{**}(x) = (\phi^{**}(x))^{(k)}, \text{ όπου } k \in \mathbb{N}.$$

Πράγματι, ισχύει ότι

$$(\phi(n+k))^{**}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n+k)x^n}{n!} \stackrel{6}{=} x^{-k} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\phi(m)x^m}{(m-k)!} = x^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) \cdots (m-k+1) \frac{\phi(m)}{m!} x^m.$$

Αν τεθεί $\psi(n) = \frac{\phi(m)}{m!}$ τότε σύμφωνα με την ιδιότητα 4 των συνήθων γεννητριών συναρτήσεων έχουμε ότι

$$(\phi(n+k))^{**}(x) = x^{-k} x^k (\psi^*(x))^{(k)}$$

Άρα,

$$(\phi(n+k))^{**}(x) = (\psi^*(x))^{(k)} = (\phi^{**}(x))^{(k)}$$

Τέλος, στην επόμενη πρόταση δίδεται αποτέλεσμα ανάλογο με αυτό της Πρότασης 5.1.1.

Πρόταση 5.2.1. Αν $f, g, h/\mathbb{N}$ είναι τρεις ακολουθίες με

$$h(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)g(n-k),$$

τότε η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της h ισούται με το γινόμενο των εκθετικών γεννητριών των f, g , δηλαδή

$$h^{**}(x) = f^{**}(x)g^{**}(x).$$

Απόδειξη. Αν τεθεί $f_1(n) = \frac{f(n)}{n!}$, $g_1(n) = \frac{g(n)}{n!}$ και $h_1(n) = \frac{h(n)}{n!}$, τότε είναι

$$f_1 \otimes g_1(n) = \sum_{k=0}^n f_1(k)g_1(n-k) = \sum_{k=0}^n \frac{f(k)}{k!} \frac{g(n-k)}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)g(n-k) = \frac{h(n)}{n!} = h_1(n),$$

οπότε από την Πρόταση 5.1.1 προκύπτει ότι

$$h^{**}(x) = h_1^*(x) = (f_1 \otimes g_1)^*(x) = f_1^*(x)g_1^*(x) = f^{**}(x)g^{**}(x). \quad \square$$

Εφαρμογή (της Πρότασης 5.2.1)

Εφαρμογή 5.3 (Εκθετική γεννήτρια των αριθμών Bell). Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας B_n των αριθμών Bell.

Λύση. Υπενθυμίζεται⁷ ότι ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου E με n στοιχεία ονομάζεται αριθμός Bell n τάξης και σημειώνεται με B_n .

⁶Θέτουμε $m = n + k$.

⁷Βλέπε και ενότητα 3.3, σελ. 155.

Επίσης είναι γνωστό ότι

$$B_0 = 1 \text{ και } B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k. \quad (1)$$

Προκειμένου να ευρεθεί η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας (B_n) των αριθμών Bell, τίθεται $f(n) = B_n$ και $g(n) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.2.1, και με τη βοήθεια της προηγούμενης ιδιότητας 3., η σχέση (1) δίδει

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)g(n-k) \\ (f(n+1))^{**} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)g(n-k) \right)^{**} \\ (f^{**}(x))' &= f^{**}(x)g^{**}(x) \\ (f^{**}(x))' &= f^{**}(x)e^x \end{aligned}$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, και επιλύοντάς την κατά τα γνωστά προκύπτει ότι

$$f^{**}(x) = ce^{e^x}.$$

Τέλος, επειδή $f^{**}(0) = B_0 = 1$, προκύπτει ότι $c = e^{-1}$, οπότε η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας (B_n) των αριθμών Bell είναι

$$f^{**}(x) = e^{e^x} - 1. \quad \square$$

5.2.1 Παραδείγματα εύρεσης εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης

Εφαρμογή 5.4 (Εκθετική γεννήτρια των αριθμών Stirling). Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n) = \overline{S}(n, k)$ των αριθμών Stirling δευτέρου είδους, όπου k σταθερός αριθμός στο \mathbb{N}^* .

Λύση. Είναι γνωστό⁸ ότι

$$\overline{S}(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \nu^n, \text{ για κάθε } k, n \in \mathbb{N} \text{ με } k \leq n.$$

Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{S}(n, k) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \nu^n \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \frac{(\nu x)^n}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu x)^n}{n!} \\ &\stackrel{9}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} e^{\nu x} = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (e^x)^\nu (-1)^{k-\nu}. \end{aligned}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του διωνύμου του Νεύτωνα προκύπτει ότι

$$f^{**}(x) = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k. \quad \square$$

⁸Βλέπε 3.2.2, σελ. 148.

⁹Σύμφωνα με το ανάπτυγμα της εκθετικής σειράς.

Παράδειγμα 5.5. Έστω ένα σύνολο X με n στοιχεία και $h(n)$ ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να ληφθούν ένα διατεταγμένο υποσύνολο S του X και ένα (μη διατεταγμένο) υποσύνολο T του X το οποίο να μην περιέχει κανένα κοινό στοιχείο με το S .

i) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $h(n)$.

ii) Να υπολογισθεί η εκθετική γεννήτρια της συνάρτησης $h(n)$.

Λύση.

i) Αν υποτεθεί ότι το διατεταγμένο υποσύνολο S του X έχει k στοιχεία (όπου $0 \leq k \leq n$), τότε αυτό μπορεί να ληφθεί κατά $\frac{n!}{(n-k)!}$ τρόπους (αριθμός των διατάξεων του n ανά k). Το άλλο υποσύνολο T του X θα είναι υποσύνολο του $X \setminus S$ οπότε μπορεί να ληφθεί κατά 2^{n-k} τρόπους (αφού $\mathcal{P}(X \setminus S) = 2^{|X \setminus S|} = 2^{n-k}$).

Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή και τα δύο μαζί μπορούν να ληφθούν κατά $\frac{n!}{(n-k)!} 2^{n-k}$ τρόπους.

Αθροίζοντας ως προς k προκύπτει ότι

$$h(n) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! 2^{n-k}.$$

ii) Αν τεθούν

$$f(n) = n! \text{ και } g(n) = 2^n,$$

τότε

$$h(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k) g(n-k)$$

οπότε από την Πρόταση 5.2.1 προκύπτει ότι

$$h^{**}(x) = f^{**}(x) g^{**}(x) = (n!)^{**} (2^n)^{**} = \frac{1}{1-x} e^{2x} = \frac{e^{2x}}{1-x}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.6 (Εκθετική γεννήτρια διατάξεων). Έστω $f(n)$ ο συνολικός αριθμός των διατάξεων n στοιχείων.

Να ευρεθεί η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $(f(n))$ και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$f(n) = n f(n-1) + 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση. Ισχύει ότι

$$f(n) = \sum_{k=0}^n P_{n,k},$$

όπου $P_{n,k} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ για $k \in [n]$ και $P_{n,0} = 1$. Εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{P_{n,k}}{n!} = \frac{1}{(n-k)!} \text{ για κάθε } k = 0, 1, \dots, n$$

Πράγματι, για $k \geq 1$ είναι

$$\frac{P_{n,k}}{n!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{1}{(n-k)!},$$

ενώ για $k = 0$ είναι προφανές.

Κατόπιν τούτων,

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \left(\frac{f(n)}{n!} \right)^* (x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{P_{n,k}}{n!} \right)^* (x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \right)^* (x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \right)^* (x), \\ &= \left(1 \otimes \frac{1}{n!} \right)^* (x) = (1)^* \left(\frac{1}{n!} \right)^* (x) = \frac{e^x}{1-x} \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$f^{**}(x) - xf^{**}(x) = e^x$$

οπότε για $n \geq 1$ είναι

$$\begin{aligned} [x^n]f^{**}(x) - [x^n]xf^{**}(x) &= [x^n]e^x \\ [x^n]f^{**}(x) - [x^{n-1}]f^{**}(x) &= [x^n]e^x \\ \frac{f(n)}{n!} - \frac{f(n-1)}{(n-1)!} &= \frac{1}{n!} \\ f(n) - nf(n-1) &= 1 \\ f(n) &= nf(n-1) + 1 \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 5.7 (Εκθετική γεννήτρια ενελίξεων). Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ ονομάζεται **ενέλιξη** (involution) αν και μόνο αν $\sigma = \sigma^{-1}$. Για παράδειγμα, η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ είναι μια ενέλιξη. Προφανώς, σ ενέλιξη αν και μόνο αν $\sigma^2(k) = k$ για κάθε $k \in [n]$.

Έστω $f(n)$ ο αριθμός των ενελίξεων του $[n]$.

i) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$f(n) = f(n-1) + (n-1)f(n-2),$$

όπου $f(0) = 1, f(1) = 1$.

ii) Να δειχθεί ότι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n)$ δίδεται από τη σχέση

$$f^{**}(x) = e^{x + \frac{1}{2}x^2}.$$

Λύση.

i) Οι ενελίξεις του $[n]$, όπου $n \geq 2$, διαμερίζονται σε δύο κατηγορίες:

- αυτές που σταθεροποιούν το στοιχείο n ,
- αυτές που δεν σταθεροποιούν το στοιχείο n .

Για παράδειγμα η ενέλιξη $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ ανήκει στην πρώτη κατηγορία, ενώ η ενέλιξη $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ανήκει στην δεύτερη κατηγορία.

Κάθε ενέλιξη σ του $[n]$ που ανήκει στην πρώτη κατηγορίας (δηλαδή ισχύει $\sigma(n) = n$) αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε μια ενέλιξη σ' του $[n-1]$ η οποία προκύπτει αν διαγράψουμε το στοιχείο n από την σ . Για παράδειγμα, αν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ τότε

$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Άρα, ο αριθμός των ενελίξεων του $[n]$ με $\sigma(n) = n$ ισούται με $f(n-1)$.

Από την άλλη, κάθε ενέλιξη σ του $[n]$ που ανήκει στην δεύτερη κατηγορία (δηλαδή ισχύει $\sigma(n) \neq n$) αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε ένα ζευγάρι (k, σ') όπου $k \in [n-1]$ και σ' μια ενέλιξη του $[n-2]$. Πράγματι, με δεδομένη την σ ορίζουμε $k = \sigma(n)$ και η σ' προκύπτει αν διαγράψουμε τα k, n από την σ και μειώσουμε τα στοιχεία της σ που είναι μεγαλύτερα από το k κατά μια μονάδα. Αντίστροφα, αν δίδεται το ζευγάρι (k, σ') τότε αν αυξήσουμε κάθε στοιχείο της σ' που είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το k κατά μια μονάδα και τοποθετήσουμε τα n, k στην k -οστή και τελευταία θέση αντίστοιχα προκύπτει η ενέλιξη σ όπου $\sigma(n) = k \neq n$. Για παράδειγμα, αν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $k = 4$ και $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Κατόπιν τούτων επειδή υπάρχουν $n-1$ επιλογές για το k και $f(n-2)$ για το σ' από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι ο αριθμός των ενελίξεων του $[n]$ με $\sigma(n) \neq n$ είναι ίσος με $(n-1)f(n-2)$. Προσθέτοντας τους αριθμούς για κάθε περίπτωση προκύπτει ο ζητούμενος αναγωγικός τύπος.

ii) Έστω $g(n) = \frac{f(n)}{n!}$, τότε $g^*(x) = f^{**}(x)$. Από την προηγούμενη σχέση για $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!} = \frac{f(n-1)}{n!} + \frac{(n-1)f(n-2)}{n!} = \frac{1}{n} \frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{1}{n} \frac{f(n-2)}{(n-2)!} = \frac{1}{n} g(n-1) + \frac{1}{n} g(n-2).$$

Άρα,

$$ng(n) = g(n-1) + g(n-2) \text{ για κάθε } n \geq 2.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με x^{n-1} και αθροίζοντας για κάθε $n \geq 2$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} ng(n)x^{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} g(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} g(n-2)x^{n-1} \Leftrightarrow \\ \left(\sum_{n=2}^{\infty} g(n)x^n \right)' &= \sum_{n=1}^{\infty} g(n)x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} g(n-2)x^{n-2} \Leftrightarrow \\ (g^*(x) - g(0) - xg(1))' &= (g^*(x) - g(0)) + xg^*(x) \\ (g^*(x))' - 1 &= g^*(x) - 1 + xg^*(x) \Leftrightarrow \\ \frac{(g^*(x))'}{g^*(x)} &= 1 + x \Leftrightarrow \\ (\ln g^*(x))' &= 1 + x \Leftrightarrow \\ \ln g^*(x) &= \int (1+x)dx \\ \ln g^*(x) &= x + \frac{x^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Για $x = 0$ γνωρίζουμε ότι $g^*(0) = 1$ επομένως $\ln 1 = 0 + 0^2 + c \Rightarrow c = 0$.

Άρα

$$\ln g^*(x) = \ln f^{**}(x) = x + \frac{x^2}{2}$$

δηλαδή

$$f^{**}(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.8 (Εκθετική γεννήτρια μεταθέσεων με k σταθερά σημεία). Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ έχει το $i \in [n]$ **σταθερό σημείο** αν και μόνο αν $\sigma(i) = i$. Η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

έχει δύο σταθερά σημεία ενώ n μετάθεση

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν έχει καθόλου σταθερά σημεία.

Να βρεθεί το πλήθος $d_{n,k}$ των μεταθέσεων μήκους n που έχουν k σταθερά σημεία

Λύση. Θα δοθεί μια λύση με τη βοήθεια της εκθετικής γεννήτριας του αριθμού της ακολουθίας $d_{n,k}$ όπου k σταθερός φυσικός αριθμός.

Προφανώς ισχύει ότι

$$n! = \sum_{k=0}^n d_{n,k} \quad (2)$$

Αν $d_n = d_{n,0}$ το πλήθος των μεταθέσεων του $[n]$ που δεν έχουν σταθερά σημεία τότε

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}. \quad (3)$$

Πραγματικά, τα k σταθερά σημεία μιας μετάθεσης μήκους n με k σταθερά σημεία μπορούν να επιλεγούν με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Τα υπόλοιπα στοιχεία της μετάθεσης αποτελούν μια μετάθεση μήκους $n - k$ που δεν έχει σταθερά σημεία.

Παράδειγμα: Η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 9 & 7 & 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

έχει 3 σταθερά σημεία: τα 1, 3 και 8. Τα υπόλοιπα στοιχεία της αποτελούν μια μετάθεση μήκους $9 - 3 = 6$ χωρίς σταθερά σημεία δηλαδή την

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$$

Αν τεθεί

$$f(n) = 1 \text{ και } g(n) = d_n$$

τότε ισχύει ότι

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(n)g(n-k)$$

οπότε

$$(n!)^{**} = f^{**}(x)g^{**}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = e^x g^{**}(x).$$

Επομένως,

$$g^{**}(x) = e^{-x} \frac{1}{1-x} = ((-1)^n)^{**} (n!)^{**} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! \right)^{**}.$$

Άρα,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

οπότε από τη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-i)^i}{i!}. \quad \square$$

5.3 Αντιστροφή

Ένας πολύ σημαντικό πρόβλημα που εμφανίζεται στις εφαρμογές, γνωστό ως **πρόβλημα της αντιστροφής**, είναι η εύρεση του τύπου της ακολουθίας όταν δίδεται η γεννήτριά της (ή η εκθετική γεννήτριά της). Στην περίπτωση αυτή αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά η γεννήτρια συνάρτηση f^* , δηλαδή $f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, οπότε $f(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Η ανάπτυξη της f^* σε δυναμοσειρά δεν είναι πάντα εύκολη και εξαρτάται από την μορφή της f^* . Όταν η f^* είναι ρητή συνάρτηση αναλύεται σε μερικά κλάσματα, τα οποία στη συνέχεια αναπτύσσονται ευκολότερα σε δυναμοσειρές.

Παράδειγμα 5.9 (Αντιστροφή ρητής γεννήτριας συνάρτησης). *Να βρεθεί η ακολουθία $f(n)$ όταν*

$$f^*(x) = \frac{1 - 2x^2 - x}{(1-x)^2(1-3x)}.$$

Λύση. Αναλύοντας την f^* σε μερικά κλάσματα προκύπτει ότι

$$f^*(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-3x}.$$

Επειδή

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

και

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n,$$

προκύπτει ότι

$$f^*(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1 + (n+1) + 3^n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 3^n) x^n.$$

Άρα, $f(n) = n + 3^n$. □

Στην περίπτωση όπου η f^* δεν είναι ρητή προσπαθούμε να εκφράσουμε να εκφράσουμε την f^* με τη βοήθεια άλλων γνωστών γεννητριών και αλγεβρικών πράξεων όπως η πρόσθεση, το γινόμενο, η παράγωγος κλπ.

Παράδειγμα 5.10 (Αντιστροφή μη ρητής γεννήτριας συνάρτησης). Να βρεθεί η ακολουθία $f(n)$ όταν

$$f^*(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} (1-x)^{-1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-2} \ln(1-x).$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$f^*(x) = (g^*(x)h^*(x))'$$

όπου

$$g^*(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} \text{ και } h^*(x) = -\ln(1-x).$$

Αναπτύσσοντας τις γεννήτριες συναρτήσεις $g^*(x)$, $h^*(x)$ σε δυναμοσειρές:

$$g^*(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

και

$$h^*(x) = -\ln(1 + (-x)) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

προκύπτει ότι

$$g(n) = \frac{1}{2^n} \text{ και } h(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{αν } n \geq 1 \\ 0 & \text{αν } n = 0 \end{cases}.$$

Από το θεώρημα της συνέλιξης

$$f^*(x) = ((h \circledast g)^*(x))'$$

Επιπλέον για $n \geq 1$ είναι

$$(h \circledast g)(n) = \sum_{k=0}^n h(k)g(n-k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \frac{1}{2^{n-(k+1)}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k+1},$$

ενώ για $n = 0$ έχουμε ότι

$$(h \circledast g)(0) = h(0)g(0) = 0.$$

Κατόπιν τούτων από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (h \circledast g)(n)x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} ((h \circledast g)(n)x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(h \circledast g)(n)x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(h \circledast g)(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k+1} x^n. \end{aligned}$$

Άρα

$$f(n) = \frac{(n+1)}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k+1}.$$

□

5.3.1 Το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η συνάρτηση f^* δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή, δηλαδή δεν δίδεται ο ακριβής τύπος της αλλά μια συναρτησιακή εξίσωση της οποίας η f^* είναι λύση. Για παράδειγμα ζητείται να ευρεθεί ο τύπος της ακολουθίας $(f(n))$ όταν ισχύει ότι

$$x(f^*(x))^2 + (x-1)f^*(x) - x + 1 = 0. \quad (4)$$

Οι περιπτώσεις αυτές συνήθως αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια ενός πολύ σημαντικού θεωρήματος, γνωστού ως **θεώρημα αντιστροφής του Lagrange**, το οποίο έχει πολλές ισοδύναμες μορφές.

Μια ειδική μορφή του δίδεται στο επόμενο θεώρημα.

Πρόταση 5.3.1 (Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange). *Αν μια γεννήτρια συνάρτηση f^* ικανοποιεί μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής*

$$f^*(x) = 1 + xF(f^*(x))$$

όπου $F(z)$ είναι μια δυναμοσειρά, τότε ο αριθμός $nf(n)$ θα είναι ίσος με το συντελεστή του z^{n-1} στη δυναμοσειρά $(F(z+1))^n$, δηλαδή

$$nf(n) = [z^{n-1}](F(z+1))^n,$$

όπου $n \in \mathbb{N}^$.*

Έτσι, για παράδειγμα η εξίσωση (4) γράφεται

$$f^*(x) = 1 + x((f^*(x))^2 + f^*(x) - 1) = 1 + xF(f^*(x))$$

όπου $F(z) = z^2 + z - 1$ και στη συνέχεια εφαρμόζεται το Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 5.5. *Να βρεθεί ο αριθμός $f(n)$ των τριαδικών δένδρων με n κορυφές, όταν είναι γνωστό ότι η γεννήτρια συνάρτηση $f^*(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση*

$$f^*(x) = 1 + x(f^*(x))^3.$$

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο $F(z) = z^3$ για το οποίο ισχύει ότι

$$(F(z+1))^n = (z+1)^{3n} = \sum_{i=0}^{3n} \binom{3n}{i} z^i. \quad (1)$$

Επειδή η γεννήτρια συνάρτηση f^* ικανοποιεί τη συναρτησιακή σχέση

$$f^*(x) = 1 + xF(f^*(x)),$$

εφαρμόζεται το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange, οπότε, λόγω της σχέσης (1), προκύπτει ότι

$$nf(n) = [z^{n-1}](F(z+1))^n = \binom{3n}{n-1}.$$

Άρα,

$$f(n) = \frac{1}{n} \binom{3n}{n-1} = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}. \quad \square$$

Εφαρμογή 5.6. Να βρεθεί ο αριθμός $f(n)$ των δένδρων με ρίζα, που έχουν n κορυφές με επιγραφή, όταν είναι γνωστό ότι n εκθετική γεννήτρια συνάρτησή τους ικανοποιεί την εξίσωση

$$f^{**}(x) = xe^{f^{**}(x)}.$$

Λύση. Προκειμένου να γράψουμε την εξίσωση της εκφώνησης στη μορφή του θεωρήματος αντιστροφής του Lagrange θέτουμε

$$g(x) = 1 + f^{**}(x)$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} f^{**}(x) = xe^{f^{**}(x)} &\Leftrightarrow g(x) - 1 = xe^{g(x)-1} \\ &\Leftrightarrow g(x) = 1 + xe^{g(x)-1} \\ &\Leftrightarrow g(x) = 1 + xF(g(x)) \end{aligned}$$

όπου $F(z) = e^{z-1}$.

Επειδή

$$(F(z+1))^n = e^{nz} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(nz)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!} z^i,$$

από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange προκύπτει ότι για $n \geq 1$

$$n[x^n]g(x) = n \frac{f(n)}{n!} = [z^{n-1}](F(z+1))^n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Άρα,

$$f(n) = n^{n-1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Προφανώς, $f(0) = f^{**}(0) = 0$. □

Εφαρμογή 5.7. Να ευρεθεί ο τύπος της ακολουθίας $(f(n))$ όταν

$$x(f^*(x))^2 + (x-1)f^*(x) - x + 1 = 0.$$

Λύση. Η δοσμένη συναρτησιακή εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} f^*(x) &= 1 + x((f^*(x))^2 + f^*(x) - 1) \\ &= 1 + xF(f^*(x)) \end{aligned}$$

όπου $F(z) = z^2 + z - 1$.

Για $k \geq 1$ είναι

$$\begin{aligned}
 (F(z+1))^n &= ((z+1)^2 + (z+1) - 1)^n = (z^2 + 3z + 1)^n \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (z^2 + 3z)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^i (z+3)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} z^j 3^{i-j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} 3^{i-j} z^{i+j} \\
 &\stackrel{k=i+j}{=} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{i}{k-i} 3^{2i-k} z^k
 \end{aligned}$$

Οπότε από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange

$$nf(n) = [z^{n-1}](F(z+1))^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{i}{n-1-i} 3^{2i-n+1}$$

Άρα,

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{i}{n-1-i} 3^{2i-n+1}, \text{ για } n \geq 1,$$

ενώ $f(0) = f^*(0) = 1$

□

5.4 Εφαρμογές

Οι γεννήτριες συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για την επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων. Σύμφωνα με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων, αρχικά βρίσκεται η γεννήτρια συνάρτηση $y^*(x)$ της άγνωστης ακολουθίας, και στη συνέχεια με αντιστροφή βρίσκεται η ζητούμενη ακολουθία y_n .

5.4.1 Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Γενική μορφή:

$$a_\nu y_{n+\nu} + a_{\nu-1} y_{n+\nu-1} + \dots + a_0 y_n = \beta_n. \quad (1)$$

Αρχικές συνθήκες:

$$y_0 = c_0, y_1 = c_1, \dots, y_{\nu-1} = c_{\nu-1}. \quad (2)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης (1) με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών¹⁰ (2), σύμφωνα με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων, αρχικά τίθεται

$$y^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n.$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1) επί $x^{n+\nu}$ και αθροίζοντας ως προς n , προκύπτει μια αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο της γεννήτρια συνάρτηση $y^*(x)$.

Κατόπιν τούτων, επιλύοντας την εξίσωση αυτή, ευρίσκεται η $y^*(x)$ και στη συνέχεια, με αντιστροφή, βρίσκεται και η y_n .

Παραδείγματα

Παράδειγμα 5.11. Να λυθεί η εξίσωση

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0,$$

όταν $y_0 = 1$ και $y_1 = 2$.

Λύση. Από τη δοσμένη εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} x^{n+2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} y_n x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n &= 0 \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - (y_0 + y_1 x) \right) - 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - y_0 \right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n &= 0 \\ y^*(x) - (1 + 2x) - 2x(y^*(x) - 1) + x^2 y^*(x) &= 0 \\ (x^2 - 2x + 1)y^*(x) &= 1. \end{aligned}$$

Άρα,

$$y^*(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

οπότε $y_n = n + 1$. □

¹⁰ Αν δεν δίδονται αρχικές τιμές τότε η γενική λύση βρίσκεται συναρτήσει των παραμέτρων $c_0, c_1, \dots, c_{\nu-1}$.

Παράδειγμα 5.12. Να λυθεί η εξίσωση

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^{n+2},$$

όταν $y_0 = y_1 = 3$.

Λύση. Αν τεθεί $y^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$, τότε από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} x^{n+2} - 4x \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} x^{n+1} + 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} y_n x^n - 4x^2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n + 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \frac{4x^2}{1-2x}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - (3 + 3x) \right) - 4x \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - 3 \right) + 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \frac{4x^2}{1-2x}$$

$$y^*(x) - (3 + 3x) - 4xy^*(x) + 12x + 4x^2 y^*(x) = \frac{4x^2}{1-2x}$$

$$(1 - 4x + 4x^2)y^*(x) = \frac{4x^2}{1-2x} + 3 + 3x - 12x$$

$$y^*(x) = \frac{22x^2 - 15x + 3}{(1-2x)^3}.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τον τύπο της διωνυμικής σειράς, προκύπτει ότι

$$y^*(x) = (22x^2 - 15x + 3) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-2x)^n.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \binom{-3}{n} &= \frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(n+2)!}{2!n!} = (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 y^*(x) &= (22x^2 - 15x + 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2} (-1)^n 2^n x^n \\
 &= (22x^2 - 15x + 3) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} x^n \\
 &= 22 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} x^{n+2} - 15 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} x^{n+1} \\
 &\quad + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} x^n \\
 &= 22 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) 2^{n-3} x^n - 15 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n 2^{n-2} x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (11n(n-1) - 15(n+1)n + 6(n+2)(n+1)) 2^{n-2} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 4n + 6) 2^{n-1} x^n.
 \end{aligned}$$

Άρα, $y_n = (n^2 - 4n + 6)2^{n-1}$. □

Ανάλογα επιλύονται και συστήματα γραμμικών αναγωγικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Παράδειγμα 5.13. Να λυθεί το σύστημα

$$13y_{n+1} - 35y_n - 6z_n = 0$$

$$13z_{n+1} - 6y_n - 30z_n = 0$$

όπου $y_0 = 1, z_0 = 5$.

Λύση. Αν τεθεί $y^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$ και $z^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n$ από την πρώτη εξίσωση του συστήματος προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$13 \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} x^{n+1} - 35 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+1} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^{n+1} = 0$$

$$13 \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n - 35x \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - 6x \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n = 0$$

$$13(y^*(x) - y_0) - 35xy^*(x) - 6xz^*(x) = 0$$

$$(13 - 3x)y^*(x) - 6xz^*(x) = 13 \tag{3}$$

Ανάλογα από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$13 \sum_{n=0}^{\infty} z_{n+1} x^{n+1} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+1} - 30 \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
13 \sum_{n=1}^{\infty} z_n x^n - 6x \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - 30x \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n &= 0 \\
13(z^*(x) - z_0) - 6xy^*(x) - 30xz^*(x) &= 0 \\
-6xy^*(x) + (13 - 30x)z^*(x) &= 65
\end{aligned} \tag{4}$$

Οι εξισώσεις (3) και (4) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα $y^*(x)$ και $z^*(x)$. Δια επιλύσεώς του προκύπτουν:

$$y^*(x) = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)} \text{ και } z^*(x) = \frac{5-13x}{(1-3x)(1-2x)}$$

Αναλύοντας τις παραπάνω ρητές συναρτήσεις σε απλά κλάσματα προκύπτει ότι

$$y^*(x) = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3^{n+1} - 2^{n+1})x^n$$

και

$$z^*(x) = \frac{2}{1-3x} + \frac{3}{1-2x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n)x^n.$$

$$\text{Άρα, } y_n = 3^{n+1} - 2^{n+1} \text{ και } z_n = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n. \quad \square$$

5.4.2 Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με πολυωνυμικούς συντελεστές

Ανάλογα επιλύονται και οι γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με πολυωνυμικούς συντελεστές. Η μόνη διαφορά είναι ότι η εξίσωση από την οποία προκύπτει η γεννήτρια $y^*(x)$ δεν είναι αλγεβρική, αλλά διαφορική.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 5.14. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση

$$(n+1)y_{n+1} - 2(2n+1)y_n = 0,$$

όταν $y_0 = 1$.

Λύση. Από τη δοσμένη εξίσωση και την αρχική συνθήκη προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)y_{n+1}x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)y_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny_n x^n - 4x \sum_{n=1}^{\infty} ny_n x^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$(1-4x) \sum_{n=1}^{\infty} ny_n x^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$(1-4x)x \sum_{n=1}^{\infty} y_n (nx^{n-1}) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$(1-4x) \sum_{n=1}^{\infty} y_n (x^n)' - 2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$(1 - 4x)(y^*(x))' - 2y^*(x) = 0.$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, και επιλύεται την κατά τα γνωστά. Πράγματι, για $y^*(x) \neq 0$ η παραπάνω εξίσωση δίδει

$$\frac{(y^*(x))'}{y^*(x)} = \frac{2}{1 - 4x}$$

$$\int \frac{(y^*(x))'}{y^*(x)} dx = \int \frac{2}{1 - 4x} dx$$

$$\ln |y^*(x)| = -\frac{1}{2} \ln(1 - 4x) + \ln k, \text{ όπου } k > 0$$

$$\ln |y^*(x)| = \ln \left(\frac{k}{\sqrt{1 - 4x}} \right)$$

$$y^*(x) = \frac{c}{\sqrt{1 - 4x}}, \text{ όπου } c = \pm k.$$

Επειδή, $c = y^*(0) = y_0 = 1$, προκύπτει ότι

$$y^*(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τύπο της διωνυμικής σειράς, προκύπτει ότι

$$y^*(x) = (1 - 4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n. \quad (1)$$

Επιπλέον, επειδή

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$y^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (-1)^n 4^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Άρα,

$$y_n = \binom{2n}{n}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.15. Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση

$$y_{n+2} - (n+1)y_{n+1} + 2ny_n = 2^{n+1},$$

όταν $y_0 = 1$ και $y_1 = 2$.

Λύση. Αν τεθεί $y^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$, τότε από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y_{n+1} x^{n+2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n y_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^{n+2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} y_n x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} n y_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n y_n x^n = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

$$y^*(x) - (1+2x) - x^2(1-2x) \sum_{n=1}^{\infty} (y_n x^n)' = \frac{2x^2}{1-2x}$$

$$y^*(x) - x^2(1-2x)(y^*(x))' = \frac{2x^2}{1-2x} + 1 + 2x$$

$$(y^*(x))' - \frac{1}{x^2(1-2x)} y^*(x) = -\frac{1-2x^2}{(1-2x)^2 x^2}. \quad (1)$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, και λύνεται με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα

$$I(x) = e^{-\int \frac{dx}{x^2(1-2x)}}.$$

Επειδή

$$-\int \frac{dx}{x^2(1-2x)} = \int \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{1-2x} \right) dx = \ln \left(\frac{1-2x}{x} \right)^2 + \frac{1}{x} + c,$$

μπορεί να ληφθεί

$$I(x) = \left(\frac{1-2x}{x} \right)^2 e^{\frac{1}{x}},$$

οπότε, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) επί $I(x)$, προκύπτουν οι ισοδύναμες εξισώσεις

$$\left(\frac{1-2x}{x} \right)^2 e^{\frac{1}{x}} (y^*(x))' - \frac{1-2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} y^*(x) = -\frac{1-2x^2}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\left(\left(\frac{1-2x}{x} \right)^2 e^{\frac{1}{x}} y^*(x) \right)' = -\frac{1-2x^2}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\left(\frac{1-2x}{x} \right)^2 e^{\frac{1}{x}} y^*(x) = -\int \frac{1-2x^2}{x^4} e^{\frac{1}{x}} dx. \quad (2)$$

Το τελευταίο αόριστο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση, απ' όπου προκύπτει ότι

$$-\int \frac{1-2x^2}{x^4} e^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1-2x}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + c.$$

Κατόπιν τούτου, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$y^*(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{cx^2}{(1-2x)^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Τέλος, επειδή η γεννήτρια συνάρτηση $y^*(x)$ είναι συνεχής στο 0 με $y^*(0) = y_0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x) = 1$, θα πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0} cx^2 e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Τούτο όμως συμβαίνει μόνο όταν $c = 0$, αφού σύμφωνα με τον κανόνα του L' Hospital $\lim x^2 e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.

Άρα,

$$y^*(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

και επομένως, $y_n = 2^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό με την εύρεση των τύπων ορισμένων σημαντικών ακολουθιών της Συνδυαστικής Ανάλυσης.

5.4.3 Αριθμοί Fibonacci

Η ακολουθία (f_n) των αριθμών Fibonacci¹¹ ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (1)$$

όπου $f_0 = f_1 = 1$.

Προκειμένου να βρεθεί ο τύπος της (f_n) , αρχικά βρίσκεται η γεννήτριά της $f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

Πράγματι, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1} x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^{n+1} \\ \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - (f_0 + f_1 x) &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - f_0 \right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \\ f^*(x) - 1 - x &= x(f^*(x) - 1) + x^2 f^*(x) \end{aligned}$$

$$(x^2 + x - 1)f^*(x) = -1$$

$$f^*(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

Κατόπιν τούτων, βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 1 = 0$,

$$\rho_1 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ και } \rho_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

και αναλύοντας το κλάσμα της $f^*(x)$ σε μερικά κλάσματα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x - \rho_1} - \frac{1}{x - \rho_2} \right) \stackrel{12}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\rho_2}{1 + \rho_2 x} - \frac{\rho_1}{1 + \rho_1 x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\rho_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\rho_2 x)^n - \rho_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\rho_1 x)^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) x^n. \end{aligned}$$

¹¹Βλέπε και ενότητα 3.1, σελ. 136.

Άρα,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5.4.4 Αριθμοί Catalan

Η ακολουθία (C_n) των αριθμών Catalan¹³ ικανοποιεί την αναγωγική εξίσωση του Segner:

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

για κάθε $n \geq 1$, και έχει αρχική τιμή $C_0 = 1$.

Προκειμένου να βρεθεί ο τύπος της (C_n) αρχικά βρίσκεται η γεννήτριά της, $C^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$.

Πράγματι, από την αναγωγική εξίσωση του Segner προκύπτει ότι

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C_n \circledast C_n,$$

ξαθ συνεπώς, από την Πρόταση 5.1.1 προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n = (C_n \circledast C_n)^*(x)$$

$$\frac{1}{x} (C^*(x) - 1) = (C^*(x))^2,$$

οπότε θα είναι

$$x(C^*(x))^2 - C^*(x) + 1 = 0$$

και για $x \neq 0$,

$$C^*(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}, \text{ ή } C^*(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Η δεύτερη λύση απορρίπτεται διότι η $C^*(x)$ είναι συνεχής στο 0 με $C^*(0) = C_0 = 1$, ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = +\infty.$$

Άρα,

$$C^*(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n}{2x} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n x^{n-1}. \quad (1)$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^n n! \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}, \end{aligned}$$

¹²Αφού $\rho_1 \rho_2 = -1$.

¹³Βλέπε και ενότητα 3.4, σελ. 159.

n σχέση (1) δίνει

$$\begin{aligned} C^*(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!} 2^{2n} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n. \end{aligned}$$

Άρα,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο παραπάνω τύπος μπορεί να προκύψει επίσης ως εφαρμογή του θεωρήματος αντιστροφής του Lagrange.

Πράγματι, από τη σχέση

$$x(C^*(x))^2 - C^*(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow C^*(x) = 1 + x(C^*(x))^2$$

ορίζοντας $F(z) = z^2$ προκύπτει ότι

$$C^*(x) + 1 + xF(C^*(x))$$

οπότε επειδή

$$(F(z+1))^n = (z+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} z^i$$

από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange προκύπτει ότι

$$nC_n = [z^{n-1}](F(z+1))^n = \binom{2n}{n-1}$$

Άρα,

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n} \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n} \frac{(2n)!}{(n-1)!n!(n+1)} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

5.4.5 Αριθμοί Motzkin

Οι **αριθμοί Motzkin** αποτελούν επίσης μια άλλη σημαντική κατηγορία αριθμών με πολλές εφαρμογές στη Συνδυαστική Ανάλυση.

Εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στο πρόβλημα των τρόπων σύνδεσης οποιωνδήποτε σημείων, μεταξύ n δοσμένων σημείων της περιφέρειας ενός κύκλου, με μη τεμνόμενες χορδές.

Σήμερα, είναι γνωστά πολλά συνδυαστικά αντικείμενα τα οποία απαριθμούνται από τον αριθμό Motzkin τάξης n , ο οποίος συμβολίζεται με M_n . Ενδεικτικά αναφέρονται ορισμένα από αυτά:

1. Οι τρόποι σχεδίασης οποιουδήποτε αριθμού μη τεμνόμενων χορδών ανάμεσα σε n διακεκριμένα σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου.
2. Τα δυαδικά δένδρα με $n-1$ δεσμούς, τα οποία δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς δεξιούς δεσμούς.
3. Τα διατεταγμένα δένδρα με $n+1$ δεσμούς, στα οποία καμιά κορυφή, πλην της ρίζας, δεν μπορεί να έχει μόνο ένα απόγονο.
4. Τα μονοπάτια Motzkin μήκους n , δηλαδή μονοπάτια από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο $(n,0)$ με βήματα $(1,1)$, $(1,-1)$ και $(1,0)$, τα οποία δεν πέφτουν κάτω από τον άξονα των τεταγμένων.

Η ακολουθία (M_n) των αριθμών Motzkin ικανοποιεί την αναγωγική εξίσωση

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-k-2},$$

για κάθε $n \geq 2$ και έχει αρχικές τιμές $M_0 = M_1 = 1$.

Προκειμένου να βρεθεί ο τύπος της (M_n) , αρχικά βρίσκεται η γεννήτριά της, $M^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n$.

Πράγματι, από την αναγωγική εξίσωση των αριθμών Motzkin προκύπτει ότι

$$M_{n+2} = M_{n+1} + \sum_{k=0}^n M_k M_{n-k} = M_{n+1} + M_n \circledast M_n,$$

οπότε, από την Πρόταση 5.1.1 προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} M_{n+2} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (M_n \circledast M_n) x^n \\ \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} M_n x^n &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n + (M_n \circledast M_n)^*(x) \\ \frac{1}{x^2} (M^*(x) - (1+x)) &= \frac{1}{x} (M^*(x) - 1) + (M^*(x))^2, \end{aligned}$$

οπότε θα είναι

$$x^2 (M^*(x))^2 + (x-1)M^*(x) + 1 = 0,$$

και για $x \neq 0$,

$$M^*(x) = \frac{1-x - \sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{2x^2}, \quad \text{ή} \quad M^*(x) = \frac{1-x + \sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{2x^2}.$$

Η δεύτερη λύση, όπως και στην περίπτωση της γεννήτριας $C^*(x)$, απορρίπτεται, οπότε, τελικά,

$$M^*(x) = \frac{1-x - \sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{2x^2}. \quad (2)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής και της αντίστοιχης σχέσης της γεννήτριας $C^*(x)$ των αριθμών Catalan, αποδεικνύονται οι επόμενοι τύποι

$$M^*(x) = \frac{1}{1-x} C^* \left(\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right),$$

και

$$C^*(x) = \frac{x}{1-x} M^* \left(\frac{x}{1-x} \right) + 1.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τους τύπους αυτούς, αποδεικνύονται αντίστοιχα οι τύποι

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k,$$

και

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k,$$

οι οποίοι δείχνουν τη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ των αριθμών Motzkin και Catalan.

Άσκηση 5.1. Να αποδειχθεί ότι για τις γεννήτριες συναρτήσεις των αριθμών Motzkin και Catalan ισχύει η σχέση

$$M^*(x) = \frac{1}{1-x} C^* \left(\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right)$$

και στη συνέχεια να αποδειχθεί ο τύπος

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_k, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Λύση. Γνωρίζουμε τους τύπους

$$C^*(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ και } M^*(x) = \frac{1-x - \sqrt{(1-x)^2 - 4x}}{2x^2}$$

Αν στον πρώτο τύπο αντί για x τεθεί $\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} C^* \left(\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right) &= \frac{1}{1-x} \frac{1 - \sqrt{1-4 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2}}{2 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2} \\ &= \frac{1}{1-x} \frac{1 - \sqrt{\frac{(1-x)^2 - 4x^2}{(1-x)^2}}}{2 \frac{x^2}{(1-x)^2}} = \frac{1}{1-x} \frac{1 - \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{\frac{2x^2}{(1-x)^2}} \\ &= \frac{1-x - \sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{2x^2} = M^*(x) \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων είναι

$$\begin{aligned} M^*(x) &= \frac{1}{1-x} C^* \left(\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right) = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{x}{1-x} \right)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{(1-x)^{2n+1}} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (1-x)^{-(2n+1)} x^{2n} \\ &\stackrel{14}{=} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-(2n+1)}{k} x^k \right) x^{2n} \end{aligned} \quad (3)$$

Γνωρίζουμε ότι $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ (βλ. Ανάλυση και Εφαρμογές, τόμος 1, σελ. 36) άρα θέτωντας $2n+1$ αντί n προκύπτει

$$\binom{-(2n+1)}{k} = (-1)^k \binom{2n+k}{k}$$

¹⁴Σύμφωνα με τον τύπο της διωνυμικής σειράς

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 M^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_n \binom{2n+k}{k} x^{2n+k} \stackrel{m=2n+k}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=2n}^{\infty} C_n \binom{m}{m-2n} x^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_n \binom{m}{2n} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_k \binom{n}{2k} \right) x^n
 \end{aligned}$$

Άρα,

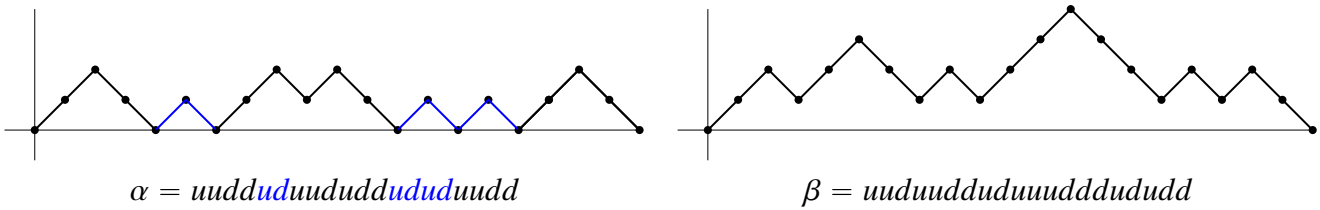
$$M(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_k \binom{n}{2k}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \quad \square$$

5.4.6 Αριθμοί Fine

Μια άλλη σημαντική κατηγορία αριθμών είναι οι αριθμοί Fine οι οποίοι ορίστηκαν από τον Terrence Fine το 1970 χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ομοιότητας. Εδώ θα δοθεί ένας ισοδύναμος ορισμός των αριθμών Fine με τη βοήθεια των μονοπατιών Dyck.

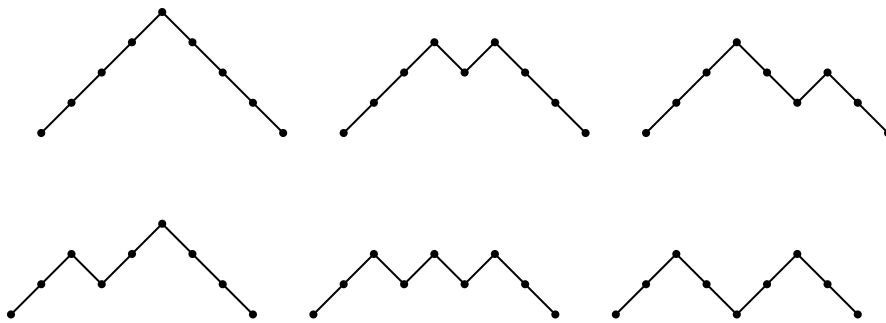
Μια κορυφή ενός μονοπατιού Dyck σε ύψος 1 ονομάζεται **λόφος** του μονοπατιού.

Για παράδειγμα, το μονοπάτι α έχει τρεις λόφους, ενώ το μονοπάτι β δεν έχει λόφο.



Το πλήθος των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n χωρίς λόφους ονομάζεται **αριθμός Fine τάξεως n** και συμβολίζεται με F_n .

Για παράδειγμα, $F_0 = 1, F_1 = 0, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 6$



Τα μονοπάτια Dyck ημιμήκους 4 που δεν έχουν λόφους

Άσκηση 5.2. Ναδειχθεί ότι

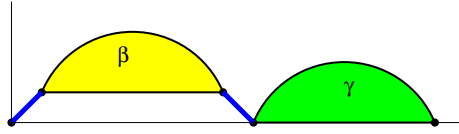
$$F_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k F_{n-1-k}, \quad n \geq 2$$

Λύση. Έστω \mathcal{D}_n το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n και \mathcal{A}_n το υποσύνολο του \mathcal{D}_n που αποτελείται από τα μονοπάτια που δεν έχουν λόφους.

Κάθε μη κενό μονοπάτι $a \in \mathcal{A}_n$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$a = u\beta d\gamma \text{ (διάσπαση της πρώτης επιστροφής)}$$

όπου β μη κενό μονοπάτι Dyck και γ μονοπάτι Dyck χωρίς λόφους.

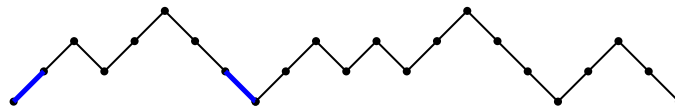


Η διάσπαση της πρώτης επιστροφής

Για παράδειγμα το μονοπάτι

$$a = u \text{ uduuddud } d \text{ uududuudduudd}$$

γράφεται στη μορφή $a = u\beta d\gamma$ όπου $\beta = \text{uduuddud}$ και $\gamma = \text{uududuudduudd}$.



Τα μονοπάτια a, β, γ

Αν το μονοπάτι β έχει ημιμήκος k , όπου $k \in [n-1]$ τότε το μονοπάτι γ θα έχει ημιμήκος $n-1-k$ και το ζεύγος (β, γ) σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή μπορεί να επιλεγεί κατά $|\mathcal{D}_k| |\mathcal{A}_{n-1-k}|$ τρόπους. Αθροίζοντας ως προς k προκύπτει ότι

$$F_n = |\mathcal{A}_n| = \sum_{k=1}^{n-1} |\mathcal{D}_k| |\mathcal{A}_{n-1-k}| = \sum_{k=1}^{n-1} C_k F_{n-1-k}. \quad \square$$

Άσκηση 5.3. Να δειχθεί ότι

$$C_n = F_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k F_{n-1-k}, n \geq 1$$

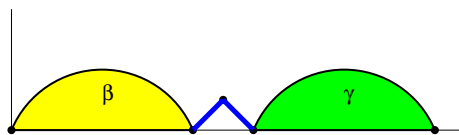
και στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$F^*(x) = \frac{C^*(x)}{1 + xC^*(x)}$$

Λύση. Έστω \mathcal{B}_n το σύνολο όλων των μονοπατιών του \mathcal{D}_n τα οποία έχουν τουλάχιστον ένα λόφο. Κάθε μονοπάτι $a \in \mathcal{B}_n$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$a = \beta u d \gamma \text{ (διάσπαση του τελευταίου λόφου)}$$

όπου $\beta \in \mathcal{D}_k, k \in [0, n-1]$ (μπορεί και κενό) και $\gamma \in \mathcal{A}_{n-1-k}$.



Η διάσπαση του τελευταίου λόφου

Για παράδειγμα το μονοπάτι

$$a = uuduuuddduuddduduuduuddduudduuudd$$

γράφεται στη μορφή $a = \beta u d \gamma$ όπου

$$\beta = uuduuuddduuddduduudd \text{ και } \gamma = uudduudd.$$



Τα μονοπάτια a, β, γ

Κατόπιν τούτων το ζεύγος (β, γ) μπορεί να επιλεγεί κατά $|\mathcal{D}_k||\mathcal{A}_{n-1-k}|$ τρόπους, και αθροίζοντας ως προς k , όπως και πριν, προκύπτει ότι

$$|\mathcal{B}_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{D}_k||\mathcal{A}_{n-1-k}|.$$

οπότε

$$C_n = |\mathcal{D}_n| = |\mathcal{A}_n| + |\mathcal{B}_n| = |\mathcal{A}_n| + \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{D}_k||\mathcal{A}_{n-1-k}| = F_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k F_{n-1-k}.$$

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} C_k F_{n-1-k} x^n \\ C^*(x) - C_0 &= F^*(x) - F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_k F_{n-k} x^{n+1} \\ C^*(x) - 1 &= F^*(x) - 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \circledast F_n) x^n \\ C^*(x) &= F^*(x) + x(C_n \circledast F_n)^* \\ C^*(x) &= F^*(x) + x C^*(x) F^*(x) \\ F^*(x) &= \frac{C^*(x)}{1 + x C^*(x)} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 5.4. Να δειχθεί ότι

1. $C_n = 2F_n + F_{n-1}, n \geq 1.$

2. $F^*(x) = \frac{1 + C^*(x)}{x + 2}.$

3. $F_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k} C_{n-k}, n \geq 2.$

Λύση. 1. Προφανώς, η ισότητα ισχύει για $n = 1$, αφού $C_1 = F_0 = 1$ και $F_1 = 0$.

Για $n \geq 2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} C_n &\stackrel{5.3}{=} F_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k F_{n-1-k} \\ &= F_n + F_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k F_{n-1-k} \\ &\stackrel{5.2}{=} F_n + F_{n-1} + F_n = 2F_n + F_{n-1}. \end{aligned}$$

2. Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n \\ C^*(x) - C_0 &= 2(F^*(x) - F_0) + x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ C^*(x) - 1 &= 2(F^*(x) - 1) + xF^*(x) \\ C^*(x) &= -1 + (x+2)F^*(x) \\ F^*(x) &= \frac{1 + C^*(x)}{x+2}. \end{aligned}$$

3. Αν τεθεί $1 + C^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ όπου

$$a_n = \begin{cases} C_n, & n \geq 1 \\ 2, & n = 0 \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F^*(x) &= \frac{1 + C^*(x)}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} (1 + C^*(x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^n} \circledast a_n \right) x^n \end{aligned}$$

οπότε για $n \geq 2$ είναι

$$\begin{aligned} F_n &= [x^n] F^*(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{2^n} \circledast a_n \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^k} a_{n-k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k} C_{n-k} + \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} C_1 + \frac{(-1)^n}{2^n} 2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k} C_{n-k} \end{aligned}$$

□

5.5 Γεννήτριες συναρτήσεις συνόλων

Σε πολλά προβλήματα των Διακριτών Μαθηματικών αναζητείται ο τύπος μιας ακολουθίας (a_n) η οποία απαριθμεί τα στοιχεία ενός συνόλου \mathcal{A} συνδυαστικών αντικειμένων που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα. Συνήθως η ιδιότητα αυτή περιγράφεται από μια απεικόνιση $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ με τη βοήθεια της οποίας θα δοθεί ένας ισοδύναμος ορισμός της γεννήτριας συνάρτησης που απλοποιεί πολύ την επίλυση του προβλήματος απαρίθμησης αφού για τον υπολογισμό της δεν απαιτείται πρώτα να ευρεθεί μια αναδρομική σχέση.

Αν \mathcal{A} είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων, τότε κάθε απεικόνιση $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ ονομάζεται **παράμετρος** (του συνόλου \mathcal{A}).

Παραδείγματα

1. Στο σύνολο $\{0, 1\}^*$ των δυαδικών λέξεων οι απεικονίσεις p, q με
 $p(a) =$ πλήθος γραμμάτων της λέξης a
και
 $q(a) =$ πλήθος μηδενικών της λέξης a
είναι δύο παράμετροι.
2. Στο σύνολο \mathcal{B} των δυαδικών δένδρων οι απεικονίσεις p, q με
 $p(T) =$ αριθμός κορυφών του δυαδικού δένδρου T
και
 $q(T) =$ αριθμός δεξιών παιδιών του δένδρου T
είναι δύο παράμετροι.
3. Στο σύνολο \mathcal{T} των διατεταγμένων δένδρων οι απεικονίσεις p, q, r με
 $p(T) =$ αριθμός δεσμών του διατεταγμένου δένδρου T
 $q(T) =$ αριθμός φύλλων του διατεταγμένου δένδρου T
και
 $r(T) =$ βαθμός ρίζας του διατεταγμένου δένδρου T
είναι τρεις παράμετροι.
4. Στο σύνολο \mathcal{D} των μονοπατιών Dyck οι απεικονίσεις p, q, r με
 $p(a) =$ ημιμήκος του μονοπατιού a
 $q(a) =$ αριθμός κορυφών του μονοπατιού a
και
 $r(a) =$ αριθμός επιστροφών του μονοπατιού a
είναι τρεις παράμετροι.

Μια παράμετρος p στο \mathcal{A} ονομάζεται **βασική** αν τα σύνολα $\{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}$ είναι πεπερασμένα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κάθε μη βασική παράμετρος p ονομάζεται **δευτερεύουσα**.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, μόνο η παράμετρος p είναι βασική.

Αν $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ είναι μια βασική παράμετρος τότε η δυναμοσειρά

$$A(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)}$$

ονομάζεται **γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς την παράμετρο p**

Πρόταση 5.5.1. Αν \mathcal{A} είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων, p μια βασική παράμετρος στο \mathcal{A} και (a_n) η ακολουθία με τύπο

$$a_n = |\{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}|,$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση $a^*(x)$ της ακολουθίας a_n ισούται με την γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ του συνόλου \mathcal{A} ως προς την παράμετρο p .

Απόδειξη. Επειδή η ακολουθία (\mathcal{A}_n) με

$$\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}$$

αποτελεί μια διαμέριση του \mathcal{A} προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} = \sum_{a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n} x^{p(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} x^{p(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{a \in \mathcal{A}_n} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_n| x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a^*(x) \quad \square \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να βρούμε την γεννήτρια συνάρτηση χωρίς να χρειάζεται να βρεθεί η αντίστοιχη αναδρομική σχέση της ακολουθίας.

Παράδειγμα 5.16. Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των δυαδικών λέξεων με n γράμματα.

Λύση. Κάθε μη κενή¹⁵ δυαδική λέξη a γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω δύο μορφές:

$$a = b0 \text{ ή } a = b1$$

όπου $b = \{0, 1\}^*$.

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση A του συνόλου $\{0, 1\}^*$ ως προς την παράμετρο $p(a) =$ αριθμός γραμμάτων της λέξης a είναι:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{a \in \{0,1\}^*} x^{p(a)} \\ &= x^{p(\epsilon)} + \sum_{b \in \{0,1\}^*} x^{p(b0)} + \sum_{b \in \{0,1\}^*} x^{p(b1)} \\ &= 1 + \sum_{b \in \{0,1\}^*} x^{p(b)+1} + \sum_{b \in \{0,1\}^*} x^{p(b)+1} \\ &= 1 + 2x \sum_{b \in \{0,1\}^*} x^{p(b)} \\ &= 1 + 2xA(x). \end{aligned}$$

¹⁵Η κενή δυαδική λέξη συμβολίζεται με ϵ

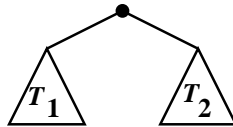
$$\text{Άρα, } A(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \text{ και}$$

$$a_n = [x^n]A(x) = 2^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

□

Παράδειγμα 5.17. Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των δυαδικών δένδρων με n κορυφές.

Λύση. Έστω \mathcal{B} το σύνολο των δυαδικών δένδρων. Κάθε μη κενό¹⁶ δένδρο $T \in \mathcal{B}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή



όπου $T_1, T_2 \in \mathcal{B}$. (Τα T_1, T_2 μπορεί να είναι κενά.)

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση $B(x)$ του συνόλου \mathcal{B} ως προς την παράμετρο $p(T) =$ αριθμός κορυφών του T είναι

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{T \in \mathcal{B}} x^{p(T)} \\ &= x^{p(\square)} + \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{B}} x^{p(T_1)+p(T_2)+1} \\ &= 1 + x \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{B}} x^{p(T_1)} x^{p(T_2)} \\ &= 1 + x \left(\sum_{T_1 \in \mathcal{B}} x^{p(T_1)} \right) \left(\sum_{T_2 \in \mathcal{B}} x^{p(T_2)} \right) \\ &= 1 + xB(x)B(x) \\ &= 1 + xB^2(x), \end{aligned}$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση $B(x)$ ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$xB^2(x) - B(x) + 1 = 0$$

που ως γνωστόν είναι η συναρτησιακή εξίσωση των αριθμών Catalan. Άρα,

$$a_n = [x^n]B(x) = C_n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

□

Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε στα επόμενα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.18. Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των διατεταγμένων δένδρων που έχουν n δεσμούς.

Παράδειγμα 5.19. Να ευρεθεί ο αριθμός b_n των μονοπατιών Dyck που έχουν ημιμήκος n .

¹⁶Το κενό δυαδικό δένδρο συμβολίζεται με □

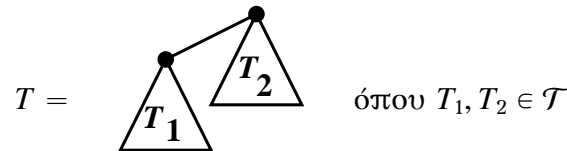
Λύσεις για τα παραδείγματα 5.18 και 5.19. Έστω \mathcal{T} , \mathcal{D} τα σύνολα των διατεταγμένων δένδρων και μονοπατιών Dyck αντίστοιχα. Θεωρούμε τις παραμέτρους p, q στα σύνολα \mathcal{T} και \mathcal{D} αντίστοιχα με

$$p(T) = \text{αριθμός δεσμών του } T, \text{ όπου } T \in \mathcal{T}$$

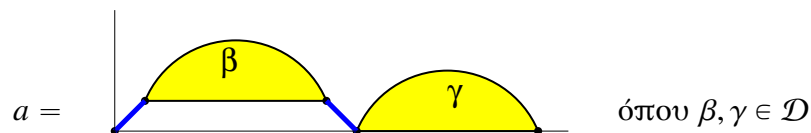
και

$$q(a) = \text{μημίκος του } a, \text{ όπου } a \in \mathcal{D}$$

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω διασπάσεις των μη κενών διατεταγμένων δένδρων και μη κενών μονοπατιών Dyck αντίστοιχα



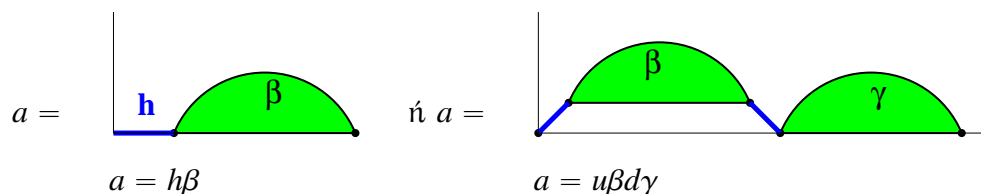
και



προκύπτουν οι σχέσεις $p(T) = p(T_1) + p(T_2) + 1$ και $q(a) = q(b) + q(c) + 1$ με τη βοήθεια των οποίων όπως και στο παράδειγμα 5.17 των δυαδικών δένδρων προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις των συνόλων \mathcal{T} και \mathcal{B} ως προς τις παραμέτρους p, q αντίστοιχα ισούται με την γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan. Άρα $a_n = b_n = C_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. \square

Παράδειγμα 5.20. Να ευρεθεί ο αριθμός των μονοπατιών Motzkin μήκους n .

Λύση. Έστω \mathcal{M} το σύνολο των μονοπατιών Motzkin. Κάθε μη κενό¹⁷ μονοπάτι $a \in \mathcal{M}$ γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές



όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{M}$.

Κατόπιν τούτου η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ του συνόλου \mathcal{M} ως προς την παράμετρο

$$p(a) = \text{μήκος του μονοπατιού } a$$

¹⁷Το κενό μονοπάτι συμβολίζεται με ϵ

είναι

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{a \in \mathcal{M}} x^{p(a)} \\ &= x^{p(\epsilon)} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{p(h\beta)} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{p(u\beta d\gamma)} \\ &= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{p(\beta)+1} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+2} \\ &= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{p(\beta)} + x^2 \left(\sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{p(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{p(\gamma)} \right) \\ &= 1 + xA(x) + x^2A^2(x) \end{aligned}$$

Άρα, η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

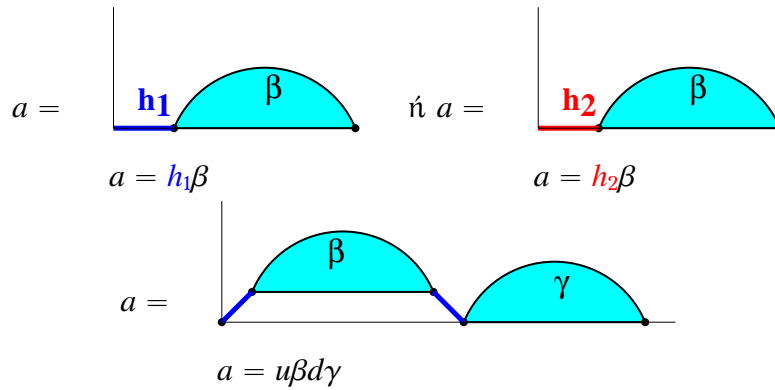
$$x^2A^2(x) + (x-1)A(x) + 1 = 0$$

που ως γνωστόν είναι η συναρτησιακή εξίσωση των αριθμών Motzkin. Άρα $A(x) = M(x)$ και επομένως $a_n = M_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Άσκηση 5.5. Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των μονοπατιών μήκους n από το $(0,0)$ στο $(n,0)$ που δεν κατεβαίνουν κάτω από τον άξονα, με βήματα 4 ειδών: ανοδικό u , καθοδικό d και δύο είδη οριζόντιων βημάτων h_1, h_2 .

Λύση. Έστω \mathcal{A} το σύνολο αυτών των μονοπατιών και $p(a) =$ μήκος του a , για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Κάθε μη κενό¹⁸ μονοπάτι $a \in \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές:



όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$.

Επομένως, για την γεννήτρια συνάρτηση A του \mathcal{A} ως προς την παράμετρο p ισχύει ότι

$$\begin{aligned} A(x) &= x^{p(\epsilon)} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(h_1\beta)} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(h_2\beta)} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{A}} x^{p(u\beta d\gamma)} \\ &= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)+1} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)+1} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+2} \\ &= 1 + 2x \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)} + x^2 \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{p(\gamma)} \right) \\ &= 1 + 2xA(x) + x^2A^2(x) \\ &= (1 + xA(x))^2 \end{aligned}$$

¹⁸Το κενό μονοπάτι συμβολίζεται με ϵ

Αν τεθεί $F(x) = 1 + xA(x)$ προκύπτει ότι

$$\frac{F(x) - 1}{x} = F^2(x) \Leftrightarrow xF^2(x) - F(x) + 1 = 0$$

Άρα, $F(x) = C^*(x)$ (η γεννήτρια των αριθμών Catalan) και επομένως

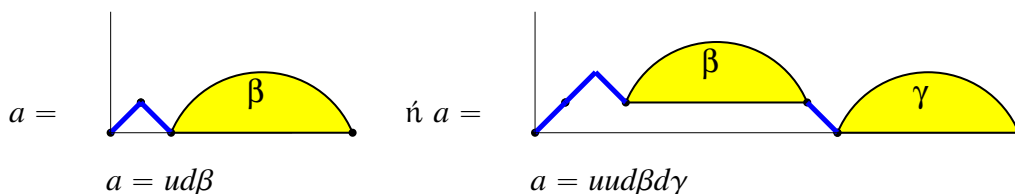
$$A(x) = \frac{F(x) - 1}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n.$$

Άρα, $a_n = [x^n]A(x) = C_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Άσκηση 5.6. Να ευρεθεί ο αριθμός των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n που δεν περιέχουν τρεις διαδοχικές ανόδους.

Λύση. Έστω \mathcal{A} το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που δεν περιέχουν τρεις διαδοχικές ανόδους.

Επειδή κάθε μη κενό μονοπάτι $a \in \mathcal{A}$ δεν μπορεί να αρχίζει από τρεις ανόδους θα γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές:



όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$.

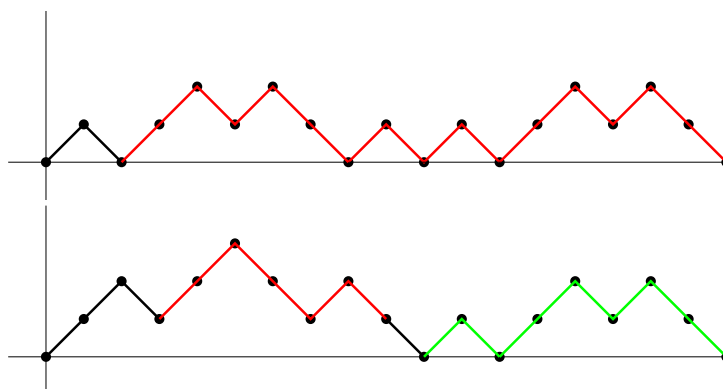
Για παράδειγμα το μονοπάτι

$$a = ud \text{ uududdududuudd}$$

είναι της πρώτης μορφής, ενώ το μονοπάτι

$$a' = uud \text{ uuddud } d \text{ uduudd}$$

είναι της δεύτερης μορφής, όπως φαίνεται στα επόμενα δύο σχήματα:



Κατόπιν τούτων η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ του συνόλου \mathcal{A} ως προς την παράμετρο $p(a) =$ ημιμήκος του a για κάθε $a \in \mathcal{A}$ είναι

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} \\ &= x^{p(\epsilon)} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(u\beta)} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{A}} x^{p(u\beta\gamma)} \\ &= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)+1} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+2} \\ &= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)} + x^2 \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{p(\gamma)} \right) \\ &= 1 + xA(x) + x^2A^2(x) \end{aligned}$$

Άρα, η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2A^2(x) + (x-1)A(x) + 1 = 0$$

που ως γνωστόν είναι η συναρτησιακή εξίσωση των αριθμών Motzkin.

Άρα, $A(x) = M(x)$ και επομένως $a_n = M_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

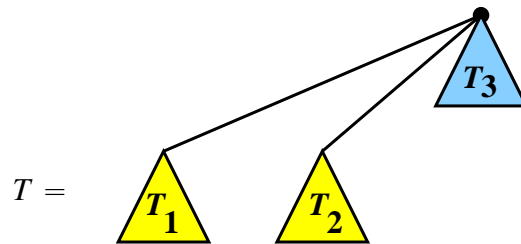
Άσκηση 5.7. Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς που η ρίζα τους έχει άρτιο βαθμό.

Λύση. Έστω \mathcal{T} το σύνολο όλων των διατεταγμένων δένδρων και \mathcal{A} το υποσύνολο του \mathcal{T} που περιέχει όλα τα δένδρα που έχουν άρτιο βαθμό ρίζας.

Έστω p η παράμετρος του \mathcal{T} με $p(T) =$ αριθμός δεσμών του T και $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς την παράμετρο p .

Γνωρίζουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{T} ως προς την παράμετρο p είναι η γεννήτρια συνάρτηση $C^*(x)$ των αριθμών Catalan.

Προφανώς, το μηδενικό διατεταγμένο δένδρο \bullet (δηλαδή το δένδρο που περιέχει μόνο μια κορυφή) ανήκει στο \mathcal{A} ενώ κάθε μη μηδενικό δένδρο $T \in \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή:



όπου $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ και $T_3 \in \mathcal{A}$.

Κατόπιν τούτων ισχύει ότι

$$\begin{aligned} A(x) &= x^{p(\bullet)} + \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{T}, T_3 \in \mathcal{A}} x^{p(T_1)+p(T_2)+p(T_3)+2} \\ &= 1 + x^2 \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{T}, T_3 \in \mathcal{A}} x^{p(T_1)} x^{p(T_2)} x^{p(T_3)} \\ &= 1 + x^2 \left(\sum_{T_1 \in \mathcal{T}} x^{p(T_1)} \right) \left(\sum_{T_2 \in \mathcal{T}} x^{p(T_2)} \right) \left(\sum_{T_3 \in \mathcal{A}} x^{p(T_3)} \right) \\ &= 1 + x^2 (C^*(x))^2 A(x) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1 - x^2(C^*(x))^2} \\
 &= \frac{1}{(1 - xC^*(x))(1 + xC^*(x))} \\
 &= \frac{C^*(x)}{1 + xC^*(x)} \quad (\text{διότι } C^*(x) = \frac{1}{1 - xC^*(x)}) \\
 &= F(x) \quad (\text{η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Fine})
 \end{aligned}$$

οπότε $a_n = F_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

5.5.1 Ισοδύναμες παράμετροι

Δύο βασικές παράμετροι p/\mathcal{A} και q/\mathcal{B} ονομάζονται **ισοδύναμες** αν οι γεννήτριες συναρτήσεις A, B ως προς τις παραμέτρους p και q αντίστοιχα είναι ίσες.

Παράδειγμα 5.21. Οι παράμετροι $p(a) = \text{ημιμήκος του } a \text{ στο σύνολο } \mathcal{D} \text{ των μονοπατιών Dyck}$ και $q(T) = \text{αριθμός δεσμών του } T \text{ στο σύνολο } \mathcal{T} \text{ των διατεταγμένων δένδρων}$ είναι ισοδύναμες αφού οι αντίστοιχες γεννήτριες είναι ίσες με τη γεννήτρια των αριθμών Catalan.

Παράδειγμα 5.22. Οι παράμετροι $p(a) = \text{ημιμήκος του } a \text{ στο σύνολο } \mathcal{A} \text{ των μονοπατιών Dyck που δεν έχουν τρεις διαδοχικές ανόδους}$ και $q(a) = \text{μήκος του } a \text{ στο σύνολο } \mathcal{M} \text{ των μονοπατιών Motzkin}$ είναι ισοδύναμες αφού οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις είναι ίσες με τη γεννήτρια των αριθμών Motzkin.

Πρόταση 5.5.2. Δύο βασικές παράμετροι p/\mathcal{A} και q/\mathcal{B} είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ με

$$q(f(a)) = p(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}. \quad (4)$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζεται ότι οι ακολουθίες (\mathcal{A}_n) και (\mathcal{B}_n) με $\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}$ και $\mathcal{B}_n = \{\beta \in \mathcal{B} : q(\beta) = n\}$ αποτελούν διαμερίσεις των συνόλων \mathcal{A} και \mathcal{B} αντίστοιχα.

Αρχικά υποθέτουμε ότι οι παράμετροι p, q είναι ισοδύναμοι. Τότε είναι

$$\begin{aligned}
 A(x) = B(x) &\Leftrightarrow \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} x^{p(\beta)} \\
 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} x^{p(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} x^{p(\beta)} \\
 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} x^n \\
 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_n| x^n = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{B}_n| x^n \\
 &\Leftrightarrow |\mathcal{A}_n| = |\mathcal{B}_n|, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$.

Έστω η απεικόνιση $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ με $f(a) = f_n(a)$ αν $a \in \mathcal{A}_n$. Θα αποδειχθεί ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πράγματι, αν $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ με $a_1 \neq a_2$ θα υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ με $a_1 \in \mathcal{A}_n$ και $a_2 \in \mathcal{A}_m$.

Αν $n = m$, δηλαδή $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_n$ τότε $f(a_1) = f_n(a_1) \neq f_n(a_2) = f(a_2)$, αφού η απεικόνιση f_n είναι 1-1.

Αν $n \neq m$, τότε $f(a_1) = f_n(a_1) \in \mathcal{B}_n$, $f(a_2) = f_m(a_2) \in \mathcal{B}_m$ και $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m = \emptyset$ οπότε $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Άρα, f 1-1.

Αν τώρα $\beta \in \mathcal{B}$ τότε θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\beta \in \mathcal{B}_n$ και επειδή η απεικόνιση f_n είναι επί θα υπάρχει $a \in \mathcal{A}_n$ με $f_n(a) = \beta$. Επιπλέον, επειδή $a \in \mathcal{A}_n$ θα είναι $f(a) = f_n(a)$ οπότε $f(a) = \beta$. Άρα, η απεικόνιση f είναι και επί, οπότε τελικά η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Τέλος, για την απόδειξη της σχέσης (4):

$$q(f(a)) = p(a) \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

θεωρούμε $a \in \mathcal{A}$. Τότε θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $a \in \mathcal{A}_n$ οπότε $p(a) = n$. Επιπλέον $f(a) = f_n(a) \in \mathcal{B}_n$, οπότε $q(f(a)) = n$. Άρα, τελικά $q(f(a)) = p(a)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ που ικανοποιεί την σχέση (4). Είναι

$$B(x) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} x^{q(\beta)} \stackrel{19}{=} \sum_{f(a) \in \mathcal{B}} x^{q(f(a))} = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} = A(x). \quad \square$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατασκευή μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$ που ικανοποιεί την σχέση (4) επιτυγχάνοντας έτσι την κωδικοποίηση μιας συνδυαστικής δομής²⁰ από μια άλλη.

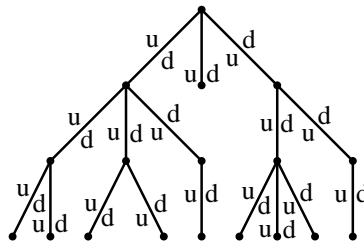
Παράδειγμα 5.23. Να κωδικοποιηθούν τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς από τις λέξεις Dyck ημιμήκους n .

Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$ με $q(T) = p(f(T))$ για κάθε $T \in \mathcal{T}$, όπου $q(T)$ είναι το πλήθος των δεσμών του δένδρου T και $p(a)$ είναι το ημιμήκος της λέξης Dyck a .

Για την κατασκευή της λέξης $f(T)$ διασχίζουμε τους κόμβους του δένδρου T σε προδιάταξη και όταν συναντάμε ένα δεσμό πρώτη φορά σημειώνουμε u , ενώ όταν τον συναντάμε δεύτερη φορά σημειώνουμε d .

Κατόπιν τούτου η λέξη $f(T)$ που προκύπτει είναι λέξη Dyck και περιέχει n ανόδους και n καθόδους, όπου n είναι το πλήθος των δεσμών του T .

Για παράδειγμα, για το επόμενο διατεταγμένο δένδρο T



¹⁹ Αφού για κάθε $\beta \in \mathcal{B}$ υπάρχει μοναδικό $a \in \mathcal{A}$ με $f(a) = \beta$

²⁰ Δηλαδή ενός συνόλου εφοδιασμένου με μια παράμετρο.

$$a = uud\ uud\ ud\ dd\ ud\ uud\ uud\ ud\ dd\ uud\ uud\ dd$$

προκύπτει

$$f(a) = uu\ h\ dd\ hu\ uh\ dd\ uud\ d$$

Ασκήσεις

1. Να ευρεθεί η λέξη Motzkin που κωδικοποιεί το μονοπάτι $a = ududuudduuduuduudddd$.
2. Να περιγραφεί η αντίστροφη της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρεθεί το μονοπάτι $f^{-1}(\beta)$ όταν $b = uuuhdhududhdduududhd$.

5.6 Γεννήτριες συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Η γεννήτρια συνάρτηση μιας διπλής ακολουθίας $(f(n, k))$ ορίζεται από τον τύπο

$$f^*(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k x^n.$$

Άσκηση 5.8. Να ευρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(f(n, k))$ με $f(n, k) = \binom{n}{k}$

Λύση.

$$f^*(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1+y)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x(1+y))^n = \frac{1}{1-x(1+y)} \quad \square$$

Άσκηση 5.9. Να ευρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της διπλής ακολουθίας $(f(n, k))$ με

$$f(n, k) = \min\{n, k\}, \quad n, k \geq 1.$$

Λύση.

$$\begin{aligned} f^*(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(n, k) y^k x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} k y^k x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} n y^k x^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} k y^k x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} n y^k x^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k y^k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} x^n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} y^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k y^k \frac{x^{k+1}}{1-x} + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \frac{y^n}{1-y} \\ &= \frac{x}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} n (xy)^n + \frac{1}{1-y} \sum_{n=1}^{\infty} n (xy)^n \\ &= \left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} \right) \sum_{n=1}^{\infty} n (xy)^n \\ &= \frac{1-xy}{(1-x)(1-y)} \sum_{n=1}^{\infty} n (xy)^n \\ &= \frac{(1-xy)xy}{(1-x)(1-y)} \sum_{n=1}^{\infty} n (xy)^{n-1} \\ &= \frac{(1-xy)xy}{(1-x)(1-y)} \sum_{n=1}^{\infty} ((xy)^n)' \\ &= \frac{(1-xy)xy}{(1-x)(1-y)} \left(\frac{xy}{1-xy} \right)' \end{aligned}$$

οπότε

$$f(x, y) = \frac{(1-xy)xy}{(1-x)(1-y)} \frac{1}{(1-xy)^2}$$

$$= \frac{xy}{(1-x)(1-y)(1-xy)}$$

□

Άσκηση 5.10. Δίδεται η διπλή ακολουθία $f(n, k)$, $n, k \geq 0$ με $f(n, 0) = f(0, k) = 1$ και

$$f(n, k) = f(n, k-1) + f(n-1, k-1) + f(n-1, k) \quad (5)$$

Να ευρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της f και στη συνέχεια ο τύπος της.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση (5) προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n, k) y^k \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n, k-1) y^k \right) x^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1, k-1) y^k \right) x^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1, k) y^k \right) x^n$$

Στη συνέχεια θα εκφράσουμε τα προηγούμενα αθροίσματα συναρτήσει της γεννήτριας συνάρτησης $f^*(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k x^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n, k) y^k \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k - f(n, 0) \right) x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k \right) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k x^n - \sum_{k=0}^{\infty} f(0, k) y^k - \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$= f^*(x, y) - \frac{1}{1-y} - \frac{x}{1-x}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n, k-1) y^k \right) x^n = y \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n, k-1) y^{k-1} \right) x^n$$

$$= y \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k \right) x^n$$

$$= y \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k \right) x^n - y \sum_{k=0}^{\infty} f(0, k) y^k$$

$$= y f^*(x, y) - \frac{y}{1-y}.$$

²¹Η παραγωγήσιμ είναι ως προς την μεταβλητή xy .

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1, k-1) y^k \right) x^n &= y \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1, k-1) y^{k-1} \right) x^n \\
&= y \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n-1, k) y^k \right) x^n \\
&= xy \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n-1, k) y^k \right) x^{n-1} \\
&= xy \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k \right) x^n \\
&= xy f^*(x, y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1, k) y^k \right) x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n-1, k) y^k - f(n-1, 0) \right) x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(n-1, k) y^k x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(n-1, k) y^k x^{n-1} - \frac{x}{1-x} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k x^n - \frac{x}{1-x} \\
&= x f^*(x, y) - \frac{x}{1-x}.
\end{aligned}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις με αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
f^*(x, y) - \frac{1}{1-y} - \frac{x}{1-x} \\
&= y f^*(x, y) - \frac{y}{1-y} + xy f^*(x, y) + x f^*(x, y) - \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow \\
&f^*(x, y)(1-x-y-xy) = 1
\end{aligned}$$

Άρα, τελικά

$$f^*(x, y) = \frac{1}{1-x-y-xy}.$$

Προκειμένου να βρούμε τον τύπο της διπλής ακολουθίας $f(n, k)$ αναπτύσσουμε την παραπάνω ρητή συνάρτηση σε δυναμοσειρά.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
f^*(x, y) &= \frac{1}{1-y-x(1+y)} = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1-\frac{x(1+y)}{1-y}} \\
&= \frac{1}{1-y} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+y}{1-y} x \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+y)^n}{(1-y)^{n+1}} x^n.
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$(1 + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k$$

και

$$\frac{1}{(1 - y)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} y^k$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της συνέλιξης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{(1 + y)^n}{(1 - y)^{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n+k-i}{k-i} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n+k-i}{n} y^k \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f^*(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n+k-i}{n} \right) y^k x^n$$

οπότε

$$f(n, k) = [x^n y^k] f^*(x, y) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n+k-i}{n}.$$

□

Για την εύρεση του τύπου μιας διπλής ακολουθίας $f(n, k)$ πολλές φορές χρησιμοποιείται η συνάρτηση

$$F_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) y^k$$

Άσκηση 5.11. Έστω $f(n, k)$, $n, k \geq 1$ ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων n στοιχείων ανά k στις οποίες δεν υπάρχουν δύο διαδοχικά όμοια στοιχεία.

i) Να δειχθεί ότι $f(n, 1) = n$ και

$$f(n, k) = (n - 1)f(n, k - 1), \text{ για } k \geq 2 \text{ και } n \geq 1.$$

ii) Να δειχθεί ότι η γεννήτρια συνάρτηση

$$F_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(n, k) y^k \text{ δίδεται από τον τύπο}$$

$$F_n(y) = \frac{ny}{1 - (n - 1)y}$$

και στη συνέχεια να ευρεθεί ο τύπος της διπλής ακολουθίας $f(n, k)$.

Λύση. i) Προφανώς οι διατάξεις των n ανά 1 δεν μπορούν να έχουν δύο διαδοχικά όμοια στοιχεία οπότε $f(n, 1) = n$.

Για $k \geq 2$ αν διαγράψουμε από μια επαναληπτική διάταξη $\delta_{n,k}$ των n ανά k χωρίς δύο διαδοχικά όμοια στοιχεία το τελευταίο της στοιχείο θα προκύψει μια επαναληπτική διάταξη $\delta_{n,k-1}$ που δεν έχει επίσης δύο διαδοχικά όμοια στοιχεία.

Επιπλέον, επειδή το τελευταίο στοιχείο, έστω i , της $\delta_{n,k}$ είναι διαφορετικό από το προτελευταίο οι δυνατές τιμές που μπορεί να λάβει το i είναι $(n-1)$. Κατόπιν τούτων σε κάθε διάταξη $\delta_{n,k}$ αντιστοιχούμε μονοσήμαντα το ζευγάρι $(\delta_{n,k-1}, i)$.

Για παράδειγμα, η επαναληπτική διάταξη

$$\delta_{6,4} = 5 \ 1 \ 6 \ 1$$

αντιστοιχεί στο ζεύγος $(\delta_{6,3}, 1) = (5 \ 1 \ 6, 1)$.

Πιο γενικά, η επαναληπτική διάταξη $5 \ 1 \ 6 \ i$ αντιστοιχεί στο ζεύγος $(5 \ 1 \ 6, i)$ όπου $i \neq 6$.

Οπότε σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή

$$\begin{aligned} f(n, k) &= \text{αριθμός } \delta_{n,k} \\ &= (n-1) \cdot \text{αριθμός } \delta_{n,k-1} \\ &= (n-1)f(n, k-1) \end{aligned}$$

ii) Για τη γεννήτρια συνάρτηση $F_n(y)$ είναι

$$\begin{aligned} F_n(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f(n, k)y^k \\ &= f(n, 1)y + \sum_{k=2}^{\infty} f(n, k)y^k \\ &= ny + \sum_{k=2}^{\infty} (n-1)f(n, k-1)y^k \\ &= ny + (n-1)y \sum_{k=2}^{\infty} f(n, k-1)y^{k-1} \\ &= ny + (n-1)y \sum_{k=1}^{\infty} f(n, k)y^k \\ &= ny + (n-1)yF_n(y). \end{aligned}$$

Άρα,

$$F_n(y) = \frac{ny}{1 - (n-1)y}$$

Δια αναπτύξεως της παραπάνω ρητής συνάρτησης σε δυναμοσειρά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F_n(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} ny(n-1)^k y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)^k y^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} n(n-1)^{k-1} y^k \end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n, k)y^k = \sum_{k=1}^{\infty} n(n-1)^{k-1} y^k \Leftrightarrow f(n, k) = n(n-1)^{k-1}.$$

□

Άσκηση 5.12. Να ευρεθεί ο τύπος της διπλής ακολουθίας $(N(n, k))$ της οποίας n γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$N^*(x, y) = 1 + x(N^*(x, y))^2 + x(y - 1)N^*(x, y).$$

Λύση. Έστω $N^*(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} N(n, k)y^k \right) x^n$

Προφανώς, από την εξίσωση ισχύει ότι $N(0, k) = \delta_{0,k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Ισχύει ότι

$$N^*(x, y) = 1 + x((N^*(x, y))^2 + (y - 1)N^*(x, y))$$

Θα εφαρμοσθεί το Θεώρημα Αντιστροφής του Lagrange όπου το x είναι η μεταβλητή και το y θεωρείται ως παράμετρος.

Αν τεθεί $F(z) = z^2 + (y - 1)z = z(z + y - 1)$, τότε για $n \geq 1$

$$n[x^n]N^*(x, y) = [z^{n-1}](F(z + 1))^n$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} (F(z + 1))^n &= (z + 1)^n(z + y)^n = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y^{n-j} z^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{j} y^{n-j} z^{i+j} \\ &\stackrel{m=i+j}{=} \sum_{m=0}^{2n} \sum_{j=0}^m \binom{n}{m-j} \binom{n}{j} y^{n-j} z^m. \end{aligned}$$

Οπότε για $n \geq 1$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} n[x^n]N^*(x, y) &= [z^{n-1}](F(z + 1))^n \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{n-1-j} \binom{n}{j} y^{n-j} \\ &\stackrel{k=n-1-j}{=} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} y^k \end{aligned}$$

Επειδή,

$$N^*(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} N(n, k)y^k \right) x^n$$

προκύπτει ότι για $n \geq 1$

$$[x^n]N^*(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} N(n, k)y^k$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι για $n \geq 1$ είναι

$$N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k}. \quad \square$$

Οι αριθμοί $N(n, k)$ της προηγούμενης άσκησης ονομάζονται **αριθμοί Narayana** και όπως θα δούμε έχουν σημαντικές εφαρμογές.

Στην επόμενη πρόταση δίδεται μια γενίκευση του τύπου αντιστροφής του Lagrange

Πρόταση 5.6.1. Αν μια γεννήτρια συνάρτηση f^* ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$f^*(x) = 1 + xF(f^*(x))$$

όπου $F(z)$ είναι μια δυναμοσειρά του z και G είναι ένα πολυώνυμο του z τότε

$$n[x^n]G(f^*(x)) = [z^{n-1}] (G'(1+z)(F(z+1))^n).$$

Ειδικά, αν $G(z) = z^s$, $s \in \mathbb{N}^*$, τότε για $n \geq 1$

$$[x^n](f^*(x))^s = \frac{s}{n}[z^{n-1}] ((z+1)^{s-1}(F(z+1))^n)$$

Παράδειγμα 5.25. Να ευρεθούν οι συντελεστές των δυνάμεων της γεννήτριας των αριθμών Catalan.

Γνωρίζουμε ότι η γεννήτρια $C^*(x)$ των αριθμών Catalan ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$C^*(x) = 1 + x(C^*(x))^2.$$

Εφαρμόζοντας το γενικευμένο τύπο της αντιστροφής του Lagrange, θέτουμε $F(z) = z^2$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$C^*(x) = 1 + xF(C^*(x))$$

και για $s \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned} (z+1)^{s-1}(F(z+1))^n &= (z+1)^{s-1}(z+1)^{2n} = (z+1)^{2n+s-1} \\ &= \sum_{i=0}^{2n+s-1} \binom{2n+s-1}{i} z^i \end{aligned}$$

οπότε για $n \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} [x^n](C^*(x))^s &= \frac{s}{n}[z^{n-1}] ((z+1)^{s-1}(F(z+1))^n) \\ &= \frac{s}{n} \binom{2n+s-1}{n-1} = \frac{s}{n+s} \binom{2n+s-1}{n}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.13. Να ευρεθεί ο τύπος της διπλής ακολουθίας $(R(n, k))$ της οποίας η γεννήτρια

$$R^*(x, y) = \frac{1}{1 - xyC^*(x)}$$

Λύση. Έστω

$$R^*(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} R(n, k) y^k x^n. \quad (6)$$

Από το δοσμένο τύπο προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 R^*(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k (C^*(x, y))^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k y^k \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k}{m+k} \binom{2m+k-1}{m} x^m \right) \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k}{m+k} \binom{2m+k-1}{m+k-1} y^k x^{m+k} \\
 &\stackrel{n=m+k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-1} y^k x^n
 \end{aligned} \tag{7}$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει ότι $R(n, k) = 0$, αν $k > n$, $R(n, n) = 1$ και

$$R(n, k) = \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-1}, \text{ αν } 1 \leq k \leq n-1$$

Οι αριθμοί $R(n, k)$ ονομάζονται **αριθμοί Riordan** και εμφανίζονται πολλές φορές στις εφαρμογές. \square

5.7 Διμεταβλητές γεννήτριες συναρτήσεις συνόλων

Αν \mathcal{A} είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων με μια βασική παράμετρο p και μια δευτερεύουσα παράμετρο q τότε η διμεταβλητή δυναμοσειρά

$$A(x, y) = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} y^{q(a)}$$

ονομάζεται **(διμεταβλητή) γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους p, q** .

Πρόταση 5.7.1. Αν \mathcal{A} είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων, p βασική παράμετρος στο \mathcal{A} , q δευτερεύουσα παράμετρος στο \mathcal{A} και $(a_{n,k})$ η διπλή ακολουθία που ορίζεται από τον τύπο

$$a_{n,k} = |\{a \in \mathcal{A} : p(a) = n \text{ και } q(a) = k\}|$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση $a^*(x, y)$ της ακολουθίας αυτής ισούται με την γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους p, q .

Απόδειξη. Επειδή η ακολουθία (\mathcal{A}_n) , $n \in \mathbb{N}$ με

$$\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}$$

αποτελεί μια διαμέριση του συνόλου \mathcal{A} προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 A(x, y) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} y^{q(a)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} x^{p(a)} y^{q(a)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{a \in \mathcal{A}_n} y^{q(a)}
 \end{aligned}$$

Ανάλογα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\mathcal{A}_{n,k})$, $k \in \mathbb{N}$ αποτελεί μια διαμέριση του συνόλου \mathcal{A}_n , οπότε ισχύει ότι

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_n} y^{q(a)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{A}_{n,k}} y^{q(a)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{A}_{n,k}} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{A}_{n,k}| y^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} y^k$$

Από αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στον τύπο της γεννήτριας προκύπτει ότι

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} y^k x^n = a^*(x, y). \quad \square$$

Παρατηρήσεις

1. Επειδή το σύνολο \mathcal{A}_n είναι πεπερασμένο έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι όροι της ακολουθίας $(a_{n,k})$, $k \in \mathbb{N}$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος είναι ίσοι με 0. Έτσι η γεννήτρια συνάρτηση

$$A(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} y^k \text{ είναι ουσιαστικά ένα πολυώνυμο.}$$

2. Η γεννήτρια συνάρτηση $A(x, 1)$ είναι ίση με την γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς την παράμετρο p , αφού

$$A(x, 1) = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} 1^{q(a)} = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)}.$$

Παράδειγμα 5.1. Να ευρεθεί ο αριθμός $a_{n,k}$ των δυαδικών λέξεων με n γράμματα από τα οποία k είναι ίσα με 1, όπου $k \leq n$.

Λύση. Κάθε μη κενή δυαδική λέξη $a \in \{0, 1\}^*$ γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές

$$a = b0 \text{ ή } a = b1$$

όπου $b \in \{0, 1\}^*$.

Οπότε η γεννήτρια συνάρτηση $A(x, y)$ του συνόλου $\{0, 1\}^*$ ως προς τις παραμέτρους $p(a) =$ αριθμός γραμμάτων της a και $q(a) =$ αριθμός των 1 στη λέξη a είναι

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{a \in \{0, 1\}^*} x^{p(a)} y^{q(a)} \\ &= x^{p(\epsilon)} y^{q(\epsilon)} + \sum_{b \in \{0, 1\}^*} x^{p(b0)} y^{q(b0)} + \sum_{b \in \{0, 1\}^*} x^{p(b1)} y^{q(b1)} \\ &= 1 + \sum_{b \in \{0, 1\}^*} x^{p(b)+1} y^{q(b)} + \sum_{b \in \{0, 1\}^*} x^{p(b)+1} y^{q(b)+1} \\ &= 1 + x \sum_{b \in \{0, 1\}^*} x^{p(b)} y^{q(b)} + xy \sum_{b \in \{0, 1\}^*} x^{p(b)} y^{q(b)} \\ &= 1 + xA(x, y) + xyA(x, y) \end{aligned}$$

Άρα,

$$A(x, y) = \frac{1}{1 - x(y+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (y+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^n y^k$$

Άρα,

$$a_{n,k} = [x^n y^k] A(x, y) = \binom{n}{k}. \quad \square$$

Στα επόμενα θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω συμβολισμός

Αν P είναι μια λογική πρόταση, τότε ορίζεται η έκφραση

$$[P] = \begin{cases} 1, & \text{αν } P \text{ αληθής} \\ 0, & \text{αν } P \text{ ψευδής} \end{cases}$$

η οποία ονομάζεται **συμβολισμός Iverson**.

Για παράδειγμα, στο σύνολο των δυαδικών λέξεων για την πρόταση

P : Η δυαδική λέξη περιέχει τρία διαδοχικά 0.

είναι

[Η λέξη 10010001 έχει τρία διαδοχικά 0] = 1

[Η λέξη 11010100 έχει τρία διαδοχικά 0] = 0.

Παράδειγμα 5.2. Να ευρεθεί ο αριθμός των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς που έχει

i) k φύλλα

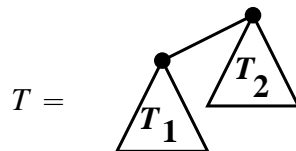
ii) βαθμός ρίζας r .

Λύση. Ο αριθμός $a_{n,k}$ (αντ. $b_{n,r}$) των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς και k φύλλα (αντ. βαθμό ρίζας r) είναι ο συντελεστής της γεννήτριας

$$F(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{p(T)} y^{q(T)} \quad \left(\text{αντ. } G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{p(T)} y^{d(T)} \right)$$

όπου $p(T)$ = αριθμός δεσμών του T και $q(T)$ = αριθμός φύλλων του T (αντ. $d(T)$ = βαθμός ρίζας του T .)

Προκειμένου να υπολογιστούν οι συναρτησιακές εξισώσεις των γεννητριών συναρτήσεων F , G θα χρησιμοποιηθεί η γνωστή διάσπαση των μη κενών διατεταγμένων δένδρων:



i) Πράγματι,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{p(T)} y^{q(T)} \\ &= x^{p(\bullet)} y^{q(\bullet)} + \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{T}} x^{p(T_1)+p(T_2)+1} y^{q(T_1)+q(T_2)+[T_1=\bullet]} \\ &= 1 + x \left(\sum_{T_1 \in \mathcal{T}} x^{p(T_1)} y^{q(T_1)+[T_1=\bullet]} \right) \left(\sum_{T_2 \in \mathcal{T}} x^{p(T_2)} y^{q(T_2)} \right) \\ &= 1 + x \left(x^{p(\bullet)} y^{q(\bullet)+1} + \sum_{T_1 \in \mathcal{T} \setminus \{\bullet\}} x^{p(T_1)} y^{q(T_1)} \right) F(x, y) \\ &= 1 + x \left(y + \sum_{T_1 \in \mathcal{T}} x^{p(T_1)} y^{q(T_1)} - x^{p(\bullet)} y^{q(\bullet)} \right) F(x, y) \\ &= 1 + x(y - 1 + F(x, y)) F(x, y). \end{aligned}$$

Άρα,

$$F(x, y) = 1 + x(F(x, y))^2 + x(y - 1)F(x, y)$$

δηλαδή η $F(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana οπότε

$$a_{n,k} = [x^n y^k] F(x, y) = N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k}.$$

ii)

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{p(T)} y^{d(T)} \\ &= x^{p(\bullet)} y^{d(\bullet)} + \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{T}} x^{p(T_1)+p(T_2)+1} y^{d(T_2)+1} \\ &= 1 + xy \left(\sum_{T_1 \in \mathcal{T}} x^{p(T_1)} \right) \left(\sum_{T_2 \in \mathcal{T}} x^{p(T_2)} y^{d(T_2)} \right) \\ &= 1 + xy C^*(x) G(x, y) \end{aligned}$$

οπότε

$$G(x, y) = \frac{1}{1 - xy C^*(x)}$$

δηλαδή η $G(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Riordan, οπότε

$$b_{n,r} = [x^n y^r] G(x, y) = R(n, r) = \frac{r}{n} \binom{2n-r-1}{n-1}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.3. Να ευρεθεί ο αριθμός των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n που έχει

i) k κορυφές

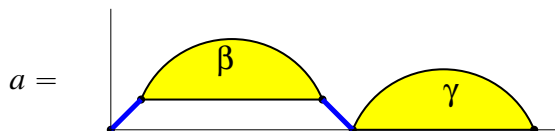
ii) r επιστροφές

Λύση. Ο αριθμός $a_{n,k}$ (αντ. $b_{n,k}$) των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με k κορυφές (αντ. r επιστροφές) είναι ο συντελεστής της γεννήτριας

$$F(x, y) = \sum_{a \in \mathcal{D}} x^{p(a)} y^{q(a)} \quad \left(\text{αντ.} \quad G(x, y) = \sum_{a \in \mathcal{D}} x^{p(a)} y^{r(a)} \right)$$

όπου $p(a)$ = ημιμήκος του a και $q(a)$ = αριθμός κορυφών του a ($r(a)$ = αριθμός επιστροφών του a).

Προκειμένου να υπολογισθούν οι συναρτησιακές εξισώσεις των γεννητριών συναρτήσεων F και G θα χρησιμοποιηθεί η διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck.



i) Πράγματι

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \sum_{a \in \mathcal{D}} x^{p(a)} y^{q(a)} \\
&= x^{p(\epsilon)} y^{q(\epsilon)} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+1} y^{q(\beta)+q(\gamma)+[\beta=\epsilon]} \\
&= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{p(\beta)} y^{q(\beta)+[\beta=\epsilon]} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{p(\gamma)} y^{q(\gamma)} \right) \\
&= 1 + x \left(x^{p(\epsilon)} y^{q(\epsilon)+1} + \sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \{\epsilon\}} x^{p(\beta)} y^{q(\beta)} \right) F(x, y) \\
&= 1 + x \left(y + \sum_{b \in \mathcal{D}} x^{p(b)} y^{q(b)} - x^{p(\epsilon)} y^{q(\epsilon)} \right) F(x, y) \\
&= 1 + x(y - 1 + F(x, y)) F(x, y)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$F(x, y) = 1 + x(F(x, y))^2 + x(y - 1)F(x, y),$$

δηλαδή η $F(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana οπότε

$$a_{n,k} = [x^n y^k] F(x, y) = N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k}.$$

ii)

$$\begin{aligned}
G(x, y) &= \sum_{a \in \mathcal{D}} x^{p(a)} y^{r(a)} \\
&= x^{p(\epsilon)} y^{r(\epsilon)} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+1} y^{r(\gamma)+1} \\
&= 1 + xy \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{p(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{p(\gamma)} y^{r(\gamma)} \right) \\
&= 1 + xyC^*(x)G(x, y),
\end{aligned}$$

οπότε

$$G(x, y) = \frac{1}{1 - xyC^*(x)}$$

δηλαδή η $G(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Riordan οπότε

$$b_{n,r} = [x^n y^r] G(x, y) = R(n, r) = \frac{r}{n} \binom{2n - r - 1}{n - 1}.$$

□

5.8 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 5.14 (Απλές γεννήτριες συναρτήσεις). Να βρεθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις των παρακάτω ακολουθιών:

i) $f_1(n) = c$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

ii) $f_2(n) = c$, για κάθε $n \geq 3$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

iii) $f_3(n) = a^n$, για κάθε $n \geq 1$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

iv) $f_4(n) = ca^n$, για κάθε $n \geq 2$, όπου $a, c \in \mathbb{R}$.

v) $f_5(n) = ca^{n+7}$, για κάθε $n \geq 2$, όπου $a, c \in \mathbb{R}$.

vi) $f_6(n) = n + 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

vii) $f_7(n) = n + 2^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

viii) $f_8(n) = n(n + 1)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ix) $f_9(n) = \binom{a}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

x) $f_{10}(n) = \binom{n}{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{N}^*$.

xi) $f_{11}(n) = n \binom{a}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

xii) $f_{12}(n) = \begin{cases} a^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ b^n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.

i) $f_1^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} cx^n = c \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{c}{1-x}$.

ii) (1ος τρόπος)

$$f_2^*(x) = \sum_{n=3}^{\infty} f_2(n)x^n = \sum_{n=3}^{\infty} cx^n = c \sum_{n=3}^{\infty} x^n = c \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - x - x^2 \right) = c \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \right) = \frac{cx^3}{1-x}.$$

(2ος τρόπος) $f_2^*(x) = \sum_{n=3}^{\infty} f_2(n)x^n = \sum_{n=3}^{\infty} cx^n = c \sum_{n=3}^{\infty} x^n = cx^3 \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-3} = cx^3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{cx^3}{1-x}$.

iii) (1ος τρόπος) $f_3^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_3(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n - 1 = \frac{1}{1-ax} - 1 = \frac{ax}{1-ax}$.

(2ος τρόπος) $f_3^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_3(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n = ax \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} x^{n-1} = ax \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{ax}{1-ax}$.

iv) $f_4^*(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_4(n)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} ca^n x^n = ca^2 x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a^{n-2} x^{n-2} = ca^2 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{ca^2 x^2}{1-ax}$.

$$v) f_5^*(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_5(n)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} ca^{n+7}x^n = ca^9x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a^{n-2}x^{n-2} = ca^9x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{ca^9x^2}{1-ax}.$$

vi)

$$\begin{aligned} f_6^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_6(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' \\ &= \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x'(1-x) - x(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

vii)

$$\begin{aligned} f_7^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_7(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \frac{1}{1-2x} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \frac{1}{1-2x} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' + \frac{1}{1-2x} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' + \frac{1}{1-2x} \\ &= x \left(\frac{1}{1-x} \right)' + \frac{1}{1-2x} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x} = \frac{1-x-x^2}{(1-x)^2(1-2x)}. \end{aligned}$$

viii)

$$\begin{aligned} f_8^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_8(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \right)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})' \right)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)'' \\ &= x \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

$$ix) f_9^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_9(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = (1+x)^a.$$

x)

$$\begin{aligned} f_{10}^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{10}(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{a} x^n = \sum_{n=a}^{\infty} \binom{n}{a} x^n = x^a \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+a}{a} x^n \\ &= x^a \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+a}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+a)(n+a-1)\cdots(a+2)(a+1)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=a}^{\infty} \frac{(-1)^n(-a-1)(-a-2)\cdots(-a-1-(n-2))(-a-1-(n-1))}{n!} x^n \\ &= x^a \sum_{n=a}^{\infty} \binom{-a-1}{n} (-x)^n = x^a(1-x)^{-a-1} = \frac{x^a}{(1-x)^{a+1}}. \end{aligned}$$

xi)

$$\begin{aligned}
 f_{11}^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{11}(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{a}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{a}{n} x^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!} x^n = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-1)(a-2)\cdots((a-1)-(n-2))}{(n-1)!} x^n \\
 &= a \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a-1}{n-1} x^n = ax \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a-1}{n-1} x^{n-1} = ax \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-1}{n} x^n = ax(1+x)^{a-1}.
 \end{aligned}$$

xii)

$$\begin{aligned}
 f_{12}^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{12}(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_{12}(2n)x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{12}(2n+1)x^{2n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^2x^2)^n + bx \sum_{n=0}^{\infty} (b^2x^2)^n = \frac{1}{1-a^2x^2} + \frac{bx}{1-b^2x^2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.15 (Βασικές ιδιότητες γεννητριών). Ναδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) Αν $f(n) = c_1f_1(n) + c_2f_2(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$f^*(x) = c_1f_1^*(x) + c_2f_2^*(x).$$

ii) Αν $f(n) = a^n\phi(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$f^*(x) = \phi^*(ax).$$

iii) Αν $f(n) = \phi(n+k)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$ τότε

$$f^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{x^k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\phi(i)}{x^{k-i}}.$$

iv) Αν $f(n) = \phi(n-k)$, για $n \geq k$, $f(n) = 0$, για κάθε $n = 0, \dots, k-1$, $k \in \mathbb{N}^*$ τότε

$$f^*(x) = x^k\phi^*(x).$$

v) Αν $f(n) = F_k(n)\phi(n)$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$f^*(x) = x^k(\phi^*(x))^{(k)}.$$

Λύση.

i) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 f^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1f_1(n) + c_2f_2(n))x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_1f_1(n)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_2f_2(n)x^n = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n)x^n + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} f_2(n)x^n \\
 &= f_1^*(x) + f_2^*(x).
 \end{aligned}$$

ii) Ισχύει ότι $f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \phi(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)(ax)^n = \phi^*(ax)$.

iii) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n+k)x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \phi(n+k)x^{n+k}}{x^k} = \frac{\sum_{n=k}^{\infty} \phi(n)x^n}{x^k} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)x^n - \sum_{i=0}^{k-1} \phi(i)x^i}{x^k} = \frac{\phi^*(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \phi(i)x^i}{x^k} \\ &= \frac{\phi^*(x)}{x^k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\phi(i)x^i}{x^k} = \frac{\phi^*(x)}{x^k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\phi(i)}{x^{k-i}}. \end{aligned}$$

iv) Ισχύει ότι

$$f^*(x) = \sum_{n=k}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \phi(n-k)x^n = x^k \sum_{n=k}^{\infty} \phi(n-k)x^{n-k} = x^k \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)x^n = x^k \phi^*(x).$$

v) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_k(n)\phi(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\phi(n)x^n \\ &= x^k \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\phi(n)x^{n-k} \stackrel{22}{=} x^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)x^n \right)^{(k)} = x^k (\phi^*(x))^{(k)} \quad \square \end{aligned}$$

Άσκηση 5.16 (Επίλυση γραμμικής αναγωγικής ακολουθίας). Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n)$ όπου

$$f(0) = -1, f(1) = -2, f(n) = 7f(n-1) - 12f(n-2) \text{ για κάθε } n \geq 2.$$

Στη συνέχεια, να αναπτυχθεί σε σειρά η γεννήτρια συνάρτηση $f^*(x)$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = f(0) + f(1)x + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n \\ &= -1 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (7f(n-1) - 12f(n-2))x^n \\ &= -1 - 2x + 7 \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^n - 12 \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^n \\ &= -1 - 2x + 7x \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^{n-1} - 12x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^{n-2} \\ &= -1 - 2x + 7x \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n - 12x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \\ &= -1 - 2x + 7x(f^*(x) - f(0)) - 12x^2 f^*(x) \\ &= -1 - 2x + 7x(f^*(x) + 1) - 12x^2 f^*(x). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f^*(x) = \frac{5x - 1}{1 - 7x + 12x^2}.$$

Προκειμένου να βρούμε το ανάπτυγμα της $f^*(x)$ σε σειρά του x θα παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή του πηλίκου της $f^*(x)$ και στη συνέχεια θα κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Ισχύει ότι

$$f^*(x) = \frac{5x - 1}{(1 - 3x)(1 - 4x)}.$$

Θα βρούμε σταθερές A, B ώστε

$$\frac{5x - 1}{(1 - 3x)(1 - 4x)} = \frac{A}{1 - 3x} + \frac{B}{1 - 4x}.$$

Πρέπει

$$\begin{aligned} 5x - 1 &= A(1 - 4x) + B(1 - 3x) \Leftrightarrow 5x - 1 = A + B - (4A + 3B)x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ 4A + 3B = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f^*(x) = \frac{-2}{1 - 3x} + \frac{1}{1 - 4x}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της γεωμετρικής σειράς προκύπτει ότι

$$f^*(x) = (-2) \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((-2)3^n + 4^n) x^n.$$

Άρα,

$$f(n) = (-2) \cdot 3^n + 4^n. \quad \square$$

Άσκηση 5.17 (Επίλυση συστήματος γραμμικών αναγωγικών ακολουθιών). Να βρεθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών $f(n), g(n)$ όπου $f(0) = g(0) = 1$ και για κάθε $n \geq 1$ ισχύουν οι σχέσεις

$$f(n) = f(n - 1) + 2g(n - 1),$$

$$g(n) = 3f(n - 1) - 4g(n - 1).$$

Στη συνέχεια, να αναπτυχθούν σε σειρά οι γεννήτριες συναρτήσεις $f^*(x), g^*(x)$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f(n - 1) + 2g(n - 1)) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f(n - 1)x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g(n - 1)x^n = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} f(n - 1)x^{n-1} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} g(n - 1)x^{n-1} \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n = 1 + xf^*(x) + 2xg^*(x). \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
 g^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3f(n-1) - 4g(n-1))x^n \\
 &= 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)x^n - 4 \sum_{n=1}^{\infty} g(n-1)x^n = 1 + 3x \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)x^{n-1} - 4x \sum_{n=1}^{\infty} g(n-1)x^{n-1} \\
 &= 1 + 3x \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n - 4x \sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n = 1 + 3xf^*(x) - 4xg^*(x).
 \end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\begin{cases} (1-x)f^*(x) - 2xg^*(x) = 1 \\ -3xf^*(x) + (1+4x)g^*(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ((1+4x)(1-x) - 6x^2)f^*(x) = 1 + 4x + 2x \\ (-6x^2 + (1+4x)(1-x))g^*(x) = 3x + (1-x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f^*(x) = \frac{1+6x}{1+3x-10x^2} \\ g^*(x) = \frac{1+2x}{1+3x-10x^2}. \end{cases}$$

Στη συνέχεια, θα κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα. Επειδή $1 + 3x - 10x^2 = (1 + 5x)(1 - 2x)$, έχουμε ότι

$$f^*(x) = \frac{1+6x}{(1+5x)(1-2x)} \text{ και } g^*(x) = \frac{1+2x}{(1+5x)(1-2x)}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$f^*(x) = -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1+5x} + \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{1-2x}.$$

και

$$g^*(x) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1+5x} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{1-2x}.$$

Άρα,

$$f^*(x) = -\frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^n x^n + \frac{8}{7} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{7}(-5)^n + \frac{8}{7}2^n \right) x^n,$$

οπότε

$$f(n) = \frac{1}{7} ((-1) \cdot (-5)^n + 8 \cdot 2^n)$$

και

$$g^*(x) = \frac{3}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^n x^n + \frac{4}{7} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}(-5)^n + \frac{4}{7}2^n \right) x^n,$$

οπότε

$$g(n) = \frac{1}{7} (3 \cdot (-5)^n + 4 \cdot 2^n). \quad \square$$

Άσκηση 5.18 (Δυνάμεις γεωμετρικής σειράς). Ναδειχθεί ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} x^n.$$

Λύση. Από τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 (1-x)^{-(m+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m-1}{n} (-x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m-1)(-m-2)(-m-3)\cdots(-m-1-(n-1))}{n!} (-x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)}{n!} (-x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m! \cdot (m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)}{m!n!} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} x^n.
 \end{aligned}$$

□

Άσκηση 5.19 (Αντίστροφες σχέσεις). Να δειχθεί ότι αν

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(k)$$

τότε

$$g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k).$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. (1ος τρόπος) Αν τεθεί $h(n) = 1$ τότε

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(k) h(n-k)$$

οπότε

$$f^{**}(x) = g^{**}(x) h^{**}(x) \Leftrightarrow f^{**}(x) = g^{**}(x) e^x.$$

Επομένως,

$$g^{**}(x) = f^{**}(x) e^{-x}$$

Επειδή $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ δηλαδή $e^{-x} = ((-1)^n)^{**}$ προκύπτει ότι

$$g(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k) (-1)^{n-k}.$$

(2ος τρόπος) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 f^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(k)x^n \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} g(k)x^n = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)x^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)x^k \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\lambda+k}{k} x^\lambda \stackrel{23}{=} \sum_{k=0}^{\infty} g(k)x^k \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \\
 &= \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{1}{1-x} g^* \left(\frac{x}{1-x}\right)
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$g^*(x) = \frac{1}{1+x} f^* \left(\frac{x}{1+x}\right).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
 g^*(x) &= \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \left(\frac{x}{1+x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \\
 &\stackrel{24}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-1)^k f(n)x^{n+k} \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{k} (-1)^k f(\lambda-k)x^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\lambda-k} (-1)^{\lambda-k} f(k)x^\lambda
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$g^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(k) \right) x^n,$$

οπότε

$$g(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(k). \quad \square$$

Άσκηση 5.20 (Αντίστροφες σχέσεις). Αν $g, h/\mathbb{N}^*$ είναι δύο ακολουθίες με

$$g(n) = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} h(k)$$

τότε

$$h(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} g(k)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

²³Ισχύει ότι $(1-x)^{-(m+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} x^n$.

²⁴Ισχύει ότι $(1+x)^{-(m+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} (-x)^n$.

Λύση. Επειδή

$$\frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{k!} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$$

προκύπτει ότι

$$\frac{g(n)}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{h(k)}{(k-1)!}$$

Αν τεθούν

$$\phi(n) = \begin{cases} \frac{g(n)}{(n-1)!}, & n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad f(n) = \begin{cases} \frac{h(n)}{(n-1)!}, & n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

τότε προκύπτει ότι

$$\phi(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)$$

οπότε από την προηγούμενη άσκηση (Άσκηση 5.19) προκύπτει ότι

$$f(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \phi(k), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*,$$

οπότε για $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\frac{h(n)}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{g(k)}{(k-1)!}$$

και τελικά

$$h(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} g(k) \quad \square$$

Άσκηση 5.21 (Εύρεση αναγωγικής σχέσης από γεννήτρια συνάρτηση). Να βρεθεί μια αναγωγική σχέση για την ακολουθία f/\mathbb{N} όταν

$$i) f^*(x) = \frac{1-x}{1-2x+x^5}.$$

$$ii) f^{**}(x) = \frac{e^x}{1-2x}.$$

$$iii) f^*(x) = \sqrt{1-5x}.$$

Λύση. Επειδή η γεννήτρια $f^*(x)$ περιέχει μόνο μη αρνητικούς εκθέτες του x^n έπεται ότι για $n < m$ ισχύει ότι $[x^n]x^m f^*(x) = 0$. Επίσης, για $n \geq m$ ισχύει ότι $[x^n]x^m f^*(x) = [x^{n-m}]f^*(x)$.

i) Ισχύει ότι

$$(1-2x+x^5)f^*(x) = 1-x.$$

Για $n \geq 5$, για τον συντελεστή του x^n στο αριστερό μέλος έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [x^n](1-2x+x^5)f^*(x) &= [x^n]f^*(x) - [x^n]2xf^*(x) + [x^n]x^5f^*(x) \\ &= [x^n]f(n) - 2[x^{n-1}]f^*(x) + [x^{n-5}]f^*(x) \\ &= f(n) - 2f(n-1) + f(n-5), \end{aligned}$$

ενώ αντίστοιχα για τον συντελεστή του x^n στο δεξιό μέλος έχουμε ότι

$$[x^n](1-x) = 0.$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των δύο μελών, για $n \geq 5$ έχουμε ότι ότι

$$f(n) - 2f(n-1) + f(n-5) = 0.$$

Οι τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ και $f(4)$ υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} [x^0](1-2x+x^5)f^*(x) &= [x^0](1-x) \Rightarrow \\ [x^0]f^*(x) - 2[x^0]xf^*(x) + [x^0]x^5f^*(x) &= 1 \Rightarrow \\ f(0) - 0 + 0 &= 1 \Rightarrow \\ f(0) &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x^1](1-2x+x^5)f^*(x) &= [x^1](1-x) \Rightarrow \\ [x^1]f^*(x) - 2[x^1]xf^*(x) + [x^1]x^5f^*(x) &= -1 \Rightarrow \\ f(1) - 2f(0) + 0 &= -1 \Rightarrow \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x^2](1-2x+x^5)f^*(x) &= [x^2](1-x) \Rightarrow \\ [x^2]f^*(x) - 2[x^2]xf^*(x) + [x^2]x^5f^*(x) &= 0 \Rightarrow \\ f(2) - 2f(1) + 0 &= 0 \Rightarrow \\ f(2) &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x^3](1-2x+x^5)f^*(x) &= [x^3](1-x) \Rightarrow \\ [x^3]f^*(x) - 2[x^3]xf^*(x) + [x^3]x^5f^*(x) &= 0 \Rightarrow \\ f(3) - 2f(2) + 0 &= 0 \Rightarrow \\ f(3) &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x^4](1-2x+x^5)f^*(x) &= [x^4](1-x) \Rightarrow \\ [x^4]f^*(x) - 2[x^4]xf^*(x) + [x^4]x^5f^*(x) &= 0 \Rightarrow \\ f(4) - 2f(3) + 0 &= 0 \Rightarrow \\ f(4) &= 8. \end{aligned}$$

ii) Ισχύει ότι

$$(1-2x)f^*(x) = e^x.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n σε κάθε μέλος έχουμε ότι

$$[x^n](1-2x)f^{**}(x) = [x^n]e^x$$

οπότε

$$[x^n]f^{**}(x) - 2[x^n]xf^{**}(x) = \frac{1}{n!}.$$

Επομένως, για $n \geq 1$ ισχύει ότι

$$\frac{f(n)}{n!} - 2\frac{f(n-1)}{(n-1)!} = \frac{1}{n!},$$
$$f(n) - 2nf(n-1) = 1.$$

Επίσης, για τον συντελεστή του x^0 έχουμε ότι

$$f(0) - 2 \cdot 0 = \frac{1}{0!} = 1.$$

iii) Ισχύει ότι

$$f^*(x) = (1 - 5x)^{1/2}.$$

Παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$(f^*(x))' = -\frac{5}{2}(1 - 5x)^{-1/2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με $(1 - 5x)$ έχουμε ότι

$$(1 - 5x)(f^*(x))' = -\frac{5}{2}(1 - 5x)^{1/2} = -\frac{5}{2}f^*(x).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n σε κάθε μέλος έχουμε ότι

$$[x^n](1 - 5x)(f^*(x))' = -\frac{5}{2}[x^n]f^*(x)$$
$$[x^n](f^*(x))' - 5[x^{n-1}](f^*(x))' = -\frac{5}{2}f(n).$$

Επειδή $[x^n](f^*(x))' = (n+1)f(n+1)$, από την παραπάνω σχέση και για $n \geq 1$ έχουμε ότι

$$(n+1)f(n+1) - 5nf(n) = -\frac{5}{2}f(n)$$

και επομένως,

$$(n+1)f(n+1) = \frac{5(2n-1)}{2}f(n),$$

ή, ισοδύναμα

$$f(n+1) = \frac{5(2n-1)}{2(n+1)}f(n).$$

Επίσης, για τον συντελεστή του x^0 έχουμε ότι

$$f(0) = f^*(0) = \sqrt{1 - 5 \cdot 0} = 1.$$

□

5.9 Ασκήσεις προς επίλυση

1) Να βρεθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις των παρακάτω ακολουθιών:

$$\text{i) } f(n) = 3^n(n+2)^2. \\ (\text{Απ. } f^*(x) = \frac{9x^2-9x+4}{(1-3x)^3}.)$$

$$\text{iv) } f(n) = 4^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}. \\ (\text{Απ. } f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}.)$$

$$\text{ii) } f(n) = \frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} \cdots + \frac{5^n}{n!}. \\ (\text{Απ. } f^*(x) = \frac{e^{5x}}{1-x}.)$$

$$\text{v) } f(n) = 2^n(n+2)^2.$$

$$\text{vi) } f(n) = \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{n!}.$$

$$\text{iii) } f(n) = \frac{1}{(n+2)!}. \\ (\text{Απ. } f^*(x) = \frac{e^x-x-1}{x^2}.)$$

$$\text{vii) } f(n) = \frac{1}{(n+6)!}.$$

$$\text{viii) } f(n) = 3^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}.$$

2) Να βρεθούν οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των παρακάτω ακολουθιών:

$$\text{i) } f(n) = 3^{n+2} + 4^{n+2}. \\ (\text{Απ. } f^{**}(x) = 9e^{3x} + 16e^{4x}.)$$

$$\text{iv) } f(n) = n(n-1). \\ (\text{Απ. } f^{**}(x) = x^2 e^x.)$$

$$\text{ii) } f(n) = 3n + 2. \\ (\text{Απ. } f^{**}(x) = 3xe^x + 2e^x.)$$

$$\text{v) } f(n) = n^2.$$

$$\text{iii) } f(n) = n.$$

$$(\text{Απ. } f^{**}(x) = x(1+x)e^x.)$$

3) Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας f/\mathbb{N} όπου $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0$, και για $n \geq 3$ ισχύει ότι

$$f(n) = 4f(n-1) - 2f(n-2) + f(n-3).$$

4) Να βρεθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών $f, g/\mathbb{N}$ όπου $f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = 1$ και για $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$f(n) = 2f(n-1) + 3g(n-2) \\ g(n) = 4g(n-1) + g(n-2) - 7f(n-2)$$

5) Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $(f(n))$ όπου

$$f(n) = (n-1)f(n-1) + \binom{n-1}{2}f(n-3), \text{ για κάθε } n \geq 3$$

$$\text{και } f(0) = 1, f(1) = f(2) = 0. (\text{Απ. } f^{**}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{x^2+2x}{4}}.)$$

6) i) Να δειχθεί ότι η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $(f(n))$ όπου

$$f(0) = 1 \text{ και } f(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}, \text{ για κάθε } n \geq 1$$

ισούται με

$$f^{**}(x) = e^{xe^x}.$$

ii) Να δειχθεί ότι ο αριθμός $f(n)$ απαριθμεί το πλήθος όλων των απεικονίσεων $g: [n] \rightarrow [n]$ με την ιδιότητα $g(g(x)) = g(x)$ για κάθε $x \in [n]$. (Υπόδειξη: Ο περιορισμός της g στο σύνολο των εικόνων της είναι η ταυτοτική απεικόνιση.)

7) Να βρεθεί η ακολουθία f/\mathbb{N} όταν

- i) $f^*(x) = \frac{(5x-2)x}{(1-x)^2(1-2x)}$.
 ii) $f^*(x) = \frac{1+x}{(1-3x)(1-2x)(1-5x)}$.
 iii) $f^*(x) = \frac{9x^2-4x+2}{(1-3x)^2(1+2x)}$.
 (Απ. $f(n) = (n+1)3^n + (-2)^n$)
 iv) $f^*(x) = \sqrt{1-x}$.
 v) $f^*(x) = x^m(1-x)^m$.
 vi) $f^*(x) = (1-x)^{-1-m}$.
 vii) $f^*(x) = (1+x)^{-m}$.
 viii) $f^*(x) = (1-x^2)^{-m}$.
 ix) $f^*(x) = (1+\frac{x^2}{2})^{-m}$.
 x) $f^*(x) = (1+2x)^{-1/2}(1-\frac{x}{2})^{-m}$.
 xi) $f^*(x) = x^2(1-x)(1+2x)^{-m}$.
 xii) $f^*(x) = \ln(1+x)$.
 xiii) $f^*(x) = e^{-2x^2}$.

όπου $m \in \mathbb{N}^*$.

8) Να δειχθεί ότι

i) $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$.
 ii) $\frac{2x}{(\sqrt{1-4x})^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} nx^n$.
 iii) $\ln \frac{1-\sqrt{1-4x}}{x(1+\sqrt{1-4x})} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n}$.
 iv) $\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n-1} x^n$.

9) Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$, όταν $y_0 = 3$ και $y_1 = 7$.
 ii) $y_{n+2} - 2y_{n+1} - y_n = 2$, όταν $y_0 = 1$ και $y_1 = 0$.

10) Να βρεθεί η ακολουθία $f(n)$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(n) = f(n-2) + 4n, \text{ για κάθε } n \geq 2$$

και $f(0) = 3, f(1) = 2$.

11) Να λυθεί η εξίσωση

$$y_{n+2} - y_{n+1} - \frac{1}{n+2}y_n = 0,$$

όταν $y_0 = y_1 = 1$.

12) Να βρεθεί η ακολουθία g/\mathbb{N} όταν είναι γνωστό ότι $f^*(x)g^*(x) = 1$ και

- i) $f(n) = \binom{m}{n}$.
 ii) $f(n) = a^n$.
 iii) $f(n) = n+1$.
 iv) $f(n) = (-1)^n$.
 v) $f(n) = (-1)^n \binom{2n}{n} 4^{-n}$.

13) Να βρεθεί μια αναγωγική σχέση για την ακολουθία f/\mathbb{N} όταν

- i) $f^*(x) = \frac{1+x+2x}{1-4x-3x^2+x^3}$.
 ii) $f^*(x) = \sqrt{1-12x}$.
 iii) $f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.
 iv) $f^*(x) = \sqrt{1-2x+8x^2}$.
 v) $f^{**}(x) = \frac{e^x}{1-3x+5x^2}$.

14) Ναδειχθεί ότι οι συντελεστές της γεννήτριας $f^*(x)$ με

$$f^*(x) = \frac{1}{4} \left(1 + x - \sqrt{1 - 6x + x^2} \right)$$

ικανοποιούν την αναγωγική σχέση

$$(n-1)c_{n+1} = 3(2n-1)c_n - (n-2)c_{n-1}, \quad n \geq 2$$

όπου $c_0 = 0, c_1 = c_2 = 1$.

15) Να βρεθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange η ακολουθία f/\mathbb{N} όταν

i) $f^*(x) = 1 + 3x(f^*(x))^7$.

(Απ. $f(n) = \frac{3^n}{n} \binom{7n}{n-1}, n \geq 1$.)

v) $f^*(x) = 1 + x(f^*(x))^5$.

vi) $f^*(x) = 1 + 3x(f^*(x))^5$.

ii) $f^*(x) = 1 + x(f^*(x) + 1)^5$.

(Απ. $f(n) = \frac{2^{4n+1}}{n} \binom{5n}{n-1}, n \geq 1$.)

vii) $f^*(x) = \frac{1}{1-2xf^*(x)}$.

iii) $f^*(x) = 1 + 2xf^*(x)$.

viii) $f^*(x) = 1 + xf^*(x) + x$.

iv) $f^*(x) = \frac{1}{1-3x}$.

ix) $f^*(x) = 1 + xf^*(x) + x^2$.

16) Να εφαρμοσθεί το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange για τις παρακάτω συναρτησιακές εξισώσεις

$$C^*(x) = 1 + x(C^*(x))^2,$$

$$M^*(x) = 1 + xM^*(x) + (xM^*(x))^2$$

των γεννητριών συναρτήσεων των αριθμών Catalan και Motzkin αντίστοιχα, για την εύρεση των ακολουθιών τους.

17) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης και τις επόμενες ισότητες να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες των διωνυμικών συντελεστών:

i) $(1+x)^{-1-r}(1+x)^{-1-s} = (1+x)^{-2-r-s}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{r} \binom{s+n-k}{s} = \binom{r+s+n+1}{n}.$$

ii) $(1+x)^r(1+x)^{-s} = (1+x)^{r-s}$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{r}{k} \binom{s+n-k-1}{n-k} = \binom{r-s}{n}.$$

iii) $(1-x)^{-1-r}(1+x)^{-1-r} = (1-x^2)^{-1-r}$

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{r+k}{r} \binom{r+2n-k}{r} = \binom{r+n}{n}.$$

iv) $(1+x)^r(1-x^2)^{-r} = (1-x)^{-r}$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{r}{n-2k} \binom{r+k-1}{k} = \binom{r+n-1}{n}.$$

18) Να αποδειχθεί ότι

i) Αν

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 0 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

τότε

$$g^*(x) = \frac{1}{2}(f^*(x) + f^*(-x)).$$

ii) Αν

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 0 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

τότε

$$g^*(x) = \frac{1}{2}(f^*(x) - f^*(-x)).$$

iii) Να αποδειχθεί ότι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $f^{**}(x)$ της ακολουθίας

$$f(n) = \begin{cases} n! & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ 0 & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

δίδεται από τον τύπο

$$f^{**}(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

19) Να αποδειχθεί ότι

i) Αν $f(n) = g(n) - g(n-1)$ για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$f^*(x) = g^*(x)(1-x)^{-1}.$$

ii) Αν $f(n) = g(n+1) - g(n)$ για κάθε $n \geq 0$, τότε

$$f^*(x) = g^*(x)((1-x) - g(0))x^{-1}.$$

iii) Αν $f(n) = g(2n)$ για κάθε $n \geq 0$, τότε

$$f^*(x) = \frac{1}{2}(g^*(x^{1/2}) + g^*(-x^{1/2})).$$

20) i) Να αποδειχθεί ότι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

δίδεται από τον τύπο

$$f^*(x) = -\ln(1-x).$$

(Υπόδειξη: Να βρεθεί η παράγωγος της $f^*(x)$.)

ii) Να αποδειχθεί ότι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

δίδεται από τον τύπο

$$H^*(x) = \frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

- 21) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $d(n)$ των μεταθέσεων του $[n]$ χωρίς σταθερά σημεία ικανοποιεί τις αναγωγικές σχέσεις

$$d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2)) \text{ για κάθε } n \geq 3,$$

$$d(n) = nd(n-1) + (-1)^n \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

όπου $d(0) = d(2) = 1$ και $d(1) = 0$.

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας κάποια από τις παραπάνω σχέσεις, να δειχθεί ότι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $d^{**}(x)$ δίδεται από τη ισότητα

$$d^{**}(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

- 22) Μια μετάθεση σ του $[n]$ ονομάζεται **αδιαίρετη** (irreducible) αν δεν υπάρχει $1 \leq k < n$ ώστε η ακολουθία $\sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(k)$ να αποτελεί μετάθεση του $[k]$.

Έστω $c(n)$ ο αριθμός των συνδεδεμένων μεταθέσεων του $[n]$. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^n c(k)(n-k)! = n! \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

Να δειχθεί ότι οι συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις $f^*(x)$ και $c^*(x)$ των ακολουθιών $n!$ και $c(n)$ αντίστοιχα ικανοποιούν τη σχέση

$$c^*(n) = 1 - \frac{1}{1+f^*(x)}.$$

- 23) Έστω $f(n)$ ο αριθμός των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς τα οποία δεν περιέχουν φύλλα σε ύψος 1. Να δειχθεί ότι

i) $f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k f(n-k-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $f(0) = 1$ και (C_n) η ακολουθία των αριθμών Catalan.

ii) $f^*(x) = \frac{1}{1-x^2(C(x))^2}$, όπου $C(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan.

- 24) Έστω $f(n)$ ο αριθμός των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς στα οποία κάθε κόμβος έχει 0 ή 1 ή 2 παιδιά. Να δειχθεί ότι

i) $f(n) = f(n-1) + \sum_{k=0}^{n-2} f(k)f(n-2-k)$ για κάθε $n \geq 2$, όπου $f(0) = f(1) = 1$.

ii) $f^*(x) = M(x)$, όπου $M(x)$ είναι η γεννήτρια των αριθμών Motzkin.

- 25) Να δειχθεί ότι

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{16^n \sqrt{2}(2n)!(2n+1)!} x^n.$$

26) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt$, ναδειχθεί ότι

$$f^*(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} f^{**}(tx) dt.$$

Να επαληθευθεί ο τύπος για την ακολουθία $f(n) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με γεννήτρια συνάρτηση $f^*(x) = (1-x)^{-1}$ και εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $f^{**}(x) = e^x$.

Κεφάλαιο 6

Ασυμπτωτική ανάλυση

Πολλά προβλήματα που εμφανίζονται στις θετικές επιστήμες δεν έχουν ακριβείς λύσεις. Σε τέτοιες περιπτώσεις αναζητάται μια όσο δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της λύσης τους.

Τέτοια προβλήματα εμφανίζονται στα Διακριτά Μαθηματικά όπου υπάρχουν πεπερασμένα αθροίσματα (όπως για παράδειγμα το άθροισμα $f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{k}$) για τα οποία δεν υπάρχει κάποιος απλούστερος τύπος, αναδρομικές ακολουθίες (όπως για παράδειγμα οποιαδήποτε ακολουθία $(f(n))$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(n) = 4f(\frac{n}{2}) + n^2$) για τις οποίες δεν μπορεί να βρεθεί ο τύπος τους, και άλλα. Σκοπός μας τότε είναι να βρεθεί μια γνωστή ακολουθία $(g(n))$ η οποία είναι κατά μια έννοια ισοδύναμη με την ακολουθία $(f(n))$, ή, αν αυτό δεν είναι εφικτό, τουλάχιστον να φράσσει την $f(n)$.

Η ανάγκη εκτίμησης του μεγέθους μιας ακολουθίας $(f(n))$ μέσω μιας άλλης ακολουθίας $(g(n))$ εμφανίζεται και στην Ανάλυση των Αλγορίθμων. Οι συναρτήσεις που συναντάμε στην ανάλυση αλγορίθμων είναι θετικές και συνήθως αύξουσες. Η μεταβλητή τους είναι ένας φυσικός αριθμός και αντιπροσωπεύει το μέγεθος των δεδομένων εισόδου στον αλγόριθμο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε σχεδιάσει δύο αλγορίθμους F , G τους οποίους θέλουμε να συγκρίνουμε ως προς την ταχύτητά τους. Αν $f(n)$, $g(n)$ είναι οι χρόνοι εκτέλεσης των αλγορίθμων F , G αντίστοιχα και έχουμε υπολογίσει τον τύπο της $g(n)$, μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή της $f(n)$ δια σύγκρισης με την $g(n)$.

Αν η σύγκριση αυτή βασίζεται σε ορισμένες τιμές της μεταβλητής n , δεν προκύπτει συνολική εικόνα για την "ποιότητα" του αλγορίθμου. Για παράδειγμα, αν $f(n) = 100n$ και $g(n) = n^2$, παρατηρούμε ότι $f(n) > g(n)$ όταν $n < 100$, δηλαδή για μικρές τιμές του n (μικρό μέγεθος εισόδου) ο αλγόριθμος G τερματίζει πιο γρήγορα από τον αλγόριθμο F , ενώ τελικά (για $n > 100$) συμβαίνει το αντίθετο.

Υπάρχουν δύο τρόποι σύγκρισης των ακολουθιών $f(n)$ και $g(n)$. Ο πρώτος βασίζεται στην έννοια του ορίου, ενώ ο δεύτερος σε φράγματα.

6.1 Σύγκριση ακολουθιών με τη βοήθεια ορίων

6.1.1 Ασυμπτωτική ισοδυναμία

Δύο ακολουθίες $(f(n))$, $(g(n))$ ονομάζονται **ασυμπτωτικά ισοδύναμες** (συμβολισμός $f(n) \sim g(n)$) αν και μόνο αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τιμή $g(n)$ αποτελεί μια **ασυμπτωτική εκτίμηση** της τιμής $f(n)$ και αντίστροφα.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.1. Να δειχθεί ότι $3n^2 + 6n + 5 \sim 3n^2$

Λύση. Πράγματι, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 6n + 5}{3n^2} = 1$. □

Παράδειγμα 6.2. Να δειχθεί ότι $\ln(1 + \alpha^n) \sim \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} \ln(1 + \beta^n)$, για κάθε $\alpha, \beta > 1$,

Λύση. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha^n)}{\frac{\ln \alpha}{\ln \beta} \ln(1 + \beta^n)} &= \frac{\ln \beta}{\ln \alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln \alpha + \ln(1 + \alpha^{-n})}{n \ln \beta + \ln(1 + \beta^{-n})} \\ &= \frac{\ln \beta}{\ln \alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha + \frac{1}{n} \ln(1 + \alpha^{-n})}{\ln \beta + \frac{1}{n} \ln(1 + \beta^{-n})} \\ &= 1. \end{aligned} \quad \square$$

Παράδειγμα 6.3. Να δειχθεί ότι $(n + r)^{n+r} \sim e^r n^{n+r}$, για κάθε $r \in \mathbb{R}$,

Λύση. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + r)^{n+r}}{e^r n^{n+r}} &= \frac{1}{e^r} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^r \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \\ &= \frac{1}{e^r} \cdot 1 \cdot e^r = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Ιδιότητες

Πρόταση 6.1.1. Αν $f(n) \sim F(n)$ και $g(n) \sim G(n)$, τότε ισχύει ότι

- 1) $f(n)g(n) \sim F(n)G(n)$.
- 2) $\frac{f(n)}{g(n)} \sim \frac{F(n)}{G(n)}$.
- 3) $|f(n)| + |g(n)| \sim |F(n)| + |G(n)|$.

Απόδειξη. Οι αποδείξεις των δύο πρώτων ιδιοτήτων είναι προφανείς, ενώ για την απόδειξη της τρίτης αρκεί να περιορισθούμε σε ακολουθίες με θετικούς όρους.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f(n) + g(n)}{F(n) + G(n)} - 1 \right| &= \left| \frac{f(n) + g(n) - F(n) - G(n)}{F(n) + G(n)} \right| \\
 &= \left| \frac{f(n) - F(n)}{F(n)} \cdot \frac{F(n)}{F(n) + G(n)} + \frac{g(n) - G(n)}{G(n)} \cdot \frac{G(n)}{F(n) + G(n)} \right| \\
 &\leq \left| \frac{f(n) - F(n)}{F(n)} \right| \cdot \left| \frac{F(n)}{F(n) + G(n)} \right| + \left| \frac{g(n) - G(n)}{G(n)} \right| \cdot \left| \frac{G(n)}{F(n) + G(n)} \right| \\
 &\leq \left| \frac{f(n) - F(n)}{F(n)} \right| + \left| \frac{g(n) - G(n)}{G(n)} \right| \\
 &= \left| \frac{f(n)}{F(n)} - 1 \right| + \left| \frac{g(n)}{G(n)} - 1 \right|,
 \end{aligned}$$

οπότε επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{F(n)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{g(n)}{G(n)} - 1 \right) = 0$, προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n) + g(n)}{F(n) + G(n)} - 1 \right) = 0,$$

και συνεπώς $f(n) + g(n) \sim F(n) + G(n)$. □

Παρατήρηση: Η ιδιότητα 3 δεν ισχύει εν γένει χωρίς τις απόλυτες τιμές. Για παράδειγμα αν $f(n) = n + 2$, $F(n) = n + 1$, $g(n) = G(n) = -n$ τότε $f(n) \sim F(n)$ και $g(n) \sim G(n)$ ενώ $(f(n) + g(n)) \not\sim (F(n) + G(n))$ αφού $\frac{f(n) + g(n)}{F(n) + G(n)} = 2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 6.1.2. Τύπος του Stirling (με ισοδυναμία)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Εφαρμογή 6.1.

i) $\binom{2n-r}{n-s} \sim \frac{4^n}{2^r \sqrt{\pi n}}$, όπου $r, s \in \mathbb{Z}$.

ii) $C_n \sim \frac{4^n}{n \sqrt{\pi n}}$, (όπου C_n είναι ο n -οστός αριθμός Catalan).

Λύση.

i) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, τις ιδιότητες της ασυμπτωτικής ισοδυναμίας και το

τρίτο παράδειγμα που έπεται του ορισμού της, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 \binom{2n-r}{n-s} &= \frac{(2n-r)!}{(n-s)!(n-r+s)!} \\
 &\sim \frac{\sqrt{2\pi(2n-r)} \left(\frac{2n-r}{e}\right)^{2n-r}}{\sqrt{2\pi(n-s)} \left(\frac{n-s}{e}\right)^{n-s} \sqrt{2\pi(n-r+s)} \left(\frac{n-r+s}{e}\right)^{n-r+s}} \\
 &= \sqrt{\frac{2n-r}{2\pi(n-s)(n-r+s)}} \cdot \frac{(2n-r)^{2n-r}}{(n-s)^{n-s}(n-r+s)^{n-r+s}} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{e^{-r}(2n)^{2n-r}}{e^{-s}n^{n-s}e^{-r+s}n^{n-r+s}} \\
 &= \frac{4^n}{2^r \sqrt{\pi n}}.
 \end{aligned}$$

ii) Από το i), για $r = s = 0$ προκύπτει ότι

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

οπότε,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{n \sqrt{\pi n}}. \quad \square$$

Ένα χρήσιμο εργαλείο για την ασυμπτωτική εκτίμηση των αθροισμάτων, γνωστό από την Μαθηματική Ανάλυση, είναι το Λήμμα του Stolz.

Πρόταση 6.1.3 (Λήμμα του Stolz). Αν (a_n) , (A_n) είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών, όπου n (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη, και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \ell$, με $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \ell.$$

Παράδειγμα 6.4. Να βρεθεί μια ασυμπτωτική εκτίμηση του πηλίκου $\frac{\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{k}}{C_n}$.

Λύση. Αν τεθεί $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{k}$, αρχικά υπολογίζουμε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της διαφοράς $a_{n+1} - a_n$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εφαρμογή προκύπτει ότι

$$a_{n+1} - a_n = \binom{2n+3}{n+1} \sim 8 \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim 8nC_n,$$

οπότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} = 8.$$

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα Stolz για τις ακολουθίες (a_n) και (A_n) με $A_n = nC_n$.

Είναι

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} \cdot \frac{nC_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n} \frac{C_{n+1}}{C_n} - 1}.$$

Επειδή $\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{4n+2}{n+2}$, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4$, οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n+1}{n} \frac{C_{n+1}}{C_n} - 1} = 8 \cdot \frac{1}{4-1} = \frac{8}{3}.$$

Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα Stolz θα είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{8}{3},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{k}}{C_n} \sim \frac{8}{3}n. \quad \square$$

6.1.2 Μια ιεραρχία

Οι ακολουθίες που συναντάμε στις εφαρμογές έχουν διαφορετικούς ασυμπτωτικούς ρυθμούς αύξησης, δηλαδή η μια πλησιάζει στο άπειρο ταχύτερα από την άλλη. Για παράδειγμα, η ακολουθία $g(n) = n^2$ πλησιάζει ταχύτερα στο άπειρο από την ακολουθία $f(n) = n$. Έτσι, ορίζεται μια σχέση “ιεραρχίας” ως εξής:

$$f(n) < g(n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Προφανώς η σχέση αυτή είναι μεταβατική.

Παραδείγματα

i) $n^a < n^b \Leftrightarrow a < b$

ii) $\ln(\ln n) < \ln n < n^\epsilon$, για $\epsilon > 0$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{(\ln x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\epsilon} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\epsilon)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\epsilon x^{\epsilon-1}} = 0. \end{aligned}$$

iii) $n^{\ln n} < a^n$, για κάθε $a > 1$.

Πράγματι

$$\frac{n^{\ln n}}{a^n} = \frac{(e^{\ln n})^{\ln n}}{e^{\ln a^n}} = e^{(\ln n)^2 - n \ln a} = e^{n \left(\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln a \right)}.$$

Εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα του L' Hospital έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\ln n}}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \left(\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln a \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n \ln a} = 0,$$

αφού $\ln a > 0$.

Συνήθως για τη σχέση ιεραρχίας χρησιμοποιείται ο συμβολισμός o (διαβάζεται “όμικρον”).

6.1.3 Ο συμβολισμός o

Για κάθε ακολουθία $g(n)$ τίθεται

$$o(g(n)) = \{f(n) : f(n) < g(n)\}.$$

Προφανώς, $o(1)$ είναι το σύνολο όλων των μηδενικών ακολουθιών.

Παρακάτω θα γράφουμε ότι $f(n) = o(g(n))$ εννοώντας ότι $f(n) \in o(g(n))$ ή, ισοδύναμα, ότι $f(n) < g(n)$.

Ο συμβολισμός αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει την ασυμπτωτική ισοδυναμία, δηλαδή ισχύει ότι

$$f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow f(n) = g(n) + o(g(n)),$$

αφού $f(n) = g(n) + (f(n) - g(n))$ και άρα

$$f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) - g(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow f(n) - g(n) = o(g(n)).$$

Παρατήρηση: Οι ορισμοί της ασυμπτωτικής ισοδυναμίας και της ιεραρχίας που δόθηκαν για ακολουθίες (άρα, ισοδύναμα, και για συναρτήσεις που η μεταβλητή τους τείνει στο $+\infty$, ή στο $-\infty$) μπορεί να επεκταθεί και για συναρτήσεις που η μεταβλητή τους τείνει σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Συγκεκριμένα,

$$f(x) \sim g(x), (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

και

$$f(x) = o(g(x)), (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.5. Να δειχθεί ότι $e^x - 1 \sim \frac{1}{2} \sin 2x$, ($x \rightarrow 0$).

Λύση. Πράγματι,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1)}{\sin 2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin 2x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos 2x} = 1.$$

□

Παράδειγμα 6.6. Ναδειχθεί ότι $(2-x)^{\frac{1}{1-x}} \sim e^2 x^{\frac{1}{1-x}}$, $(x \rightarrow 1^-)$.

Λύση. Πράγματι, αν τεθεί $t = \frac{1}{1-x}$ προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{e^2} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} \right)^t = \frac{1}{e^2} \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t}{\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e^2} \frac{e}{e^{-1}} = 1. \quad \square$$

6.1.4 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 6.1. Ναδειχθεί ότι $\ln(a^n + b^n) \sim n \ln a$ όπου $a > b \geq 1$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \ln(a^n + b^n) &= \ln \left(a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n \right) \right) \\ &= \ln a^n + \ln \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n \right) \\ &= n \ln a + \ln \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n \right) \\ &\stackrel{1}{\sim} n \ln a \end{aligned} \quad \square$$

Άσκηση 6.2. Ναδειχθεί ότι $\sqrt{1 + n^3 \ln(1 + 2^n)} \sim n^2 \sqrt{\ln 2}$.

Λύση. Αν τεθεί $a_n = 1 + n^3 \ln(1 + 2^n)$, τότε από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι $a_n \sim n^4 \ln 2$. Επομένως, $\sqrt{a_n} \sim n^2 \sqrt{\ln 2}$. □

Άσκηση 6.3. Ναδειχθεί ότι $\binom{3n}{2n} \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n$.

Λύση. Από τον τύπο του Stirling ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \binom{3n}{2n} &= \frac{(3n)!}{(2n)!n!} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi 3n}}{\sqrt{2\pi 2n} \sqrt{2\pi n}} \frac{\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \frac{(3n)^{3n}}{(2n)^{2n} n^n} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \left(\frac{27n^3}{4n^2 \cdot n}\right)^n \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n. \end{aligned} \quad \square$$

¹Επειδή $\frac{b}{a} < 1$ ισχύει ότι $\left(\frac{b}{a}\right)^n \rightarrow 0$

Άσκηση 6.4. Ναδειχθεί ότι $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{2}. \quad \square$$

Άσκηση 6.5. Ναδειχθεί ότι $\sqrt[n]{n^{3n} + n^{3n-1}} - n^3 \sim n$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n^{3n} + n^{3n-1}} - n^3 &= \sqrt[n]{n^{3n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - n^3 \\ &= n^3 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} - n^3 \\ &= n^3 \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{n^2}} - n^3 \\ &\sim n^3 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) \\ &= n \cdot \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{\frac{1}{n^2}} \\ &\stackrel{2}{\sim} n \cdot 1 = n. \quad \square \end{aligned}$$

Άσκηση 6.6. Ναδειχθεί ότι $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Λύση. Έστω $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ και $A_n = \ln n$. Η ακολουθία (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1.$$

Ισχύει ότι

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = -\frac{\frac{n}{n+1} - 1}{\ln \frac{n+1}{n}} = \frac{\frac{n}{n+1} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}}.$$

Επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1.$$

²Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα Stolz θα είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = 1,$$

επομένως

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n. \quad \square$$

Άσκηση 6.7. Να βρεθεί μια ασυμπτωτική εκτίμηση του αθροίσματος

$$\sum_{k=0}^n \binom{3k}{2k}.$$

Λύση. Έστω $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{3k}{2k}$.

Ισχύει ότι

$$a_{n+1} - a_n = \binom{3(n+1)}{2(n+1)}.$$

Επειδή, όπως είδαμε σε προηγούμενη λυμένη άσκηση, ισχύει ότι

$$\binom{3n}{2n} \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n,$$

επομένως

$$a_{n+1} - a_n \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1},$$

οπότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}} = 1.$$

Θέτουμε $A_n = \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}$. Η ακολουθία (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη.

Επίσης, ισχύει ότι

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{A_n} \cdot \frac{A_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{A_n} \cdot \frac{1}{\frac{A_{n+1}}{A_n} - 1}.$$

Επειδή

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4\pi(n+2)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+2}}{\sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \cdot \frac{27}{4}$$

έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{27}{4}.$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{A_{n+1}}{A_n} - 1} = 1 \cdot \frac{1}{\frac{27}{4} - 1} = \frac{4}{23}.$$

Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα Stolz θα είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{4}{23},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\sum_{k=0}^n \binom{3k}{2k} \sim \frac{4}{23} \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}} \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}. \quad \square$$

Άσκηση 6.8. Να βρεθεί μια ασυμπτωτική εκτίμηση του αθροίσματος

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{k}$$

Λύση. Έστω $a_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{k}$.

Ισχύει ότι

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1}.$$

Θέτουμε $A_n = \sqrt{n+1}$. Η ακολουθία (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + 1}{\frac{n+2}{n+1} - 1} \\ &= (n+1) \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + 1 \right), \end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + 1 = 2.$$

Επομένως, η ακολουθία $A_n = \sqrt{n+1}$ δεν είναι κατάλληλη για την εφαρμογή του λήμματος Stolz. Το παραπάνω όριο υποδεικνύει μια διόρθωση επί ένα παράγοντα $an + b$. Επιλέγουμε το $n+1$ ώστε να γίνουν ομαδοποιήσεις στους τύπους.

Θεωρούμε την ακολουθία $A_n = (n+1)\sqrt{n+1}$. Η (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} &= \frac{\sqrt{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+2} - (n+1)\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+2)\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - (n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right)} = \frac{\frac{n+2}{n+1}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + 1}{(n+1)\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3 - 1\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3/2} + 1}{\frac{(n+2)^3 - (n+1)^3}{(n+1)^2}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3/2} + 1}{\frac{(n+2)^2 + (n+2)(n+1) + (n+1)^2}{(n+1)^2}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3/2} + 1}{\frac{3n^2 + 9n + 7}{n^2 + 2n + 1}}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3/2} + 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 9n + 7}{n^2 + 2n + 1}} = \frac{2}{3}$$

Άρα, σύμφωνα με του Λήμμα Stolz θα είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{2}{3}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}. \quad \square$$

Άσκηση 6.9. Να βρεθεί μια ασυμπτωτική εκτίμηση του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^n \binom{2k-1}{k-1}.$$

Λύση. Έστω $a_n = \sum_{k=1}^n \binom{2k-1}{k-1}$. Ισχύει ότι

$$a_{n+1} - a_n = \binom{2n+1}{n} \sim \frac{4^n}{2^{-1}\sqrt{\pi n}}.$$

οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} - a_n}{\frac{4^n}{2^{-1}\sqrt{\pi n}}} = 1.$$

Θέτουμε $A_n = \frac{4^n}{2^{-1}\sqrt{\pi n}}$. Η ακολουθία (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη. Επειδή

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{2^{-1}\sqrt{\pi(n+1)}}}{\frac{4^n}{2^{-1}\sqrt{\pi n}}} = 4\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 4.$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1} - A_n} = 1 \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} - 1} = \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}.$$

Άρα, από το Λήμμα Stolz προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{1}{3},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^n \binom{2k-1}{k-1} \sim \frac{2}{3\sqrt{\pi n}} \cdot 4^n. \quad \square$$

6.1.5 Ασκήσεις προς επίλυση

1) Ναδειχθεί ότι $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn^k} \sim e^{abn^{k-1}}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $k > 1$.

2) Ναδειχθεί ότι $\sqrt{1 + n^2} \sqrt{1 + 9n^8} \sim n^3 \sqrt{3}$.

3) Ναδειχθεί ότι $\binom{7n}{5n} \sim \sqrt{\frac{7}{20\pi n}} \left(\frac{7^7}{5^5 \cdot 2^2}\right)^n$.

4) Ναδειχθεί ότι $\sqrt{n+10} - \sqrt{n+8} \sim n^{-\frac{1}{2}}$.

5) Ναβρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(n) \sim an^b$, όταν $f(n) = \sqrt{4n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}$.

6) Ναδειχθεί ότι $\binom{n+k}{n} \sim \frac{n^k}{k!}$, για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$.

Γενικά, ισχύει ότι $\binom{n+a}{n} \sim \frac{n^a}{\Gamma(a+1)}$, όπου a δεν είναι αρνητικός ακέραιος και $n \in \mathbb{N}$.

7) Ναδειχθεί ότι $\binom{(a+b)n}{an} \sim \frac{(a+b)^{n(a+b)+1/2}}{a^{an+1/2} b^{bn+1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, για κάθε $a, b \in \mathbb{N}^*$.

8) Ναβρεθούν οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις των πιθικών:

i) $\frac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{2k+3}{k}}{C_n}$.

ii) $\frac{\sum_{k=0}^n 4^{n-k} \binom{2k+1}{k+1}}{C_n}$.

9) Ναδειχθεί ότι

i) $\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \sim \frac{4^{n+1}}{3\sqrt{\pi n}}$.

ii) $\sum_{k=0}^n C_k \sim \frac{1}{3} C_{n+1}$.

10) i) Ναβρεθεί μια ασυμπτωτική εκτίμηση για το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n-1} k \ln k$.

ii) Ναβρεθεί μια ασυμπτωτική εκτίμηση για το γινόμενο $1^1 2^2 3^3 \cdots n^n$.

11) Να δειχθεί ότι $\sum_{k=0}^n k^{n+a} e^{-k} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}} n^a \left(\frac{n}{e}\right)^n$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

12) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $r > 0$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^r \sim \frac{2^{rn}}{\sqrt{r}} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{(r-1)/2}$$

13) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{2^k-1} \sim n 2^{2^n-1}.$$

14) Να αποδειχθεί ότι

i) $a^n = o(n!)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

ii) $\log n = o(n^\epsilon)$, όπου $\epsilon > 0$.

6.2 Σύγκριση ακολουθιών με τη βοήθεια φραγμάτων

Η ασυμπτωτική ισοδυναμία που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση των ακολουθιών δεν είναι πάντα αρκετή.

Αν υποτεθεί ότι $f(n) \sim g(n)$ τότε η ακολουθία $\frac{f(n)-g(n)}{g(n)}$ είναι μηδενική αλλά δεν γνωρίζουμε πόσο γρήγορα τείνει στο 0.

Για το σκοπό αυτό υπάρχει ένας πιο λεπτομερής τρόπος για την εκτίμηση μιας ακολουθίας $f(n)$ μέσω μιας άλλης ακολουθίας $g(n)$, εξετάζοντας τα φράγματα της διαφοράς τους.

Για παράδειγμα, πολλοί αλγόριθμοι ταξινόμησης έχουν χρόνο εκτέλεσης της μορφής

$$f(n) = An \lg n + Bn + C(n),$$

όπου $A, B \in \mathbb{R}$ και $\left(\frac{C(n)}{\lg n}\right)$ είναι μια φραγμένη ακολουθία.

Προφανώς, για πολύ μεγάλες τιμές της μεταβλητής n η παράμετρος A είναι αρκετή για να καθορίσει τον ταχύτερο αλγόριθμο και επομένως η ασυμπτωτική ισοδυναμία $g(n) = An \lg n$ της $f(n)$ είναι μια καλή προσέγγιση.

Τούτο όμως δεν είναι αρκετό για μικρότερες τιμές της μεταβλητής n που συναντάμε στις εφαρμογές, όπου πρέπει να ληφθεί υπόψη και η παράμετρος B .

Κατόπιν τούτων θα οριστεί μια πιο λεπτομερής προσέγγιση των ακολουθιών με τη βοήθεια του συμβολισμού O (διαβάζεται “κεφαλαίο όμικρον”).

6.2.1 Οι συμβολισμοί O , Ω και Θ

Για μια ακολουθία $(g(n))$ ορίζουμε το σύνολο

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{Υπάρχουν } c > 0 \text{ και } n_0 \in \mathbb{N}^* : |f(n)| \leq c |g(n)|, \text{ για κάθε } n \geq n_0\}.$$

Προφανώς, $O(1)$ είναι το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων. Παρακάτω, θα γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ εννοώντας ότι $f(n) \in O(g(n))$, δηλαδή

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \text{Υπάρχουν } c > 0 \text{ και } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ με } |f(n)| \leq c |g(n)|, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Προφανώς, αν $f(n) = o(g(n))$ τότε και $f(n) = O(g(n))$.

Επιπλέον, ορίζονται τα σύνολα $\Omega(g(n))$ και $\Theta(g(n))$ όπου

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{Υπάρχουν } c > 0 \text{ και } n_0 \in \mathbb{N}^* : |f(n)| \geq c |g(n)|, \text{ για κάθε } n \geq n_0\}$$

και

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n)).$$

Παρακάτω θα γράφουμε $f(n) = \Omega(g(n))$ (αντ. $f(n) = \Theta(g(n))$) εννοώντας ότι $f(n) \in \Omega(g(n))$ (αντ. $f(n) \in \Theta(g(n))$). Δηλαδή,

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \text{Υπάρχουν } c > 0 \text{ και } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ με } |f(n)| \geq c |g(n)|, \text{ για κάθε } n \geq n_0,$$

και

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Υπάρχουν } c_1, c_2 > 0 \text{ και } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ με} \\ c_1 |g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2 |g(n)|, \text{ για κάθε } n \geq n_0. \end{cases}$$

Προφανώς, ισχύει ότι

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$$

και

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \text{ και } g(n) = O(f(n)).$$

Στην επόμενη παράγραφο δίδεται η σχέση εγκλεισμού των συνόλων $O(g(n))$ για ορισμένες ακολουθίες $(g(n))$ που εμφανίζονται συχνά στην ανάλυση της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων.

³Με $\lg n$ συμβολίζεται ο δυαδικός αλγόριθμος, ο οποίος χρησιμοποιείται σε υπολογιστικές μεθόδους.

Σχέσεις των $O(g(n))$ σημαντικών ακολουθιών

Για κάθε $0 < a \leq 1$, $k > 0$, $b \geq 2$ και $c > 1$ ισχύει⁴ ότι

$$O(1) \subset O(\log \log n) \subset O((\log n)^k) \subset O(n^a) \subset O(n \log n) \subset O(n^b) \subset O(c^n) \subset O(n!) \subset O(n^n).$$

Ιδιότητες

- 1) $g(n) = O(g(n))$.
- 2) $O(g(n)) = O(|g(n)|)$.
- 3) $O(g(n)) = O(\lambda g(n))$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- 4) Αν $f(n) = O(g(n))$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda f(n) = O(g(n))$.
- 5) Αν $f_1(n) = O(g_1(n))$ και $f_2(n) = O(g_2(n))$, τότε $f_1(n) + f_2(n) = O(|g_1(n)| + |g_2(n)|)$.
Ειδικά, αν $f_1(n) = O(g(n))$ και $f_2(n) = O(g(n))$ τότε $f_1(n) + f_2(n) = O(g(n))$.
- 6) Αν $f_1(n) = O(g_1(n))$ και $f_2(n) = O(g_2(n))$ τότε $f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n)g_2(n))$.
- 7) Αν $f(n) = O(g(n))$ και $g(n) = O(h(n))$ τότε $f(n) = O(h(n))$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.7. Να αποδειχθεί ότι $f(n) = O(g(n))$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) $f(n) = 3(\log n)^2 + 4n + 5n \log n$, $g(n) = n \log n$.
- ii) $f(n) = (2n^2 + 3n + 7)(3 \log n + 2)$, $g(n) = n^2 \log n$.
- iii) $f(n) = \sum_{i=1}^n i$, $g(n) = n^2$.
- iv) $f(n) = 3^n \log n + 2n! + n^{100}$, $g(n) = n!$.
- v) $f(n) = (3 \cdot 2^n + n \log n)(2n^2 + n \log n)$, $g(n) = n^2 2^n$.

Λύση.

- i) Επιλέγουμε τον κυρίαρχο όρο του αθροίσματος της $f(n)$. Εδώ είναι ο $n \log n$. Οπότε, χρησιμοποιώντας την τρίτη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(\log n)^2 &= O(n \log n) \Rightarrow 3(\log n)^2 = O(n \log n) \\ n &= O(n \log n) \Rightarrow 4n = O(n \log n) \\ n \log n &= O(n \log n) \Rightarrow 5n \log n = O(n \log n).\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, από την πέμπτη ιδιότητα προκύπτει ότι $f(n) = O(n \log n)$.

- ii) Από την τρίτη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}n^2 &= O(n^2) \Rightarrow 2n^2 = O(n^2) \\ n &= O(n^2) \Rightarrow 3n = O(n^2),\end{aligned}$$

⁴Για την απόδειξη χρησιμοποιείται συνήθως ο κανόνας του l' Hospital, ή το κριτήριο της μηδενικής ακολουθίας.

οπότε, από την πέμπτη ιδιότητα, θα είναι $2n^2 + 3n + 7 = O(n^2)$.

Ομοίως προκύπτει ότι $3 \log n + 2 = O(\log n)$.

Κατόπιν τούτων, από την έκτη ιδιότητα, προκύπτει ότι $f(n) = O(n^2 \log n)$.

- iii) Θα χρησιμοποιηθεί η γνωστή ταυτότητα $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Επειδή $n^2 = O(n^2)$ και $n = O(n^2)$, από την τρίτη ιδιότητα προκύπτει ότι $\frac{1}{2}n^2 = O(n^2)$ και $\frac{1}{2}n = O(n^2)$. Οπότε, από την πέμπτη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$f(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = O(n^2).$$

- iv) Επειδή $3^n = O(3^n)$ και $\log n = O(2^n)$, από την έκτη ιδιότητα προκύπτει ότι $3^n \log n = O(6^n)$. Αλλά, $6^n = O(n!)$, οπότε, από την έβδομη ιδιότητα προκύπτει ότι $3^n \log n = O(n!)$. Επιπλέον, επειδή $2n! = O(n!)$ και $n^{100} = O(n!)$, από την πέμπτη ιδιότητα προκύπτει ότι $f(n) = O(n!)$.

- v) Επειδή $3 \cdot 2^n = O(2^n)$, $n \log n = O(2^n)$ και $2n^2 = O(n^2)$, $n \log n = O(n^2)$, χρησιμοποιώντας δύο φορές την πέμπτη ιδιότητα, προκύπτει ότι

$$3 \cdot 2^n + n \log n = O(2^n) \text{ και } 2n^2 + n \log n = O(n^2),$$

και κατόπιν τούτων, από την έκτη ιδιότητα, θα ισχύει ότι $f(n) = O(n^2 2^n)$. □

Παράδειγμα 6.8.

- i) Αν $p(n)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού k να δειχθεί ότι $p(n) = O(n^k)$.
- ii) Να δειχθεί ότι $(n+1)^k = O(n^k)$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.
- iii) Να δειχθεί ότι $\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} + O(n^{k-1})$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη.

- i) Έστω $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$.

Επειδή για $i \leq k$ ισχύει ότι $n^i = O(n^k)$, από την τρίτη ιδιότητα προκύπτει ότι $a_i n^i = O(n^k)$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, k$. Επομένως, από την πέμπτη ιδιότητα, θα είναι $p(n) = O(n^k)$.

- ii) Επειδή $(n+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i$, η ακολουθία $f(n) = (n+1)^k$ είναι ένα πολυώνυμο του n βαθμού k οπότε από το i) προκύπτει ότι $(n+1)^k = O(n^k)$.

- iii) Επειδή $\binom{n}{k} - \frac{n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} - \frac{n^k}{k!}$, έπεται ότι η ακολουθία $f(n) = \binom{n}{k} - \frac{n^k}{k!}$ είναι ένα πολυώνυμο του n βαθμού $(k-1)$ οπότε από το i) προκύπτει ότι $\binom{n}{k} - \frac{n^k}{k!} = O(n^{k-1})$ και επομένως,

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} + O(n^{k-1}). \quad \square$$

Παράδειγμα 6.9. Αν $f(n) = n \lg n + O(n)$ να αποδειχθεί ότι $f(n) = \Theta(n \log n)$.

Απόδειξη. Επειδή $f(n) - n \lg n = O(n)$, θα υπάρχουν $c > 0$ και $n_1 \in \mathbb{N}^*$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$-cn \leq f(n) - n \lg n \leq cn$$

ή, ισοδύναμα

$$(-c + \lg n)n \leq f(n) \leq (c + \lg n)n \quad (1)$$

ή, ισοδύναμα

$$\frac{-c + \lg n}{\log n} n \log n \leq f(n) \leq \frac{c + \lg n}{\log n} n \log n.$$

Επειδή⁵ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-c + \lg n}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c + \lg n}{\log n} = \frac{\ln 10}{\ln 2}$ προκύπτει ότι⁶ υπάρχουν $n_2, n_3 \in \mathbb{N}^*$ με

$$\frac{1}{2} \frac{\ln 10}{\ln 2} \leq \frac{-c + \lg n}{\log n} \text{ για κάθε } n \geq n_2. \quad (2)$$

και

$$\frac{c + \lg n}{\log n} \leq \frac{3}{2} \frac{\ln 10}{\ln 2} \text{ για κάθε } n \geq n_3. \quad (3)$$

Κατόπιν τούτων, αν τεθεί $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \frac{\ln 10}{\ln 2} n \log n \leq f(n) \leq \frac{3}{2} \frac{\ln 10}{\ln 2} n \log n$$

για κάθε $n \geq n_0$, και επομένως $f(n) = \Theta(n \log n)$. □

Άσκηση 6.10. Να αποδειχθούν οι ασυμπτωτικές ιδιότητες:

$$i) \binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} \left(1 + \frac{k-k^2}{2n} + O(n^{-2}) \right),$$

$$ii) \binom{n+k}{n} = \frac{n^k}{k!} \left(1 + \frac{k+k^2}{2n} + O(n^{-2}) \right),$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση: Ο προηγούμενος τύπος γενικεύεται, και ισχύει ότι

$$\binom{n+a}{n} = \frac{n^a}{\Gamma(a+1)} \left(1 + \frac{a+a^2}{2} + O(n^{-2}) \right), \text{ όπου } a \text{ δεν είναι αρνητικός ακέραιος.}$$

6.2.2 Γενίκευση των συμβολισμών O , Ω και Θ

Οι συμβολισμοί O , Ω και Θ μπορούν να ορισθούν ανάλογα και για συναρτήσεις που ορίζονται γύρω από ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Συγκεκριμένα, αν x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος A και f, g δύο συναρτήσεις που ορίζονται στο A , τότε

$$f(x) = O(g(x)), (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Υπάρχει } c > 0 \text{ και περιοχή } \pi \text{ του } x_0 \text{ με} \\ |f(x)| \leq c |g(x)|, \text{ για κάθε } x \in \pi. \end{cases}$$

⁵Άμεση συνέπεια του κανόνα l' Hospital.

⁶Βλέπε λυμένη άσκηση 10, σελ. 169, του βιβλίου Ανάλυση και Εφαρμογές, τόμος 1.

$$f(x) = \Omega(g(x)), (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Υπάρχει } c > 0 \text{ και περιοχή } \pi \text{ του } x_0 \text{ με} \\ |f(x)| \geq c |g(x)|, \text{ για κάθε } x \in \pi. \end{cases}$$

$$f(x) = \Theta(g(x)), (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Υπάρχουν } c_1, c_2 > 0 \text{ και περιοχή } \pi \text{ του } x_0 \text{ με} \\ c_1 |g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2 |g(x)|, \text{ για κάθε } x \in \pi. \end{cases}$$

6.2.3 Δυναμοσειρές

Αν $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ είναι μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $\rho > 0$, τότε, όπως γνωρίζουμε, η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (-\rho, \rho)$. Έτσι, αν $r \in (0, \rho)$, για κάθε $x \in [-r, r]$ ισχύει ότι

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |x|^k \leq c, \text{ όπου } c = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k.$$

Άρα,

$$f(x) = O(1), (x \rightarrow 0).$$

Γενικότερα,

Πρόταση 6.2.1. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i + O(x^{m+1}), (x \rightarrow 0).$$

Απόδειξη. Πράγματι, για $x \in [-r, r]$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{i=0}^m a_i x^i \right| &= \left| \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i x^{i-m-1} \right| |x|^{m+1} \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| |x|^{i-m-1} |x|^{m+1} \\ &\leq c |x|^{m+1}, \text{ όπου } c = \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| r^{i-m+1}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$f(x) - \sum_{i=0}^m a_i x^i = O(x^{m+1}), (x \rightarrow 0)$$

και, τελικά,

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i + O(x^{m+1}), (x \rightarrow 0). \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές βασικές σειρές Maclaurin⁷, προκύπτουν οι επόμενοι τύποι:

$$1) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m + O(x^{m+1}), (x \rightarrow 0).$$

$$2) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + O(x^{m+1}), (x \rightarrow 0).$$

⁷Βλέπε Ανάλυση και Εφαρμογές, Τόμος 1, σελ. 434.

$$3) \quad \text{i) } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + O(x^{2m+2}), \quad (x \rightarrow 0).$$

$$\text{ii) } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + O(x^{2m+3}), \quad (x \rightarrow 0).$$

$$4) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} + O(x^{m+1}), \quad (x \rightarrow 0).$$

$$5) \quad (1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2} x^2 + \dots + \binom{a}{m} x^m + O(x^{m+1}), \quad (x \rightarrow 0).$$

Παρατήρηση: Οι παραπάνω τύποι μπορούν να αξιοποιηθούν για τη προσέγγιση ακολουθιών ($f(n)$) της μορφής

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{n^k}.$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 6.2. Να αποδειχθεί ότι $\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln n}{n} + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt[n]{n} = e^{\ln \sqrt[n]{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$$

Άρα, εφαρμόζοντας τον δεύτερο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών για $x = \frac{\ln n}{n}$ και $m = 1$ προκύπτει ότι

$$e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right) \quad \square$$

Εφαρμογή 6.3. Να αποδειχθεί ότι

$$\ln(n + \sqrt{n}) = \ln n + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\ln(n + \sqrt{n}) = \ln\left(n\left(1 + n^{-\frac{1}{2}}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 + n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Άρα, εφαρμόζοντας τον τέταρτο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών για $x = n^{-\frac{1}{2}}$ και $m = 2$, προκύπτει ότι

$$\ln\left(1 + n^{-\frac{1}{2}}\right) = n^{-\frac{1}{2}} - \frac{\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{2} + O\left(\left(n^{-1/2}\right)^3\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(n^{-3/2}\right)$$

οπότε, τελικά,

$$\ln(n + \sqrt{n}) = \ln n + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad \square$$

Εφαρμογή 6.4. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

$$i) \frac{1}{\cos \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad ii) \operatorname{tg} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Λύση.

i) Εφαρμόζοντας τον τρίτο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών για $x = n^{-1}$ και $m = 1$, προκύπτει ότι

$$\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον πρώτο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών για $x = \frac{1}{2n^2} - f(n)$, όπου $f(n) = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ και $m = 1$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2n^2} - f(n)\right)} = 1 + \frac{1}{2n^2} - f(n) + O\left(\left(\frac{1}{2n^2} - f(n)\right)^2\right).$$

Αλλά, αφού $\frac{1}{2n^2} - f(n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, έπεται ότι $\left(\frac{1}{2n^2} - f(n)\right)^2 = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, οπότε τελικά $O\left(\left(\frac{1}{2n^2} - f(n)\right)^2\right) = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ και επομένως,

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

ii) Χρησιμοποιώντας τον τρίτο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών για $x = \frac{1}{n}$ και $m = 1$ και το i) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{n} &= \frac{\sin \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right). \end{aligned} \quad \square$$

Εφαρμογή 6.5. Να αποδειχθεί η ισότητα

$$\frac{a}{bn^k - c} = \frac{a}{b} \cdot n^{-k} + O(n^{-2k}),$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $b \neq 0$.

Λύση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποτίθεται ότι $a \neq 0$. Επειδή

$$\frac{a}{bn^k - c} = \frac{a}{b} \cdot n^{-k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{b}n^{-k}},$$

χρησιμοποιώντας τον πρώτο από τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών για $x = \frac{c}{b}n^{-k}$ και $m = 0$, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{b}n^{-k}} = 1 + O\left(\frac{c}{b}n^{-k}\right) = 1 + O(n^{-k}),$$

οπότε

$$\frac{a}{bn^k - c} = \frac{a}{b}n^{-k} + \frac{a}{b}n^{-k}O(n^{-k}) = \frac{a}{b}n^{-k} + O(n^{-2k}). \quad \square$$

Εφαρμογή 6.6. Αν $f(n) = O(n^{-1})$, να αποδειχθεί ότι

$$(1 + f(n))^k = 1 + O(n^{-1}), \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}^*.$$

Λύση. Αρχικά, θα αποδειχθεί επαγωγικά για κάθε $k \geq 1$.

Προφανώς για $k = 1$ ισχύει.

Για $k = 2$ είναι $(1 + f(n))^2 = 1 + 2f(n) + f^2(n)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του συμβολισμού O , προκύπτει ότι

$$2f(n) = O(n^{-1}) \text{ και } f^2(n) = O(n^{-1} \cdot n^{-1}) = O(n^{-2}).$$

Κατόπιν τούτων, και επειδή $O(n^{-2}) \subset O(n^{-1})$, προκύπτει ότι

$$2f(n) + f^2(n) = O(n^{-1})$$

και επομένως,

$$(1 + f(n))^2 = 1 + O(n^{-1}).$$

Στη συνέχεια, υποθέτοντας ότι

$$(1 + f(n))^{k-1} = 1 + O(n^{-1})$$

για $k \geq 2$, θα αποδειχθεί ότι

$$(1 + f(n))^{k+1} = 1 + O(n^{-1}).$$

Επειδή, όπως έχει ήδη δειχθεί, $(1 + f(n))^2 = 1 + g(n)$, όπου $g(n) \in O(n^{-1})$ και λόγω της υπόθεσης της επαγωγής $(1 + f(n))^{k-1} = 1 + h(n)$, όπου $h(n) \in O(n^{-1})$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (1 + f(n))^{k+1} &= (1 + f(n))^2(1 + f(n))^{k-1} \\ &= (1 + g(n))(1 + h(n)) \\ &= 1 + g(n) + h(n) + g(n)h(n) \\ &= 1 + O(n^{-1} + n^{-1} + n^{-2}) \\ &= 1 + O(n^{-1}) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θα αποδειχθεί η ζητούμενη ισότητα για $k = -1$.

Πράγματι, αν εφαρμοσθεί ο πρώτος προσεγγιστικός τύπος των δυναμοσειρών για $x = -f(n)$ και $m = 0$, προκύπτει ότι

$$(1 + f(n))^{-1} = \frac{1}{1 + f(n)} = 1 + O(f(n)) = 1 + O(n^{-1}).$$

Η απόδειξη του ζητούμενου τύπου για $k = -\nu$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ προκύπτει εύκολα με επαγωγή ως προς ν και αφήνεται ως άσκηση. \square

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

Εφαρμογή 6.7. Αν $f(n) = O(n^{-2})$ τότε

$$(1 + \frac{a}{n} + f(n))^k = 1 + \frac{ka}{n} + O(n^{-2}), \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R} \text{ και } k \in \mathbb{Z}^*.$$

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Εφαρμογή 6.8. Να αποδειχθεί ότι

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} = e^a \left(1 + \frac{2ab - a^2}{2n} + O(n^{-2})\right)$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση. Επειδή

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} = e^{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b}} = e^{(n+b)\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)},$$

εφαρμόζουμε διαδοχικά τον τέταρτο και τον δεύτερο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών.

Πράγματι,

$$\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O(n^{-3}),$$

οπότε

$$(n+b)\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = (n+b)\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O(n^{-3})\right) = a + \frac{2ab - a^2}{2n} + O(n^{-2})$$

και

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} &= e^a e^{\frac{2ab - a^2}{2n} + O(n^{-2})} \\ &= e^a \left(1 + \frac{2ab - a^2}{2n} + O(n^{-2}) + O\left(\left(\frac{2ab - a^2}{2n} + O(n^{-2})\right)^2\right)\right). \end{aligned}$$

Αλλά, αφού $\frac{2ab - a^2}{2n} + O(n^{-2}) = O(n^{-1})$, έπεται ότι $\left(\frac{2ab - a^2}{2n} + O(n^{-2})\right)^2 = O(n^{-2})$, απ' όπου τελικά προκύπτει εύκολα η ζητούμενη σχέση. \square

6.2.4 Ασκήσεις προς επίλυση

1) Να δειχθεί ότι $n(\sqrt[n]{n} - 1) = \ln n + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)$.

(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η Εφαρμογή 6.2.)

2) Να δειχθεί ότι $n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a + \frac{(\ln a)^2}{2n} + O(n^{-2})$, για κάθε $a > 0$.

3) Να δειχθεί ότι

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} + O(n^{-2})$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

6.2.5 Ασυμπτωτικά σφάλματα

Μια ασυμπτωτική προσέγγιση της μορφής $f(n) + O(g(n))$ (αντίστοιχα $f(n)(1 + O(g(n)))$) λέγεται ότι έχει **απόλυτο** (αντίστοιχα **σχετικό**) **σφάλμα** $O(g(n))$.

Παράδειγμα 6.10. Να υπολογισθεί η παράσταση $A_n = (n + 2 + O(n^{-1}))^n$ με σχετικό σφάλμα $O(n^{-1})$.

Λύση. Η δοσμένη παράσταση γράφεται

$$\begin{aligned} A_n &= n^n \left(1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}) \right)^n = n^n e^{\ln(1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}))^n} \\ &= n^n e^{n \ln(1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}))}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον τέταρτο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών για $x = \frac{2}{n} + O(n^{-2})$ και $m = 1$, προκύπτει ότι

$$\ln \left(1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}) \right) = \frac{2}{n} + O(n^{-2}) + O \left(\left(\frac{2}{n} + O(n^{-2}) \right)^2 \right).$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{n} + O(n^{-2}) \right)^2 &= \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n} O(n^{-2}) + (O(n^{-2}))^2 \\ &= \frac{4}{n^2} + O(n^{-3}) + O(n^{-4}) = O(n^{-2}), \end{aligned}$$

οπότε

$$O(n^{-2}) + O \left(\left(\frac{2}{n} + O(n^{-2}) \right)^2 \right) = O(n^{-2}) + O(n^{-2}) = O(n^{-2})$$

και επομένως,

$$n \ln \left(1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}) \right) = 2 + O(n^{-1}).$$

Κατόπιν τούτων, χρησιμοποιώντας τον δεύτερο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών για $x = O(n^{-1})$ και $m = 1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A_n &= n^n e^{2 + O(n^{-1})} \\ &= n^n e^2 e^{O(n^{-1})} \\ &= n^n e^2 (1 + O(n^{-1}) + O((O(n^{-1}))^2)) \\ &= n^2 e^2 (1 + O(n^{-1})). \end{aligned} \quad \square$$

6.2.6 Ασυμπτωτική προσέγγιση του $n!$

Ο τύπος του Stirling που δόθηκε με τη βοήθεια της σχέσης ασυμπτωτικής ισοδυναμίας, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n (1 + f(n))$$

όπου $(f(n))$ είναι μια μηδενική ακολουθία.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό O μπορεί να δοθεί μια πιο ακριβής έκφραση του τύπου, προσδιορίζοντας τη μορφή της ακολουθίας $(f(n))$.

Παράδειγμα 6.11. Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + O(n^{-3}) \right), \quad (1)$$

να δειχθεί ότι $a = \frac{1}{12}$.

Λύση. Αν τεθεί $n - 1$ αντί n στον τύπο (1) προκύπτει ότι

$$(n-1)! = \sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{a}{n-1} + \frac{b}{(n-1)^2} + O((n-1)^{-3})\right). \quad (2)$$

Παρακάτω, θα εκφρασθεί κάθε όρος της σχέσης (2) με τη βοήθεια των αντίστοιχων όρων της σχέσης (1).

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi(n-1)} &= \sqrt{2\pi n} \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \sqrt{2\pi n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{8}{=} \sqrt{2\pi n} \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + O(n^{-3})\right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{n-1} &= \frac{a}{n} \frac{n}{n-1} = \frac{a}{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \stackrel{9}{=} \frac{a}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{a}{n} + \frac{a}{n^2} + O(n^{-3}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{(n-1)^2} &= \frac{b}{n^2} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 = \frac{b}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2} \stackrel{10}{=} \frac{b}{n^2} (1 + O(n^{-1})) \\ &= \frac{b}{n^2} + O(n^{-3}), \end{aligned} \quad (5)$$

και

$$O((n-1)^{-3}) = O\left(n^{-3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3}\right) \stackrel{11}{=} O(n^{-3}). \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (4), (5), (6) προκύπτει ότι

$$1 + \frac{a}{n-1} + \frac{b}{(n-1)^2} + O((n-1)^{-3}) = 1 + \frac{a}{n} + \frac{a+b}{n^2} + O(n^{-3}). \quad (7)$$

Στη συνέχεια

$$\begin{aligned} (n-1)^{n-1} &= n^{n-1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = n^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \\ &\stackrel{12}{=} n^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O(n^{-2})\right). \end{aligned} \quad (8)$$

⁸Βλέπε τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών.

⁹Βλέπε τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών.

¹⁰Βλέπε τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών.

¹¹Αφού $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3} = O(1)$.

¹²Βλέπε τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών.

Ο υπολογισμός του όρου $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ ακολουθεί τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην εφαρμογή 6.8 (μετά τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών), δηλαδή πρώτα υπολογίζουμε τον όρο $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ και στη συνέχεια χρησιμοποιείται η προσέγγιση μέσω της εκθετικής συνάρτησης.

Πράγματι,

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \stackrel{13}{=} n \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O(n^{-4})\right) = -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + O(n^{-3}),$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= e^{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-1} e^{-\frac{1}{2n}} e^{-\frac{1}{3n^2}} e^{O(n^{-3})} \\ &\stackrel{14}{=} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + O(n^{-3})\right) \left(1 - \frac{1}{3n^2} + O(n^{-4})\right) (1 + O(n^{-3})), \end{aligned}$$

οπότε

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{15}{=} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{5}{24n^2} + O(n^{-3})\right). \quad (9)$$

Άρα, από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (n-1)^{n-1} &= n^{n-1} e^{-1} \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{5}{24n^2} + O(n^{-3})\right) \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O(n^{-3})\right) \\ &= n^{n-1} e^{-1} \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{7}{24n^2} + O(n^{-3})\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Τέλος, από τις σχέσεις (2), (3), (7) και (10) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! \\ &= n \sqrt{2\pi n} \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + O(n^{-3})\right) \frac{n^{n-1} e^{-1}}{e^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{7}{24n^2} + O(n^{-3})\right) \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{a+b}{n^2} + O(n^{-3})\right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 - \frac{1}{12n^2} + O(n^{-3})\right) \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{a+b}{n^2} + O(n^{-3})\right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{a}{n} + \left(a+b - \frac{1}{12}\right) \frac{1}{n^2} + O(n^{-3})\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Από τις σχέσεις (1) και (11) προκύπτει ότι $a + b - \frac{1}{12} = b$, οπότε $a = \frac{1}{12}$. □

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right).$$

¹³Χρησιμοποιώντας τον τέταρτο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών.

¹⁴Χρησιμοποιώντας 3 φορές το δεύτερο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών.

¹⁵Προκύπτει μετά την εκτέλεση των πολλαπλασιασμών και την συγχώνευση όλων των όρων $O(n^{-k})$ με $k \geq 3$ στον όρο $O(n^{-3})$.

Ακολουθώντας τη μέθοδο αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε ακόμα καλύτερη προσέγγιση. Αν, για παράδειγμα, αντικαταστήσουμε στη σχέση (1) της άσκησης το $O(n^{-3})$ με $\frac{c}{n^3} + O(n^{-4})$, με ανάλογη διαδικασία υπολογίζεται ότι $b = \frac{1}{288}$, οπότε

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3})\right).$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη των παραπάνω τύπων δεν είναι η συντομότερη, αλλά είναι στοιχειώδης.

Παρακάτω δίδεται ο τύπος για την προσέγγισης του $n!$ με σχετικό σφάλμα $O(n^{-5})$.

Πρόταση 6.2.2 (Τύπος του Stirling (με χρήση του συμβολισμού O)).

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + O(n^{-5})\right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4}\right) (1 + O(n^{-5})). \end{aligned}$$

Εφαρμογή 6.9. Να δειχθούν οι ισότητες

$$1. \quad \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{8n} + O(n^{-2})\right). \quad (12)$$

$$2. \quad C_n = \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{9}{8n} + O(n^{-2})\right). \quad (13)$$

Λύση. 1. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \left(1 + \frac{1}{12 \cdot 2n} + O(n^{-2})\right)}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right)\right)^2} \\ &= \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{1}{24n} + O(n^{-2})\right) \left(1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right)^{-2} \\ &\stackrel{16}{=} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{1}{24n} + O(n^{-2})\right) \left(1 - 2\left(\frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right) + O\left(\left(\frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right)^2\right)\right), \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &\stackrel{17}{=} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{1}{24n} + O(n^{-2})\right) \left(1 - \frac{1}{6n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{8n} + O(n^{-2})\right). \end{aligned}$$

¹⁶Χρησιμοποιώντας τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών.

¹⁷Διότι $\left(\frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right)^2 = O(n^{-2})$.

2. Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο, είναι

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \binom{2n}{n} \\
 &\stackrel{18}{=} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + O(n^{-2})\right) \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{8n} + O(n^{-2})\right) \\
 &= \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{9}{8n} + O(n^{-2})\right).
 \end{aligned}$$

□

Άσκηση 6.11. Να αποδειχθούν οι προσεγγιστικοί τύποι

1. $\binom{2n-r}{n-s} = \frac{4^n}{2^r \sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{-\frac{1}{2} - r^2 + r - 4s^2 - 4rs}{4n} + O(n^{-2})\right).$
2. $\binom{2n-r}{n-s} = \frac{nC_n}{2^r} \left(1 + \frac{4(r-2s)^2 + r}{4n} + O(n^{-2})\right).$
3. $\binom{2n-r}{n-s} - \binom{2n-r}{n-t} = \frac{(t-s)(s+t-r)}{2^r} C_n (1 + O(n^{-1})).$

για κάθε $r, s, t \in \mathbb{N}$.

¹⁸Χρησιμοποιώντας τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών.

6.3 Ασυμπτωτική προσέγγιση με τη βοήθεια των γεννητριών

Πολλές φορές η ασυμπτωτική προσέγγιση μιας ακολουθίας επιτυγχάνεται μέσω της γεννήτριας συνάρτησής της. Ένα βασικό εργαλείο για το σκοπό αυτό είναι το Θεώρημα του Darboux, το οποίο εμφανίζεται στη βιβλιογραφία σε διάφορες παραλλαγές. Παρακάτω δίδεται μια μορφή του που χρησιμοποιεί τον συμβολισμό O .

Πρόταση 6.3.1 (Θεώρημα Darboux). *Αν η γεννήτρια συνάρτηση μιας ακολουθίας $(f(n))$ γράφεται υπό τη μορφή*

$$f^*(z) = (1 - z)^b g(z)$$

όπου $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ και $g(z)$ είναι μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη του 1 με $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - z)^k$, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ο τύπος

$$f(n) = [z^n]f^*(z) = \sum_{k=0}^m a_k \binom{n - b - k - 1}{n} + O(n^{-m-b-2}).$$

Κατά την εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος πολλές φορές χρησιμοποιούνται οι επόμενοι τύποι¹⁹:

$$\binom{n - \frac{1}{2}}{n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}, \tag{14}$$

$$\binom{n - j - \frac{1}{2}}{n} = (-1)^j \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2j - 1)}{(2n - 1)(2n - 3) \cdots (2n - 2j + 1)}, \tag{15}$$

και

$$\binom{n + j - \frac{1}{2}}{n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{(2n + 1)(2n + 3) \cdots (2n + 2j - 1)}{1 \cdot 3 \cdots (2j - 1)}. \tag{16}$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 6.10. *Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός Motzkin M_n δίδεται από τον τύπο*

$$M_n = \frac{3^{n+1} \sqrt{3}}{2n \sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{39}{16n} + O(n^{-2}) \right).$$

Λύση. Γνωρίζουμε²⁰ ότι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Motzkin δίδεται από τη σχέση

$$M^*(x) = \frac{1 - x - \sqrt{(1 - x)^2 - 4x^2}}{2x^2},$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} M_n &= [x^n]M^*(x) = \frac{1}{2}[x^{n+2}] \left(1 - x - \sqrt{(1 - 3x)(1 + x)} \right) \\ &= -\frac{1}{2}[x^{n+2}] \sqrt{(1 - 3x)(1 + x)} \\ &\stackrel{21}{=} -\frac{3^{n+1} \sqrt{3}}{2}[z^{n+2}] \left((1 - z)^{\frac{1}{2}} (3 + z)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \tag{17}$$

¹⁹Οι αποδείξεις να γίνουν ως ασκήσεις.

²⁰Βλέπε σελ. 270, σχέση (2).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τύπο της διωνυμικής σειράς, θα αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά γύρω από το 1, τη συνάρτηση $g(z) = (3+z)^{\frac{1}{2}}$.

Ισχύει ότι

$$g(z) = 2 \left(1 - \frac{1-z}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k}}{4^k} (1-z)^k.$$

Εύκολα προκύπτει²² ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι ίση με $4 > 1$, οπότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Darboux για $m = 1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & [z^{n+1}] \left((1-z)^{\frac{1}{2}} (3+z)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{2(-1)^0 \binom{\frac{1}{2}}{0}}{4^0} \binom{n+2 - \frac{1}{2} - 0 + 1}{n+2} + \frac{2(-1)^1 \binom{\frac{1}{2}}{1}}{4^1} \binom{n+2 - \frac{1}{2} - 1 - 1}{n+2} + O\left((n+2)^{-1-\frac{1}{2}-2}\right) \\ &= 2 \binom{n+2 - \frac{3}{2}}{n+2} - \frac{1}{4} \binom{n+2 - \frac{5}{2}}{n+2} + O\left(n^{-\frac{7}{2}}\right) \\ &\stackrel{23}{=} -2 \frac{\binom{2(n+2)}{n+2}}{4^{n+2}} \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{4} \frac{\binom{2(n+2)}{n+2}}{4^{n+2}} \frac{3}{(2n+3)(2n+1)} + O\left(n^{-\frac{7}{2}}\right), \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} & [z^{n+1}] \left((1-z)^{\frac{1}{2}} (3+z)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\stackrel{24}{=} -\frac{2}{2n+3} \frac{1}{\sqrt{\pi(n+2)}} \left(1 - \frac{1}{8(n+2)} + O\left((n+2)^{-2}\right)\right) \left(1 + \frac{3}{8} \frac{1}{2n+1}\right) + O\left(n^{-\frac{7}{2}}\right) \\ &= -\frac{n^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{8n} + O\left(n^{-2}\right)\right) \left(1 + \frac{3}{16n} + O\left(n^{-2}\right)\right) + O\left(n^{-\frac{7}{2}}\right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} & [z^{n+1}] \left((1-z)^{\frac{1}{2}} (3+z)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\stackrel{25}{=} -\frac{n^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{2n} + O\left(n^{-2}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(n^{-2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{16n} + O\left(n^{-2}\right)\right) + O\left(n^{-\frac{7}{2}}\right) \\ &= -\frac{n^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{39}{16n} + O\left(n^{-2}\right)\right). \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη σχέση και τη σχέση (17), σελ. 344 προκύπτει ότι

$$M_n = \frac{3^{n+1} \sqrt{3}}{2n \sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{39}{16n} + O\left(n^{-2}\right)\right). \quad \square$$

²¹Θέτοντας $z = 3x$.

²²Με τη βοήθεια της Πρότασης 3.2 (ii) σελ. 399 του βιβλίου Α. Σαπουνάκης και Ε. Φούντας, Ανάλυση και Εφαρμογές, τόμος II.

²³Χρησιμοποιώντας τη σχέση (16), σελ. 344.

²⁴Χρησιμοποιώντας τη σχέση (12), σελ. 342.

²⁵Χρησιμοποιώντας τους προσεγγιστικούς τύπους των δυναμοσειρών.

Εφαρμογή 6.11.

i) Να αποδειχθεί η σχέση $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n (2n)}{4^n} \binom{2n}{n}$.

ii) Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{k}$.

iii) Να βρεθεί μια ασυμπτωτική προσέγγιση του πηλίκου $\frac{\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{k}}{C_n}$, με απόλυτο σφάλμα $O(n^{-2})$.

Λύση. i) Είναι

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} = \frac{(-1)^n (2n)}{4^n} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

ii) Αν τεθεί $\phi(n) = \binom{2n+1}{n}$, τότε είναι

$$\phi(n) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \phi^*(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2(n+1)}{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2(n+1)}{n+1} x^{n+1} \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \\ &= \frac{1}{2x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2x} \left((1-4x)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων,

$$f^*(x) = \frac{1}{2x} \frac{(1-4x)^{-\frac{1}{2}} - 1}{1-x}.$$

²⁶Σύμφωνα με τον τύπο της διωνυμικής σειράς.

²⁷Βλ. Εφαρμογή 5.1, σελ. 246.

iii) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της προηγούμενης δυναμοσειράς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \frac{1}{2}[x^{n+1}] \left(\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1}{1-x} \right) \\
 &= \frac{1}{2}[x^{n+1}] \left(\frac{(1-4x)^{-\frac{1}{2}}}{1-x} \right) - \frac{1}{2}[x^{n+1}] \left(\frac{1}{1-x} \right) \\
 &\stackrel{28}{=} 2 \cdot 4^{n+1}[z^{n+1}] \left(\frac{(1-z)^{-\frac{1}{2}}}{4-z} \right) - \frac{1}{2}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τύπο της γεωμετρικής σειράς. θα αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά γύρω από το 1, τη συνάρτηση $g(z) = \frac{1}{4-z}$.

Ισχύει ότι

$$g(z) = \frac{1}{4-z} = \frac{1}{3+(1-z)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} \right)^k (1-z)^k.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η ακτίνα συγκλίσεως της δυναμοσειράς αυτής είναι ίση με $3 > 1$, οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Darboux για $m = 2$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 [z^{n+1}] \left(\frac{(1-z)^{-\frac{1}{2}}}{4-z} \right) &= \frac{1}{3} \binom{n+1-\frac{1}{2}}{n+1} - \frac{1}{9} \binom{n+1-\frac{3}{2}}{n+1} + \binom{n+1-\frac{5}{2}}{n+1} + O\left((n+1)^{-\frac{7}{2}}\right) \\
 &\stackrel{29}{=} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{4^{n+1}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{27} \frac{3}{(2n+1)(2n-1)} \right),
 \end{aligned}$$

οπότε από τη σχέση (18) προκύπτει ότι

$$\frac{f(n)}{C_n} = \frac{2}{3} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{4^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \right) + \frac{4^n n^{-\frac{3}{2}}}{C_n} O(n^{-2}) - \frac{1}{2C_n}. \tag{19}$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{C_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = 2(2n+1). \tag{20}$$

Επίσης, επειδή

$$\frac{4^n n^{-\frac{3}{2}}}{C_n} O(n^{-2}) \stackrel{30}{=} \frac{\sqrt{\pi} O(n^{-2})}{1 - \frac{9}{8n} + O(n^{-2})},$$

και άρα

$$\frac{4^n n^{-\frac{3}{2}}}{C_n} O(n^{-2}) \stackrel{31}{=} O(n^{-2}) \left(1 + \left(\frac{9}{8n} - O(n^{-2}) \right) + \left(\frac{9}{8n} - O(n^{-2}) \right)^2 \right),$$

²⁸Θέτοντας $z = 3x$.

²⁹Βλέπε σχέσεις (14), (15), (16), σελ. 344.

³⁰Βλέπε σχέση (13), σελ. 342.

προκύπτει ότι

$$\frac{4^n n^{-\frac{3}{2}}}{C_n} O(n^{-2}) = O(n^{-2}). \quad (21)$$

Τέλος, ισχύει ότι

$$\frac{1}{2C_n} = O(n^{-2}). \quad (22)$$

Από τις σχέσεις (19), (20), (21) και (22) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{f(n)}{C_n} &= \frac{4}{3}(2n+1) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \right) + O(n^{-2}) \\ &= \frac{8}{3}n + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \frac{1}{2n-1} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Άρα, τελικά,

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{k}}{C_n} = \frac{8}{3}n + \frac{16}{9} + \frac{1}{6n} + O(n^{-2}). \quad \square$$

6.3.1 Άσκησης προς επίλυση

1) Δίδεται η ακολουθία (G_n) με $G_0 = 1$ και για $n \geq 1$ G_n είναι το πλήθος των μονοπατιών από το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο $(n, 0)$ με βήματα $(1, 1)$, $(1, -1)$ και $(1, 0)$.

Ναδειχθεί ότι

$$\text{i) } G_1 = 1 \text{ και } G_n = G_{n-1} + 2 \sum_{k=0}^{n-2} M_k G_{n-k-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2.$$

$$\text{ii) } G^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}.$$

$$\text{iii) } G_n = \frac{3^n \sqrt{3}}{2 \sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{16n} + O(n^{-2}) \right).$$

2) Να αποδειχθεί η ασυμπτωτική σχέση

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}}{C_n} = \frac{4}{3}n + \frac{14}{9} + \frac{4}{9n} + O(n^{-2}).$$

3) Να αποδειχθεί η ασυμπτωτική σχέση

$$\frac{\sum_{k=0}^n C_k}{C_n} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{2}{3n^2} \right) + O(n^{-3}).$$

³¹Χρησιμοποιώντας τον πρώτο προσεγγιστικό τύπο των δυναμοσειρών.

³²Μετά από πράξεις.

Βιβλιογραφία

- [1] Δ. Θηλυκός, *Σημειώσεις Θεωρίας Γραφημάτων*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2015.
- [2] Λ. Κυρούσης, Χ. Μπούρας, Π. Σπυράκης, Γ. Σταματίου, *Εισαγωγή στους γράφους*, Εκδόσεις CTI Press, 1999.
- [3] C. Liu, *Διακριτά μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.
- [4] Α. Παναγιωτόπουλος, *Εισαγωγή στα γραφήματα*, Εκδόσεις Α. Σταμούλης, 1989.
- [5] Α. Παναγιωτόπουλος, *Διακριτά μαθηματικά*, Εκδόσεις Α. Σταμούλης, 1993.
- [6] Α. Παπαϊωάννου, *Θεωρία γραφημάτων*, Αθήνα, 2002.
- [7] Α. Σαπουνάκης και Ε. Φούντας, *Ανάλυση και εφαρμογές*, τόμος II, Εκδόσεις Βαρθαράκη, 2015.
- [8] K. Rosen, *Διακριτά μαθηματικά και εφαρμογές*, 5η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2008.
- [9] Χ. Χαραλαμπίδης, *Συνδυαστική*, Τεύχος 1, 2η έκδοση, Συμμετρία, 2000.
- [10] Χ. Χαραλαμπίδης, *Συνδυαστική*, Τεύχος 2, Συμμετρία, 1996.
- [11] I. Anderson, *Combinatorics of finite sets*, Dover, 2002.
- [12] V. K. Balakrishnan, *Introductory discrete mathematics*, Dover, 1996.
- [13] V. K. Balakrishnan, *Schaum's outlines of combinatorics, including concepts of graph theory*, McGraw-Hill, 1995.
- [14] E. Bender, S. Gill Williamson, *Foundations of combinatorics with applications*, Dover, 2005.
- [15] A. Benjamin, G. Chartrand, P. Zhang, *The fascinating world of graph theory*, Princeton University Press, 2015.
- [16] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, 1958.
- [17] B. Bollobás, *Modern graph theory*, Springer-Verlag, 1998.
- [18] D. I. A. Cohen, *Basic techniques of combinatorial theory*, John Wiley & Sons, 1978.
- [19] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, Reidel, 1974.
- [20] P. J. Cameron, *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press, 1994.
- [21] R. Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, 1997.
- [22] V. A. Dobrushkin, *Methods in algorithmic analysis*, CRC Press, 2010.
- [23] G. P. Gavrilov, A. A. Sapozhenko, *Problems and exercises in discrete mathematics*, Springer, 1996.
- [24] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1994.
- [25] D. H. Greene, D. E. Knuth, *Mathematics for the analysis of algorithms*, 3rd edition, Birkhäuser, 2008.
- [26] J. L. Gross *Combinatorial methods with computer applications*, CRC Press, 2008.
- [27] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Co, 1972.
- [28] J. Harris, J. Hirst, M. Mossinghoff, *Combinatorics and graph theory*, Springer-Verlag, 2000.

- [29] D. E. Knuth, *The art of computer programming*, Vol. 1, Addison-Wesley, 1997.
- [30] E. Lehnman and T. Leighton, *Mathematics for computer science*, MIT, 2004.
- [31] N. Vilenkin, *Combinatorial mathematics for recreation*, Mir Publishers, 1972.
- [32] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.