B-Δένδρα

- Τα B-δένδρα χρησιμοποιούνται για τη αναπαράσταση πολύ μεγάλων λεξικών που είναι αποθηκευμένα στο δίσκο.

Δένδρα AVL

- $n = 2^{30} = 10^9$ (περίπου).
- 30 <= ύψος <= 43.
- Όταν το δένδρο AVL είναι αποθηκευμένο στο δίσκο, μέχρι και 43 προσβάσεις στο δίσκο απαιτούνται για μία αναζήτηση.
- Αυτό απαιτεί περίπου 4 δευτερόλεπτα.
- Πολύ χρόνος.

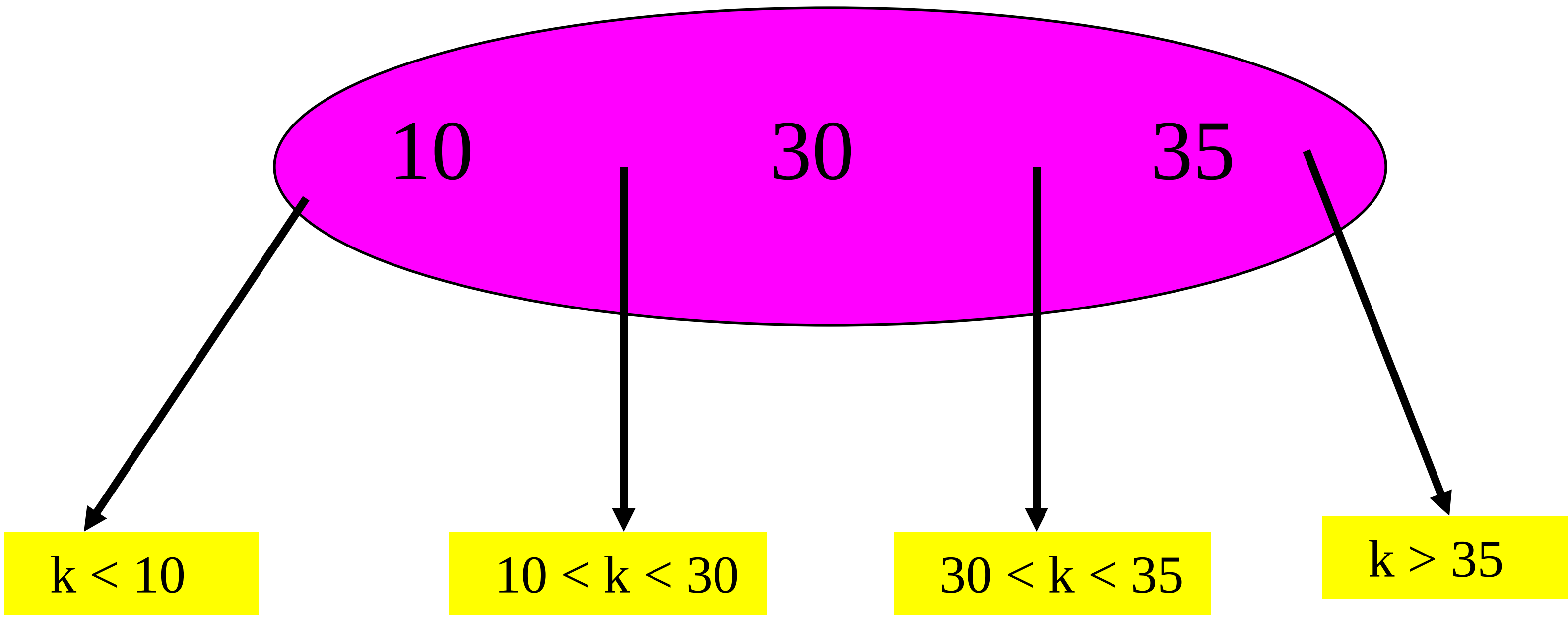
Red-Black Trees

- $n = 2^{30} = 10^9$ (περίπου).
- 30 <= ύψος <= 60.
- Όταν το μελανέρυθρο δενδρο είναι στο δίσκο, μέχρι και 60 προσβάσεις στο δίσκο απαιτούνται για μία αναζήτηση.
- Απαιτούνται περίπου 6 δευτερόλεπτα.
- Πολύ χρόνος.

m-αδικά Δένδρα Αναζήτησης

- Κάθε κόμβος έχει μέχρι και $m - 1$ στοιχεία και m παιδιά.
- $m = 2 \Rightarrow$ Δυαδικό δένδρο αναζήτησης.

4-δικό Δένδρο Αναζήτησης



Μέγιστο πλήθος στοιχείων

- Συμβαίνει όταν όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι είναι m-κόμβοι.
- m-αδικό δένδρο πλήρους βαθμού.
- Πλήθος κόμβων $= 1 + m + m^2 + m^3 + \ldots + m^{h-1}$ $= (m^h - 1)/(m - 1)$.
- Κάθε κόμβος έχει $m - 1$ στοιχεία.
- Έτσι, το πλήθος των στοιχείων $= m^h - 1$.

Χωρητικότητα m-αδικού Δένδρου Αναζήτησης

	m = 2	m = 200
h = 3	7	$8 * 10^{6} - 1$
h = 5	31	$3.2 * 10^{11} - 1$
h = 7	127	$1.28 * 10^{16} - 1$

Ορισμός B-Tree

- Ο ορισμός υποθέτει εξωτερικούς κόμβους.
- B-tree τάξης m.
  - m-αδικό δένδρο αναζήτησης.
  - Μη κενό => η ρίζα έχει τουλάχιστον 2 παιδιά.
  - Οι υπόλοιποι εσωτερικοί κόμβοι (αν υπάρχουν) έχουν τουλάχιστον ceil(m/2) παιδιά.
  - Οι εξωτερικοί κόμβοι είναι στο ίδιο επίπεδο.

2-3 και 2-3-4 Δένδρα

- B-tree τάξης m.
  - m-αδικό δένδρο αναζήτησης.
  - Μη κενό => η ρίζα έχει τουλάχιστον 2 παιδιά.
  - Οι υπόλοιποι εσωτερικοί κόμβοι (αν υπάρχουν) έχουν τουλάχιστον ceil(m/2) παιδιά.
  - Οι εξωτερικοί κόμβοι είναι στο ίδιο επίπεδο B-tree.

- 2-3 δένδρο είναι B-δένδρο τάξης 3.
- 2-3-4 δένδρο είναι B-δένδρο τάξης 4.

B-Δένδρα τάξης 5 και 2

- B-tree τάξης m.
  - m-αδικό δένδρο αναζήτησης.
  - Μη κενό => η ρίζα έχει τουλάχιστον 2 παιδιά.
  - Οι υπόλοιποι εσωτερικοί κόμβοι (αν υπάρχουν) έχουν τουλάχιστον ceil(m/2) παιδιά.
  - Οι εξωτερικοί κόμβοι είναι στο ίδιο επίπεδο B-tree.
- B-δένδρο τάξης 5 είναι 3-4-5 δένδρο (η ρίζα μπορεί να έχει δύο παιδιά εντούτοις).
- B-δένδρο τάξης 2 είναι ένα πλήρες δυαδικό δένδρο.

Ελάχιστο πλήθος στοιχείων

- n = πλήθος στοιχείων.
- Πλήθος εξωτερικών κόμβων = n + 1.
- Ύψος = h => εξωτερικοί κόμβοι στο επίπεδο h +1.

Επίπεδο	Πλήθος κόμβων
1	1
2	>= 2
3	>= 2*ceil(m/2)
h + 1	>= 2*ceil(m/2)$^{h-1}$

n + 1 >= 2*ceil(m/2)$^{h-1}$, h >= 1

Ελάχιστο πλήθος στοιχείων

$$n + 1 >= 2*ceil(m/2)^{h-1}, \; h >= 1$$

- m = 200.

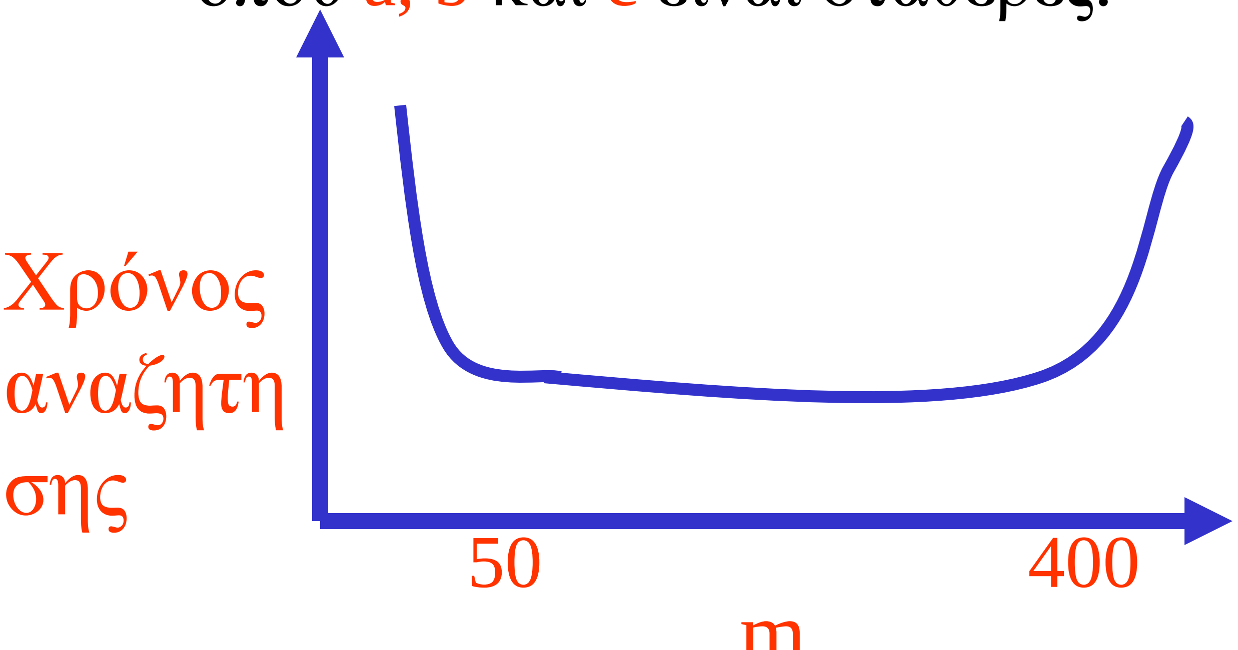
Ύψος	Πλήθος κόμβων
2	>= 199
3	>= 19,999
4	$>= 2 * 10^6 – 1$
5	$>= 2 * 10^8 – 1$

$$h <= \log_{ceil(m/2)} [(n+1)/2] + 1$$

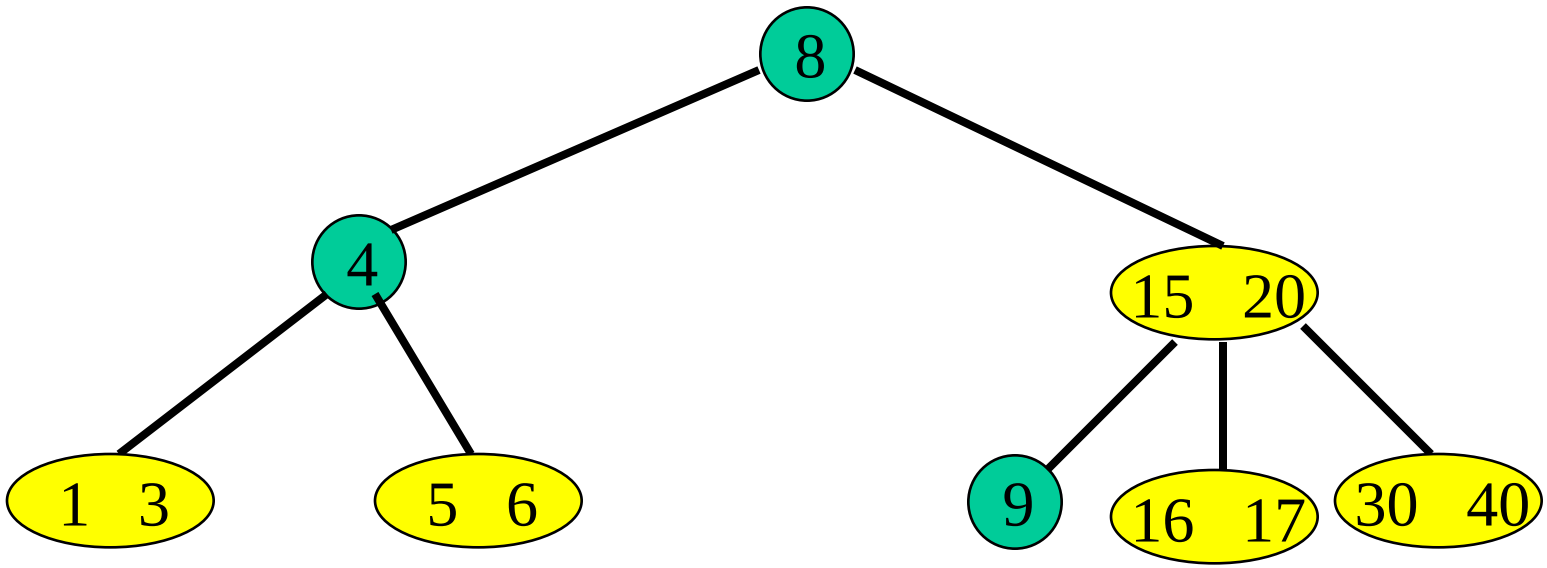
Επιλογή του m

- Χειρότερη περίπτωση χρόνου αναζήτησης.
  - (χρόνος να φέρεις ένα κόμβο + χρόνος να αναζητήσεις ένα κόμβο) * ύψος
  - $(a + b*m + c * \log_2 m) * h$

  όπου a, b και c είναι σταθερες.



Εισαγωγή



Εισαγωγή σε ένα πλήρες φύλλο μπορεί να προκαλέσει σπάσιμο κόμβων αλυσιδωτά προς τη ρίζα του δένδρου.

Χωρισμός ενός γεμάτου υπεφορτωμένου κόμβου

$m \ a_0 \ p_1 \ a_1 \ p_2 \ a_2 \ \ldots \ p_m \ a_m$

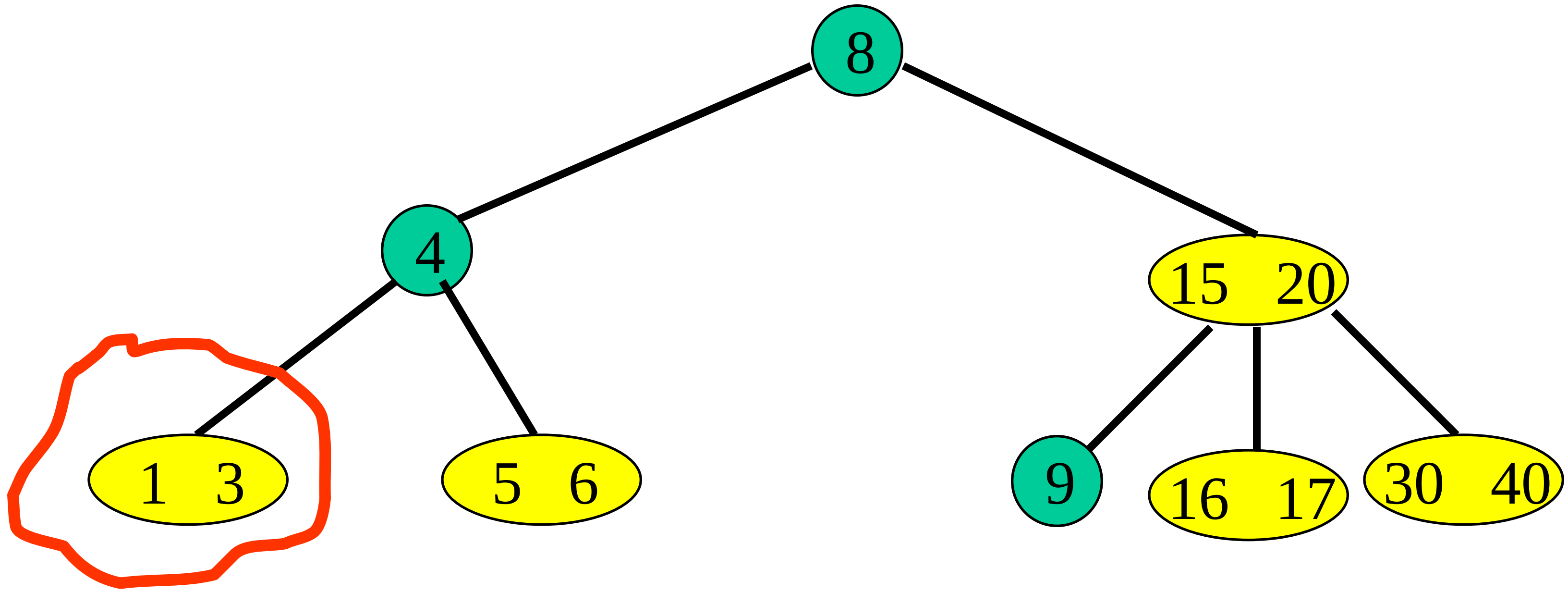
- a_i είναι ένας δείκτης στο υποδένδρο.
- p_i είναι ένα στοιχείο.

$\text{ceil}(m/2)\text{-}1 \ a_0 \ p_1 \ a_1 \ p_2 \ a_2 \ \ldots \ p_{\text{ceil}(m/2)-1} \ a_{\text{ceil}(m/2)-1}$

$m\text{-ceil}(m/2) \ a_{\text{ceil}(m/2)} \ p_{\text{ceil}(m/2)+1} \ a_{\text{ceil}(m/2)+1} \ \ldots \ p_m \ a_m$

- $p_{\text{ceil}(m/2)}$ συν ο δείκτης στο νέο κόμβο εισάγονται στο πατέρα.

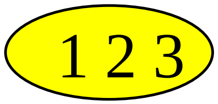
Εισαγωγή



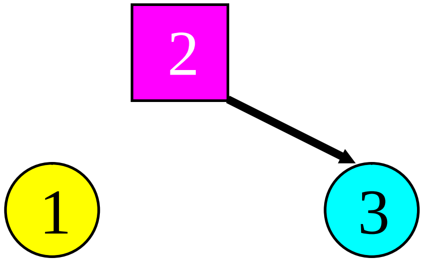
- Εισαγωγή 2.
- Το στοιχείο πάει σε ένα 3-κόμβο.

Εισαγωγή σε ένα φύλλο (3-κόμβος)

- Εισαγωγή του νέου στοιχείου έτσι ώστε τα 3 στοιχεία είναι σε αύξουσα σειρά.

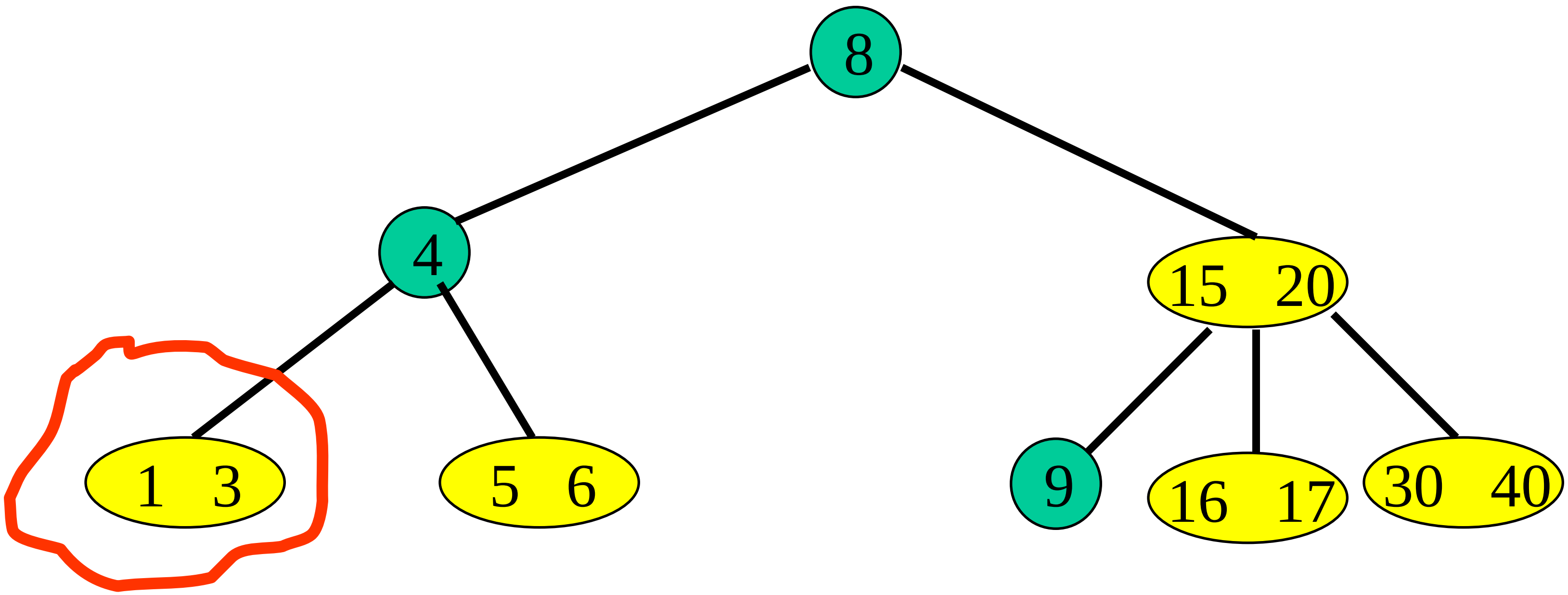


- Χωρισμός του υπερφορτωμένου κόμβου γύρω από το μεσαίο στοιχείο.



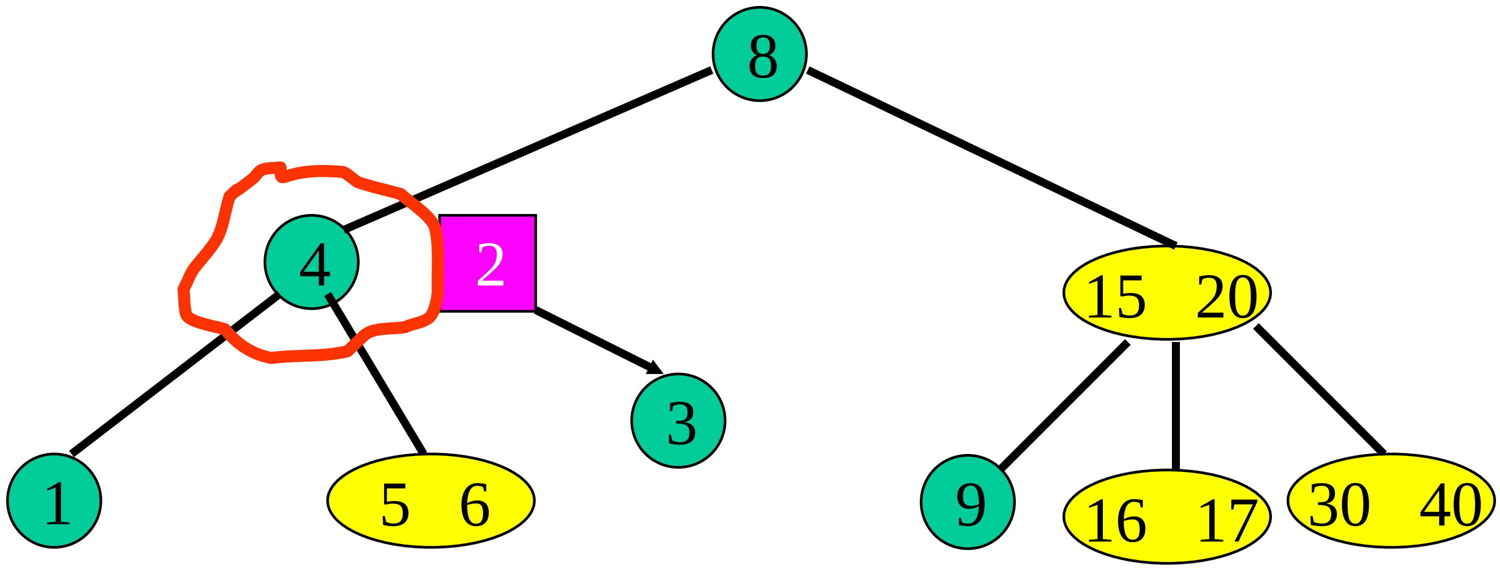
- Εισαγωγή του μεσαίου στοιχείου και του δείκτη στο νέο κόμβο στον πατέρα.

Εισαγωγή



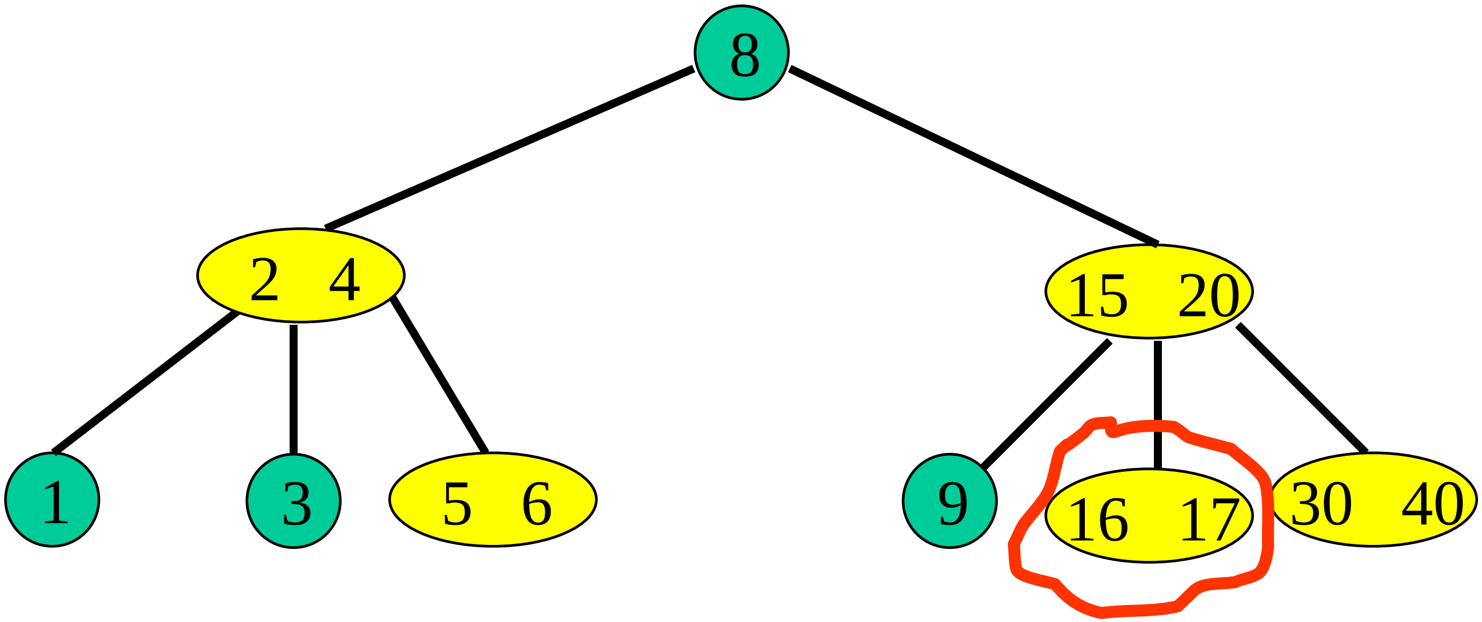
- Εισαγωγή 2.

Εισαγωγή



- Εισαγωγή 2 συν ενός δείκτη στο πατέρα.

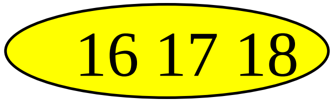
Εισαγωγή



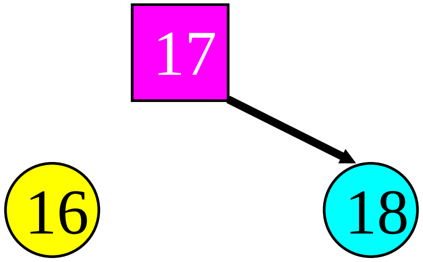
• Τώρα, εισαγωγή του 18.

Εισαγωγή σε ένα φύλλο 3-κόμβο

- Εισαγωγή του νέου στοιχείου ώστε τα 3 στοιχεία είναι σε αύξουσα σειρά.

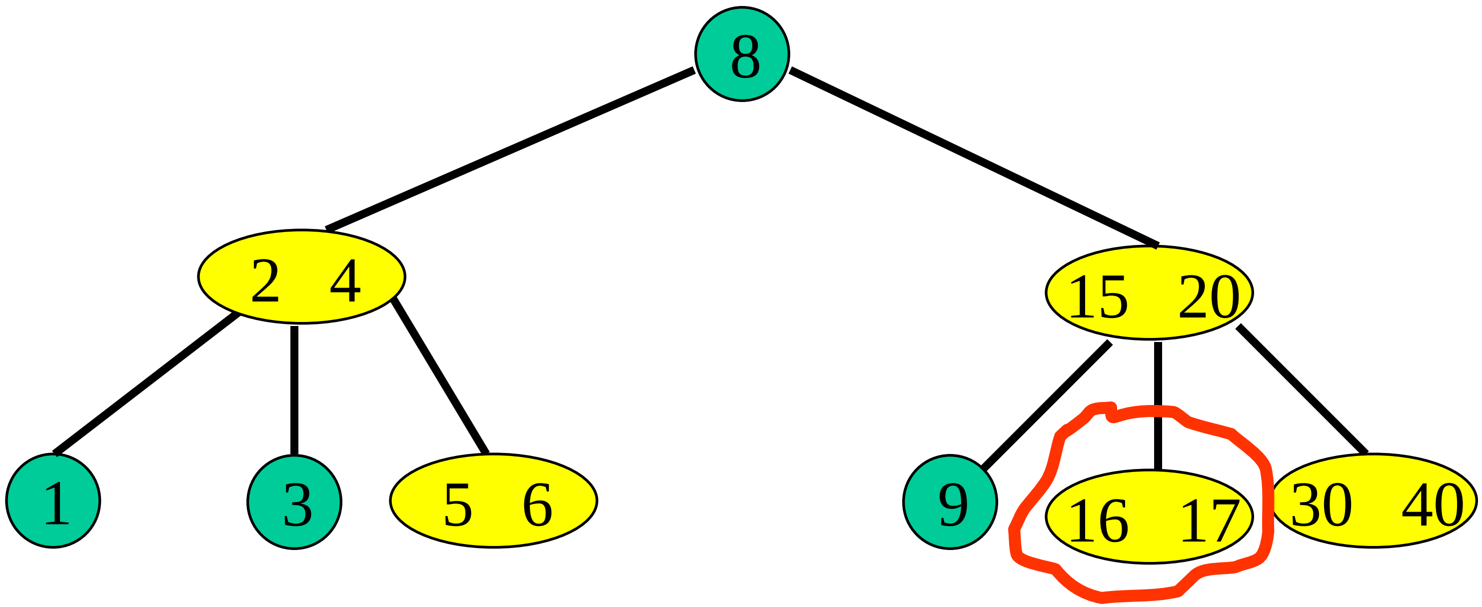


- Χωρισμός του υπερφορτωμένου κόμβου.



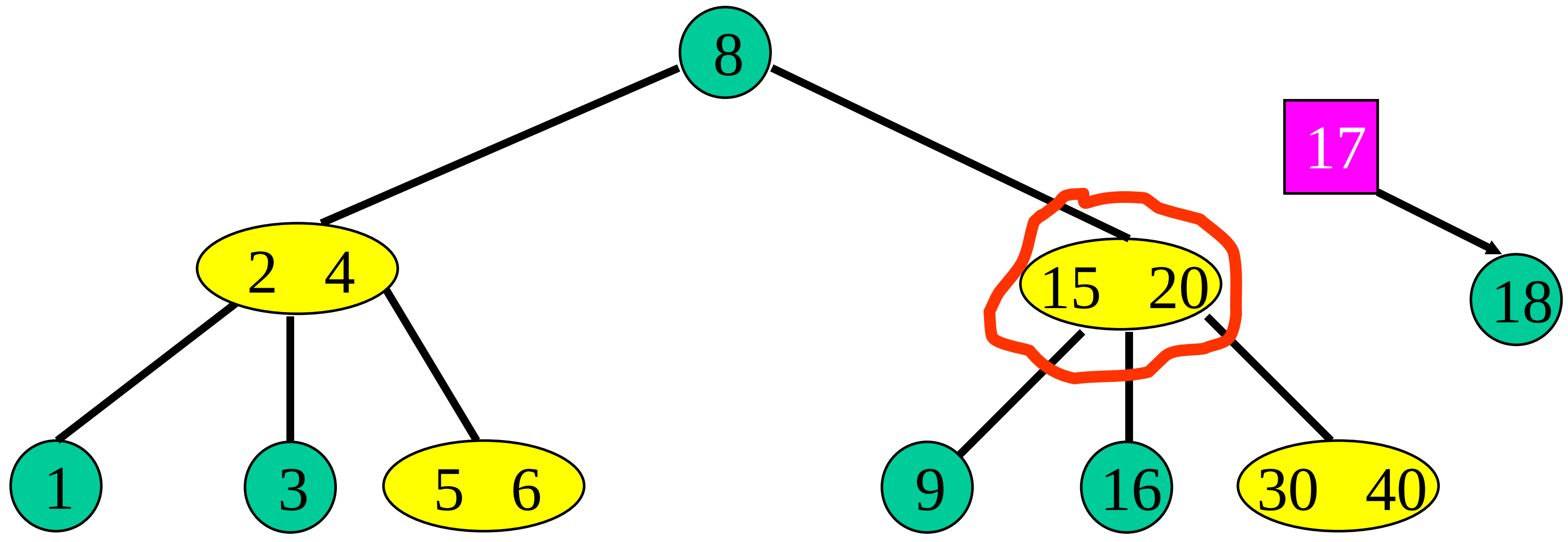
- Εισαγωγή του μεσαίου κλειδιού και του δείκτη στο νέο κόμβο στο πατέρα.

Εισαγωγή



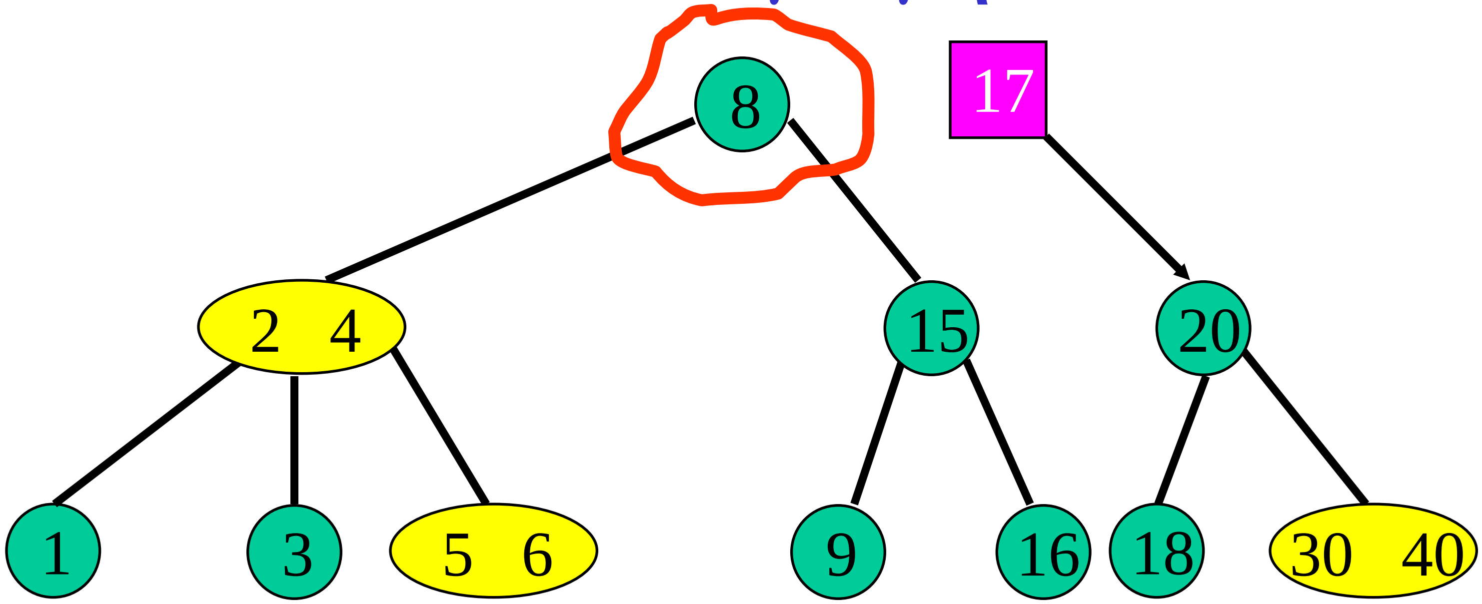
- Εισαγωγή του18.

Εισαγωγή



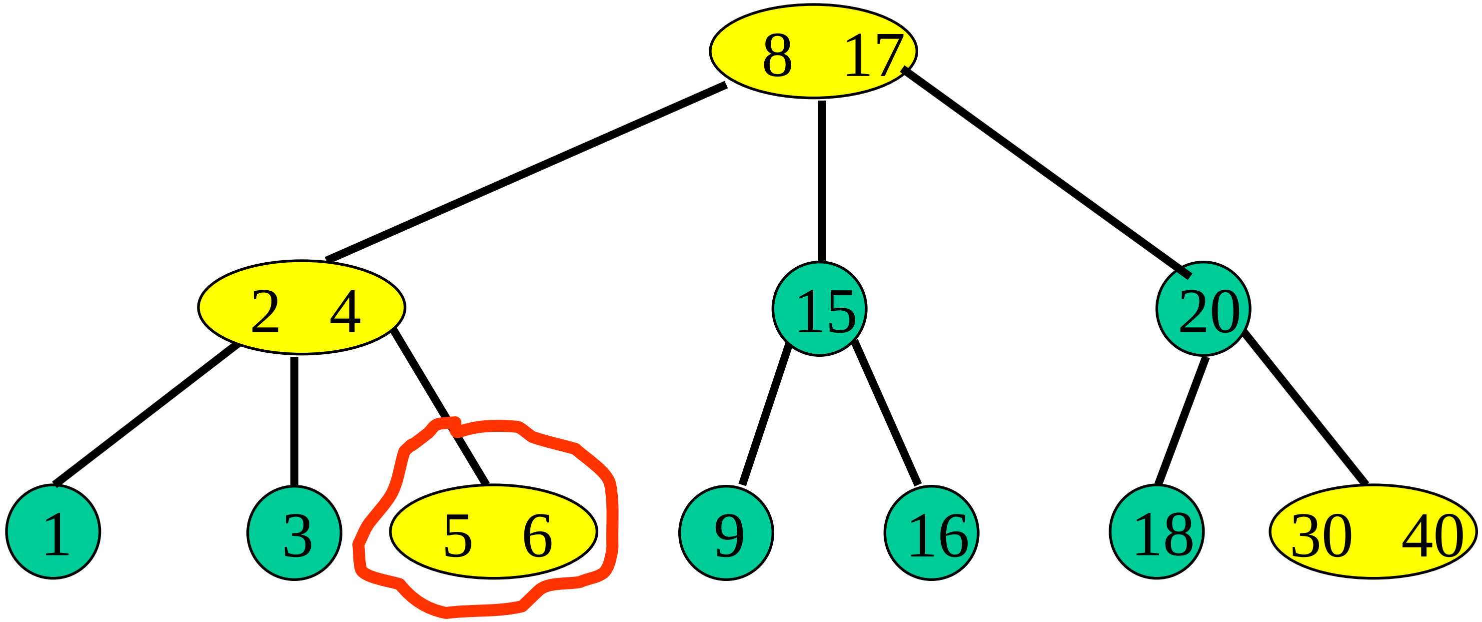
- Εισαγωγή του 17 συν δείκτη στον πατέρα.

Εισαγωγή



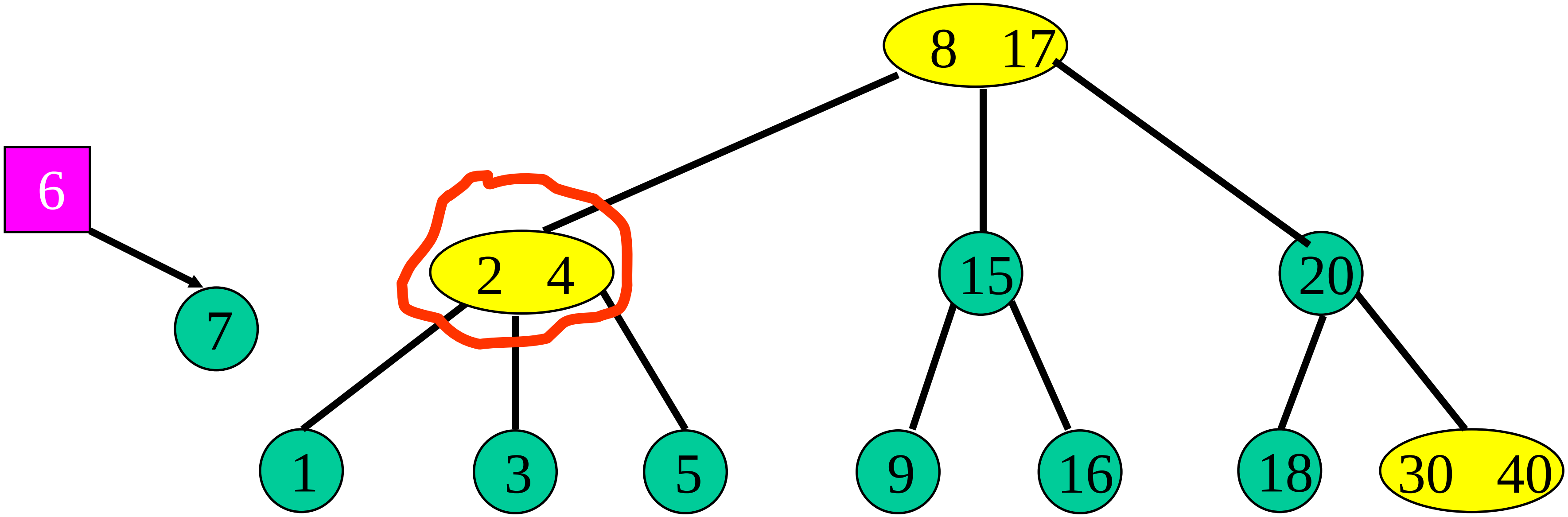
• Εισαγωγή του 17 συν δείκτη στον πατέρα.

Εισαγωγή



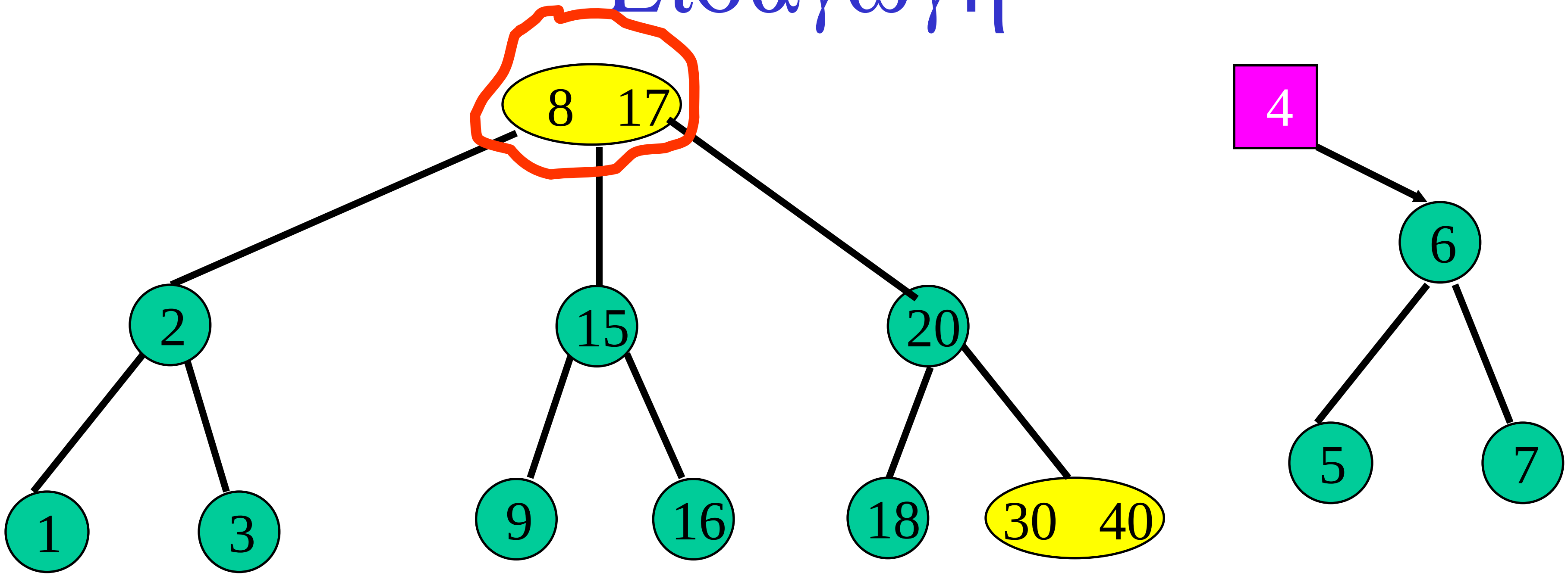
- Τώρα, εισαγωγή του 7.

Εισαγωγή



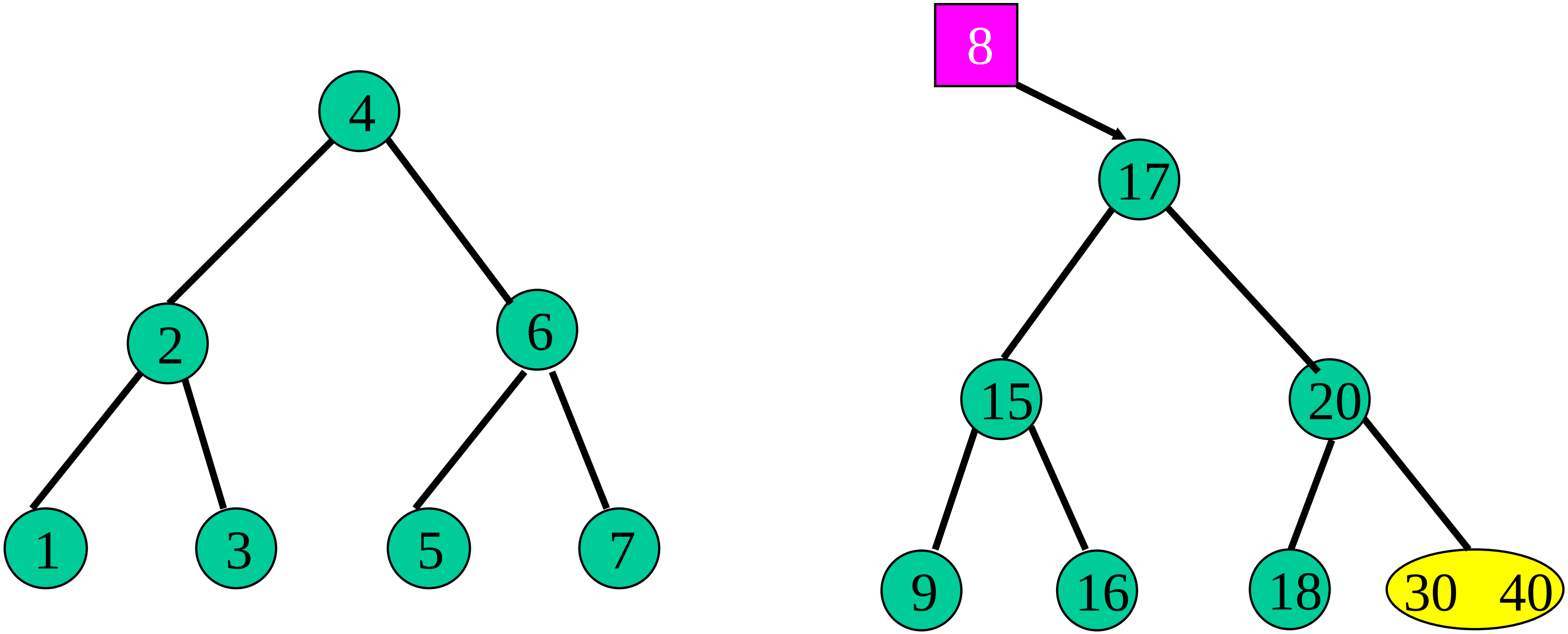
- Εισαγωγή του 6 συν ενός δείκτη στο πατέρα.

Εισαγωγή



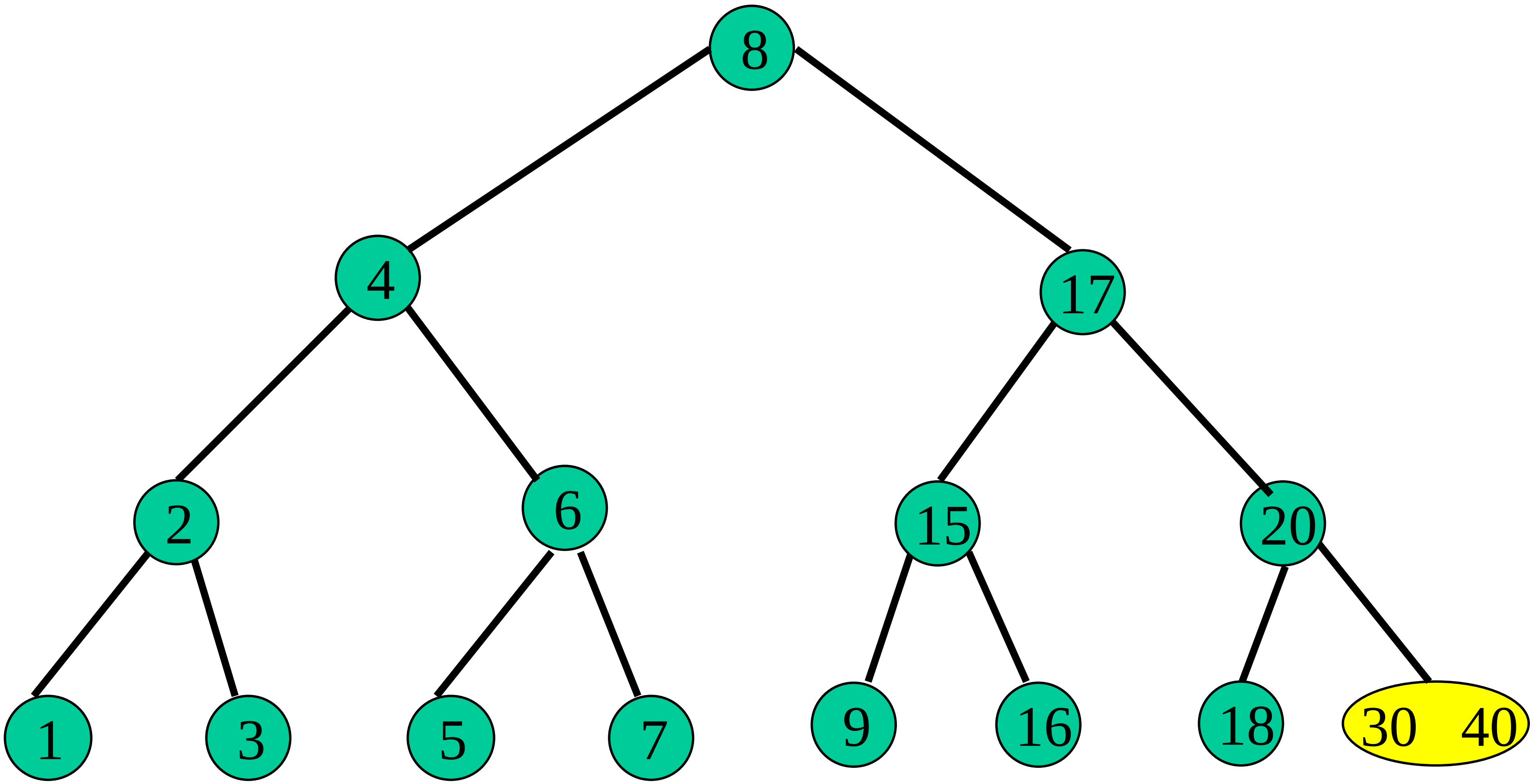
• Εισαγωγή του 6 συν ενός δείκτη στο πατέρα.

Εισαγωγή



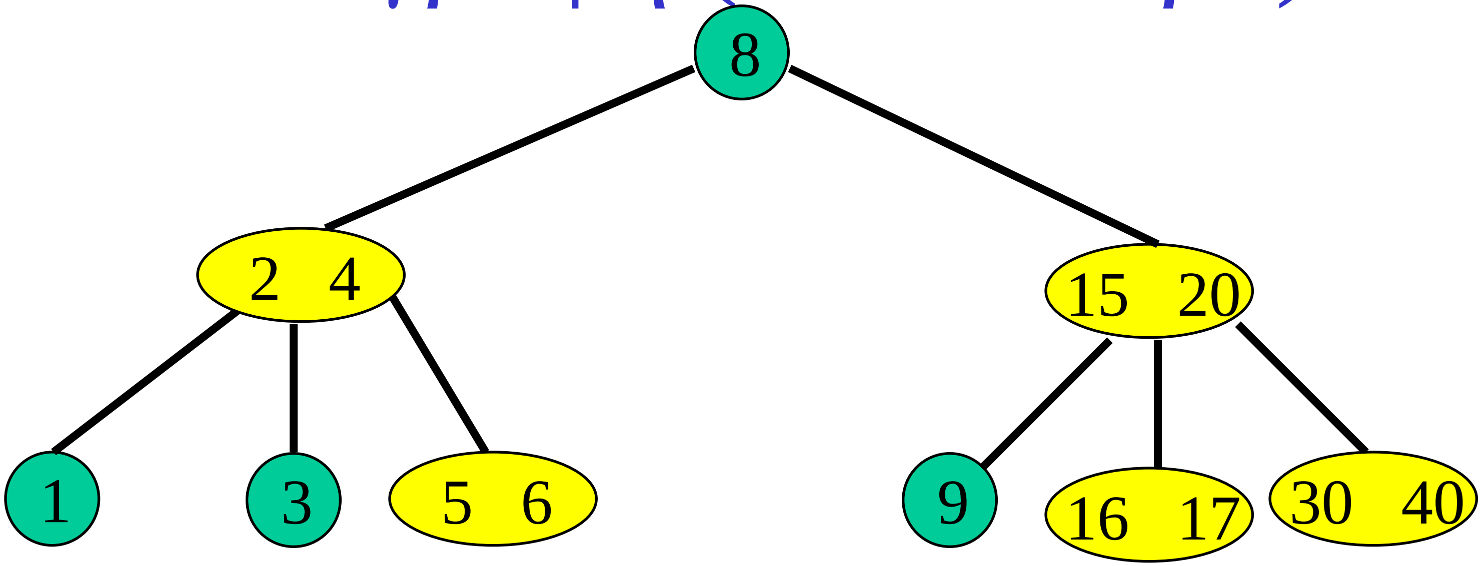
- Εισαγωγή του 8 συν ενός δείκτη στο πατέρα.
- Δεν υπάρχει πατέρας. Δημιουργούμε μία νέα ρίζα.

Εισαγωγή



- Το ύψος αυξάνει κατά 1.

Διαγραφή (2-3 Δένδρο)

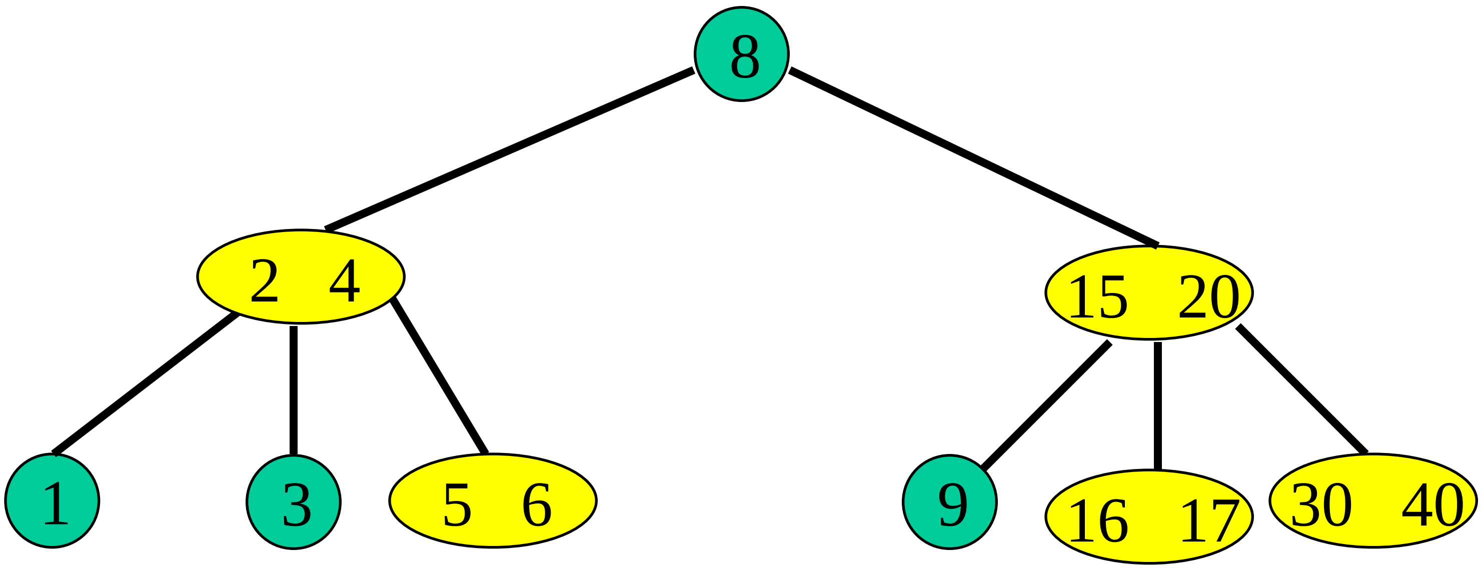


• Διαγραφή του 8.

• Μετατροπή της διαγραφής από το εσωτερικό του δένδρου σε διαγραφή φύλλου.

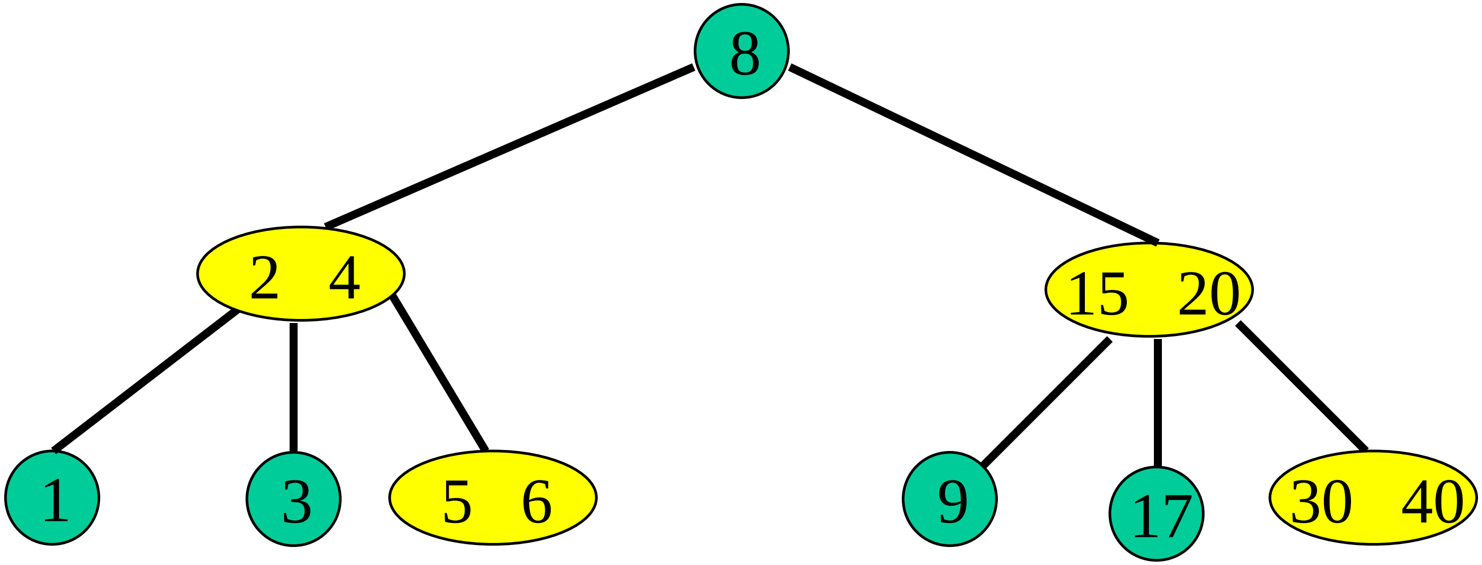
• Αντικατάσταση από το μεγαλύτερο στοιχείο του αριστερού υποδένδρου.

Διαγραφή από ένα φύλλο



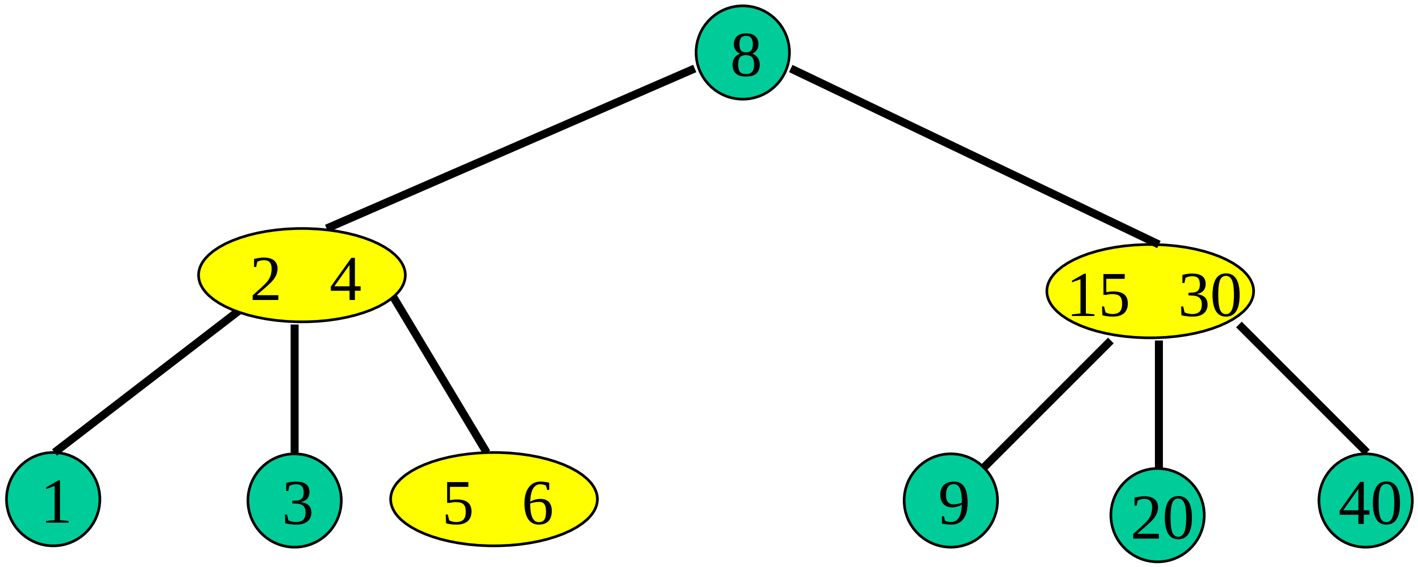
- Διαγραφή στοιχείου 16.
- 3-κόμβος γίνεται 2-κόμβος.

Διαγραφή από ένα φύλλο



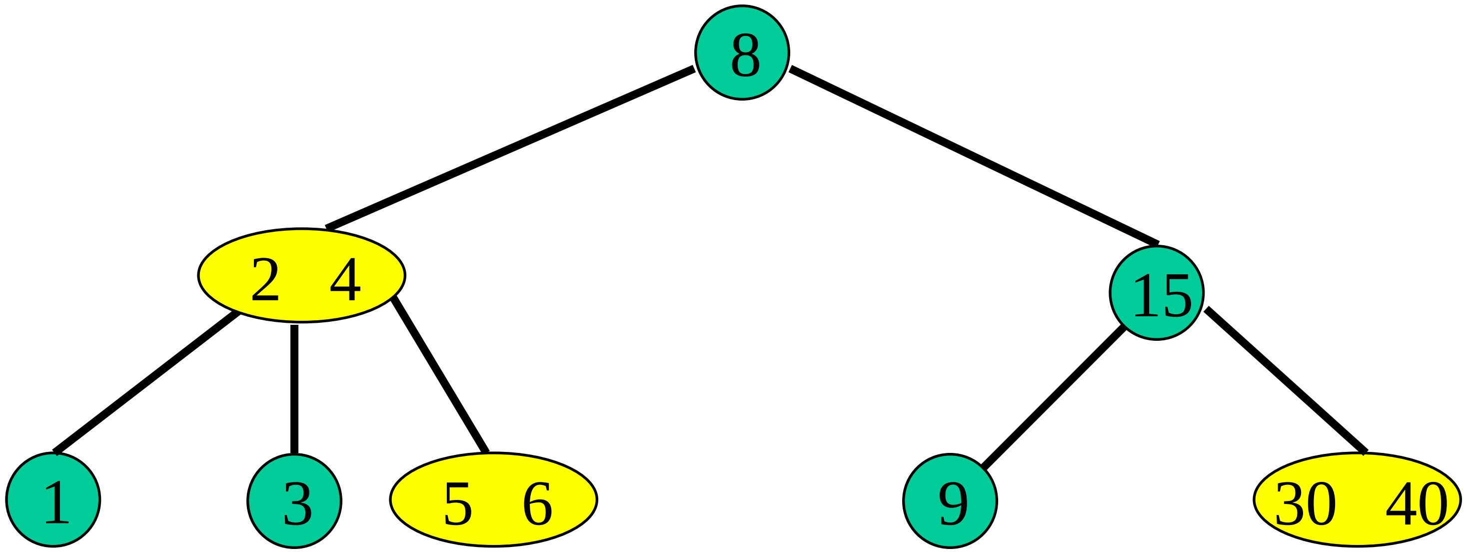
- Διαγραφή του 17.
- Διαγραφή από ένα 2-κόμβο.
- Έλεγξε ένα αδελφό και καθόρισε αν είναι ένας 3-κόμβος.
- Αν αυτό ισχύει, δανείσου ένα στοιχείο μέσω του πατέρα.

Διαγραφή από ένα φύλλο



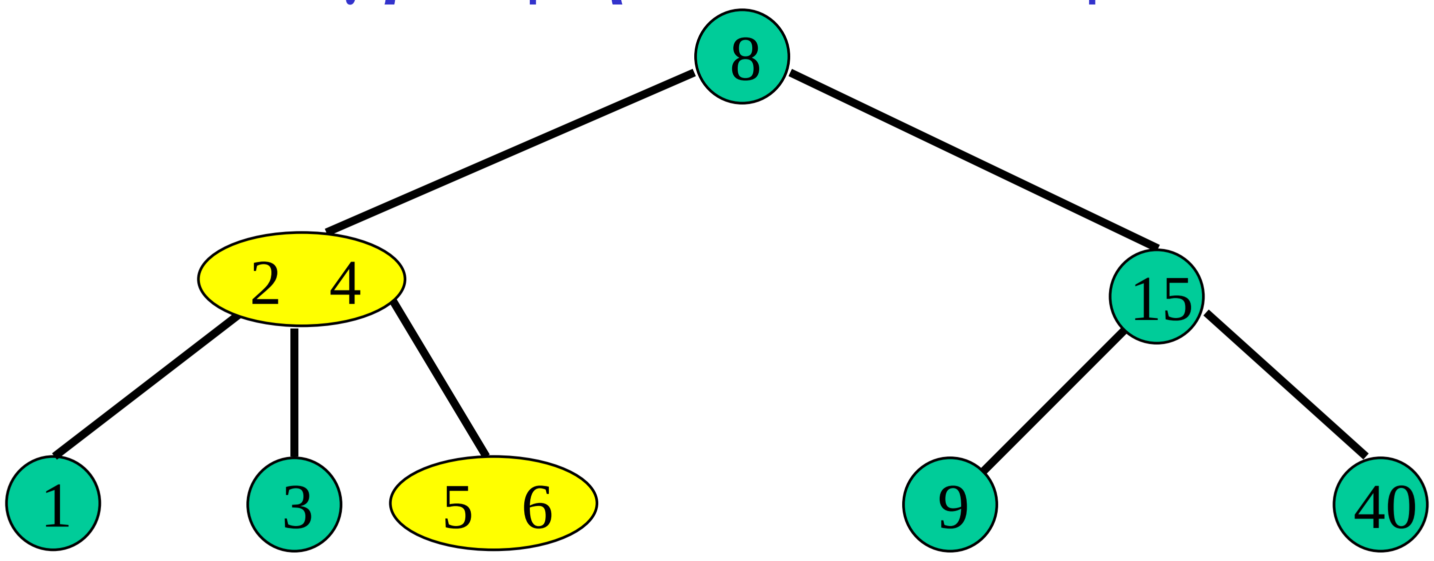
- Διαγραφή του 20.
- Διαγραφή από ένα 2-κόμβο.
- Έλεγξε ένα αδελφό και καθόρισε αν είναι ένας 3-κόμβος.
- Αν αυτό ισχύει, δανείσου ένα στοιχείο μέσω του πατέρα.

Διαγραφή από ένα φύλλο



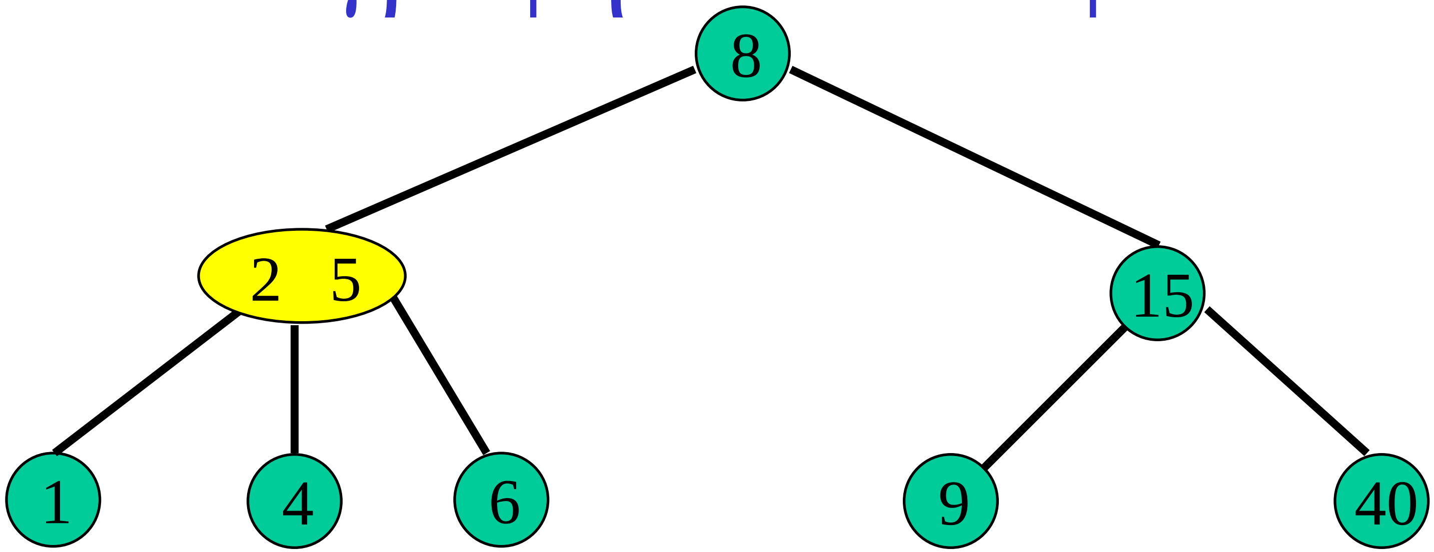
- Διαγραφή του 30.
- Διαγραφή από ένα 3-κόμβο.
- 3-κόμβος γίνεται ένας 2-κόμβος.

Διαγραφή από ένα φύλλο



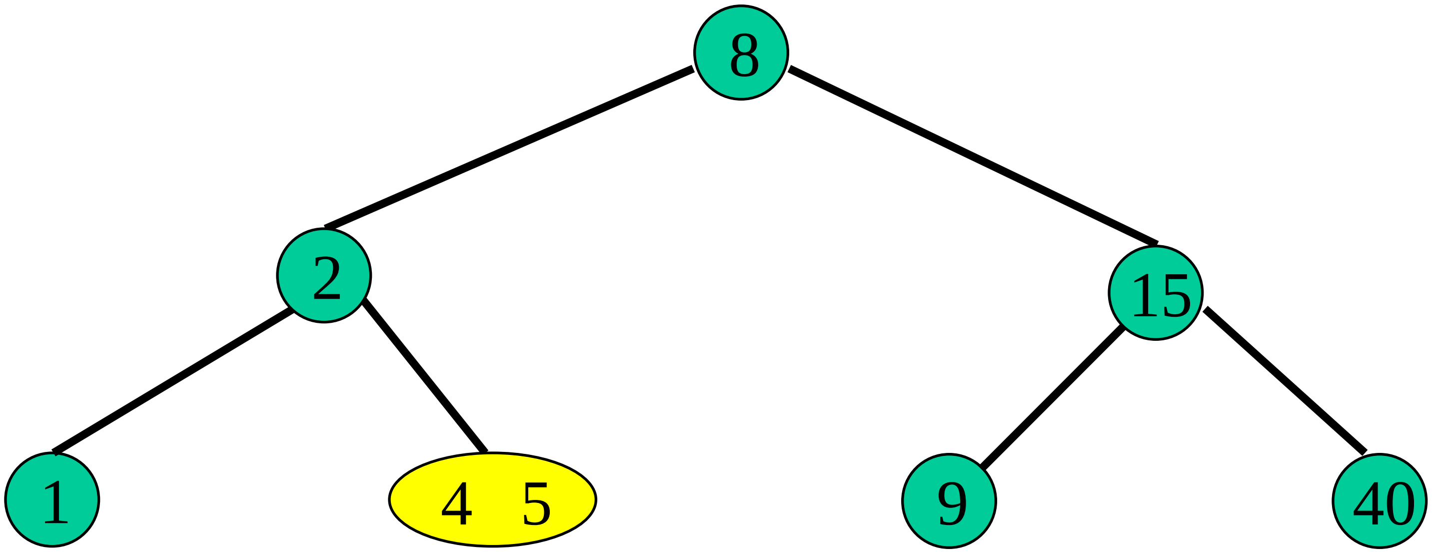
- Διαγραφή του 3.
- Διαγραφή από ένα 2-κόμβο.
- Έλεγξε ένα αδελφό και καθόρισε αν είναι ένας 3-κόμβος.
- Αν αυτό ισχύει, δανείσου ένα στοιχείο μέσω του πατέρα.

Διαγραφή από ένα φύλλο



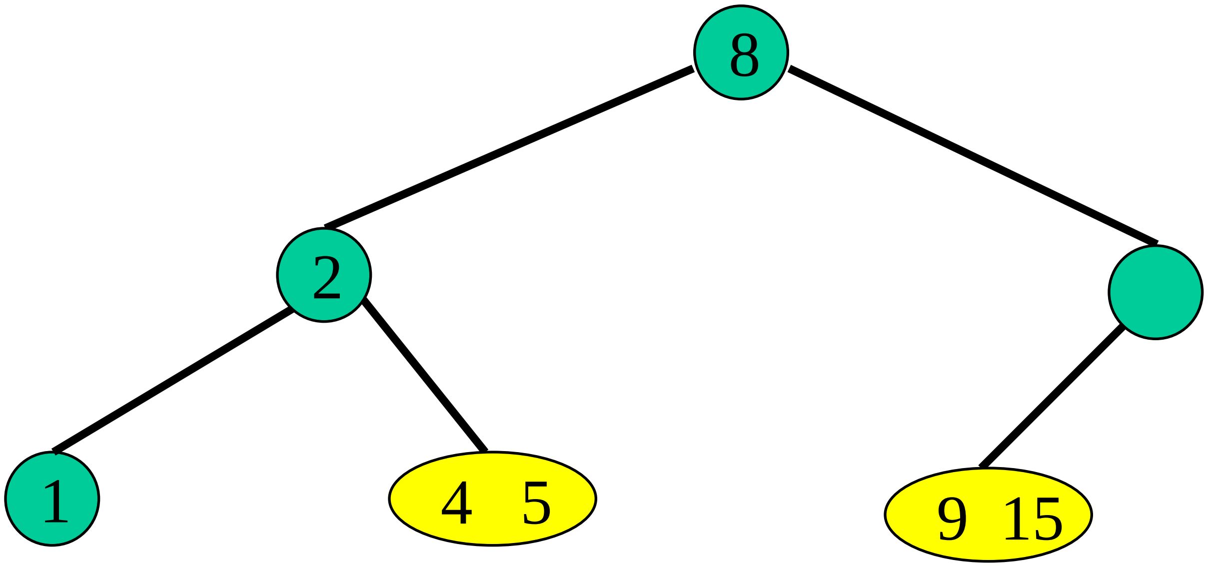
- Διαγραφή του 6.
- Διαγραφή από ένα 2-κόμβο.
- Έλεγξε ένα αδελφό και καθόρισε αν είναι ένας 3-κόμβος.
- Αν όχι, συνδύασε με τον αδελφό και ένα στοιχείο από τον πατέρα.

Διαγραφή από ένα φύλλο



- Διαγραφή του 40.
- Διαγραφή από ένα 2-κόμβο.
- Έλεγξε ένα αδελφό και καθόρισε αν είναι ένας 3-κόμβος.
- Αν όχι, συνδύασε με τον αδελφό και ένα στοιχείο από τον πατέρα.

Διαγραφή από ένα φύλλο

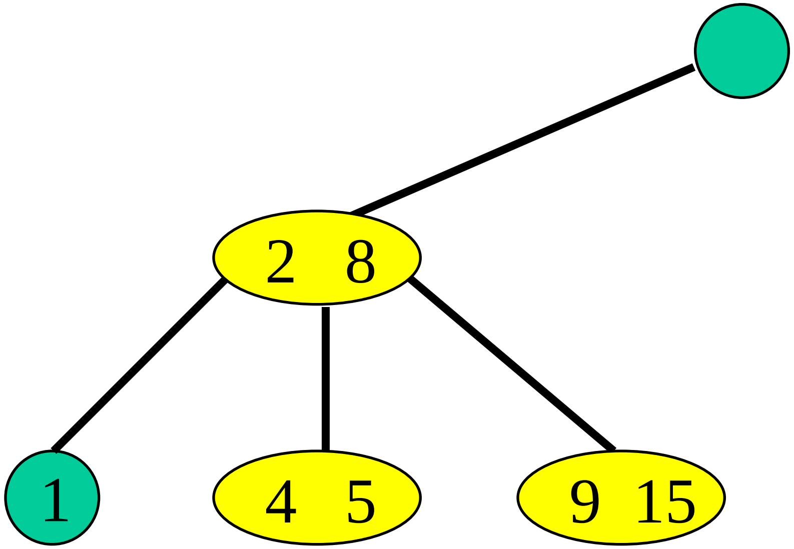


• Ο πατέρας ήταν ένας 2-κόμβος.

• Έλεγξε ένα αδελφό και καθόρισε αν είναι ένας 3-κόμβος.

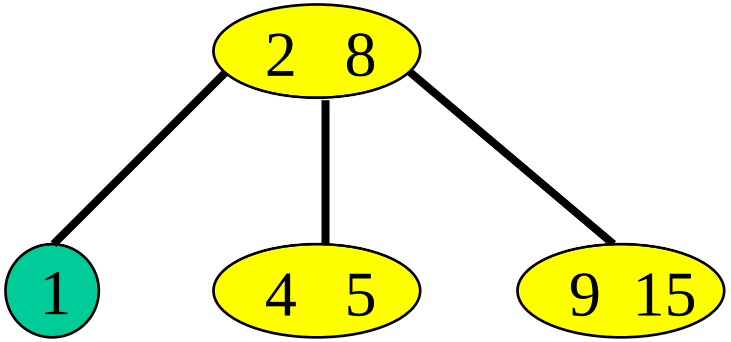
• Αν όχι, συνδύασε με τον αδελφό και ένα στοιχείο από τον πατέρα.

Διαγραφή από ένα φύλλο



- Ο πατέρας ήταν ένας 2-κόμβος
- Έλεγξε ένα αδελφό και καθόρισε αν είναι ένας 3-κόμβος.
- Δεν υπάρχει αδελφός. Όποτε είμαστε στη ρίζα.
- Διέγραψε τη κορυφή. Το αριστερό παιδί γίνεται η νέα ρίζα.

Διαγραφή από ένα φύλλο



- Το ύψος μειώνεται κατά 1.

Διαγραφή ενός στοιχείου

- Διαγραφή από ένα εσωτερικό κόμβο μετατρέπεται σε διαγραφή από ένα φύλλο.
- Το ελλιπές φύλλο μπορεί να προκαλέσει αλυσιδωτούς δανεισμούς και συγχωνεύσεις κόμβων με κατεύθυνση προς τη ρίζα.
- Ο ελλιπής κόμβος συγχωνεύεται με ένα αδελφό ο οποίος έχει ακριβώς ceil(m/2) – 1 στοιχεία.
- Μετά τη συγχώνευση, ο κόμβος έχει [ceil(m/2) – 2] (αρχικά στοιχεία) + [ceil(m/2) – 1] (στοιχεία του αδελφού) + 1 (από τον πατέρα) <= m –1 στοιχεία.