Θεματολογία σημερινής διάλεξης

1. Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες συναρτήσεων
   - Συναρτήσεις ένα προς ένα, επί, αμφιμονοσήμαντες
   - Σύνθεση και αντιστροφή συναρτήσεων
   - Μονοτονία, Περιοδικότητα, Αρτιότητα
2. Βασικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση
   - Πολυωνυμικές και ρητές
   - Εκθετικές και λογαριθμικές
   - Τριγωνομετρικές ή κυκλικές
   - Υπερβολικές
   - Αντίστροφες κυκλικές
   - Αντίστροφες υπερβολικές
   - Ακέραια μέρη
   - Απόλυτη τιμή
   - ... συνδυασμοί όλων των παραπάνω με κάθε δυνατό τρόπο.
3. Τριγωνομετρικές ταυτότητες και ανισότητες

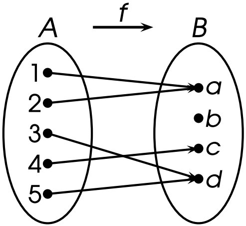
Τί είναι συνάρτηση;

Τί είναι συνάρτηση;

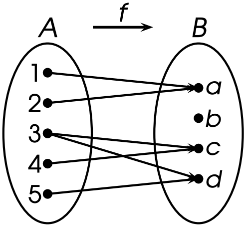
Μια **συνάρτηση** (ή αλλιώς **απεικόνιση**) f από το σύνολο A στο σύνολο B σημειώνεται με $f : A \to B$ και είναι μια διμελής σχέση μεταξύ των στοιχείων των A και B σύμφωνα με την οποία

- **κάθε** στοιχείο x του συνόλου A, το οποίο ονομάζεται **πρότυπο** αντιστοιχίζεται σε
- **ακριβώς ένα** στοιχείο y του συνόλου B, το οποίο ονομάζεται **εικόνα** του x και συμβολίζεται με $f(x)$.

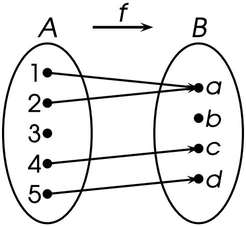
Τί είναι και τί δεν είναι συνάρτηση;



Είναι συνάρτηση
από το A στο B

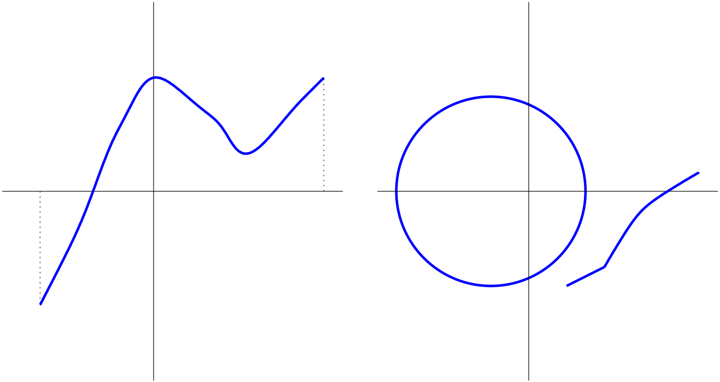


Δεν είναι συνάρτηση
από το A στο B



Δεν είναι συνάρτηση
από το A στο B

Τί είναι και τί δεν είναι συνάρτηση;



Είναι συνάρτηση

Δεν είναι συνάρτηση

Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$.

Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της απεικόνισης f και συμβολίζεται με D_f, ή $D(f)$ και γράφουμε f/A.

Το υποσύνολο του B που αποτελείται από όλες τις εικόνες των στοιχείων του A ονομάζεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με R_f, ή $R(f)$, ή $f(A)$.

Παρατήρηση

Όταν δίδεται ο τύπος μιας συνάρτησης f και δεν γνωρίζουμε ή δεν δίδεται το πεδίο ορισμού της f, τότε συνήθως θεωρούμε ως πεδίο ορισμού **το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που εφαρμόζεται ο τύπος της**.

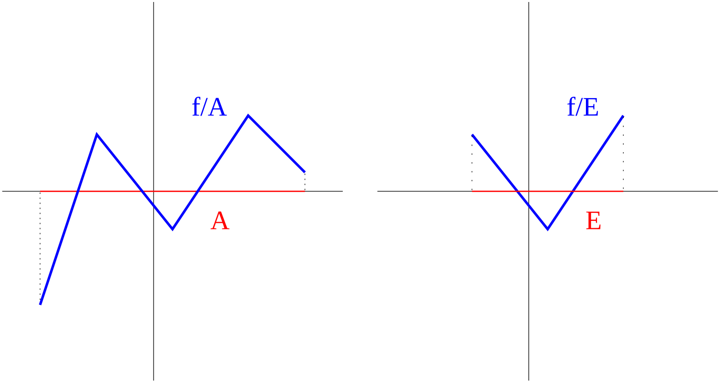
Περιορισμός συνάρτησης

Περιορισμός συνάρτησης

Αν $f : A \to B$ είναι μια συνάρτηση και $E \subseteq A$, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, η οποία ονομάζεται **περιορισμός της** f **στο** E, συμβολίζεται με f/E και αποτελείται από τα ζεύγη $(x, f(x))$, για τα οποία είναι $x \in E$, δηλαδή

$$f/E = \{(x, f(x)) \in f : x \in E\}.$$

Περιορισμός συνάρτησης



Ο περιορισμός της f στο E

Συναρτήσεις ένα προς ένα

Συναρτήσεις ένα προς ένα

Μια συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται **1-1 (ένα προς ένα)**, αν και μόνο αν διαφορετικά πρότυπα έχουν και διαφορετικές εικόνες, δηλαδή

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \qquad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in A.$$

Στις αποδείξεις συχνά χρησιμοποιείται η ισοδύναμη συνθήκη:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \qquad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in A,$$

η οποία με απλά λόγια δηλώνει ότι αν δύο εικόνες ταυτίζονται, τότε ταυτίζονται και τα πρότυπα από τα οποία προέρχονται, δηλαδή κάθε εικόνα προέρχεται από μοναδικό πρότυπο.

Συναρτήσεις επί

Συναρτήσεις επί

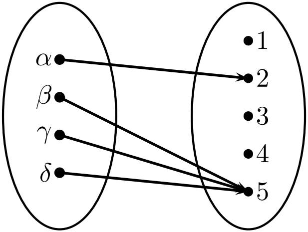
Μια συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται **επί (του B)**, αν και μόνο αν $B = f(A)$, δηλαδή αν κάθε στοιχείο του B αποτελεί εικόνα κάποιου προτύπου στο A.

Αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις

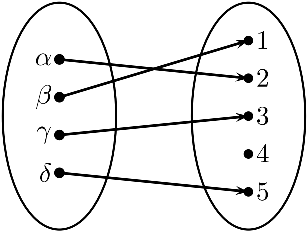
Αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη**, αν και μόνο αν είναι ένα προς ένα και επί.

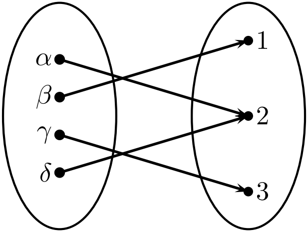
Παραδείγματα



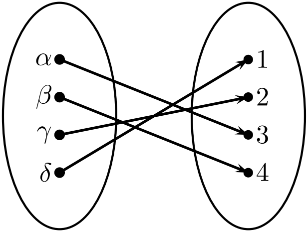
Δεν είναι 1-1, δεν είναι επί



Είναι 1-1, δεν είναι επί



Δεν είναι 1-1, είναι επί



Είναι 1-1 και είναι επί
δηλαδή είναι αμφιμονοσήμαντη

Πώς κατασκευάζουμε νέες συναρτήσεις από γνωστές;

Πώς κατασκευάζουμε νέες συναρτήσεις από γνωστές;

Ένας μηχανισμός κατασκευής νέων συναρτήσεων από γνωστές είναι η σύνθεση.

Σύνθεση συναρτήσεων

Αν για τις συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : \Gamma \to \Delta$, ισχύει ότι $f(A) \cap \Gamma \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχουν εικόνες της f που είναι πρότυπα της g, τότε ορίζεται **η σύνθεση της** g **με την** f ως μια συνάρτηση **με πεδίο ορισμού το** $E = \{x \in A : f(x) \in \Gamma\}$, η οποία συμβολίζεται με $g \circ f$ και αποτελείται από τα ζεύγη

$$g \circ f = \{(x, g(f(x))) : x \in E\},$$

δηλαδή

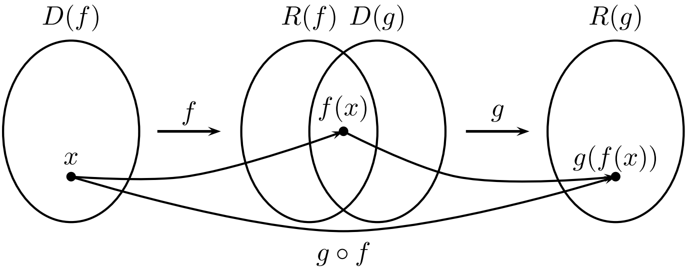
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{για κάθε } x \in E.$$

Προσοχή!

Στη σύνθεση $g \circ f$ η σειρά εφαρμογής είναι **από τα δεξιά προς τα αριστερά!**.

Πώς κατασκευάζουμε νέες συναρτήσεις από γνωστές;

Σχηματικά έχουμε



Παρατήρηση

Συνήθως ισχύει ότι $g \circ f \neq f \circ g$.

Πώς κατασκευάζουμε νέες συναρτήσεις από γνωστές;

Ένας άλλος μηχανισμός κατασκευής νέων συναρτήσεων από γνωστές είναι η αντιστροφή.

Αντίστροφη συνάρτηση:

Αν η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε ορίζεται μια (μοναδική) συνάρτηση $g : B \to A$, τέτοια ώστε

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x, \qquad \text{για κάθε } x \in A,$$

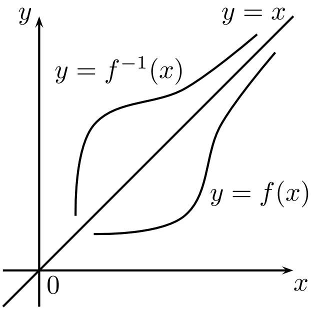
δηλαδή η g απεικονίζει κάθε εικόνα στο πρότυπό της. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **αντίστροφη της** f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Παρατήρηση

Κάθε 1-1 σύναρτηση $f : A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη από το A στο $f(A)$, δηλαδή είναι αμφιμονοσήμαντη από το πεδίο ορισμού της στο πεδίο τιμών της. ΄Αρα, ορίζεται η αντίστροφή της $f^{-1} : f(A) \to A$.

Πώς κατασκευάζουμε νέες συναρτήσεις από γνωστές;

Σχηματικά:



Παρατήρηση

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Βασικές ιδιότητες πραγματικών συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η f ονομάζεται

- **Αύξουσα**, αν και μόνο αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- **Γνησίως αύξουσα**, ανν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- **Φθίνουσα**, ανν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- **Γνησίως φθίνουσα**, ανν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- **Μονότονη**, ανν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
- **Γνησίως μονότονη**, ανν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι 1-1 άρα είναι και αντιστρέψιμη.

Βασικές ιδιότητες πραγματικών συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η f ονομάζεται

- **Περιοδική**, αν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}^*$, τέτοιο ώστε $x + \tau \in A$ και $f(x + \tau) = f(x)$, για κάθε $x \in A$.
  Το τ ονομάζεται **περίοδος της** f και **δεν εξαρτάται από το** x.
  Το ελάχιστο θετικό τ που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση (αν υπάρχει), ονομάζεται **πρωτεύουσα** ή θεμελιώδης περίοδος της f.

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = 1$ είναι περιοδική, χωρίς όμως πρωτεύουσα περίοδο.
Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι περιοδική.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}^*$ ώστε

$$f(x) = f(x + \tau) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

τότε

$$x^2 = (x + \tau)^2 \Leftrightarrow x^2 = x^2 + 2x\tau + \tau^2 \Leftrightarrow \tau(2x + \tau) = 0 \Leftrightarrow \tau = -2x$$

Άρα, αφού το τ εξαρτάται από το x, η $f(x) = x^2$ δεν είναι περιοδική.

Βασικές ιδιότητες πραγματικών συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η f ονομάζεται

- **΄Αρτια**, αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.
- **Περιττή**, αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y, ενώ μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρικής ως προς την αρχή των αξόνων.

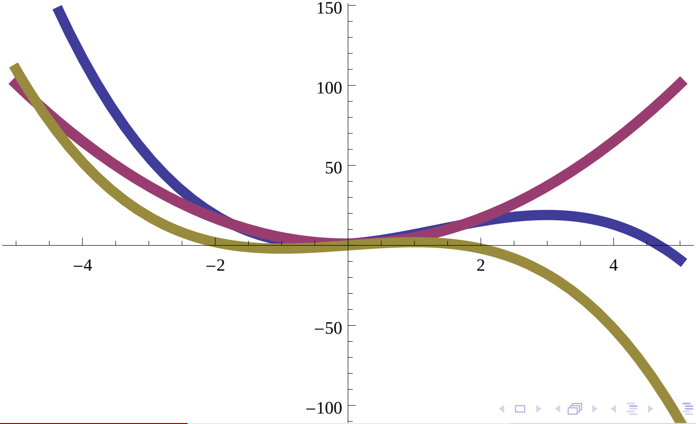
Κάθε πραγματική συνάρτηση f/A μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα μιας περιττής και μιας άρτιας συνάρτησης, με την προϋπόθεση ότι $x \in A \Rightarrow -x \in A$, ως εξής:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Η συνάρτηση $A(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ είναι άρτια και αποτελεί το **άρτιο μέρος** της f, ενώ η συνάρτηση $\Pi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ είναι περιττή και αποτελεί το **περιττό μέρος** της f.

Βασικές ιδιότητες πραγματικών συναρτήσεων

Έστω $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x + 1$. (μπλε γραμμή)
Το άρτιο μέρος της f είναι η συνάρτηση $A(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = 4x^2 + 1$. (μωβ γραμμή)
Το περιττό μέρος της f είναι η συνάρτηση $\Pi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = -x^3 + 3x$. (καφέ γραμμή).



Βασικές ιδιότητες πραγματικών συναρτήσεων

- **΄Ανω φραγμένη**, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός M ονομάζεται **άνω φράγμα** της f.
- **Κάτω φραγμένη**, αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $m \leq f(x)$, για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός m ονομάζεται **κάτω φράγμα** της f.
- **Φραγμένη**, αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.
- **Απολύτως φραγμένη**, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in A$.

Παρατήρηση

΄Αμεσα προκύπτει ότι μια συνάρτηση είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απολύτως φραγμένη.

Βασικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση.

Μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **πολυώνυμο του** x ή **πολωνυμική** (ως προς x) αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και σταθερές $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Οι συναρτήσεις $\frac{x^3}{17} + x^2$ και 8 είναι πολυώνυμα του x.
Η συνάρτηση $\sqrt{x} + x$ δεν είναι πολυωνυμική.

Μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **ρητή** αν και μόνο αν είναι πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων.
Οι συναρτήσεις $\frac{x^2+1}{3x}$, $x + \frac{1}{x}$ και $x^2 + 1$ είναι ρητές.
Η συνάρτηση $\sqrt{x}$ δεν είναι ρητή.

Παρατήρηση

Μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **πολυωνυμική ως προς μια άλλη συνάρτηση** $g(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ και σταθερές $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(x) = a_0 + a_1 g(x) + a_2 g^2(x) + \cdots + a_n g^n(x).$$

Η συνάρτηση $f(x) = 4\cos^3 x + 2\cos x + 1$ είναι πολυωνυμική ως προς $\cos x$.
Η συνάρτηση $f(x) = x\cos x + 2$ δεν είναι πολυωνυμική ως προς $\cos x$.
Η συνάρτηση $f(x) = 2(\ln x)^4 + \frac{1}{\ln x}$ δεν είναι πολυωνυμική ως προς $\ln x$.

Παρατήρηση

Μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **ρητή ως προς μια άλλη συνάρτηση** $g(x)$ αν και μόνο αν είναι πηλίκο συναρτήσεων που είναι πολυωνυμικές ως προς τη συνάρτηση $g(x)$.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\cos^2 x+1}{\cos^2 x-1}$ είναι ρητή ως προς $\cos x$.

Βασικές συναρτήσεις: Συναρτήσεις και απόλυτες τιμές

Απόλυτη τιμή

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad |x| = \max\{x, -x\}.$$

Από τον ορισμό, άμεσα προκύπτουν οι ιδιότητες

$$-|x| \leq x \leq |x| \qquad \text{και} \qquad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \qquad x, a \in \mathbb{R},$$

βάσει των οποίων αποδεικνύεται η επόμενη πολύ σημαντική ανισότητα:

Τριγωνική ανισότητα

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ακέραιο μέρος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικός ακέραιος, ο οποίος συμβολίζεται με $[x]$, τέτοιος ώστε

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Ισοδύναμα, ισχύει ότι $[x] \leq x < [x] + 1$.

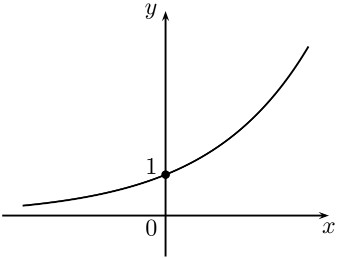
$[2.1] = 2$
$[2] = 2.$
$[-2.1] = -3.$
$[1/2] = 0.$
$[-1/2] = -1.$

Βασικές συναρτήσεις: Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

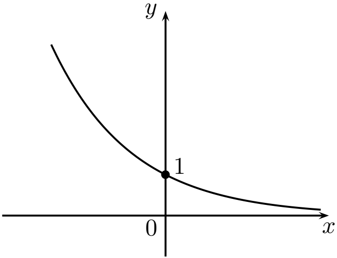
Η **εκθετική συνάρτηση** $f(x) = \alpha^x$, **ορίζεται για κάθε** $x \in \mathbb{R}$, και για κάθε πραγματικό αριθμό α, με $0 < \alpha \neq 1$.
Εύκολα προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$.
Και στις δύο περιπτώσεις είναι γνησίως μονότονη, πράγμα που σημαίνει ότι είναι ένα προς ένα, επομένως είναι και αντιστρέψιμη, δηλαδή υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $y = \alpha^x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **λογαριθμική**, συμβολίζεται με $\log_\alpha$ και (δεδομένου ότι $\alpha^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$) **ορίζεται στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών**.
Έτσι, προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός του λογαρίθμου με βάση α ενός θετικού πραγματικού αριθμού y:

$$y = \alpha^x \Leftrightarrow \log_\alpha y = x \qquad (x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \neq 1). \tag{1}$$

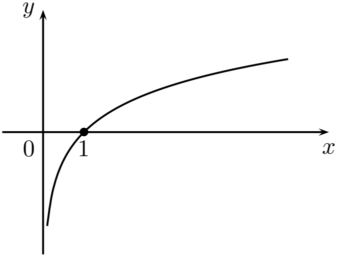
Βασικές συναρτήσεις: Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση



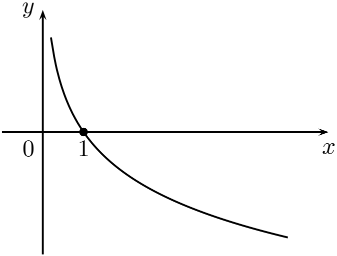
$y = a^x, a > 1$



$y = a^x, 0 < a < 1$



$y = \log_a x, a > 1$



$y = \log_a x, 0 < a < 1$

Από τον ορισμό αυτό, άμεσα προκύπτουν οι ιδιότητες :

i) $\log_\alpha 1 = 0$

ii) $\log_\alpha \alpha = 1$

iii) $x = \alpha^{\log_\alpha x} = \log_\alpha \alpha^x$

iv) $\log_\alpha x^k = k \log_\alpha x$

v) $\log_\alpha(xy) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$

vi) $\log_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) = \log_\alpha x - \log_\alpha y$

vii) $\log_\alpha x = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$

viii) $\alpha^{\log_\beta c} = c^{\log_\beta \alpha}$

Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι επόμενες ανισότητες :

$$e^x \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

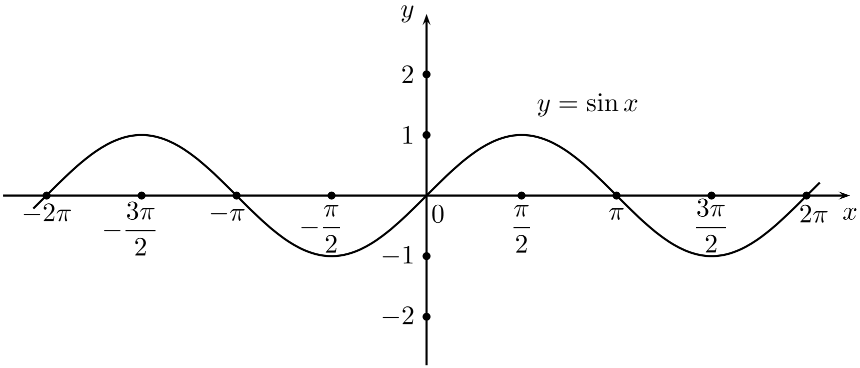
$$\ln x \leq x - 1, \quad x > 0 \tag{3}$$

Αποδείξεις ιδιοτήτων.

1. Αρκεί να τεθεί $x = 0$ στη σχέση (1).
2. Αρκεί να τεθεί $x = 1$ στη σχέση (1).
3. Αρκεί να τεθεί στη σχέση (1) $x = \log_\alpha y$, για την πρώτη ισότητα και $y = \alpha^x$ για τη δεύτερη.
4. $\log_\alpha x^k = \log_\alpha(\alpha^{\log_\alpha x})^k = \log_\alpha(\alpha^{k\log_\alpha x}) = k\log_\alpha x$.
5. $\log_\alpha(xy) = \log_\alpha(\alpha^{\log_\alpha x}\alpha^{\log_\alpha y}) = \log_\alpha(\alpha^{\log_\alpha x+\log_\alpha y}) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$.
6. Ομοίως.
7. $$\log_\alpha x = \frac{\log_\beta \alpha}{\log_\beta \alpha}\log_\alpha x = \frac{\log_\beta \alpha^{\log_\alpha x}}{\log_\beta \alpha} = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}.$$
8. $\alpha^{\log_\beta c} = \beta^{\log_\beta \alpha^{\log_\beta c}} = \beta^{\log_\beta c \log_\beta \alpha} = (\beta^{\log_\beta c})^{\log_\beta \alpha} = c^{\log_\beta \alpha}$.

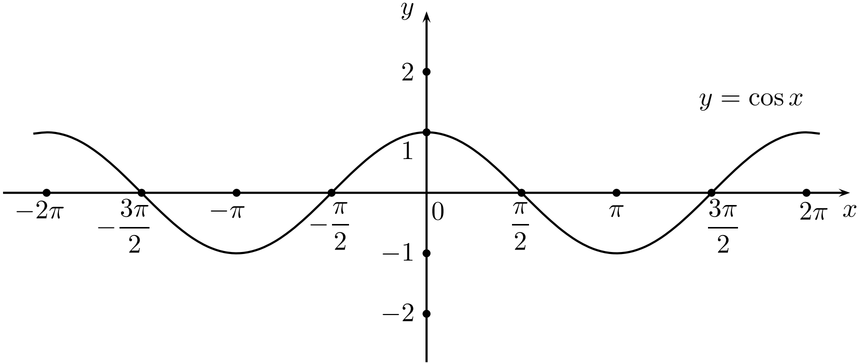
$\square$

Βασικές συναρτήσεις: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

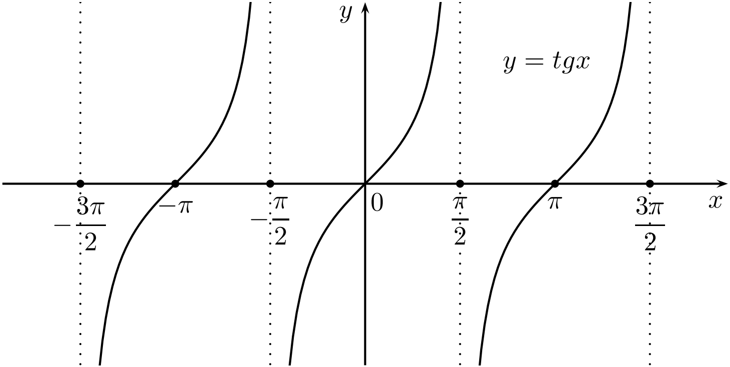


Η συνάρτηση **ημίτονο** $f(x) = \sin x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$.

Είναι φραγμένη, περιττή και περιοδική, με πρωτεύουσα περίοδο το 2π.

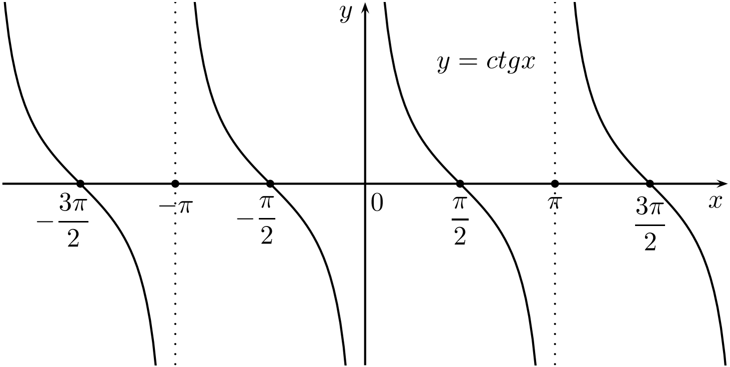


Η συνάρτηση **συνημίτονο** $f(x) = \cos x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$.
Είναι φραγμένη, άρτια και περιοδική, με πρωτεύουσα περίοδο το 2π.

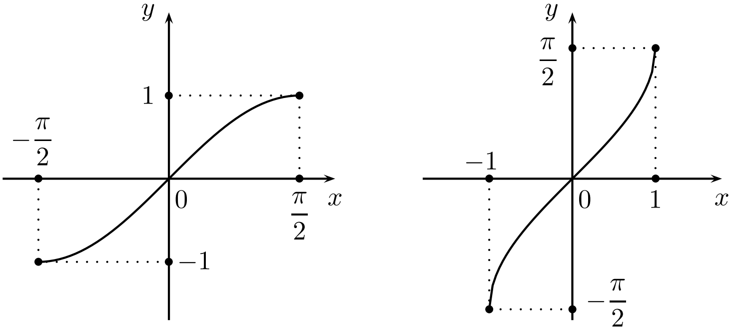


Η συνάρτηση **εφαπτομένη** $f(x) = \operatorname{tg} x$ ή $\tan x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
Είναι περιττή και περιοδική, με πρωτεύουσα περίοδο το π.

Βασικές συναρτήσεις: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις



Η συνάρτηση **συνεφαπτομένη** $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ ή $\cot x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
Είναι περιττή και περιοδική, με πρωτεύουσα περίοδο το π.

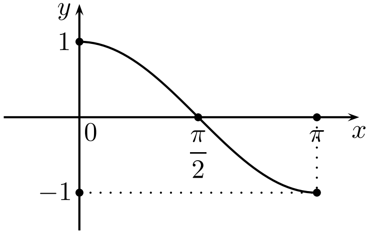


$y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad$ $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$

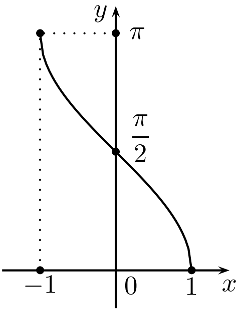
Ο περιορισμός της συνάρτησης $\sin x$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται **τόξο ημιτόνου** και συμβολίζεται με

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

Βασικές συναρτήσεις: Αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις



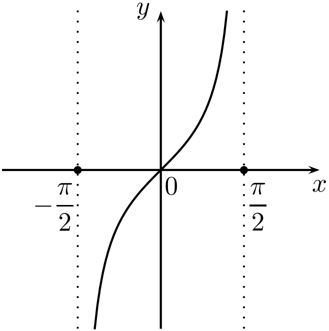
$y = \cos x, x \in [0, \pi]$



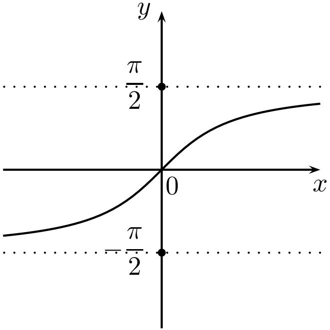
$y = \arccos x, x \in [-1, 1]$

Ο περιορισμός της συνάρτησης $\cos x$ στο διάστημα $[0, \pi]$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται **τόξο συνημιτόνου** και συμβολίζεται με

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$



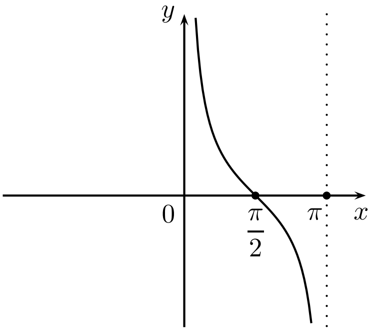
$y = tgx, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



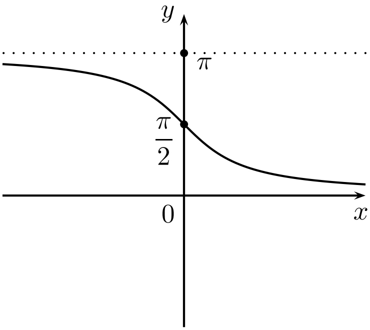
$y = arctgx, x \in \mathbb{R}$

Ο περιορισμός της συνάρτησης $\operatorname{tg} x$ στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται **τόξο εφαπτομένης** και συμβολίζεται με

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$



$y = ctgx, x \in (0, \pi)$



$y = arcctgx, x \in \mathbb{R}$

Ο περιορισμός της συνάρτησης $\operatorname{ctg} x$ στο διάστημα $(0, \pi)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται **τόξο συνεφαπτομένης** και συμβολίζεται με

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi).$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις

$$\textbf{υπερβολικό συνημίτονο } \cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty),$$

$$\textbf{υπερβολικό ημίτονο } \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\textbf{υπερβολική εφαπτομένη } \mathrm{tgh} : \mathbb{R} \to (-1, 1),$$

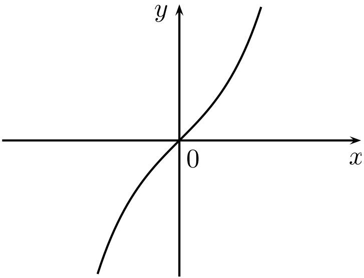
$$\textbf{υπερβολική συνεφαπτομένη } \mathrm{ctgh} : \mathbb{R}^* \to (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

ορίζονται με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$, ως εξής:

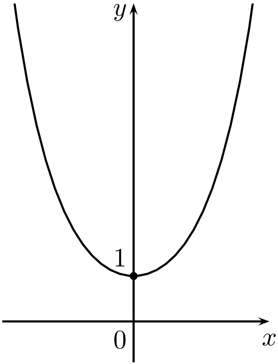
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{tgh}\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \mathrm{ctgh}\, x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Συγκεκριμένα, οι cosh και sinh αποτελούν αντίστοιχα το άρτιο και περιττό μέρος της e^x, αφού η πρώτη είναι άρτια και η δεύτερη περιττή και ισχύει ότι $e^x = \cosh x + \sinh x$.

Βασικές συναρτήσεις: Υπερβολικές συναρτήσεις

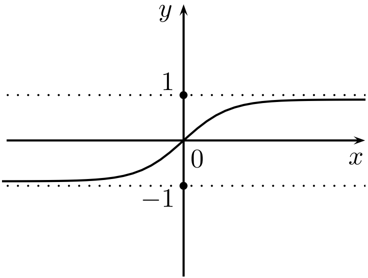


$y = sinhx, x \in \mathbb{R}$

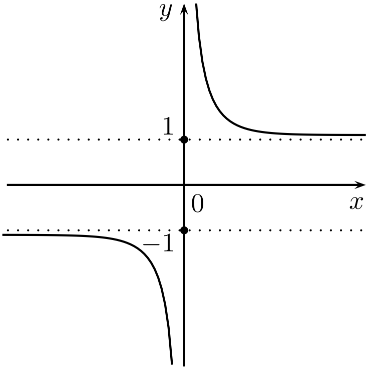


$y = coshx, x \in \mathbb{R}$

Βασικές συναρτήσεις: Υπερβολικές συναρτήσεις



$y = tghx, x \in \mathbb{R}$



$y = ctghx, x \in \mathbb{R}^*$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ικανοποιούν ταυτότητες παρόμοιες με αυτές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Ο κανόνας του Osborn.

Σύμφωνα με τον κανόνα του Osborn, αν σε μια τριγωνομετρική ταυτότητα αντικαταστήσουμε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό με τον αντίστοιχο υπερβολικό και αλλάξουμε το πρόσημο κάθε όρου που περιέχει γινόμενο δύο ημιτόνων, τότε προκύπτει η αντίστοιχη υπερβολική ταυτότητα.

Ο κανόνας του Osborn χρησιμεύει για τον προσδιορισμό των υπερβολικών ταυτοτήτων, όχι όμως για την απόδειξή τους. Κάθε υπερβολική ταυτότητα, αφού προσδιορισθεί από την αντίστοιχη τριγωνομετρική, πρέπει να αποδειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού των υπερβολικών αριθμών.

Βασικές συναρτήσεις: Υπερβολικές συναρτήσεις

Παραδείγματα:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \longrightarrow \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad \longrightarrow \quad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

Βασικές συναρτήσεις : Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις sinh, tgh, ctgh και ο περιορισμός της cosh στο διάστημα $[0, +\infty)$ είναι αμφιμονοσήμαντες, επομένως ορίζονται οι αντίστροφές τους :

$$\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arccosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty),$$

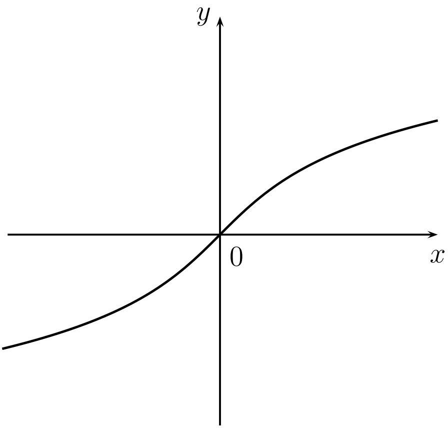
$$\operatorname{arctgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arcctgh} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}^*,$$

με

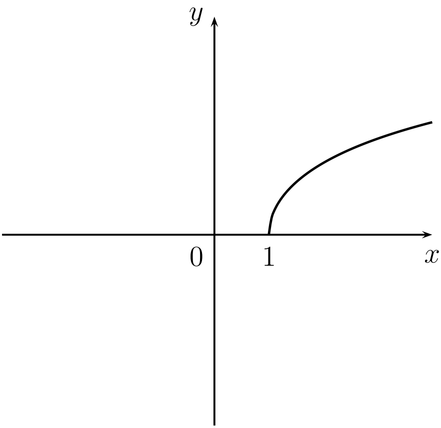
$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad \operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{arctgh} x = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}, \qquad \operatorname{arcctgh} x = \ln\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

Βασικές συναρτήσεις : Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

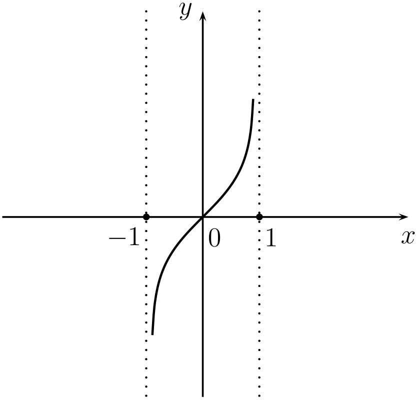


$y = arcsinhx, x \in \mathbb{R}$

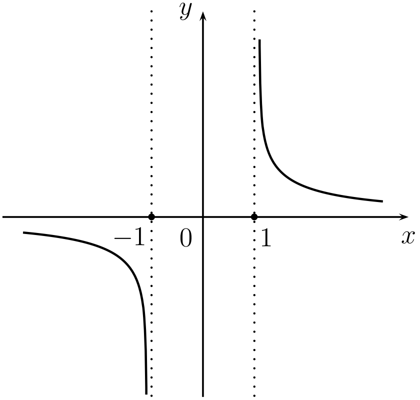


$y = arccoshx, x \in [1, +\infty)$

Βασικές συναρτήσεις : Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις



$y = arctghx, x \in (-1, 1)$



$y = arcctghx, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Επανάληψη - Εύρεση τιμών αντίστροφων συναρτήσεων

Για να υπολογίσουμε την τιμή $f^{-1}(x)$ της συνάρτησης f^{-1}, η οποία είναι η αντίστροφη της f, στη θέση x, εφαρμόζουμε απευθείας τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Παραδείγματα:

- Να υπολογιστεί το $\log_2 32$.
  Είναι $2^x = y \Leftrightarrow \log_2 y = x$. Επειδή $2^5 = 32$, έπεται ότι $\log_2 32 = 5$.
- Να υπολογιστεί το $\arccos 0$.
  Είναι $\cos x = y \Leftrightarrow \arccos y = x$, όπου $x \in [0, \pi]$. Επειδή $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, έπεται ότι $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.
- Να υπολογιστεί το $\mathrm{arctg}\, 1$.
  Είναι $\mathrm{tg}\, x = y \Leftrightarrow \mathrm{arctg}\, y = x$. Επειδή $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{4} = 1$, έπεται ότι $\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$.
- Να υπολογιστεί το $\mathrm{arccosh}\, 1$.
  Είναι $\cosh x = y \Leftrightarrow \mathrm{arccosh}\, y = x$. Επειδή $\cosh 0 = 1$, έπεται ότι $\mathrm{arccosh}\, 1 = 0$.

Τριγωνομετρικοί τύποι

Βασικές ιδιότητες :

- $\cos(-x) = \cos x$ (δηλαδή η συνάρτηση $\cos x$ είναι άρτια)
- $\sin(-x) = -\sin x$ (δηλαδή η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιττή)
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Βασικές τιμές :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\operatorname{ctg} x$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Τριγωνομετρικοί τύποι

Από την επόμενη ταυτότητα προκύπτουν όλες οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{4}$$

1. $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ (Θέτοντας στην (4) $y = \frac{\pi}{2}$)
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (Θέτοντας στην (4) $y = -x$)

3. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ (Θέτοντας στην (4) $-y$ αντί για y)
4. $2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$ (Προσθέτοντας την προηγούμενη στην (4))
5. $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ (Ομοίως, με αφαίρεση)

Τριγωνομετρικοί τύποι

6. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ (Θέτοντας στην (4) $x - \frac{\pi}{2}$ αντί για x)
7. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ (Θέτοντας στην προηγούμενη $-y$ αντί για y)
8. $2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ (Προσθέτοντας τις 2 προηγούμενες)
9. $2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ (Ομοίως, με αφαίρεση)

10. $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ (Θέτοντας $y = x$ στην προηγούμενη)
Θέτοντας $x = a + b$ και $y = a - b$, τότε $a = \frac{x+y}{2}$ και $b = \frac{x-y}{2}$, οπότε προκύπτουν:
11. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (από την 8η),
12. $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ (από την 9η),
13. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (από την 4η),
14. $\cos y - \cos x = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ (από την 5η).
15. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ και $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (από τη 2η), οπότε
$\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.
16. $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ και $\cos 2x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ (από τη 2η και τη 10η), οπότε
$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

Τριγωνομετρικοί τύποι

Επίσης, με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου (βλέπε φυλλάδιο), αποδεικνύεται η ακόλουθη ανισότητα

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

από την οποία προκύπτουν οι ανισότητες

$$|\sin x| \leq |x|, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}.$$

Η τελευταία χρησιμοποιείται στην απόδειξη του βασικού ορίου:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ασκήσεις προς επίλυση

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 47, Κεφάλαιο 1)

Δίδονται οι συναρτήσεις f, g, με

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad g(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}.$$

Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις αυτές είναι ίσες.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 49, Κεφάλαιο 1)

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}/[-1, 1]$$

είναι 1-1 και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Ασκήσεις προς επίλυση

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 52, Κεφάλαιο 1)

Να αποδειχθεί ότι κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και ότι η αντίστροφή της είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 55, Κεφάλαιο 1)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|, \qquad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

όπου $k \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $F(x) = f(x) - kx$ είναι φθίνουσα.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 59, Κεφάλαιο 1)

Αν $f/\mathbb{R}$ *είναι μια πραγματική, όχι σταθερή, συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση*

$$f(x) + f(t) = 2f\left(\frac{x+t}{2}\right) f\left(1 + \frac{x-t}{2}\right),$$

για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$. *Να αποδειχθεί ότι* $f(1) = 1$.
Αν επιπλέον $f(0) = 0$, *να αποδειχθεί ότι*

- *Η* f *είναι περιττή.*
- $f(x) + f(x+2) = 0$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.
- *Η* f *είναι περιοδική με περίοδο 4.*

Ασκήσεις προς επίλυση

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 60, Κεφάλαιο 1)

Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

$$f(x) = \log_a \frac{1-x}{1+x}, \quad g(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1}), \quad h(x) = x\frac{1-a^x}{1+a^x},$$

όπου $0 < a \neq 1$.

ʼΑσκηση (Λυμένη άσκηση 62, Κεφάλαιο 1)

Δίδονται οι συναρτήσεις $f, g/\mathbb{R}$, *με*

$$f(x) = \frac{1-2e^x}{1+3e^x}, \quad g(x) = 1 - e^{2x}.$$

Να αποδειχθεί ότι η f *είναι 1-1 και να ευρεθεί η αντίστροφή της.*
Να επιλυθεί η εξίσωση $(g \circ f^{-1})(x) = 0$.

Ασκήσεις προς επίλυση

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 65, Κεφάλαιο 1)

Δίνεται η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$(\cosh x)f(x) - (\sinh x)f(-x) = \frac{1}{2}x^2 \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f και να αποδειχθεί ότι είναι φραγμένη.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 66, Κεφάλαιο 1)

Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 19, Κεφάλαιο 1)

Να αποδειχθεί ότι η σύνθεση δύο αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$ είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι ισχύει η σχέση

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 20, Κεφάλαιο 1)

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με τύπο

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}$$

είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

(Υπόδειξη: Να εκφραστεί η f ως σύνθεση 1-1 απεικονίσεων και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί η άλυτη άσκηση 19.)

Ασκήσεις προς επίλυση

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 23, Κεφάλαιο 1)

Αν μια συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ *ικανοποιεί τις συνθήκες:*

$$f(x) \leq x \qquad \textit{και} \qquad f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$*, να αποδειχθεί ότι* $f(x) = x$*.*

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 74, Κεφάλαιο 1)

Αν για μια συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ *ισχύει η σχέση:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$*, να αποδειχθεί ότι η* f *είναι περιττή.*

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 75, Κεφάλαιο 1)

Αν μια συνάρτηση $f/\mathbb{R}$, διαφορετική από τη μηδενική, ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι άρτια.
Αν επιπλέον, υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}^*$, με $f(\rho)=0$, να αποδειχθεί ότι η f είναι περιοδική, με περίοδο 4ρ.