ΔΙΑΛΕΞΗ 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Περιεχόμενα διάλεξης:

Ανισότητες Bernoulli, Cauchy, Cauchy-Schwarz

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

1. Ανισότητα Bernoulli

Για κάθε $\mathbf{x > -1}$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$\mathbf{(1+x)^n \geq 1+nx}.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $n = 1$ ή $x = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 41

Να αποδειχθεί η ανισότητα του Bernoulli.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί επαγωγικά ότι $(1+x)^n \geq 1+nx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $x > -1$.

Προφανώς, για $n = 1$ ισχύει ως ισότητα.

Υποτίθεται ότι η ανισότητα ισχύει για $n = \kappa$, δηλαδή

$$(1+x)^\kappa \geq 1+\kappa x \qquad (1)$$

και θα αποδειχθεί για $n = \kappa + 1$, δηλαδή

$$(1+x)^{\kappa+1} \geq 1+(\kappa+1)x \qquad (2)$$

Πραγματικά, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) επί τον θετικό αριθμό $1+x$ προκύπτει ότι

$$(1+x)^{\kappa+1} \geq (1+x)(1+\kappa x) = 1+(\kappa+1)x+\kappa x^2 \geq 1+(\kappa+1)x.$$

Άρα η σχέση (2) ισχύει, και επομένως η ανισότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Παρατήρηση

Από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι για $x \neq 0$ η ισότητα ισχύει μόνο για $n = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{-n} > \frac{5}{6}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{-n} &= \left(\frac{6n+1}{6n}\right)^{-n} \\ &= \left(\frac{6n}{6n+1}\right)^{n} = \left(\frac{6n+1-1}{6n+1}\right)^{n} \\ &= \left(1-\frac{1}{6n+1}\right)^{n} \\ &\geq 1-n\cdot\frac{1}{6n+1} \\ &= \frac{5n+1}{6n+1} \\ &> \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Αφού

$$\frac{5n+1}{6n+1} > \frac{5}{6} \Leftrightarrow 30n+6 > 30n+5 \Leftrightarrow 6 > 5$$

Συμβολισμός: $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$.

Για $n\in\mathbb{N}^*$, συμβολίζουμε με [n] το σύνολο των ακεραίων από 1 έως n, δηλαδή

$$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$$

Παράδειγμα: Για $n=5$, είναι $[5]=\{1,2,3,4,5\}$.

Ο παραπάνω συμβολισμός δεν πρέπει να συγχέεται με το γνωστό συμβολισμό του ακεραίου μέρους [x] ενός πραγματικού αριθμού x.

Υπενθυμίζεται ότι το ακέραιο μέρος [x] ενός πραγματικού αριθμού x, είναι ο μέγιστος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος του x, δηλαδή

$$[x]\le x<[x]+1$$

Παραδείγματα:

$$[2.7]=2,\qquad [7/4]=1,\qquad [-3.5]=-4.$$

2. Ανισότητα Cauchy

Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ισχύει ότι

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω δύο ανισότητες ισχύει γενικότερα όταν $\alpha_i \geq 0$ για κάθε $i \in [n]$ και η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη. Πράγματι, αν εφαρμοσθεί η πρώτη ανισότητα για τους αριθμούς $\frac{1}{\alpha_i}$ αντί α_i για κάθε $i \in [n]$, προκύπτει ότι

$$\frac{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\alpha_2} \cdots \frac{1}{\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}$$

Η ισότητα αληθεύει μόνο όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.
Οι παραστάσεις

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}, \ \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \ \text{και} \ \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}$$

ονομάζονται **αριθμητικός**, **γεωμετρικός** και **αρμονικός μέσος** αντίστοιχα των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \qquad (1)$$

όπου $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \ge 0,\ n \in \mathbb{N}^*$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η ανισότητα προφανώς ισχύει όταν υπάρχει $i \in [n]$ με $\alpha_i = 0$, αρκεί να αποδειχθεί στην περίπτωση που $\alpha_i > 0$ για κάθε $i \in [n]$.

Αν τεθεί $x_i = \dfrac{\alpha_i}{\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}$, για κάθε $i \in [n]$, τότε

$$x_1x_2\cdots x_n = \frac{\alpha_1}{\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}\cdot\frac{\alpha_2}{\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}\cdots\frac{\alpha_n}{\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}$$

$$= \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\left(\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\right)^n} = 1$$

και

$$\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \Leftrightarrow n \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow n \le x_1+x_2+\cdots+x_n$$

Κατόπιν τούτων, η απόδειξη της ανισότητας (1) ανάγεται στην απόδειξη της ανισότητας

$$n \le x_1+x_2+\cdots+x_n \qquad (2)$$

όπου $x_i > 0$ για κάθε $i \in [n]$ και $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.

Η απόδειξη της ανισότητας (2) θα γίνει με επαγωγή.

Προφανώς, για $n = 1$ η ανισότητα (2) ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι η ανισότητα (2) ισχύει για οποιουσδήποτε κ αριθμούς και θα αποδειχθεί για $\kappa + 1$ αριθμούς.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε $x_1, x_2, \ldots, x_{\kappa+1}$ θετικούς αριθμούς με $x_1 x_2 \cdots x_{\kappa+1} = 1$ και θα αποδείξουμε ότι $\kappa + 1 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_{\kappa+1}$.

Αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_{\kappa+1}$, τότε προφανώς η παραπάνω ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

Διαφορετικά, θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον από αυτούς τους $\kappa + 1$ αριθμούς, ένας εκ των οποίων θα είναι μικρότερος του 1 και ο άλλος μεγαλύτερος του 1.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποτίθεται ότι

$$x_1 < 1 < x_{\kappa+1}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα (2) για τους κ το πλήθος αριθμούς

$$x_1 \cdot x_{\kappa+1}, x_2, \ldots, x_\kappa$$

προκύπτει ότι

$$\kappa \le x_1 \cdot x_{\kappa+1} + x_2 + \cdots + x_\kappa$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\kappa + 1 &\le x_1 + \cdots + x_\kappa + x_{\kappa+1} + x_1 \cdot x_{\kappa+1} - x_{\kappa+1} - x_1 + 1 \\
&= x_1 + \cdots + x_\kappa + x_{\kappa+1} + (x_1 - 1) \cdot x_{\kappa+1} - (x_1 - 1) \\
&= x_1 + \cdots + x_\kappa + x_{\kappa+1} + (x_1 - 1) \cdot (x_{\kappa+1} - 1) \\
&\le x_1 + \cdots + x_\kappa + x_{\kappa+1}
\end{aligned}$$

διότι $x_1 < 1 < x_{\kappa+1}$.

δηλαδή επαληθεύτηκε η ανισότητα (2) για $\kappa+1$ το πλήθος αριθμούς και συνεπώς θα ισχύει για οποιουσδήποτε n αριθμούς.

ΑΣΚΗΣΗ 61

Να αποδειχθεί με τη βοήθεια της ανισότητας

$$e^x \geq x+1 \tag{1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανισότητα του Cauchy.

ΛΥΣΗ

Προκειμένου να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$$

θέτουμε

$$s=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}.$$

Τότε, εφαρμόζοντας την (1) n φορές για τους αριθμούς

$$\frac{\alpha_i}{s}-1, \qquad i \in [n],$$

προκύπτουν οι ανισότητες

$$e^{\frac{\alpha_i}{s}-1} \geq \frac{\alpha_i}{s}, \qquad \text{για κάθε } i \in [n].$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες αυτές κατά μέλη, προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$e^{\frac{\alpha_1}{s}-1} e^{\frac{\alpha_2}{s}-1} \cdots e^{\frac{\alpha_n}{s}-1} \geq \frac{\alpha_1}{s}\frac{\alpha_2}{s}\cdots\frac{\alpha_n}{s}$$

$$e^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{s}-n} \geq \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{s^n}$$

$$e^0 \geq \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\right)^n}$$

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 44

Να αποδειχθεί η ανισότητα $(1+\theta)^q \le 1+q\theta$ για κάθε $\theta > 0$ και $q \in \mathbb{Q}$ με $0 \le q < 1$.

Σκέψεις στο Πρόχειρο

Προφανώς, αν $q=0$ η αποδεικτέα σχέση ισχύει ως ισότητα. Αν $q \neq 0$, τότε είναι $q = \dfrac{m}{n}$ όπου $m, n \in \mathbb{N}^*$, με $m < n$. Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται ως

$$(1+\theta)^{m/n} \le 1 + \frac{m}{n}\theta$$

ή ισοδύναμα ως

$$\sqrt[n]{(1+\theta)^m} \le 1 + \frac{m}{n}\theta \qquad (1)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Cauchy,

$$\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \qquad (2)$$

αλλά για ποιούς αριθμούς α_i;

Μπορούμε να θέσουμε τους m πρώτους ίσους με 1+θ και τους υπόλοιπους ίσους με 1, δηλαδή

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 1+\theta, \qquad \alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_n = 1$$

οπότε το πρώτο μέλος της (2) θα ταυτίζεται με το πρώτο μέλος της (1), δηλαδή $\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = \sqrt[n]{(1+\theta)^m}$

Τι θα συμβεί στο δεύτερο μέλος;

ΑΣΚΗΣΗ 44

Να αποδειχθεί η ανισότητα $(1+\theta)^q \leq 1+q\theta$ για κάθε $\theta > 0$ και $q \in \mathbb{Q}$ με $0 \leq q < 1$.

ΛΥΣΗ

Προφανώς, αν $q=0$ η αποδεικτέα σχέση ισχύει ως ισότητα. Αν $q \neq 0$, τότε είναι $q=\dfrac{m}{n}$ όπου $m,n \in \mathbb{N}^*$, με $m<n$.

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Cauchy για τους αριθμούς $\underbrace{(1+\theta),(1+\theta),\ldots,(1+\theta)}_{m\text{ φορές}}$, $\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-m\text{ φορές}}$ προκύπτει ότι

$$\sqrt[n]{(1+\theta)\cdots(1+\theta)\cdot 1\cdots 1} < \frac{(1+\theta)+\cdots+(1+\theta)+1+\cdots+1}{n}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sqrt[n]{(1+\theta)^m} < \frac{m(1+\theta)+n-m}{n},$$

$$(1+\theta)^{\frac{m}{n}} < \frac{m\theta+n}{n},$$

$$(1+\theta)^q < 1+q\theta.$$

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_\nu^{q_\nu} \leq q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_\nu x_\nu$$

όπου q_i, $i \in [\nu]$, είναι θετικοί ρητοί αριθμοί με $q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu = 1$ και x_i, $i \in [\nu]$, μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

Σκέψεις στο Πρόχειρο

Αν τεθεί $q_i = \dfrac{m_i}{n}$, με $m_i, n \in \mathbb{N}^*$, για κάθε $i \in [\nu]$, τότε είναι $m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu = n$,

Και η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$x_1^{m_1/n} x_2^{m_2/n} \ldots x_\nu^{m_\nu/n} \leq \frac{m_1}{n} x_1 + \frac{m_2}{n} x_2 + \cdots + \frac{m_\nu}{n} x_\nu$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_\nu^{m_\nu}} \leq \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_\nu x_\nu}{n} \qquad (1)$$

Το πλήθος των όρων του γινομένου στη ρίζα είναι n, όπως και στην ανισότητα του Cauchy

$$\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \qquad (2)$$

Επομένως, αν εφαρμοσθεί η (2) για τους αριθμούς

$$\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{m_1 \text{ φορές}}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{m_2 \text{ φορές}}, \ldots, \underbrace{x_\nu, x_\nu, \ldots, x_\nu}_{m_\nu \text{ φορές}},$$

οι οποίοι είναι πλήθους n, τότε το πρώτο μέλος της (2) θα ταυτιστεί με το πρώτο μέλος της (1).

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$x_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_\nu^{q_\nu} \le q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_\nu x_\nu$$

όπου q_i, $i\in[\nu]$, είναι θετικοί ρητοί αριθμοί με $q_1+q_2+\cdots+q_\nu=1$ και x_i, $i\in[\nu]$, μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $q_i=\dfrac{m_i}{n}$, με $m_i, n\in\mathbb{N}^*$, για κάθε $i\in[\nu]$, τότε είναι $m_1+m_2+\cdots+m_\nu=n$.

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Cauchy για τους αριθμούς

$$\underbrace{x_1,x_1,\ldots,x_1}_{m_1 \text{ φορές}},\underbrace{x_2,x_2,\ldots,x_2}_{m_2 \text{ φορές}},\ldots,\underbrace{x_\nu,x_\nu,\ldots,x_\nu}_{m_\nu \text{ φορές}}$$

προκύπτει η ανισότητα

$$\sqrt[n]{x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdots x_\nu^{m_\nu}} \le \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_\nu x_\nu}{n}$$

οπότε, τελικά, προκύπτει ότι

$$x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_\nu^{q_\nu} \le q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_\nu x_\nu.$$

Δύο βασικοί συμβολισμοί

1.Ορίζουσα 2x2

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma, \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$$

2.Συμβολισμός αθροίσματος

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Ταυτότητα Lagrange

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, ισχύει ότι

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix}^2$$

Παραδείγματα:

- $(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2)(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2$
- $(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2)(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να αποδειχθεί με επαγωγή η ταυτότητα Lagrange.

3. Ανισότητα Cauchy - Schwarz

Για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n\right)^2 \leq \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2\right)$$

Η ισότητα αληθεύει μόνο όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\alpha_i = \lambda\beta_i$ για κάθε $i \in [n]$.

Η απόδειξη της ανισότητας αυτής είναι άμεση συνέπεια της γνωστής ταυτότητας του Lagrange:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n}\begin{vmatrix}\alpha_i & \alpha_j\\ \beta_i & \beta_j\end{vmatrix}^2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 46

Να αποδειχθεί η ανισότητα $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2\geq\frac{25}{2}$ για κάθε $\alpha,\beta>0$ με $\alpha+\beta=1$.

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τους αριθμούς $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$ και 1,1, οπότε

$$\left(\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot 1+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\cdot 1\right)^2\leq\left(\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2\right)\left(1^2+1^2\right)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2\leq 2\left(\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2\leq 2\left(\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2\right)\qquad(1)$$

Επειδή

$$1=\left(\alpha+\beta\right)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta\geq 4\alpha\beta,$$

έπεται ότι $4\leq\frac{1}{\alpha\beta}$ και επομένως, προκύπτει ότι

$$\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2\geq 25\qquad(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει άμεσα η αποδεικτέα ανισότητα.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 56

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$(1+x)^n \leq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

για κάθε $x \in (-1,0)$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 57

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\frac{1}{1-\frac{x}{n(x+1)}} < \sqrt[n]{1+x}$$

για κάθε $x>0$ και $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \geq 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 58

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\sqrt[n]{n} < 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, με $n \geq 2$.

Υπόδειξη: Η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\sqrt[n]{n} < \frac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n}$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα Cauchy

$$\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}$$

για $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{n}$, $\alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 59

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\frac{n\alpha}{1+n\alpha}<\sqrt[n]{\alpha}<1+\frac{\alpha}{n}$$

για κάθε $\alpha>0$ και $n\in\mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 60

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\frac{1}{\alpha_n}\right)\geq n^2$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και $\alpha_i>0,\ i\in[n]$.