Φραγμένα σύνολα

Ένα σύνολο Ε εφοδιασμένο με μια μερική (αντ. ολική) διάταξη ονομάζεται **μερικά** (αντ. **ολικά**) **διατεταγμένο** σύνολο και σημειώνεται με $(\mathbf{E},\leq)$.

Αν $(\mathrm{E},\leq)$ είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και Α είναι ένα μη κενό υποσύνολό του, τότε ένα στοιχείο $\alpha \in \mathrm{E}$ (αντ. $\beta \in \mathrm{E}$) ονομάζεται **άνω** (αντ. **κάτω**) **φράγμα** του Α όταν $x \leq \alpha$ (αντ. $\beta \leq x$) για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

Όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον άνω (αντ. κάτω) φράγμα ενός συνόλου Α, τότε το σύνολο αυτό ονομάζεται **άνω** (αντ. **κάτω**) **φραγμένο** σύνολο.

Αν Α είναι ένα άνω (αντ. κάτω) φραγμένο υποσύνολο του $(E,\leq)$, τότε ένα στοιχείο $s \in E$ (αντ. $i \in E$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) s είναι άνω φράγμα (αντ. i είναι κάτω φράγμα)

(ii) $s \leq \alpha$ (αντ. $\beta \leq i$) για κάθε άνω φράγμα α (αντ. κάτω φράγμα β) του Α

ονομάζεται **supremum** ή **ελάχιστο άνω φράγμα** ή **άνω πέρας** (αντ. **infimum** ή **μέγιστο κάτω φράγμα** ή **κάτω πέρας**) του Α και σημειώνεται με $\mathbf{\sup A}$ (αντ. $\mathbf{\inf A}$).

Τα $\sup A$ και $\inf A$ δεν υπάρχουν πάντα για ένα σύνολο. Όταν όμως υπάρχουν, είναι μοναδικά.

Το $\sup A$ (αντ. $\inf A$) **δεν ανήκει υποχρεωτικά** στο σύνολο Α. Στην περίπτωση που ανήκει, ονομάζεται **μέγιστο** (αντ. **ελάχιστο**) στοιχείο του Α και σημειώνεται με $\mathbf{\max A}$ (αντ. $\mathbf{\min A}$).

Αξίωμα της Πληρότητας: Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum στο $\mathbb{R}$.

Το παραπάνω αξίωμα είναι απαραίτητο για τη θεμελίωση της Ανάλυσης, αφού σε αυτό βασίζεται π.χ. η έννοια και ο ορισμός του ορίου.

Μερικές σημαντικές συνέπειες του αξιώματος αυτού είναι οι ακόλουθες:

- **Πόρισμα**. Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum στο $\mathbb{R}$.
- **Θεώρημα (Αρχιμήδη-Ευδόξου).** Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, με $a > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε $na > b$.
- **Ακέραιο μέρος.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικός ακέραιος $z \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε
$$z \le x < z + 1.$$
Ο ακέραιος αυτός, ονομάζεται ακέραιο μέρος του x και συμβολίζεται με $\lfloor x \rfloor$ ή $[x]$. Επομένως, ορίζεται μοναδικά από τις ισοδύναμες σχέσεις:
$$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1, \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$$
- **Πυκνότητα των $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$**. Μεταξύ δύο πραγματικών (αντ. ρητών) υπάρχει πάντα ένα ρητός (άρα και ένας πραγματικός).

Παραδείγματα

1. Για το ολικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{R},\leq)$ είναι:

α) Αν $A=\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}^*\right\}$ τότε $\sup A=1$ και $\inf A=0$. Το 1 είναι μέγιστο στοιχείο του A, διότι $1\in A$, ενώ το A δεν έχει ελάχιστο, αφού $0\notin A$.

β) Αν $A=(\alpha,\beta)$ τότε $\sup A=\beta$ και $\inf A=\alpha$. Το A δεν έχει μέγιστο, ούτε ελάχιστο στοιχείο, αφού τα α, β δεν ανήκουν στο A.

2. Για το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*,|)$, όπου | είναι η σχέση διαιρετότητας και $A=\{4,16,28,40\}$, ισχύει

$$n\in\mathbb{N}^* \text{ είναι άνω φράγμα του A}$$

$$\Leftrightarrow 4\,|\,n \text{ και } 16\,|\,n \text{ και } 28\,|\,n \text{ και } 40\,|\,n$$

$$\Leftrightarrow n \text{ κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του A}$$

Οπότε, το ελάχιστο άνω φράγμα του A θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του A, δηλαδή

$$\sup A=\text{ΕΚΠ}(4,16,28,40)=560.$$

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\inf A=\text{ΜΚΔ}(4,16,28,40)=4.$$

3. Για το μερικά διατεταγμένο σύνολο $\left(\mathcal{P}(\mathrm{E}), \subseteq\right)$,

όπου $\mathrm{E} = \{2,4,6,8,10,12,14\}$, και

$$\mathrm{A} = \{\{2,4,8\}, \{6,8\}, \{2,8,10\}, \{4,8\}\}$$

ισχύουν ότι

B είναι άνω φράγμα του A

$$\Leftrightarrow \{2,4,8\} \subseteq \mathrm{B},\ \{6,8\} \subseteq \mathrm{B},\ \{2,8,10\} \subseteq \mathrm{B},\ \{4,8\} \subseteq \mathrm{B}$$

Οπότε, το ελάχιστο άνω φράγμα του A θα είναι το «μικρότερο» τέτοιο σύνολο B, δηλαδή η ένωση όλων των στοιχείων του A. Κατόπιν τούτου, είναι

$$\sup \mathrm{A} = \{2,4,8\} \cup \{6,8\} \cup \{2,8,10\} \cup \{4,8\} = \{2,4,6,8,10\}$$

Ομοίως προκύπτει ότι

$$\inf \mathrm{A} = \{2,4,8\} \cap \{6,8\} \cap \{2,8,10\} \cap \{4,8\} = \{8\}$$

Για την αυστηρή επιβεβαίωση του supremum ενός συνόλου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη πρόταση, που στην ουσία αποτελεί ισοδύναμο ορισμό του supremum (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση):

Πρόταση. Αν s είναι ένα άνω φράγμα του μη κενού $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $s = \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x > s - \varepsilon$.

Πρακτικά, η απόσταση στην οποία πλησιάζουν το s τα στοιχεία x του A είναι ίση με $s - x$ και, αν μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή, δηλαδή $s - x < \varepsilon$ για οσοδήποτε μικρό (και θετικό) ε, τότε $s = \sup A$.

Άμεσα προκύπτει και ο ακόλουθος ισοδύναμος ορισμός για το infimum.

Πόρισμα. Αν i είναι ένα κάτω φράγμα του μη κενού $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $i = \inf A$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < i + \varepsilon$.

Παράδειγμα. Για το σύνολο $A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ είναι $\sup A = 1$. Πράγματι, το 1 είναι ένα άνω φράγμα (διότι $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1$) και, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοιος ώστε (θέτοντας $s = 1$ και $x = 1 - \frac{1}{n}$)

$$s - x = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(Η τελευταία ανισότητα προκύπτει είτε από το θεώρημα Αρχιμήδη-Ευδόξου, είτε επιλέγοντας $n = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1 > 1/\varepsilon$)

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι $s = \sup A < 1$ και να καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, τότε είναι $\varepsilon = 1 - s > 0$ και επειδή (από το θεώρημα Αρχιμήδη-Ευδόξου) υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{n} > -\varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon = s,$$

δηλαδή υπάρχει $x \in A$ με $x > s$, που είναι άτοπο.