ΔΙΑΛΕΞΗ 1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Σειρές Ακολουθιών

Περιεχόμενα διάλεξης:
Βασικοί ορισμοί
Βασικές σειρές: Τηλεσκοπικές σειρές, Εκθετική σειρά, p-σειρά, Γεωμετρική σειρά, Δεκαδικές σειρές

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω (α_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.
Η ακολουθία (σ_n) με γενικό όρο:

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

ονομάζεται **ακολουθία μερικών αθροισμάτων** της ακολουθίας (α_n), ή **σειρά** των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ και σημειώνεται με

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n .$$

Ο αριθμός α_n ονομάζεται **n-οστός όρος** ή **γενικός όρος** της σειράς και το άθροισμα σ_n **n-οστό μερικό άθροισμα** της σειράς.

Για τη σύγκλιση της σειράς διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) Αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ (στο $\mathbb{R}$) τότε λέγεται ότι η σειρά **συγκλίνει προς το s,** ή ότι η σειρά **έχει άθροισμα το s** και τούτο σημειώνεται με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = s.$$

(2) Αν **δεν** υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ (στο $\mathbb{R}$) τότε λέγεται ότι η σειρά **δεν συγκλίνει** και διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

(i) Αν $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$ τότε λέγεται ότι η σειρά **συγκλίνει κατ' εκδοχή προς το** $+\infty$**,** ή **απειρίζεται θετικά** και τούτο σημειώνεται με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty.$$

(ii) Αν $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = -\infty$ τότε λέγεται ότι η σειρά **συγκλίνει κατ' εκδοχή προς το** $-\infty$**,** ή **απειρίζεται αρνητικά** και τούτο σημειώνεται με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = -\infty.$$

(iii) Αν δεν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \in \overline{\mathbb{R}}$ τότε λέγεται ότι η σειρά **αποκλίνει**.

Παραδείγματα

1.Για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, προκύπτει ότι

$$\sigma_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-2)n}+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Επιπλέον, είναι $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{3}{4}$ οπότε η σειρά θα συγκλίνει στο $\frac{3}{4}$, δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}.$$

2. Για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ είναι

$$\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Επιπλέον, είναι $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$, οπότε η σειρά θα συγκλίνει κατ' εκδοχή στο $+\infty$, δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = +\infty.$$

3. Για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)$ είναι

$$\sigma_n = -1 - 2 - \cdots - n = -(1 + 2 + \cdots + n) = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Επιπλέον, είναι $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = -\infty$, οπότε η σειρά θα συγκλίνει κατ' εκδοχή στο $-\infty$, δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n) = -\infty.$$

4.Για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ είναι

$$\sigma_n = \begin{cases} -1, \; \alpha\nu \; n \; \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, \alpha\nu \; n \; \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ και επομένως η σειρά αποκλίνει.

2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

1. Τηλεσκοπική σειρά

Κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

όπου $P(n), Q(n)$ είναι πολυώνυμα του n, ονομάζεται **τηλεσκοπική σειρά**.

Αποδεικνύεται ότι η τηλεσκοπική σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η διαφορά: βαθμός $Q(n)-$βαθμός $P(n)$ είναι μεγαλύτερη του 1.

Το άθροισμα μιας συγκλίνουσας τηλεσκοπικής σειράς υπολογίζεται με ανάλυση του γενικού όρου της σειράς σε απλά κλάσματα.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Κάθε ρητή συνάρτηση $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό

βαθμός $P(x)<$ βαθμός $Q(x)$, μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα απλούστερων κλασμάτων. Στην ενότητα αυτή, θα μελετηθεί μόνο η περίπτωση που το $Q(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες, δηλαδή

$$Q(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$$

όπου $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu\in\mathbb{R}$ οι διακεκριμένες ρίζες του πολυωνύμου $Q(x)$.

Η γενική περίπτωση θα εξετασθεί αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο, για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης.

Στην απλή αυτή περίπτωση, η ρητή συνάρτηση $R(x)$ γράφεται ως

$$R(x)=\frac{P(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)}=\frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\cdots+\frac{A_\nu}{x-\rho_\nu}$$

όπου $A_1,A_2,\ldots,A_\nu$ πραγματικές σταθερές.

Κάνοντας ομώνυμα τα απλά κλάσματα του τελευταίου μέλους, προκύπτει ότι

$$R(x)=\frac{P(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)}=\frac{S(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)}$$

όπου $S(x)=\sum_{i=1}^{\nu}A_i\prod_{j\neq i}(x-\rho_j)$.

Από την ισότητα πολυωνύμων $P(x)=S(x)$, εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο πολυωνύμων προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους τις σταθερές $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$. Επιλύνοντας αυτό το σύστημα, προκύπτουν οι τιμές των σταθερών αυτών.

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση $R(x)=\dfrac{x^2-6x+17}{(x-2)(x-3)(x-5)}$, είναι

$$\frac{x^2-6x+17}{(x-2)(x-3)(x-5)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{x-5}$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+17=A_1(x-3)(x-5)+A_2(x-2)(x-5)+A_3(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+17=A_1(x^2-8x+15)+A_2(x^2-7x+10)+A_3(x^2-5x+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+17=(A_1+A_2+A_3)x^2-(8A_1+7A_2+5A_3)x+(15A_1+10A_2+6A_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1+A_2+A_3=1 \\ 8A_1+7A_2+5A_3=6 \\ 15A_1+10A_2+6A_3=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=3 \\ A_2=-4 \\ A_3=2 \end{cases}$$

Άρα $R(x)=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{2}{x-5}$.

Παρατήρηση. Ο υπολογισμός γίνεται πιο απλά, θέτοντας στη σχέση

$$x^2 - 6x + 17 = A_1(x-3)(x-5) + A_2(x-2)(x-5) + A_3(x-2)(x-3)$$

- $x = 2$, οπότε $4 - 12 + 17 = 3A_1 \Rightarrow A_1 = 3$
- $x = 3$, οπότε $9 - 18 + 17 = -2A_2 \Rightarrow A_2 = -4$
- $x = 5$, οπότε $25 - 30 + 17 = 6A_3 \Rightarrow A_3 = 2$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}+\frac{\Gamma}{n+3}\Rightarrow$$

$$n=(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma)n^2+(5\mathrm{A}+4\mathrm{B}+3\Gamma)n+(6\mathrm{A}+3\mathrm{B}+2\Gamma)\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \mathrm{A}+ & \mathrm{B}+ & \Gamma= & 0\\ 5\mathrm{A}+ & 4\mathrm{B}+ & 3\Gamma= & 1\\ 6\mathrm{A}+ & 3\mathrm{B}+ & 2\Gamma= & 0 \end{array}\right\} \qquad (\sigma)$$

Το σύστημα (σ) δίδει

$$\left\{\mathrm{A}=-\frac{1}{2},\quad \mathrm{B}=2,\quad \Gamma=-\frac{3}{2}\right\}$$

Άρα ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι

$$\alpha_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}+2\frac{1}{n+2}-\frac{3}{2}\frac{1}{n+3} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (1) για τις n πρώτες τιμές της μεταβλητής, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4},$$
$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5},$$
$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{5} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6},$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{n-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1} + 2\cdot\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+1},$$
$$\alpha_{n-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+2},$$
$$\alpha_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + 2\cdot\frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+3}.$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+2} + 2\cdot\frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+3} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{4}.$$

β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$. **1ος Τρόπος**

Θέτουμε

$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{\Gamma}{n+3}\Rightarrow$$

$$1=(A+B+\Gamma)n^2+(4A+3B+\Gamma)n+3\mathrm{A}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}+\ \mathrm{B}+\Gamma=0\\ 4\mathrm{A}+3\mathrm{B}+\Gamma=0\\ 3\mathrm{A}\qquad\quad=1\end{array}\right\}\qquad(\sigma')$$

Το σύστημα (σ΄) δίδει

$$\left\{\mathrm{A}=\frac{1}{3},\quad \mathrm{B}=-\frac{1}{2},\quad \Gamma=\frac{1}{6}\right\}.$$

Άρα ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι

$$\alpha_n=\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+3}\qquad(2)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2) για τις n πρώτες τιμές της μεταβλητής n, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} && -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} && +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4},\\
\alpha_2 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} && -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} && +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5},\\
\alpha_3 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} && -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} && +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6},\\
\alpha_4 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} && -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} && +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7},\\
&\vdots\\
\alpha_{n-3} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-3} && -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-2} && +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n},\\
\alpha_{n-2} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-2} && -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1} && +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+1},\\
\alpha_{n-1} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-1} && -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} && +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+2},\\
\alpha_n &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} && -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} && +\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+3}
\end{aligned}
$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$
\sigma_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+3}
$$

$$
=\frac{7}{36}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+3}.
$$

Άρα, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{7}{36}.$

2. Γεωμετρική σειρά

Κάθε σειρά της μορφής

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}+\cdots, \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}, \text{ ή } \quad \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}$$

ονομάζεται **γεωμετρική σειρά**.

Αποδεικνύεται ότι κάθε γεωμετρική σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $|\alpha|<1$, και τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}=\frac{1}{1-\alpha}.$$

Μια ενδιαφέρουσα γενίκευση της γεωμετρικής σειράς είναι η σειρά $1+2^{\kappa}\alpha+3^{\kappa}\alpha^2+\cdots+n^{\kappa}\alpha^{n-1}+\cdots$, ή

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\kappa}\alpha^{n-1}, \text{ όπου } \kappa\in\mathbb{N},$$

η οποία αποδεικνύεται ότι συγκλίνει αν και μόνο αν $|\alpha|<1$.

Ειδικά για $\kappa=1,2$ ισχύουν αντίστοιχα

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\,\alpha^{n-1}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\alpha^{n-1}=\frac{1+\alpha}{(1-\alpha)^3}$$

για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, με $|\alpha|<1$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να αποδειχθούν οι τύποι:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = \frac{1}{1-\alpha}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $|\alpha| < 1$.

ΛΥΣΗ

(i) Επειδή

$$\sigma_n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha},$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha},$$

αφού για $|\alpha| < 1$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.

Έστω $\quad \sigma_n = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots + n\alpha^{n-1} \quad (1)$

οπότε $\quad \alpha\sigma_n = \alpha + 2\alpha^2 + \cdots + n\alpha^n \quad (2)$

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2), προκύπτει ότι

$$(1-\alpha)\sigma_n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} - n\alpha^n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - n\alpha^n$$

$$= \frac{1-\alpha^n - (1-a)n\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{1-\left((1-\alpha)n+1\right)\alpha^n}{1-a}$$

οπότε
$$\sigma_n = \frac{1-\beta_n}{(1-\alpha)^2} \qquad (3)$$

όπου $\beta_n = \left((1-\alpha)n+1\right)\alpha^n$.

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-\alpha)(n+1)+1}{(1-\alpha)n+1}|\alpha|\right) = |\alpha| < 1,$$

προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$ και επομένως, από τη σχέση (3) θα είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

Παρατήρηση

Μια άλλη απόδειξη του τύπου (ii) μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της παραγώγισης των δυναμοσειρών.

3. Εκθετική σειρά

Η σειρά

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots,$$

$$\text{ή } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}, \qquad \text{ή } \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

ονομάζεται **εκθετική σειρά** και συγκλίνει προς τον αριθμό e, δηλαδή ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=e.$$

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=e^{x}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

α) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n!}$, β) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$,

γ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{n!}$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε

$$\alpha_n=\frac{3n^2+2n+1}{n!},\ \beta_n=\frac{n^3}{n!},\ \gamma_n=\frac{n^2\cdot 2^n}{n!}.$$

Προκειμένου να ευρεθεί το άθροισμα των τριών αυτών σειρών, χρησιμοποιούνται οι πράξεις των σειρών και ο γνωστός τύπος

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n!}=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\\&=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}+2e+e\\&=3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+3e=3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+3e+3e\\&=3e+6e=9e.\end{aligned}$$

β) $$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((n-1)+1\right)^2}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2+2(n-1)+1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{(n-1)!}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{(n-2)!}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-2)+1}{(n-2)!}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-2}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+3e$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+3e$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+3e$$

$$=e+e+3e$$

$$=5e.$$

γ) $$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 2^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,2^n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)2^n+2^n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)2^n}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}$$

$$=4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$$=6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$$=6e^2.$$

4. Δεκαδική σειρά

Κάθε σειρά της μορφής

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}} + \cdots, \text{ ή } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}}, \quad \text{ή}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$$

όπου $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ και $\alpha_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, ονομάζεται **δεκαδική σειρά**.

Αποδεικνύεται ότι κάθε δεκαδική σειρά συγκλίνει. Το άθροισμα της δεκαδικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}}$ ονομάζεται **δεκαδικός αριθμός** και σημειώνεται με $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$.

Ο αριθμός α_0 είναι το ακέραιο μέρος του δεκαδικού αριθμού.

Αποδεικνύεται ότι ο δεκαδικός αριθμός είναι ρητός αν και μόνο αν τα δεκαδικά του ψηφία είναι τελικά περιοδικά. Για παράδειγμα, ο αριθμός $7.362\overline{45} = 7.362454545\ldots$ είναι ρητός.

Η μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε ρητή μορφή επιτυγχάνεται με τη χρήση μιας δεκαδικής σειράς.

Πρόταση 3.1

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μια δεκαδική σειρά με

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}}.$$

Με τη βοήθεια της πρότασης αυτής, αποδεικνύεται ότι το διάστημα $[0,1]$ είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο .

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να αποδειχθεί ότι κάθε δεκαδική σειρά συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί ότι η ακολουθία (σ_n) των μερικών αθροισμάτων κάθε δεκαδικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Πραγματικά,

$$\sigma_{n+1}-\sigma_n=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n}-\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\alpha_n}{10^n}\geq 0,$$

οπότε $\sigma_{n+1}\geq\sigma_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και συνεπώς η (σ_n) είναι αύξουσα.

Επιπλέον, είναι

$$\sigma_n=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}}\leq\alpha_0+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^{n-1}}$$

$$=\alpha_0+\frac{9}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{10}}<\alpha_0+1.$$

Άρα η ακολουθία (σ_n) είναι άνω φραγμένη.

Κατόπιν τούτων, η ακολουθία (σ_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και επομένως η δεκαδική σειρά συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να γραφούν σε ρητή μορφή οι αριθμοί:

α) $0.\overline{5}$, β) $0.\overline{31}$, γ) $4.\overline{543}$.

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός $0.\overline{5} = 0.555\ldots$ είναι το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n}$, οπότε θα έχουμε

$$0.\overline{5} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}.$$

β) Ο αριθμός $0.\overline{31} = 0.313131\ldots$ είναι το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{31}{10^{2n}}$, οπότε θα έχουμε

$$0.\overline{31} = \frac{31}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{31}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{31}{99}.$$

γ) Ο αριθμός $4.\overline{543} = 4.543543543\ldots$ προκύπτει από το άθροισμα $4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{543}{10^{3n}}$.

Η παραπάνω σειρά είναι γεωμετρική και το άθροισμα είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{543}{10^{3n}} = \frac{543}{1000} \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{543}{999}$

οπότε θα έχουμε $4.\overline{543} = 4 + \frac{543}{999} = \frac{4539}{999}$.

Παρατήρηση

Δίδονται δύο δεκαδικοί αριθμοί

$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, \qquad y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$

Ισχύει ότι $x = y \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$;

Η απάντηση είναι γενικά ΟΧΙ. Για παράδειγμα, ισχύει ότι

$$0.\overline{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-1/10} = \frac{9}{9} = 1.$$

Ανάλογα ισχύει ότι $5.347\overline{9} = 5.348$.

Αν όμως οι x, y δεν περιέχουν τα ψηφία 0 και 9, τότε ισχύει η παραπάνω ισοδυναμία.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Να αποδειχθεί ότι το διάστημα $\left[0,1\right]$ είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι το διάστημα $\left[0,1\right]$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και ότι $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ είναι μια αρίθμηση των στοιχείων του.

Αν οι αριθμοί x_i γραφούν σε δεκαδική μορφή, δηλαδή

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.\alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1\ldots\alpha_n^1\ldots \\
x_2 &= 0.\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\ldots\alpha_n^2\ldots \\
x_3 &= 0.\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3\ldots\alpha_n^3\ldots \\
&\vdots \\
x_n &= 0.\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n\ldots\alpha_n^n\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

όπου $\alpha_i^j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^*$, και επιλεγεί μια ακολουθία $\left(\beta_n\right)$ με $\beta_n \in \{1,2,\ldots,8\} \setminus \left\{\alpha_n^n\right\}$ τότε ο δεκαδικός αριθμός $x = 0.\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n\ldots$ ανήκει στο διάστημα $\left[0,1\right]$, αλλά $x \neq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το διάστημα $\left[0,1\right]$ είναι υπεραριθμήσιμο.

5.Αρμονική σειρά

Η σειρά $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$, ή $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (όπου $p\in\mathbb{R}$) ονομάζεται **αρμονική σειρά** τάξης p.

Αποδεικνύεται ότι μια αρμονική σειρά συγκλίνει αν $p>1$, και απειρίζεται θετικά αν $p\le 1$.

Παραδείγματα

Οι αρμονικές σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνουν, ενώ οι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ απειρίζονται θετικά.

Το άθροισμα μιας συγκλίνουσας αρμονικής σειράς υπολογίζεται με τη βοήθεια μιας σειράς Fourier. Για παράδειγμα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$, β) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$,

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Ο γενικός όρος α_n της δοσμένης σειράς γράφεται

$$\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{1}$$

Επομένως, το μερικό άθροισμα $\sigma_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, με τη βοήθεια της σχέσης (1) είναι

$$\begin{aligned}\sigma_n&=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\\&=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1.$$

β) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$

Ο γενικός όρος α_n της δοσμένης σειράς γράφεται

$$(-1)^n \frac{n+1+n}{n(n+1)} = (-1)^n \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \qquad (2)$$

Επομένως, το μερικό άθροισμα $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n$ με τη βοήθεια της σχέσης (2) είναι

$$\sigma_n = -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sigma_n = -1 + (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(-1+(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right) = -1$$

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$

Ο γενικός όρος α_n της δοσμένης σειράς γράφεται

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)\\ &= \ln n + \ln(n+2) - 2\ln(n+1)\\ &= \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln n\big).\end{aligned}$$

Αν τεθεί $\beta_n = \ln(n+1) - \ln n$, τότε είναι

$$\alpha_n = \beta_{n+1} - \beta_n \tag{3}$$

Έτσι, το μερικό άθροισμα $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ με τη βοήθεια της σχέσης (3) γράφεται

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (\beta_2 - \beta_1) + (\beta_3 - \beta_2) + \cdots + (\beta_{n+1} - \beta_n) = \beta_{n+1} - \beta_1\\ &= \ln(n+2) - \ln(n+1) - (\ln 2 - \ln 1) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln 2.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln 2\right)\\ &= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right) - \ln 2\\ &= \ln 1 - \ln 2\\ &= -\ln 2.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right)}{(\ln n^n)\left(\ln (n+1)^{n+1}\right)} = \frac{1}{2\ln 2}.$$

ΛΥΣΗ

Ο γενικός όρος α_n της δοσμένης σειράς γράφεται

$$\alpha_n = \frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right)}{(\ln n^n)\left(\ln (n+1)^{n+1}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \ln(n+1)}{n\cdot \ln n \cdot (n+1)\cdot \ln(n+1)}$$

$$= \frac{n\cdot\left(\ln(n+1) - \ln n\right) + \ln(n+1)}{n\cdot \ln n \cdot (n+1)\cdot \ln(n+1)} = \frac{(n+1)\cdot \ln(n+1) - n\cdot \ln n}{(n+1)\cdot \ln(n+1)\cdot n\cdot \ln n},$$

οπότε $\alpha_n = \dfrac{1}{n\ln n} - \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ (1)

Έτσι, το μερικό άθροισμα $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ με τη βοήθεια της σχέσης (1) γράφεται

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3}\right) + \left(\frac{1}{3\ln 3} - \frac{1}{4\ln 4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right),$$

ή $\sigma_n = \dfrac{1}{2\ln 2} - \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Άρα, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2\ln 2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

ΛΥΣΗ

α) Ο γενικός όρος α_n της δοσμένης σειράς γράφεται

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \tag{1}$$

Επομένως, το μερικό άθροισμα $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ με τη βοήθεια της σχέσης (1) γράφεται

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{2}$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$. Θέτουμε

$$\frac{1}{n(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+3}\Rightarrow$$
$$1=(A+B)n+3A\Rightarrow$$
$$\left\{A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3}\right\}.$$

Άρα ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι

$$\alpha_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right) \tag{2}$$

οπότε το μερικό άθροισμα $\sigma_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ με τη βοήθεια της σχέσης (2) γράφεται

$$\sigma_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).$$

Άρα, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{11}{18}$ ή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}=\frac{11}{18}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}(n+1)n}$.

ΛΥΣΗ

α) Η δοσμένη σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \tag{1}$$

Είναι όμως,

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \dfrac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 4 \end{cases} \tag{2}$$

Απο τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \frac{11}{2}.$$

β) Ο γενικός όρος της δοσμένης σειράς γράφεται

$$\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}(n+1)n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right),$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}(n+1)n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \qquad (3)$$

Είναι όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1 \qquad (4)$$

Επειδή

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Rightarrow$$

$$\sigma_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

θα είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=1 \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3), (4) και (5), προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}(n+1)n}=1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς

$$\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\frac{13}{5^4}+\cdots$$

ΛΥΣΗ

Ο γενικός όρος α_n της σειράς αυτής είναι

$$\alpha_n=\frac{3n+1}{5^n},$$

οπότε το δοσμένο άθροισμα γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5^n}=\frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \qquad (1)$$

Είναι όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{25}{16} \qquad (2)$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3), προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\frac{19}{16}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να ευρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}$, όπου (α_n) είναι μια αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο α και διαφορά λ και (β_n) είναι μια γεωμετρική πρόοδος, με πρώτο όρο β και λόγο ω, $\lambda \neq 0$ και $\omega > 1$.

ΛΥΣΗ

Για την ακολουθία μερ. αθροισμάτων της σειράς είναι

$$\sigma_n = \frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\frac{\alpha_3}{\beta_3}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\lambda}{\beta\omega}+\frac{\alpha+2\lambda}{\beta\omega^2}+\cdots+\frac{\alpha+(n-1)\lambda}{\beta\omega^{n-1}}$$

$$=\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta\omega}+\frac{\alpha}{\beta\omega^2}+\cdots+\frac{\alpha}{\beta\omega^{n-1}}\right)+\left(\frac{\lambda}{\beta\omega}+\frac{2\lambda}{\beta\omega^2}+\cdots+\frac{(n-1)\lambda}{\beta\omega^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^{n-1}}\right)+\frac{\lambda}{\beta\omega}\left(1+\frac{2}{\omega}+\cdots+\frac{n-1}{\omega^{n-2}}\right),$$

δηλαδή $\sigma_n = \frac{\alpha}{\beta}s_n + \frac{\lambda}{\beta\omega}\tau_n$, όπου

$$s_n = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^{n-1}} \text{ και } \tau_n = 1+\frac{2}{\omega}+\frac{3}{\omega^2}+\cdots+\frac{n-1}{\omega^{n-2}}.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{\alpha}{\beta}\lim_{n\to\infty}s_n + \frac{\lambda}{\beta\omega}\lim_{n\to\infty}\tau_n = \frac{\alpha}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-1} + \frac{\lambda}{\beta\omega}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\omega}}+\frac{\lambda}{\beta\omega}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega\left(\alpha(\omega-1)+\lambda\right)}{(\omega-1)^2\beta}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να αποδειχθεί ότι για κάθε συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$, ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_1+2\beta_2+\cdots+n\beta_n}{n}=0.$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\sigma_n=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$, οπότε

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta_1+2\beta_2+3\beta_3+\cdots+n\beta_n}{n}\\
&\quad=\frac{\left(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n\right)+\left(\beta_2+\cdots+\beta_n\right)+\cdots+\left(\beta_{n-1}+\beta_n\right)+\beta_n}{n}\\
&\quad=\frac{\sigma_n+\left(\sigma_n-\sigma_1\right)+\cdots+\left(\sigma_n-\sigma_{n-1}\right)}{n}\\
&\quad=\sigma_n-\frac{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-1}}{n}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Αν $s=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\sigma_n$, τότε $\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n}{n}=s$, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_1+2\beta_2+3\beta_3+\cdots+n\beta_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\sigma_n-\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-1}}{n}\\
=\lim_{n\to\infty}\sigma_n+\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n}{n}&=s+0\cdot s-s
\end{aligned}$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 2
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Σειρές Ακολουθιών

Περιεχόμενα διάλεξης:
Ιδιότητες σύγκλισης
Σειρές με μη αρνητικούς όρους
Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy
Σειρές με εναλλασσόμενους όρους
Κριτήριο Leibniz
Απόλυτη σύγκλιση

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

1.**Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία (α_n) είναι μηδενική.**

Πραγματικά, αν (σ_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς με $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s \in \mathbb{R}$ τότε είναι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \alpha_n &= \lim_{n\to\infty} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma_n - \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-1} \\ &= s - s \\ &= 0.\end{aligned}$$

Το αντίστροφο της ιδιότητας αυτής δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι μηδενική, ενώ η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ απειρίζεται θετικά.

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται για την απόδειξη της μη σύγκλισης ορισμένων σειρών. Έτσι η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+5}$ δεν συγκλίνει, διότι $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$

2. Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ με $\left|\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i\right| < \varepsilon$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $n_0 \leq n < m$.

Πράγματι, αν τεθεί $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ συγκλίνει} \Leftrightarrow (\sigma_n) \text{ συγκλίνει} \Leftrightarrow (\sigma_n) \text{ βασική}$$

$\Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ με

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right| = \left|\sigma_m - \sigma_n\right| < \varepsilon$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $m > n \geq n_0$

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται για την απόδειξη της σύγκλισης ορισμένων σειρών για τις οποίες είναι δύσκολο να ευρεθεί το $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

3. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\kappa\alpha_n + \lambda\beta_n\right) = \kappa\alpha + \lambda\beta,$$

για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

4. **Αν** $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$, **όπου** $\alpha \in \mathbb{R}$, **και η σειρά** $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ **δεν συγκλίνει, τότε η** $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$ **δεν συγκλίνει.**

Ειδικά αν $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$ (αντ. $-\infty$), τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = +\infty$ (αντ. $-\infty$).

5. **Αν** $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$ **(αντ.** $-\infty$**), τότε** $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = +\infty$ **(αντ.** $-\infty$**).**

Πρέπει να τονισθεί ότι αν δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ δεν συγκλίνουν, τότε αυτό δεν συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$ δεν συγκλίνει.

Για παράδειγμα, αν $\alpha_n = n$ και $\beta_n = -n$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = -\infty$, αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$.

4. ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Για μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ με μη αρνητικούς όρους (δηλαδή $\alpha_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$) η ακολουθία (σ_n) των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα, διότι

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_{n+1} \geq 0,$$

οπότε θα υπάρχουν δύο δυνατά ενδεχόμενα για τη σύγκλιση της σειράς:

1. Αν η ακολουθία (σ_n) είναι άνω φραγμένη τότε θα συγκλίνει, οπότε η σειρά είναι συγκλίνουσα και σημειώνεται
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

2. Αν η ακολουθία (σ_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε θα συγκλίνει κατ' εκδοχή στο $+\infty$, οπότε η σειρά απειρίζεται θετικά και σημειώνεται
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy

Αν η ακολουθία (α_n) είναι φθίνουσα με $\alpha_n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{\kappa=0}^{\infty} 2^{\kappa} \alpha_{2^{\kappa}}$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να αποδειχθεί ότι η αρμονική σειρά τάξης p συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν $p \leq 0$, τότε η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ δεν είναι μηδενική, οπότε η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ δεν συγκλίνει. Για $p > 0$ η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ είναι γνήσια φθίνουσα, οπότε εφαρμόζεται για την αντίστοιχη αρμονική σειρά το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy, δίνοντας

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \text{ αν και μόνο αν } \sum_{\kappa=0}^{\infty} 2^{\kappa} \left(\frac{1}{2^{\kappa}}\right)^p < +\infty,$$

δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \text{ αν και μόνο αν } \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(2^{1-p}\right)^{\kappa} < +\infty.$$

Η τελευταία σειρά όμως είναι γεωμετρική, και συγκλίνει αν και μόνο αν $2^{1-p} < 1$, δηλαδή $p > 1$.

Πρόταση 4.1
Αν η ακολουθία (α_n) είναι φθίνουσα με $\alpha_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = 0$.

Πρέπει να τονιστούν τα εξής:

1. Η μονοτονία της ακολουθίας (α_n) στην παραπάνω πρόταση είναι αναγκαία.

2. Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει.

5. ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ της οποίας οι όροι έχουν εναλλάξ πρόσημο, δηλαδή $\beta_n \cdot \beta_{n+1} < 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, ονομάζεται σειρά **με εναλλασσόμενους όρους** (ή **εναλλάσσουσα** σειρά).

Η γενική μορφή της σειράς με εναλλασσόμενους όρους είναι $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$, ή $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \alpha_n$

όπου $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Κριτήριο Leibniz

Αν για τη σειρά με εναλλασσόμενους όρους η ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$ είναι φθίνουσα και μηδενική, τότε η σειρά συγκλίνει.

Αν υποτεθεί ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$ με εναλλασσόμενους όρους ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου του Leibniz και $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \alpha_i - S \right| \leq \alpha_{n+1}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Η παραπάνω ανισότητα μπορεί να μας δώσει μια προσέγγιση της τιμής του αθροίσματος S μιας σειράς με εναλλασσόμενους όρους.

Εφαρμογή

Να υπολογισθεί μια προσέγγιση του αθροίσματος

$$S = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{16} - \cdots$$

ώστε το σφάλμα να είναι:

α) μικρότερο του 0.03,

β) μικρότερο του 0.02.

Λύση

Η σειρά είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$, με $\alpha_n = \dfrac{1}{3n+1}$.

Επειδή η ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$ είναι φθίνουσα και μηδενική θα ισχύει η ανισότητα

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{3i+1} - S \right| \le a_{n+1} = \frac{1}{3n+4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

α) Επειδή το σφάλμα της προσέγγισης πρέπει να είναι μικρότερο του 0.03, ζητείται να ευρεθεί ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}^*$ με $\dfrac{1}{3n+4} \le 0.03$. Είναι

$$\frac{1}{3n+4} \le 0.03 = \frac{3}{100} \Leftrightarrow 100 \le 9n + 12 \Leftrightarrow 88 \le 9n \Leftrightarrow n \ge 10,$$

άρα,

$$S \simeq \sum_{i=1}^{10} \frac{(-1)^{i+1}}{3i+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{16} - \frac{1}{19} + \frac{1}{22} - \frac{1}{25} + \frac{1}{28} - \frac{1}{31}$$

$$\simeq 0.1489989679.$$

β) Ανάλογα, επειδή το σφάλμα της προσέγγισης πρέπει να είναι μικρότερο του 0.02, ζητείται να ευρεθεί ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}^*$ με $\dfrac{1}{3n+4} \le 0.02$. Εδώ, προκύπτει ότι $n = 16$, οπότε είναι

$$S \simeq \sum_{i=1}^{16} \frac{(-1)^{i+1}}{3i+1}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{16} - \frac{1}{19} + \frac{1}{22} - \frac{1}{25} + \frac{1}{28} - \frac{1}{31} + \frac{1}{34} - \frac{1}{37} +$$
$$\frac{1}{40} - \frac{1}{43} + \frac{1}{46} - \frac{1}{49}$$

$$\simeq 0.1544588588.$$

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, προκειμένου να έχουμε καλύτερη προσέγγιση του αθροίσματος απαιτούνται περισσότεροι όροι της σειράς.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n$, όπου η ακολουθία (α_n) είναι θετικών όρων, φθίνουσα και μηδενική.

(i) Να αποδειχθεί ότι η σειρά αυτή συγκλίνει.

(ii) Αν $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n$ και (σ_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς, να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\left|\sigma_n - S\right| \le \alpha_{n+1},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ΛΥΣΗ

(i) Για την υποακολουθία $\left(\sigma_{2n}\right)$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_{2n+2}-\sigma_{2n} &= \sum_{i=1}^{2n+2}(-1)^{i+1}\alpha_i - \sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i+1}\alpha_i \\ &= (-1)^{2n+2}\alpha_{2n+1} + (-1)^{2n+3}\alpha_{2n+2} \\ &= \alpha_{2n+1}-\alpha_{2n+2} \ge 0\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\sigma_{2n} &= \sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i+1}\alpha_i \\ &= \alpha_1 - \Big(\big(\alpha_2-\alpha_3\big)+\big(\alpha_4-\alpha_5\big)+\cdots+\big(\alpha_{2n-2}-\alpha_{2n-1}\big)+\alpha_{2n}\Big) \le \alpha_1,\end{aligned}$$

οπότε η υποακολουθία $\left(\sigma_{2n}\right)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι η υποακολουθία (σ_{2n-1}) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη.
Τότε, οι υποακολουθίες (σ_{2n}) και (σ_{2n-1}) είναι συγκλίνουσες.

Επιπλέον, είναι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sigma_{2n}-\lim_{n\to\infty}\sigma_{2n-1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sigma_{2n}-\sigma_{2n-1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i+1}\alpha_i-\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i+1}\alpha_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}\alpha_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\alpha_{2n}\right)=0\end{aligned}$$

οπότε οι υποακολουθίες (σ_{2n}) και (σ_{2n-1}) είναι ισοσυγκλίνουσες. Άρα η ακολουθία (σ_n) είναι συγκλίνουσα και επομένως, η σειρά συγκλίνει.

(ii) Προφανώς, λόγω της μονοτονίας των ακολουθιών (σ_{2n}) και (σ_{2n-1}), προκύπτει ότι

$$\sigma_{2n}\le S\le\sigma_{2n-1}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.
Επομένως, θα είναι

$$0\le\sigma_{2n-1}-S\le\sigma_{2n-1}-\sigma_{2n}=\alpha_{2n}$$

και

$$0\le S-\sigma_{2n}\le\sigma_{2n+1}-\sigma_{2n}=\alpha_{2n+1}$$

και τελικά,

$$\left|\sigma_n-S\right|\le\alpha_{n+1}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 18

α) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

β) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n}$

συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα.

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $p \leq 0$ τότε ισχύει $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(\ln n)^p}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \geq 3$, οπότε επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης I, ότι $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} = +\infty$.

Για $p>0$ θα αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{n(\ln n)^p}\right)$, με $n\geq 2$, είναι γνήσια φθίνουσα. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}/\left[2,+\infty\right).$$

Επειδή $f'(x)=-\dfrac{(\ln x)^{-1-p}}{x^2}\cdot\left(\ln x+p\right)<0$

για κάθε $x\in\left[2,+\infty\right)$, έπεται ότι η συνάρτηση αυτή θα είναι γνήσια φθίνουσα, οπότε και η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{n(\ln n)^p}\right)$ είναι επίσης γνήσια φθίνουσα.

Τότε, εφαρμόζοντας το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}<+\infty \text{ αν και μόνο αν } \sum_{\kappa=1}^{\infty}2^{\kappa}\frac{1}{2^{\kappa}\left(\ln 2^{\kappa}\right)^p}<+\infty.$$

Αλλά $2^{\kappa}\dfrac{1}{2^{\kappa}\left(\ln 2^{\kappa}\right)^p}=\dfrac{1}{(\ln 2)^p}\cdot\dfrac{1}{\kappa^p}$, οπότε η τελευταία σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $p>1$.

β) Η ακολουθία θετικών αριθμών

$$\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

είναι φθίνουσα και μηδενική, οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz, η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$$

συγκλίνει.

Αντίθετα όμως, με τη βοήθεια του α), προκύπτει ότι η σειρά των απόλυτων τιμών του, δηλαδή η

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},$$

δεν συγκλίνει (επειδή $p=1$).

6. ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ λέγεται ότι **συγκλίνει απολύτως** ή ότι είναι **απολύτως συγκλίνουσα** αν $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$.

Πρόταση 6.1

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και μάλιστα ισχύει ότι

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

Το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει πάντα.

Η απόδειξη της πρότασης να γίνει ως άσκηση. Να χρησιμοποιηθεί η δεύτερη ιδιότητα της σύγκλισης σειρών και η τριγωνική ανισότητα

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε την εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Επειδή η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι φθίνουσα και μηδενική, έπεται ότι η σειρά αυτή συγκλίνει. Όμως η σειρά αυτή δεν συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty .$$

Μια σειρά που συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, λέγεται ότι **συγκλίνει υπό συνθήκη** ή ότι είναι **σχετικά συγκλίνουσα**. Έτσι, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ είναι σχετικά συγκλίνουσα.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω εναλλάσσουσες σειρές είναι απολύτως συγκλίνουσες και ποιες συγκλίνουν υπό συνθήκη:

α) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos\left(n^2+1\right)+\sin\left(n^2+1\right)}{3^n}$,

γ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt[n]{n}$, δ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+3n+1}$,

ε) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n+5}{8n^{\frac{5}{2}}+4n^2+1}$, στ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+2^n}$.

ΛΥΣΗ

α) Ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι

$$\alpha_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}} = +\infty$ η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.

Από την άλλη όμως, επειδή η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}\right)$ είναι γνήσια φθίνουσα και μηδενική η σειρά συγκλίνει, οπότε τελικά η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

β) Ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι

$$\alpha_n = (-1)^n\frac{\cos\left(n^2+1\right)+\sin\left(n^2+1\right)}{3^n}.$$

Επειδή

$$|\alpha_n| \leq \frac{\left|\cos\left(n^2+1\right)\right|+\left|\sin\left(n^2+1\right)\right|}{3^n} \leq \frac{2}{3^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, έπεται σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης Ι ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| < +\infty$, οπότε η $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει απολύτως.

γ) Ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι $\alpha_n = (-1)^{n+1}\sqrt[n]{n}$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$$

έπεται ότι η ακολουθία (α_n) δεν είναι μηδενική και επομένως η σειρά δεν συγκλίνει.

δ) Ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι

$$\alpha_n = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+3n+1}.$$

Επειδή $|\alpha_n| \geq \dfrac{n}{n^2+3n^2+n^2} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\frac{1}{n} = +\infty$, έπεται σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης Ι ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| = +\infty$, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.

Από την άλλη όμως, η ακολουθία $\left(\dfrac{n+1}{n^2+3n+1}\right)$ είναι μηδενική και γνήσια φθίνουσα, διότι

$$\frac{n+2}{(n+1)^2+3(n+1)+1} - \frac{n+1}{n^2+3n+1} =$$

$$-\frac{n^2+3n+3}{\left((n+1)^2+3(n+1)+1\right)\left(n^2+3n+1\right)} < 0,$$

οπότε σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz η σειρά συγκλίνει. Άρα τελικά, η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

ε) Ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι

$$\alpha_n = (-1)^n \frac{3n+5}{8n^{\frac{5}{2}} + 4n^2 + 1}.$$

Επειδή

$$|\alpha_n| \le \frac{3n+5n}{8n^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$, έπεται σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης Ι ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.

στ) Ο γενικός όρος α_n της σειράς είναι

$$\alpha_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + 2^n}.$$

Επειδή $|\alpha_n| \le \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.

ΘΕΤΙΚΟ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Για $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

το **θετικό μέρος** του x: $x^+ = \max\{x, 0\} = \dfrac{|x|+x}{2}$

και το **αρνητικό μέρος** του x: $x^- = \max\{-x, 0\} = \dfrac{|x|-x}{2}$

Προφανώς, ισχύουν

$$x^+, x^- \geq 0, \qquad x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-,$$

Πρόταση 6.2

Για κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^-$ συγκλίνουν.

(ii) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ = +\infty$ (αντ. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^- = +\infty$) και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^- < +\infty$ (αντ. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ < +\infty$), τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ (αντ. $-\infty$).

(iii) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^- = +\infty.$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, με $\alpha_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, \alpha\nu\ n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ \dfrac{1}{n^2}, \alpha\nu\ n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$

απειρίζεται αρνητικά.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

$$\alpha_n^+ = \begin{cases} 0, \alpha\nu\ n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ \dfrac{1}{n^2}, \alpha\nu\ n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases} \quad \text{και} \quad \alpha_n^- = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \alpha\nu\ n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, \alpha\nu\ n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Επειδή $\left|\alpha_n^+\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < +\infty$ έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης Ι, ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ < +\infty$.

Από την άλλη, αν $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^-$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\sigma_{2n} = \sigma_{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \to +\infty$$

οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^- = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$ και σύμφωνα με την πρόταση 6.2, προκύπτει ότι η απειρίζεται αρνητικά.

Η απόλυτη σύγκλιση των σειρών χρησιμοποιείται για τη σύγκλιση της σειράς - γινόμενο:

Σε κάθε δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ αντιστοιχεί μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ με

$$\gamma_n = \alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \beta_2 + \alpha_n \beta_1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n-i+1}.$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται **γινόμενο κατά Cauchy** ή **συνέλιξη** των δύο σειρών και σημειώνεται με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n .$$

Πρόταση 6.3

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, και μια τουλάχιστον από αυτές τις σειρές συγκλίνει απολύτως, τότε το γινόμενό τους συγκλίνει και μάλιστα ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \alpha \cdot \beta .$$

ΑΣΚΗΣΗ 29

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\alpha_n\beta_n\right|$ συγκλίνει, όταν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$ συγκλίνουν, και επιπλέον ισχύει η σχέση $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\alpha_n\beta_n\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2}$.

ΛΥΣΗ

Αν (s_n), (σ_n) και (τ_n) είναι οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\alpha_n\beta_n\right|$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$ αντίστοιχα, τότε με τη βοήθεια της ανισότητας του Schwartz, θα είναι

$$s_n = \sum_{\kappa=1}^{n}\left|\alpha_\kappa\beta_\kappa\right| \le \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa^2}\sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n}\beta_\kappa^2} = \sqrt{\sigma_n}\sqrt{\tau_n} \qquad (1)$$

Επειδή οι ακολουθίες (σ_n) και (τ_n) είναι φραγμένες, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η ακολουθία (s_n) είναι επίσης φραγμένη. Επειδή όμως η (s_n) είναι επίσης αύξουσα, προκύπτει ότι είναι και συγκλίνουσα. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\alpha_n\beta_n\right| < +\infty$.

Τέλος, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\alpha_n\beta_n\right| = \lim_{n\to\infty}s_n \le \sqrt{\lim_{n\to\infty}\sigma_n}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\tau_n} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2}.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Σειρές Ακολουθιών

Περιεχόμενα διάλεξης:
Κριτήρια σύγκλισης σειρών

7. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

1^{o} Κριτήριο σύγκρισης I

Για δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$, με $0\le\alpha_n\le\beta_n$ για κάθε $n\ge n_0$, όπου $n_0\in\mathbb{N}^*$, ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<+\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<+\infty$.

(ii) Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=+\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=+\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 27

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+4n-6}{3n^4+12n^2-7n+1}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+4n+3}{n^3-3n^2+10n}$, γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\left|\frac{2n^2+4n-6}{3n^4+12n^2-7n+1}\right|\le\frac{2n^2+4n^2}{3n^4}\le\frac{6n^2}{3n^4}=\frac{2}{n^2},$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}<+\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης I προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+4n-6}{3n^4+12n^2-7n+1}<+\infty$, δηλαδή η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

β) Επειδή $\left|\dfrac{3n^2+4n+3}{n^3-3n^2+10n}\right| \geq \dfrac{3n^2}{n^3+10n^3} = \dfrac{3}{11}\cdot\dfrac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{11}\cdot\dfrac{1}{n} = +\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης I προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2+4n+3}{n^3-3n^2+10n} = +\infty$, δηλαδή η δοσμένη σειρά απειρίζεται θετικά.

γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$. Επειδή

$$\left|\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\right| = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$,

από το κριτήριο σύγκρισης I προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} < +\infty,$$

δηλαδή η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, β) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ανισότητα

$$\ln x \leq x-1, \text{ για κάθε } x>0,$$

προκύπτουν οι σχέσεις $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1+\frac{1}{n}-1=\frac{1}{n}$ και

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\geq 1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

Επομένως, ισχύει η διπλή ανισότητα

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \tag{1}$$

α) Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}=+\infty$, λόγω της σχέσης (1) και με τη βοήθεια του κριτήριου σύγκρισης Ι, προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

β) Λόγω της σχέσης (1), είναι $0 \leq \frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2}$

οπότε, επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}<+\infty$, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)<+\infty.$$

2^o Κριτήριο σύγκρισης ΙΙ (Οριακό κριτήριο σύγκρισης)

Για δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ με $0 \le \alpha_n$, $0 < \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} \in \overline{\mathbb{R}}$, ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $\ell \ne 0, +\infty$ τότε οι σειρές είναι της αυτής φύσης.

(ii) Αν $\ell = 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n < +\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n < +\infty$.

(iii) Αν $\ell = +\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = +\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = +\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 34

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2n^2+4n-5}{4n^5-2n^3+3n^2+6}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n^2+n+1\right)}{n^{3/2}}$,

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\,tg\frac{1}{n^2}$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n^3-2n^2+4n-5}{4n^5-2n^3+3n^2+6}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-2n^4+4n^3-5n^2}{4n^5-2n^3+3n^2+6}=\frac{3}{4}$$

και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης ΙΙ προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2n^2+4n-5}{3n^5-2n^3+3n^2+6}<+\infty.$$

β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n^2+n+1\right)}{n^{3/2}}$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln\left(n^2+n+1\right)}{n^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x^{\frac{1}{6}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)'}{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\cdot(2x+1)\,x^{\frac{5}{6}}}{\left(x^2+x+1\right)}=0$$

και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}<+\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης ΙΙ προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n^2+n+1\right)}{n^{\frac{3}{2}}}<+\infty$.

Παρατήρηση. Γενικότερα, για μια σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(p(n)\right)}{n^{a}}$, όπου $p(n)$ θετικό πολυώνυμο του n και α > 1, συγκρίνουμε με μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}<+\infty$, όπου 1 < β < α, και καταλήγουμε ότι η πρώτη συγκλίνει.

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,tg\frac{1}{n^2}$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\,tg\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(tg\,x\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=1$$

και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης ΙΙ προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,tg\frac{1}{n^2}=+\infty.$$

3^o Κριτήριο ριζών (Cauchy)

Για μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, με

$$\ell = \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|},$$

ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $\ell < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αν $\ell > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ δεν συγκλίνει.

Πρέπει να τονισθεί ότι όταν $\ell = 1$ το κριτήριο ριζών δεν δίδει απάντηση για τη σύγκλιση της σειράς.

Παράδειγμα

Για τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ το $\ell = 1$, ενώ η πρώτη συγκλίνει και η δεύτερη απειρίζεται θετικά.

ΑΣΚΗΣΗ 37

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$,

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+1}\right)^n$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\limsup\sqrt[n]{\left|(-1)^n\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n+2}=\frac{3}{5}<1,$$

με τη βοήθεια του κριτήριου ριζών προκύπτει ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$ συγκλίνει απολύτως.

β) Επειδή

$$\limsup\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1,$$

με τη βοήθεια του κριτήριου ριζών προκύπτει ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$ απειρίζεται θετικά.

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+1}\right)^n$

Επειδή

$$\begin{aligned}\limsup\sqrt[n]{\left|\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+1}\right)^n\right|} &= \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\operatorname{arctg} x\\ &= 0,\end{aligned}$$

με τη βοήθεια του κριτήριου ριζών προκύπτει ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2+1}\right)^n$ συγκλίνει.

4^o Κριτήριο πηλίκων (D' Alembert)

Για μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, με $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, και

$$\ell_1 = \lim\inf \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right|, \qquad \ell_2 = \lim\sup \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right|$$

ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $\ell_2 < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αν $\ell_1 > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ δεν συγκλίνει.

Πρέπει να τονισθεί ότι όταν $\ell_1 \leq 1 \leq \ell_2$, το κριτήριο πηλίκων δεν δίδει απάντηση για τη σύγκλιση της σειράς.

ΑΣΚΗΣΗ 41

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n-3}{2^n}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{3n+2}$,

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4}{e^{n^2}}$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε

$$\alpha_n=\frac{n^2+2n-3}{2^n},$$

οπότε

$$\ell_2=\limsup\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2+2(n+1)-3}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2+2n-3}{2^n}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2(n+1)-3}{n^2+2n-3}$$

$$=\frac{1}{2}<1.$$

Τότε, από το κριτήριο πηλίκων προκύπτει ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n-3}{2^n}$ συγκλίνει.

β) Θέτουμε

$$\beta_n = \frac{(2n-1)!}{3n+2},$$

οπότε

$$\ell_1 = \lim\inf\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)!}{3(n+1)+2}}{\frac{(2n-1)!}{3n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{3(n+1)+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$$

$$= 1\cdot\lim_{n\to\infty}(2n)(2n+1) = +\infty > 1.$$

Τότε, από το κριτήριο πηλίκων προκύπτει ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{3n+2}$$

δεν συγκλίνει, οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{3n+2} = +\infty$$

γ) Θέτουμε $\gamma_n = (-1)^n \dfrac{n^4}{e^{n^2}}$, οπότε

$$\ell_2 = \limsup \left| \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^4}{e^{(n+1)^2}}}{\dfrac{n^4}{e^{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} = 1 \cdot 0 = 0 < 1.$$

Τότε, από το κριτήριο πηλίκων προκύπτει ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{e^{n^2}}$$

συγκλίνει απολύτως.

5^o Κριτήριο Raabe

Για μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ με $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και

$$\ell_1 = \liminf n \left(1 - \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \right), \qquad \ell_2 = \limsup n \left(1 - \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \right)$$

ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $\ell_1 > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αν $\ell_2 < 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = +\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να αποδειχθεί ότι η σειρά

$$\frac{2}{9}+\frac{2\cdot 5}{9\cdot 12}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{9\cdot 12\cdot 15}+\cdots$$

συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε

$$\alpha_n=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots\big(3(n-1)+2\big)}{9\cdot 12\cdot 15\cdots\big(3(n-1)+9\big)}.$$

Τότε, θα είναι

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)}{9\cdot 12\cdot 15\cdots(3n+9)}}{\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots\big(3(n-1)+2\big)}{9\cdot 12\cdot 15\cdots\big(3(n-1)+9\big)}}=\frac{3n+2}{3n+9}.$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=1$, δεν εφαρμόζεται το κριτήριο πηλίκων. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε το κριτήριο του Raabe.

Πραγματικά, επειδή

$$\ell_1=\liminf_{n\to\infty}\left(n\left(1-\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\frac{3n+2}{3n+9}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{3n+9}=\frac{7}{3}>1$$

από το κριτήριο του Raabe προκύπτει ότι η σειρά συγκλίνει.

6^{o} Λογαριθμικό Κριτήριο

Για μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ με $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{|\alpha_n|}}{\ln n} \in \overline{\mathbb{R}},$$

ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $\ell > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αν $\ell < 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| = +\infty$.

Πρέπει να τονισθεί ότι όταν $\ell = 1$, το λογαριθμικό κριτήριο δεν δίνει απάντηση για τη σύγκλιση της σειράς.

ΑΣΚΗΣΗ 48

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}\cdot(n+7)}{\sqrt{n^4+2}\cdot\sqrt[3]{n^2+5}}.$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4}\cdot(n+7)}{\sqrt{n^4+2}\cdot\sqrt[3]{n^2+5}}$.

Με τη βοήθεια των γνωστών ιδιοτήτων των λογαρίθμων

$$\ln a^k = k\ln a, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\ln\frac{1}{|\alpha_n|} &= \ln\frac{\sqrt{n^4+2}\cdot\sqrt[3]{n^2+5}}{\sqrt{n^2+4}\cdot(n+7)} \\
&= \ln\sqrt{n^4+2} + \ln\sqrt[3]{n^2+5} - \ln\sqrt{n^2+4} - \ln(n+7) \\
&= \frac{1}{2}\ln(n^4+2) + \frac{1}{3}\ln(n^2+5) - \frac{1}{2}\ln(n^2+4) - \ln(n+7)
\end{aligned}$$

Επομένως, είναι $\ell = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln \dfrac{1}{|\alpha_n|}}{\ln n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(n^4+2\right)+\frac{1}{3}\ln\left(n^2+5\right)-\frac{1}{2}\ln\left(n^2+4\right)-\ln(n+7)}{\ln n}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^4+2\right)}{\ln x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+5\right)}{\ln x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+4\right)}{\ln x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+7)}{\ln x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(x^4+2\right)\right)'}{(\ln x)'}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(x^2+5\right)\right)'}{(\ln x)'}-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(x^2+4\right)\right)'}{(\ln x)'}-$$

$$-\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(x+7)\right)'}{(\ln x)'}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^4+2}}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+5}}{\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+4}}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+7}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{4}{2}+\frac{2}{3}-1-1 = \frac{2}{3}.$$

Επειδή $\ell < 1$, σύμφωνα με λογαριθμικό κριτήριο η σειρά απειρίζεται θετικά.

7^{o} Κριτήριο Dirichlet ή Abel

Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ είναι φραγμένη και η ακολουθία $\left(\beta_n\right)$ θετικών αριθμών είναι φθίνουσα και μηδενική, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ είναι συγκλίνουσα.

ΑΣΚΗΣΗ 50

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}$, όπου $p > 0$, συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\alpha_n = \cos n$ και $\beta_n = \frac{1}{n^p}$.

Εφαρμόζοντας τον γνωστό τριγωνομετρικό τύπο

$$\cos\omega + \cos 2\omega + \cdots + \cos n\omega = \frac{\sin\left(\frac{n\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}},$$

για $\omega = 1$, προκύπτει ότι

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right| = \left|\cos 1 + \cos 2 + \cdots + \cos n\right| = \left|\frac{\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ είναι φραγμένη.

Εξάλλου, η ακολουθία (β_n) είναι φθίνουσα και μηδενική, οπότε από το κριτήριο του Dirichlet προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}$ είναι συγκλίνουσα.

ΑΣΚΗΣΗ 35

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n(1+n^2)}}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$, γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3n+1}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{\sqrt{n(1+n^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{1+n^2}}=1$$

και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης ΙΙ προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n(1+n^2)}}=+\infty$.

β) Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\pi$$

και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης ΙΙ προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}<+\infty.$$

γ) Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3n+1}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3n+1}\right)}{\frac{1}{3n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{arctg}x)'}{x'}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{3}$$

και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης ΙΙ προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3n+1}\right)=+\infty.$$

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ με

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}, & \text{αν } n = 3\rho,\ \ \rho \in \mathbb{N}^* \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}, & \text{αν } n = 3\rho+1,\ \ \rho \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{1+2^n}{3+2^{n+1}}\right)^n, & \text{αν } n = 3\rho+2,\ \ \rho \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[n]{2}}, & \text{αν } n = 3\rho,\ \ \rho \in \mathbb{N}^* \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}, & \text{αν } n = 3\rho+1,\ \ \rho \in \mathbb{N} \\ \frac{1+2^n}{3+2^{n+1}}, & \text{αν } n = 3\rho+2,\ \ \rho \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{3+2^{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}=\frac{1}{2},$$

προκύπτει ότι τα σημεία συσσωρεύσεως της ακολουθίας $\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right)$ είναι οι αριθμοί $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ και $\frac{1}{e}$ και επομένως το μεγαλύτερο από αυτά θα είναι το limes superior της ακολουθίας $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$, δηλαδή

$$\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}=\frac{1}{2}<1.$$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο ριζών η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n + 4^n}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} / 2^n$, γ) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε

$$\alpha_n = \frac{3^n + 4^n}{5^n + 4^n},$$

οπότε

$$\ell_2 = \lim\sup\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{3^n + 4^n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n + 4^n}{5^{n+1} + 4^{n+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{5+4\left(\frac{4}{5}\right)^n}\right)$$

$$= \frac{3\cdot 0 + 4}{0+1}\cdot\frac{1+0}{5+4\cdot 0}$$

$$= \frac{4}{5} < 1.$$

Τότε, από το κριτήριο πηλίκων προκύπτει ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n + 4^n}$$

συγκλίνει.

β) Θέτουμε

$$\alpha_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n},$$

οπότε

$$\ell_1 = \liminf \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

$$= 2 > 1.$$

Τότε, από το κριτήριο πηλίκων προκύπτει ότι η σειρά δεν συγκλίνει, οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^n} = +\infty.$$

γ) Θέτουμε $\alpha_n = 3^n \sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$

οπότε

$$\ell_2 = \limsup\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{5^{n+1}}\right)}{3^n\sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right)}$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{5^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{5^{n+1}}}}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right)}{\frac{\pi}{5^n}}}$$

$$= \frac{3}{5}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}} = \frac{3}{5} < 1.$$

Τότε, από το κριτήριο πηλίκων προκύπτει ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$$

συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 44

Να αποδειχθεί το κριτήριο του Raabe.

ΛΥΣΗ

(i) Αν $\ell_1 = \liminf n\left(1-\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\right) > 1$ θα αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| < +\infty$. Αν $\ell_1 > x > 1$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ με

$$n\left(1-\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\right) > x, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Για την ακολουθία (β_n) με $\beta_n = (n-1)|\alpha_n|$ και $n \geq n_0$ είναι

$$\beta_n - \beta_{n+1} = (n-1)|\alpha_n| - n|\alpha_{n+1}| = n\left(|\alpha_n| - |\alpha_{n+1}|\right) - |\alpha_n|$$

$$= |\alpha_n|\left(n\left(1-\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\right) - 1\right) > |\alpha_n|(x-1),$$

οπότε τελικά θα είναι

$$|\alpha_n| < \frac{\beta_n - \beta_{n+1}}{x-1} \tag{1}$$

για κάθε $n \geq n_0$.

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η ακολουθία (β_n) είναι τελικά γνήσια φθίνουσα, οπότε, επειδή $\beta_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, έπεται ότι η ακολουθία (β_n) συγκλίνει σε ένα μη αρνητικό αριθμό β.

Επιπλέον, αν (σ_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n-\beta_{n+1}}{x-1}$, τότε προκύπτει ότι $\sigma_n=\frac{\beta_1-\beta_{n+1}}{x-1}$, οπότε $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n-\beta_{n+1}}{x-1}=\frac{\beta_1-\beta}{x-1}<+\infty$.

Κατόπιν τούτου, από τη σχέση (1) και το κριτήριο σύγκρισης I, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|<+\infty.$$

(ii) Αν $\ell_2=\limsup n\left(1-\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\right)>1$, θα αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|=+\infty$. Αν $\ell_2<x<1$ τότε υπάρχει $n_0>1$ με

$$n\left(1-\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\right)<x,\ \text{για κάθε } n\geq n_0,$$

οπότε για $n\geq n_0$ είναι

$$(n-1)|\alpha_n|-n|\alpha_{n+1}|<(x-1)|\alpha_n|$$

$$(n-1)|\alpha_n|<n|\alpha_{n+1}|$$

$$\frac{(n_0-1)|\alpha_{n_0}|}{n}<|\alpha_{n+1}|.$$

Άρα επειδή $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n_0-1)|\alpha_{n_0}|}{n}=+\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης I, προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|=+\infty$.