ΔΙΑΛΕΞΗ 1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Όριο και συνέχεια συναρτήσεων

Περιεχόμενα διάλεξης:

Βασικοί ορισμοί
Σύγκλιση συναρτήσεων
Βασικά όρια
Ασύμπτωτες
Συνέχεια

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Περιοχή σημείου

Περιοχή ενός σημείου $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται κάθε διάστημα της μορφής $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ όπου $\varepsilon > 0$ και σημειώνεται με $\boldsymbol{\pi(x)}$. Η έννοια της περιοχής είναι πολύ σημαντική στην Ανάλυση διότι με τη βοήθειά της θεμελιώνονται ορισμένες βασικές έννοιες, όπως αυτή του ορίου της συνάρτησης.

Τέλος, με τη βοήθεια της περιοχής ορίζονται τα εσωτερικά και οριακά σημεία ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$.

Ένα σημείο $x \in A$ ονομάζεται εσωτερικό σημείο του A όταν υπάρχει περιοχή του $\pi(x)$ με $\pi(x) \subseteq A$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A σημειώνεται με $\mathbf{A^o}$.

Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται οριακό σημείο του A όταν για κάθε περιοχή του $\pi(x)$ ισχύει ότι
$(\pi(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα οριακά σημεία ενός συνόλου μπορεί να μην ανήκουν σ' αυτό. Για παράδειγμα το 0 είναι το μοναδικό οριακό σημείο του συνόλου $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ και $0 \notin A$.

Πράγματι, αν $\pi(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, όπου $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$, με $\frac{1}{n} < \varepsilon$, οπότε $\frac{1}{n} \in (\pi(0) - \{0\}) \cap A$ και επομένως το 0 είναι οριακό σημείο του A.

Οι περιοχές του $+\infty$ (αντ. $-\infty$) στο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι τα διαστήματα της μορφής $(\alpha, +\infty]$ (αντ. $[-\infty, \alpha)$), όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω μια συνάρτηση f και $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε η συνάρτηση f **συγκλίνει** στο ℓ, όταν το x τείνει στο ξ $(x \to \xi)$, αν για κάθε περιοχή $\pi(\ell)$ υπάρχει μια περιοχή $\pi(\xi)$ τέτοια ώστε $x \in D(f) \cap \big(\pi(\xi) \setminus \{\xi\}\big) \Rightarrow f(x) \in \pi(\ell)$.

Τούτο θα σημειώνεται με $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \ell$ και το ℓ θα ονομάζεται **οριακή τιμή** ή **όριο** της συνάρτησης f για $x \to \xi$.

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω ορισμό, για ξ ή ℓ ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$ ή $x_0 \in \mathbb{R}$, με αντίστοιχες περιοχές $\pi(-\infty) = [-\infty, -\frac{1}{\delta})$, $\pi(+\infty) = (\frac{1}{\delta}, +\infty]$, $\pi(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, όπου $\delta > 0$, προκύπτουν οι παρακάτω 9 μορφές σύγκλισης:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \ell$

(8) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = -\infty$

(9) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = +\infty$

Παραδείγματα

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow$

   Για κάθε περιοχή $\pi(\ell)=(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, υπάρχει περιοχή $\pi(-\infty)=[-\infty,-\dfrac{1}{\delta})$, $\delta>0$, τέτοια ώστε

   $x\in D(f)\cap\pi(-\infty)\Rightarrow f(x)\in\pi(\ell)$

   $\Leftrightarrow$Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in D(f)$ με $x<-\dfrac{1}{\delta}$ έπεται ότι $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$

   Για κάθε περιοχή $\pi(-\infty)=[-\infty,-\dfrac{1}{\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, υπάρχει περιοχή $\pi(+\infty)=(\dfrac{1}{\delta},+\infty]$, $\delta>0$, τέτοια ώστε

   $x\in D(f)\cap\pi(+\infty)\Rightarrow f(x)\in\pi(-\infty)$

   $\Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in D(f)$ με $x>\dfrac{1}{\delta}$ έπεται ότι $f(x)<-\dfrac{1}{\varepsilon}$.

3. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell \Leftrightarrow$

   Για κάθε περιοχή $\pi(\ell)=(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, υπάρχει περιοχή $\pi(\xi)=(\xi-\delta,\xi+\delta)$, $\delta>0$, τέτοια ώστε

   $x\in D(f)\cap\pi(\xi)\Rightarrow f(x)\in\pi(\ell)$

   $\Leftrightarrow$Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in D(f)$ με $0<|x-\xi|<\delta$ έπεται ότι $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Παρατήρηση. Για να ορίζεται η σύγκλιση μιας συνάρτησης όταν $x \to \xi \in \overline{\mathbb{R}}$, θα πρέπει να υπάρχει περιοχή $\pi(\xi)$, τέτοια ώστε είναι $D(f) \cap \pi(\xi) \neq \varnothing$, δηλαδή

1. Αν $\xi = -\infty$, τότε υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $(-\infty, -\beta) \subseteq D(f)$.
2. Αν $\xi = +\infty$, τότε υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $(\alpha, +\infty) \subseteq D(f)$.
3. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε το ξ είναι οριακό σημείο του $D(f)$.

Μοναδικότητα ορίου

Το όριο μιας συνάρτησης, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Πλευρικά όρια

δεξιό όριο της f: $\lim\limits_{x \to \xi^+} f(x)$

αριστερό όριο της f: $\lim\limits_{x \to \xi^-} f(x)$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \xi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi^-} f(x) = \ell$

Πρόταση 1.1 (Αρχή της μεταφοράς)

Για μια συνάρτηση f και για $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in D(f) \setminus \{\xi\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $x_n \to \xi$, έπεται ότι $f(x_n) \to \ell$.

Ιδιότητες

1. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$ και $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi}(\lambda f)(x)=\lambda\cdot\ell$,
με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\lambda=0$ και $\ell=\pm\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$ και $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=m \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi}(f+g)(x)=\ell+m$,
με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\ell=+\infty$ και $m=-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$ και $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=m \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi}(f\cdot g)(x)=\ell\cdot m$,
με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\ell=\pm\infty$ και $m=0$.

4. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$, $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=m$ και $m\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\ell}{m}$,
με εξαίρεση την περίπτωση $\ell=\pm\infty$ και $m=\pm\infty$.
Ειδικά αν $\ell\neq\pm\infty$ και $m=\pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=0$.

5. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$, με $\ell\in\overline{\mathbb{R}}^*$ και $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=0$ με $g(x)>0$ (αντ. $g(x)<0$),
για κάθε $x\in\pi(\xi) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell\cdot(+\infty)$ $\big($αντ. $\ell\cdot(-\infty)\big)$.

6. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi} f^{\nu}(x)=\ell^{\nu}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

7. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi}\sqrt[\nu]{|f(x)|}=\sqrt[\nu]{|\ell|}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ και $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$, $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=m$ και $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in\pi(\xi) \Rightarrow \ell\leq m$.

<u>Σύγκλιση ρητών συναρτήσεων</u>

Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει ότι για κάθε ρητή συνάρτηση $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x βαθμού m, n και με συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων α,β αντίστοιχα, ισχύει ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to\xi} R(x)=R(\xi)$, όταν $\xi\in\mathbb{R}$ και $Q(\xi)\neq 0$.

(ii) $$\lim_{x\to+\infty} R(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } m<n\\ \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot(+\infty), & \text{αν } m>n\\ \dfrac{\alpha}{\beta}, & \text{αν } m=n.\end{cases}$$

(iii) $$\lim_{x\to-\infty} R(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } m<n\\ \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot(-\infty), & \text{αν } m>n\\ \dfrac{\alpha}{\beta}, & \text{αν } m=n.\end{cases}$$

Πρόταση 1.2 (Κριτήριο παρεμβολής)

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο D, και ξ οριακό σημείο του D με

$h(x) \le f(x) \le g(x)$

για κάθε $x \in \left(\pi(\xi) \setminus \{\xi\}\right) \cap D$, όπου $\pi(\xi)$ είναι μια περιοχή του ξ και

$\lim\limits_{x\to\xi} h(x) = \lim\limits_{x\to\xi} g(x) = \ell \in \mathbb{R}.$

Τότε θα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \ell$.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να ευρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{x}{2}\right]$, β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[[x]]{x}$, γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x[x]}{4x^2+3}$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x \ge 1$ είναι

$$\frac{x}{2} - 1 < \left[\frac{x}{2}\right] \le \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2} - 1\right) < \frac{1}{x}\left[\frac{x}{2}\right] \le \frac{1}{x}\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{x} < \frac{1}{x}\left[\frac{x}{2}\right] \le \frac{1}{2}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}.$$

β) Για $x \geq 1$ είναι

$$\sqrt[[x]]{[x]} \leq \sqrt[[x]]{x} < \sqrt[[x]]{[x]+1}.$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[[x]]{[x]} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[[x]]{[x]+1} = 1,$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[[x]]{x} = 1.$$

γ) Για $x < 0$ προκύπτουν οι ισοδύναμες ανισότητες:

$$x - 1 < [x] \leq x$$

$$x^2 - x > x[x] \geq x^2$$

$$\frac{x^2 - x}{4x^2 + 3} > \frac{x[x]}{4x^2 + 3} \geq \frac{x^2}{4x^2 + 3}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - x}{4x^2 + 3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{4x^2 + 3} = \dfrac{1}{4}$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x[x]}{4x^2 + 3} = \frac{1}{4}.$$

Σύγκλιση σύνθετης συναρτήσεων

Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν:

(i) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$ **και** $\lim\limits_{y\to\ell} g(y)=m$**, όπου** $\xi,\ell,m\in\overline{\mathbb{R}}$**,**

(ii) $f(x)\neq\ell$ **για κάθε** $x\in D(g\circ f)\cap\left(\pi(\xi)\setminus\{\xi\}\right)$**, όπου** $\pi(\xi)$ **είναι μια περιοχή του ξ, τότε είναι** $\lim\limits_{x\to\xi}(g\circ f)(x)=m$**.**

Σύγκλιση μονότονων συναρτήσεων

Κάθε αύξουσα (αντ. φθίνουσα) και άνω (αντ. κάτω) φραγμένη συνάρτηση $f/[\alpha,+\infty)$ **(αντ.** $f/(-\infty,\beta]$**) συγκλίνει για** $x\to+\infty$ **(αντ.** $x\to-\infty$**) προς πραγματικό αριθμό.**

2.ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

Α. Τριγωνομετρικά όρια

1. $\lim\limits_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi$ και $\lim\limits_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi$ για κάθε $\xi\in\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x\to\xi}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\xi$ για κάθε $\xi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}:\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. $\lim\limits_{x\to\xi^-}\operatorname{tg} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\xi^+}\operatorname{tg} x = -\infty$, για κάθε $\xi\in\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}:\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $\lim\limits_{x\to\xi}\operatorname{ctg}\, x = \operatorname{ctg}\,\xi$ για κάθε $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\kappa\pi:\kappa\in\mathbb{Z}\}$.

5. $\lim\limits_{x\to\xi^-}\operatorname{ctg}\, x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to\xi^+}\operatorname{ctg}\, x = +\infty$ για κάθε $\xi\in\{\kappa\pi:\kappa\in\mathbb{Z}\}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Β. Όρια δυνάμεως

1. $\lim\limits_{x\to\xi} x^{\alpha} = \xi^{\alpha}$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\xi>0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$, για $\alpha>0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0$, για $\alpha<0$.

Γ. Εκθετικά όρια

1. $\lim\limits_{x\to\xi}\alpha^x=\alpha^\xi$, για $\alpha>0$ και $\xi\in\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$, για $\alpha>1$,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$, για $0<\alpha<1$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δ. Λογαριθμικά όρια

1. $\lim\limits_{x\to\xi}\log_\alpha x=\log_\alpha\xi$, για $\alpha>0$, $\alpha\neq1$ και $\xi>0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\log_\alpha x=-\infty$, για $\alpha>1$,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\log_\alpha x=+\infty$, για $0<\alpha<1$.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

Εφαρμογή. Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Λύση. Για $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ με $x > -n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \geq n_0$. Οπότε, επειδή $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{x}{n} > -1$, εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli, προκύπτει ότι

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{x}{n} = 1+x, \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

Κατόπιν τούτου, χρησιμοποιώντας το τέταρτο όριο των εκθετικών ορίων, προκύπτει ότι

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να αποδειχθεί ότι:

α) $\lim\limits_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi$, όπου $\xi \in \mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x\to\xi}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\xi$, όπου $\xi \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

γ) $\lim\limits_{x\to\xi^-}\operatorname{tg} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\xi^+}\operatorname{tg} x = -\infty$, όπου $\xi = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin\xi| &= 2\left|\sin\frac{x-\xi}{2}\right|\left|\cos\frac{x+\xi}{2}\right| \\ &\overset{1}{\leq} 2\left|\frac{x-\xi}{2}\right|1 \\ &= |x-\xi|\end{aligned}$$

για κάθε $x, \xi \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\xi}|x-\xi| = 0$, προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to\xi}|\sin x - \sin\xi| = 0$.

Άρα,

$\lim\limits_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi$.

---

[1] Αφού $|\sin x| \leq |x|$ και $|\cos x| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για $\xi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\lim_{x\to\xi} \operatorname{tg} x = \frac{\lim\limits_{x\to\xi} \sin x}{\lim\limits_{x\to\xi} \cos x} = \frac{\sin\xi}{\cos\xi} = \operatorname{tg}\xi.$$

γ) Για $\xi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\left(\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^\kappa$$

και

$$\lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\left(\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Τότε, επειδή

$$\operatorname{tg} x = \frac{(-1)^\kappa \sin x}{(-1)^\kappa \cos x},$$

$$\lim_{x\to\xi}\left((-1)^\kappa \sin x\right) = 1 > 0,$$

$$\lim_{x\to\xi}\left((-1)^\kappa \cos x\right) = 0,$$

$(-1)^\kappa \cos x > 0$ για κάθε $x \in \left(\kappa\pi, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ και

$(-1)^\kappa \cos x < 0$ για κάθε $x \in \left(\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \pi\right)$,

προκύπτουν τα ακόλουθα όρια:

$\lim\limits_{x\to\xi^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\xi^+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

δ) Αρχικά θα αποδειχθεί η ανισότητα

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

οπότε, επειδή $\cos x > 0$, εύκολα προκύπτει ότι η ανισότητα (1) είναι αληθής.

Αν τώρα $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τότε $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε εφαρμόζοντας την ανισότητα (1) για το $-x$ προκύπτει ότι

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{(-x)} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Στη συνέχεια, επειδή $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, από την ανισότητα (1) προκύπτει, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, ότι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά θα αποδειχθεί ότι

$$x \le e^x - 1 \le \frac{x}{1-x} \qquad (1)$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθεί η γνωστή ανισότητα

$$1 + x \le e^x \qquad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πραγματικά, λόγω της (2) ισχύει προφανώς η πρώτη ανισότητα της (1). Επιπλέον, αν εφαρμοσθεί η ανισότητα (2) για $-x$, με $x \in (-1,1)$, προκύπτουν οι ισοδύναμες ανισότητες:

$$1 - x \le e^{-x}$$

$$e^x \le \frac{1}{1-x}$$

$$e^x - 1 \le \frac{1}{1-x} - 1$$

$$e^x - 1 \le \frac{x}{1-x}.$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{1}{1-x}, \text{ όταν } x \in (0,1)$$

και

$$1 \ge \frac{e^x - 1}{x} \ge \frac{1}{1-x}, \text{ όταν } x \in (-1,0).$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1-x} = 1$, εφαρμόζοντας δύο φορές το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

και τελικά,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να ευρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{3x}}{x}$, β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x\left(e^{x}+e^{-x}\right)}$, γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^{x}-\beta^{x}}{x}$, όταν $\alpha,\beta>0$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x\in\mathbb{R}^*$ είναι

$$\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x}=4e^{3x}\cdot\frac{e^{4x}-1}{4x},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x}=4\left(\lim_{x\to 0}e^{3x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\right)$$

$$=4\cdot 1\cdot 1$$

$$=4.$$

β) Για $x\in\mathbb{R}^*$ είναι

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{x\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\frac{e^{2x}-1}{x\left(e^{2x}+1\right)}$$

$$=2\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{e^{2x}+1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{2x}+1}\right)=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1.$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, είναι

$$\frac{\alpha^x - \beta^x}{x} = \frac{e^{\ln \alpha^x} - e^{\ln \beta^x}}{x} = \frac{e^{x \ln \alpha} - e^{x \ln \beta}}{x}$$

$$= \frac{e^{x \ln \beta}\left[e^{x \ln \alpha - x \ln \beta} - 1\right]}{x} = \frac{e^{x \ln \beta}\left[e^{x \ln \frac{\alpha}{\beta}} - 1\right]}{x}$$

$$= \ln\frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{x \ln \beta}\, \frac{e^{x \ln \frac{\alpha}{\beta}} - 1}{x \ln \frac{\alpha}{\beta}},$$

οπότε

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha^x - \beta^x}{x} = \ln\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\lim_{x \to 0} e^{x \ln \beta}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln \frac{\alpha}{\beta}} - 1}{x \ln \frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$= \ln\frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 \cdot 1 = \ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

3. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις «έχουν σημεία στο άπειρο». Στις περιπτώσεις αυτές μια ευθεία ονομάζεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f όταν κάθε ακολουθία αποστάσεων της C_f από την ευθεία είναι μηδενική.

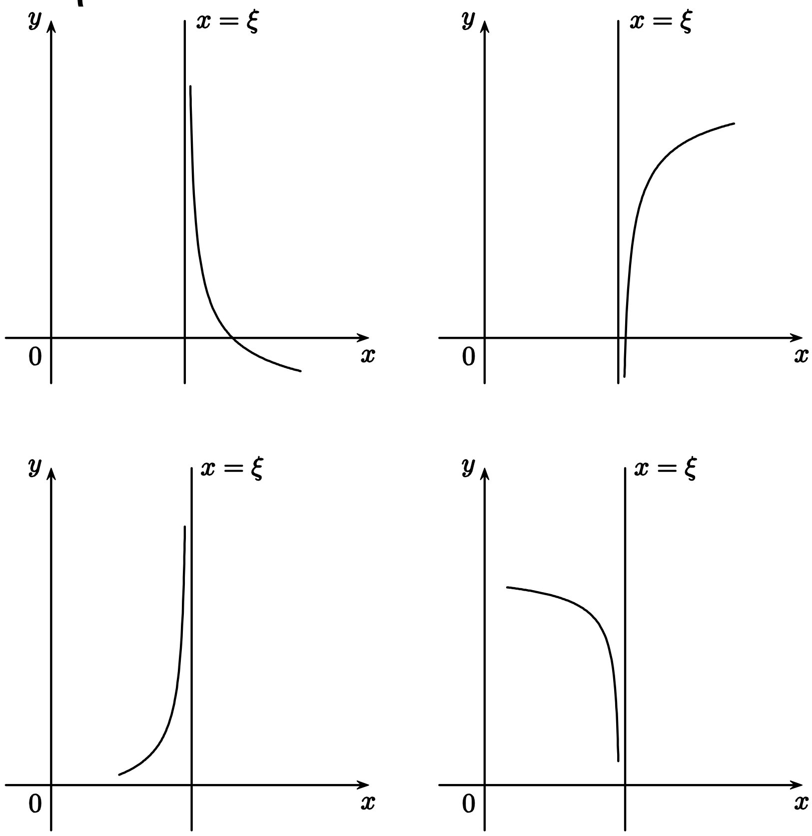
Παρακάτω δίδονται οι διάφορες μορφές ασύμπτωτων:

I. Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Μια ευθεία $x = \xi$ ονομάζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x), \qquad \lim_{x \to \xi^-} f(x)$$

είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.



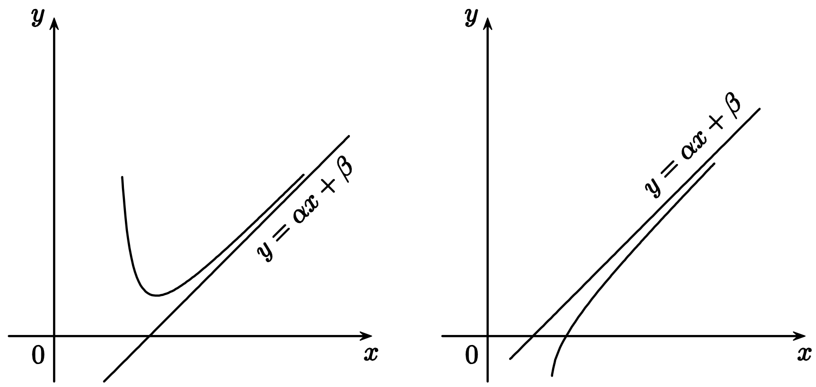
Κατακόρυφες ασύμπτωτες

II. Μη κατακόρυφες ασύμπτωτες

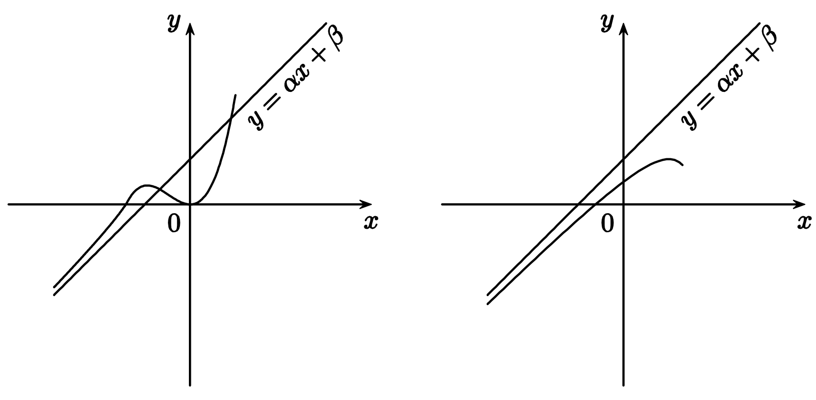
Μια ευθεία $y=\alpha x+\beta$ ονομάζεται **μη κατακόρυφη ασύμπτωτη** (ή απλά **ασύμπτωτη**) της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$) αν

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-(\alpha x+\beta)\Big)=0 \qquad (\text{αντ.}\ \lim_{x\to-\infty}\Big(f(x)-(\alpha x+\beta)\Big)=0).$$

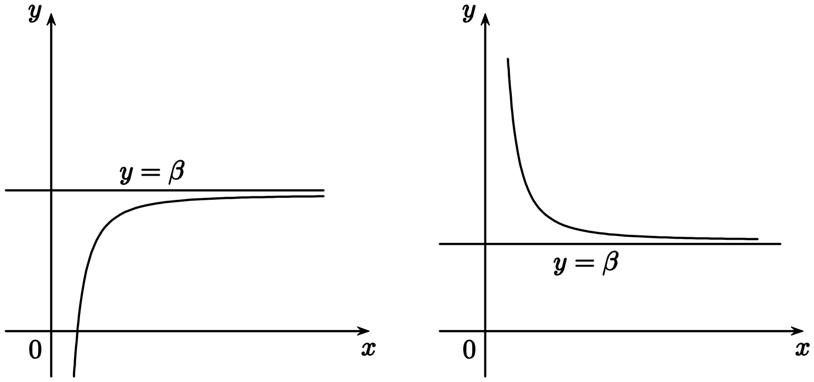
Αν $\alpha\neq 0$ (αντ. $\alpha=0$) η ασύμπτωτη ονομάζεται **πλάγια ασύμπτωτη** (αντ. **οριζόντια ασύμπτωτη**).



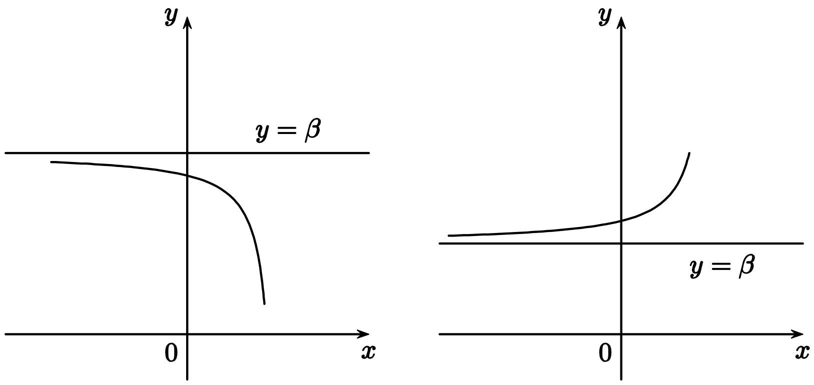
Πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$



Πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$



Οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$



Οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

Πρόταση 3.1

Η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$) αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ \left(\text{αντ. } \alpha=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\right)$$

και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-\alpha x\big)\ \left(\text{αντ. } \beta=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-\alpha x\big)\right)$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να ευρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}\Big/\mathbb{R}\setminus\{3\}$, β) $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}\Big/\mathbb{R}$,

γ) $h(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{x-2}\Big/\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $x=3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της δοσμένης συνάρτησης διότι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$.

Η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

Η συνάρτηση αυτή δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

β) Αρχικά, παρατηρούμε ότι για τη γραφική παράσταση της $g/\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες. Προκειμένου να ευρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες (δηλ. ασύμπτωτες της μορφής $y=\alpha x+\beta$, με $\alpha\neq 0$) χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$\alpha_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x},\ \beta_1=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\alpha_1 x\right)$$

και

$$\alpha_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x},\ \beta_2=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-\alpha_2 x\right).$$

Είναι:

$$\alpha_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=1,$$

$$\beta_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2},$$

$$\alpha_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1,$$

$$\beta_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

Άρα οι ευθείες $y=x+\frac{1}{2}$ και $y=-x-\frac{1}{2}$ είναι οι πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $g/\mathbb{R}$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$ αντίστοιχα.

γ) Η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h/\mathbb{R}\setminus\{2\}$ διότι $\lim_{x\to 2^-} h(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to 2^+} h(x) = +\infty$.

Οριζόντιες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν.

Προκειμένου να ευρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(x+4)}{x(x-2)} = 1,$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} [h(x) - \alpha x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(x+4)}{x-2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-4}{x-2} = 5.$$

Επειδή το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και στην περίπτωση όπου $x \to -\infty$, η μοναδική πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία $y = x + 5$.

5. ΣΥΝΕΧΕΙΑ

f/A **συνεχής στο στοιχείο** $\xi \in A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$

f/A **συνεχής από τα δεξιά** (αντ. **από τα αριστερά**) **στο στοιχείο** $\xi \in A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = f(\xi)$ (αντ. $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) = f(\xi)$).

<u>Ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας</u>

μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο $D(f)$ με $x_n \to \xi$ έπεται ότι $f(x_n) \to f(\xi)$.

Ιδιότητες

Αν f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο ξ, τότε οι παρακάτω συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς στο ξ:

1. $\kappa f + \lambda g$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $f \cdot g$.
3. $\dfrac{f}{g}$, αν $g(\xi) \neq 0$.
4. f^{ν}, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.
5. $\sqrt[\nu]{|f|}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.
6. $(f(x))^{g(x)}$, αν $f(\xi) > 0$.

Πρόταση 5.1

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με $R(f)\subseteq D(g)$. Αν η f είναι συνεχής στο ξ και η g συνεχής στο $f(\xi)$ τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο ξ.

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής σε ένα σύνολο** $A\subseteq D(f)$ αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\xi\in A$. Ειδικά αν $A=D(f)$ τότε η f ονομάζεται **συνεχής**.

Χρησιμοποιώντας τα βασικά όρια και τις ιδιότητες της συνέχειας προκύπτει ότι:

1.Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2.Κάθε ρητή συνάρτηση $R(x)=\dfrac{\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_m x^m+\beta_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$ είναι συνεχής στο σύνολο $\left\{x\in\mathbb{R}:\beta_m x^m+\beta_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\neq 0\right\}$.

3.Η συνάρτηση της δύναμης $f(x)=x^\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$.

4.Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η $\operatorname{tg} x$ είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \left\{ \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} : \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$ και η $\operatorname{ctg} x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{ \kappa\pi : \kappa \in \mathbb{Z} \}$.

5.Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $\alpha > 0$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

6.Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, όπου $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$.

7.Οι υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh x$, $\cosh x$ και $\operatorname{tgh} x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ενώ η $\operatorname{ctgh} x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 34

Να ευρεθούν οι τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\alpha^2 x+\beta, & \text{αν } x<2 \\ 3\alpha+2\beta, & \text{αν } x=2 \\ 5\alpha x+\beta-2, & \text{αν } x>2 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $\xi=2$.

ΛΥΣΗ

Από τη συνέχεια της συνάρτησης $f/\mathbb{R}$ στο 2 προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x),$$

οπότε

$$\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+2\alpha^2 x+\beta\right)=3\alpha+2\beta=\lim_{x\to 2^+}\left(5\alpha x+\beta-2\right)\Leftrightarrow$$

$$4+4\alpha^2+\beta=3\alpha+2\beta=10\alpha+\beta-2.$$

Επειδή $4+4\alpha^2+\beta=10\alpha+\beta-2$ προκύπτει η εξίσωση $2\alpha^2-5\alpha+3=0$, η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς $\alpha=1$ και $\alpha=\frac{3}{2}$. Τότε όμως, αν τεθούν στην ισότητα $3\alpha+2\beta=10\alpha+\beta-2$ οι δυνατές τιμές του α, προκύπτουν οι αντίστοιχες τιμές για το β, δηλαδή $\beta=5$, και $\beta=\frac{17}{2}$.

Συνεπώς, για τα ζεύγη $(1,5)$ και $\left(\frac{3}{2},\frac{17}{2}\right)$ του (α,β) η συνάρτηση είναι συνεχής.

ΔΙΑΛΕΞΗ 2
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Όριο και συνέχεια συναρτήσεων

Περιεχόμενα διάλεξης:

Συνέχεια σε διαστήματα
Ομοιόμορφη συνέχεια

6. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Πρόταση 6.1

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **είναι φραγμένη.**

Η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει εν γένει για συναρτήσεις που ορίζονται σε διαστήματα που δεν είναι κλειστά. Για παράδειγμα, η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}/(0,1)$ δεν είναι άνω φραγμένη.

ΑΣΚΗΣΗ 35

Να αποδειχθεί η πρόταση 6.1.

ΛΥΣΗ

Αν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ η οποία δεν είναι άνω φραγμένη, τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n\in[\alpha,\beta]$ και $f(x_n)>n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Επειδή η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη θα έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσωρεύσεως x στο $[\alpha,\beta]$. Τότε όμως υπάρχει υποακολουθία (x_{κ_n}) τέτοια ώστε $x_{\kappa_n}\to x$.

Εξάλλου, από τη συνέχεια της f προκύπτει ότι $f(x_{\kappa_n})\to f(x)$, το οποίο είναι άτοπο αφού $f(x_{\kappa_n})>\kappa_n\geq n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f είναι κάτω φραγμένη.

Θεώρημα 6.2 (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f/\left[\alpha,\beta\right]$ **υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο ολικού μεγίστου και ένα (τουλάχιστον) σημείο ολικού ελαχίστου.**

Το θεώρημα αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη των ακρότατων για συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά διαστήματα. Τούτο δεν αληθεύει εν γένει όταν η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα που δεν είναι κλειστό ακόμα και στην περίπτωση όπου η f είναι φραγμένη.

Για παράδειγμα, για τη συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}/\left(0,1\right)$ ισχύει ότι $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in\left(0,1\right)$, ενώ $\sup\left\{f(x):x\in\left(0,1\right)\right\}=1.$

Πράγματι, αν $\varphi>0$ είναι ένα άνω φράγμα της συνάρτησης f, ισχύει ότι $\dfrac{1}{1+x^2}<\varphi\Leftrightarrow\dfrac{1}{\varphi}-1<x^2,\quad$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Εφαρμόζοντας για $x=\dfrac{1}{n}$, προκύπτει ότι $\dfrac{1}{\varphi}-1<\dfrac{1}{n^2}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Άρα

$$\frac{1}{\varphi}-1\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{\varphi}\le1\Leftrightarrow\varphi\ge1$$

Άρα το 1 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της συνάρτησης. Κατόπιν τούτου, για την f δεν υπάρχει σημείο ολικού μεγίστου.

ΑΣΚΗΣΗ 36

Να αποδειχθεί το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, θα είναι φραγμένη, σύμφωνα με την Πρόταση 6.1, οπότε ορίζονται στο $\mathbb{R}$ τα
$M=\sup\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}$ και $m=\inf\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}$.

Θα αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in[\alpha,\beta]$, τέτοια ώστε $f(\xi_1)=M$ και $f(\xi_2)=m$.

Αν $f(x)\neq M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}/[\alpha,\beta]$$

είναι συνεχής, οπότε θα είναι και φραγμένη.

Έστω $\varphi>0$ ένα άνω φράγμα της, δηλαδή

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}\leq\varphi$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Τότε, προκύπτει ότι

$$f(x)\leq M-\frac{1}{\varphi}$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, το οποίο είναι άτοπο αφού αντίκειται στον ορισμό του supremum.

Άρα υπάρχει $\xi_1\in[\alpha,\beta]$ με $f(\xi_1)=M$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\xi_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2)=m$.

Πρόταση 6.3

Για κάθε συνεχή και $1-1$ **συνάρτηση** $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$**, η αντίστροφη** $f^{-1}:f([\alpha,\beta])\to[\alpha,\beta]$ **είναι επίσης συνεχής.**

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να αποδειχθεί η πρόταση 6.3.

ΛΥΣΗ

Προκειμένου να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f^{-1}:f([\alpha,\beta])\to[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε ακολουθία (y_n) στο $f([\alpha,\beta])$ και $y\in f([\alpha,\beta])$ με $y_n\to y$, έπεται ότι $f^{-1}(y_n)\to f^{-1}(y)$.

Αν τεθεί $x_n=f^{-1}(y_n)$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, τότε η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη οπότε θα έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσωρεύσεως στο $[\alpha,\beta]$.

Αν x είναι ένα οποιοδήποτε σημείο συσσωρεύσεως της ακολουθίας (x_n) τότε θα υπάρχει υποακολουθία (x_{κ_n}) με $x_{\kappa_n}\to x$. Τότε, από τη συνέχεια της f προκύπτει ότι $f(x_{\kappa_n})\to f(x)$. Οπότε θα είναι

$$y=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_{\kappa_n})=f(x).$$

Άρα $x=f^{-1}(y)$ και επομένως η ακολουθία (x_n) έχει μοναδικό σημείο συσσωρεύσεως το $f^{-1}(y)$, οπότε αυτό θα είναι και το όριό της, δηλαδή

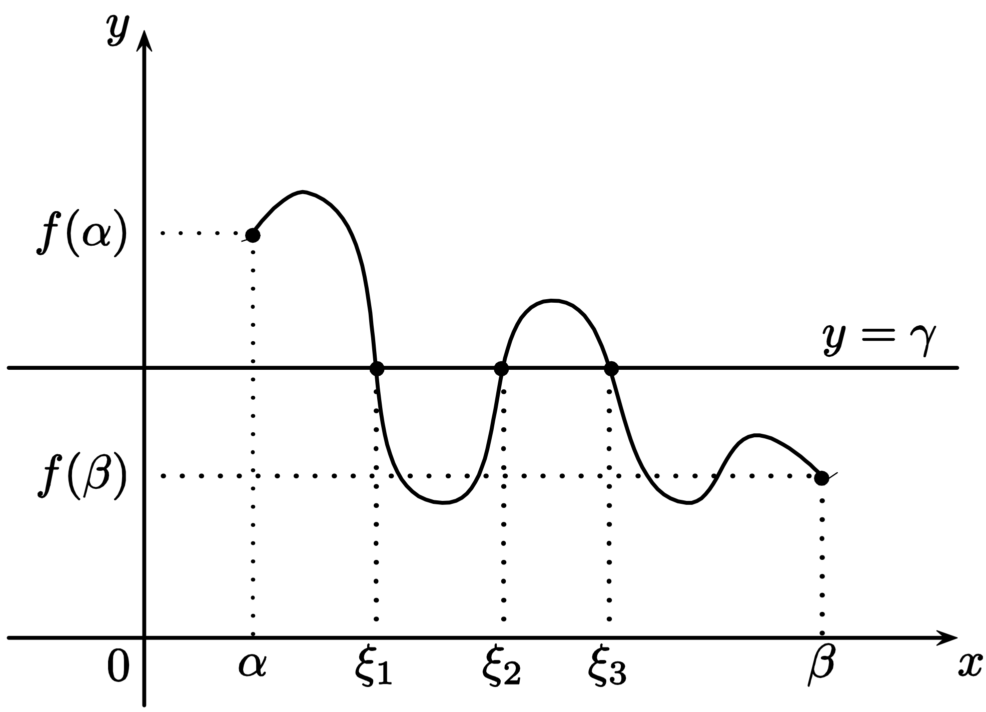
$$\lim_{n\to\infty}f^{-1}(y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n=f^{-1}(y).$$

Αν εφαρμοσθεί η πρόταση 6.3 για τις συναρτήσεις $\sin x / \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\cos x / [0, \pi]$, προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $\arcsin x / [-1, 1]$ και $\arccos x / [-1, 1]$ είναι συνεχείς.

Θεώρημα 6.4 (Ενδιάμεσων τιμών)

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και αριθμό γ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένας (τουλάχιστον) αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) = \gamma$.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η ευθεία $y = \gamma$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα (τουλάχιστον) σημείο, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα όπου η ευθεία $y = \gamma$ τέμνει τη C_f σε τρία σημεία.



ΑΣΚΗΣΗ 39

Να αποδειχθεί το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών:
Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f/\left[\alpha,\beta\right]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και αριθμό γ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένας (τουλάχιστον) αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=\gamma$.

ΛΥΣΗ

Υποτίθεται ότι για τη συνεχή συνάρτηση $f/\left[\alpha,\beta\right]$ και τον αριθμό γ ισχύει $f(\alpha)<\gamma<f(\beta)$ και θα αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=\gamma$.

Επειδή το σύνολο $E=\left\{x\in\left[\alpha,\beta\right]: f(x)\leq\gamma\right\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, θα υπάρχει το $\sup E=\xi$ στο $\mathbb{R}$. Θα αποδειχθεί ότι $f(\xi)=\gamma$.

Πραγματικά, από τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι υπάρχει μια ακολουθία (x_n) στο E τέτοια ώστε
$\xi-\dfrac{1}{n}<x_n\leq\xi$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, οπότε $x_n\to\xi$.

Εξάλλου, από τη συνέχεια της f προκύπτει ότι
$f(x_n)\to f(\xi)$ οπότε $f(\xi)\leq\gamma$.

Επειδή όμως $\xi<\beta$, θα υπάρχει μια ακολουθία (z_n) με $\xi<z_n<\beta$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και $z_n\to\xi$, οπότε $f(z_n)\to f(\xi)$.

Τέλος, επειδή $z_n>\xi$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, έπεται ότι $f(z_n)>\gamma$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και επομένως $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)\geq\gamma$.

Κατόπιν τούτων, θα είναι $f(\xi)=\gamma$.

Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών είναι ισοδύναμο με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6.5 (Bolzano)

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **με** $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$**, υπάρχει ένας (τουλάχιστον) αριθμός** $\xi\in(\alpha,\beta)$ **με** $f(\xi)=0$**.**

Πράγματι, αν εφαρμοσθεί το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για γ = 0, προκύπτει άμεσα το Θεώρημα του Bolzano. Αντίστροφα, το Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών αποδεικνύεται για την $f(x)/[\alpha,\beta]$και το ενδιάμεσο σημείο της γ εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Bolzano για την συνάρτηση $h(x)=f(x)-\gamma/[\alpha,\beta]$, η οποία είναι συνεχής με

$$h(\alpha)h(\beta)=(f(\alpha)-\gamma)(f(\beta)-\gamma)<0,$$

οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ $h(\xi)=f(\xi)-\gamma=0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$, για $f/[\alpha,\beta]$ συνεχή, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α,β).

Γεωμετρικά, τούτο σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των τετμημένων τουλάχιστον μια φορά μεταξύ των α και β.

Θεώρημα 6.6 (Σταθερού σημείου)

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ **υπάρχει ένα (τουλάχιστον)** $\xi\in[\alpha,\beta]$ **με** $f(\xi)=\xi$**.**

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x\alpha^x = 1$, όπου $\alpha > 1$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = x\alpha^x - 1/[0,1]$ είναι συνεχής και $f(0)f(1) = (-1)(\alpha - 1) < 0$,
σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f(\xi) = 0$, δηλαδή $\xi\alpha^\xi = 1$.

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλη λύση της εξίσωσης στο $(0,1)$.

Πραγματικά, αν $z \in (0,1)$ με $z \neq \xi$ και $z\alpha^z = 1$, τότε προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$z\alpha^z = \xi\alpha^\xi \Leftrightarrow$$

$$\frac{z}{\xi} = \alpha^{\xi - z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln z - \ln \xi}{\xi - z} = \ln \alpha.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι το αριστερό μέλος της ισότητας είναι αρνητικό (καθώς η συνάρτηση του λογάριθμου είναι αύξουσα) ενώ το δεξιό είναι θετικό (καθώς $\alpha > 1$).

ΑΣΚΗΣΗ 44

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{x^2+1}{x-\alpha}+\frac{x^6+1}{x-\beta}=0$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^7-\alpha x^6+x^3-\beta x^2+2x-\alpha-\beta}{(x-\alpha)(x-\beta)}=0.$$

Θέτουμε

$$f(x)=x^7-\alpha x^6+x^3-\beta x^2+2x-\alpha-\beta/[\alpha,\beta],$$

οπότε

$$f(\alpha)=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha-\beta=\alpha^2(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+1)$$

(1)

και

$$f(\beta)=\beta^7-\alpha\beta^6+\beta-\alpha=\beta^6(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)=(\beta-\alpha)(\beta^6+1).$$

(2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)=-(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+1)(\beta^6+1)<0.$$

Επειδή η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής και $f(\alpha)f(\beta)<0$, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=0$, δηλαδή η δοσμένη εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

7. ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Πρόχειρες σκέψεις

Υπενθυμίζουμε ότι

f συνεχής $\Leftrightarrow$ f συνεχής στο x, για κάθε $x \in D(f)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$, για κάθε $x \in D(f)$

$\Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in D(f)$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$

τέτοιο ώστε $t \in D(f)$ και $|x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$

Αν απαιτήσουμε το δ να είναι το ίδιο για κάθε $x \in D(f)$, δηλαδή να εξαρτάται μόνο από το ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), τότε προκύπτει μια ισχυρότερη έννοια από τη συνέχεια, που ονομάζεται **ομοιόμορφη συνέχεια**.

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **ομοιόμορφα** (ή **ομαλά) συνεχής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $x_1, x_2 \in D(f)$ και $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Παραδείγματα

1.Η συνάρτηση $f(x)=\sin x\,/\,\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Πραγματικά, για $\varepsilon>0$ εκλέγεται $\delta=\varepsilon$, οπότε για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, και $|x_1-x_2|<\delta$ είναι

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|$$
$$\leq 2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|\cdot 1=|x_1-x_2|<\varepsilon.$$

Για την πρώτη ανισότητα, χρησιμοποιήθηκε η γνωστή ανισότητα

$$|\sin x|\leq x,\quad x\in\mathbb{R}$$

2.Η συνάρτηση $f(x)=x^2+3x-2/(0,2)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Πραγματικά, για $x_1,x_2\in(0,2)$ είναι

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=\left|\left(x_1^2+3x_1-2\right)-\left(x_2^2+3x_2-2\right)\right|\\&=\left|\left(x_1^2-x_2^2\right)+3\left(x_1-x_2\right)\right|\\&=\left|\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2+3\right)\right|\\&<7|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

Επομένως, για $\varepsilon>0$, αν εκλεγεί $\delta=\frac{\varepsilon}{7}$, προκύπτει ότι αν $|x_1-x_2|<\delta$, τότε $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

3.Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}/(0,1)$ είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Σκέψεις στο πρόχειρο. Θα πρέπει να ευρεθούν $x_1, x_2 \in (0,1)$, με $|x_1 - x_2| < \delta$ και $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_2 < x_1$ και θέτουμε $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$. Προφανώς, $0 < \lambda < 1$ και

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{\lambda x_1}\right| = \left|\frac{\lambda - 1}{\lambda x_1}\right| = \frac{1-\lambda}{\lambda x_1} > \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

Αρκεί να ορίσω το λ έτσι ώστε $\frac{1-\lambda}{\lambda} = \varepsilon$, ή ισοδύναμα $\lambda = \frac{1}{1+\varepsilon}$. Οπότε, θα ορίσω $x_2 = \frac{x_1}{1+\varepsilon}$. Τότε,

$$|x_1 - x_2| = \left|x_1 - \frac{x_1}{1+\varepsilon}\right| = \left|\frac{(1+\varepsilon)x_1 - x_1}{1+\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon x_1}{1+\varepsilon} < x_1$$

Οπότε, αρκεί να ορίσω $x_1 \leq \delta$, για να έχω $|x_1 - x_2| < \delta$. Προκειμένου να έχω και $0 < x_1 < 1$, επιλέγω $x_1 = \min\{\delta, \frac{1}{2}\}$.

Απόδειξη. Αν η f ήταν ομοιόμορφα συνεχής τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπήρχε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε
$x_1, x_2 \in (0,1)$ και $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
Αν εκλεγεί $x_1 = \min\left\{\delta, \frac{1}{2}\right\}$ και $x_2 = \frac{x_1}{1+\varepsilon}$ τότε θα είναι
$x_1, x_2 \in (0,1)$ και

$$|x_1 - x_2| = \left|x_1 - \frac{x_1}{1+\varepsilon}\right| = \left|\frac{x_1(1+\varepsilon) - x_1}{1+\varepsilon}\right| = \frac{x_1\varepsilon}{1+\varepsilon} < x_1 \le \delta.$$

Εντούτοις,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1+\varepsilon}{x_1}\right| = \frac{\varepsilon}{x_1} > \varepsilon,$$

το οποίο είναι άτοπο και επομένως η συνάρτηση $f/(0,1)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Πρόταση 7.1

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **είναι ομοιόμορφα συνεχής.**

Πρέπει να τονισθεί ότι η πρόταση αυτή δεν ισχύει εν γένει για συναρτήσεις που ορίζονται σε διαστήματα που δεν είναι κλειστά, όπως προκύπτει από το τρίτο από τα προηγούμενα παραδείγματα.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να αποδειχθεί η πρόταση 7.1.

ΛΥΣΗ

Έστω $f/[\alpha,\beta]$ συνεχής και όχι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε, για κάθε $\delta>0$ υπάρχουν $x,z\in[\alpha,\beta]$ με

$$|x-z|<\delta \text{ και } |f(x)-f(z)|\geq\varepsilon.$$

Αν ληφθεί $\delta=\frac{1}{n}$, όπου $n\in\mathbb{N}^*$, τότε υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n) και (z_n) στο $[\alpha,\beta]$ τέτοιες ώστε

$$|x_n-z_n|<\frac{1}{n} \text{ και } |f(x_n)-f(z_n)|\geq\varepsilon, \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}^* \qquad (1)$$

Επειδή η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, θα υπάρχει σημείο συσσωρεύσεως x στο $[\alpha,\beta]$, οπότε θα υπάρχει μια υποακολουθία της (x_{κ_n}) τέτοια ώστε $x_{\kappa_n}\to x$. Εξάλλου, επειδή η ακολουθία $(x_{\kappa_n}-z_{\kappa_n})$ είναι μηδενική, προκύπτει ότι $z_{\kappa_n}\to x$ και $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\kappa_n})=\lim\limits_{n\to\infty} f(z_{\kappa_n})=f(x)$. Επομένως, υπάρχουν $n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε

$$n\geq n_1\Rightarrow\left|f(x_{\kappa_n})-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ και } n\geq n_2\Rightarrow\left|f(z_{\kappa_n})-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν $n=\max\{n_1,n_2\}$, τότε θα είναι

$$\left|f(x_{\kappa_n})-f(z_{\kappa_n})\right|=\left|\left(f(x_{\kappa_n})-f(x)\right)-\left(f(z_{\kappa_n})-f(x)\right)\right|$$

$$\leq\left|f(x_{\kappa_n})-f(x)\right|+\left|f(z_{\kappa_n})-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

το οποίο αντίκειται στην (1). Άρα f ομοιόμορφα συνεχής.

ΑΣΚΗΣΗ 47

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

α) είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$,

β) είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(\alpha,+\infty)$ με $\alpha>0$,

γ) δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f/(0,+\infty)$ είναι συνεχής, διότι είναι λόγος συνεχών συναρτήσεων.

β) Για να είναι η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2}\Big/(\alpha,+\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής θα πρέπει να αποδειχθεί ότι:

Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x_1,x_2\in(\alpha,+\infty)$ με $|x_1-x_2|<\delta$ ισχύει ότι

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Αλλά

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}\right|=\frac{|x_1+x_2||x_1-x_2|}{x_1^2x_2^2}$$

$$\leq\frac{|x_1|+|x_2|}{x_1^2x_2^2}\cdot|x_1-x_2|$$

$$\leq\frac{2}{\alpha^3}|x_1-x_2|.$$

Επομένως, για $\varepsilon > 0$, αν εκλεγεί $\delta = \frac{\varepsilon\alpha^3}{2}$ προκύπτει ότι

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \le \frac{2}{\alpha^3}\left|x_1 - x_2\right| < \frac{2}{\alpha^3}\delta = \varepsilon.$$

Άρα ισχύει η σχέση (1) και επομένως η συνάρτηση $f/(\alpha, +\infty)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

γ) Αν η συνάρτηση $f/(0,1)$ ήταν ομοιόμορφα συνεχής, τότε για $\varepsilon = 1 > 0$ θα υπήρχε $\delta > 0$ με

$$x_1, x_2 \in (0,1) \text{ και } \left|x_1 - x_2\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Αν εκλεγούν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$0 < x_1 < \min\{\delta, 1\} \text{ και } x_2 = \frac{x_1}{2},$$

τότε

$$x_1, x_2 \in (0,1), \quad \left|x_1 - x_2\right| = \frac{x_1}{2} < \delta$$

ενώ

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| = \left|\frac{1}{x_1^2} - \frac{4}{x_1^2}\right| = \frac{3}{x_1^2} > 1,$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της (2).

Άρα η συνάρτηση $f/(0,1)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.