ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Βασικοί ορισμοί
Κανόνες παραγώγισης
Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης
Παράγωγοι ανώτερης τάξης
Εφαπτομένη γραφικής παράστασης
Διαφορικό
Παραμετρική μορφή συνάρτησης

1. Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και ξ ένα οριακό σημείο του $D(f)$ το οποίο ανήκει στο $D(f)$. Η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,/\,D(f)\setminus\{\xi\}$$

ονομάζεται **λόγος μεταβολής** ή **πηλίκο διαφορών** της f στο ξ.

Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη** στο σημείο ξ αν και μόνο αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο του λόγου μεταβολής της f στο ξ, όταν $x \to \xi$.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο ξ και σημειώνεται με

$$f'(\xi),\ \text{ή}\ \frac{df}{dx}(\xi),\ \text{ή}\ \dot{f}(\xi).$$

Έτσι, η παράγωγος της συνάρτησης f στο ξ είναι

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Μια πολύ χρήσιμη ισοδύναμη μορφή της προηγούμενης ισότητας προκύπτει αν τεθεί $h=x-\xi$, οπότε

$$f'(\xi)=\lim_{h\to0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}.$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi^+}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ (αντ. $\lim\limits_{x\to\xi^-}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$) στο $\mathbb{R}$, τότε αυτό ονομάζεται **δεξιά παράγωγος** (αντ. **αριστερή παράγωγος**) της συνάρτησης f στο σημείο ξ και σημειώνεται με $f'_+(\xi)$ (αντ. $f'_-(\xi)$).

Οι δύο προηγούμενες παράγωγοι ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι**.

Είναι προφανές ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ αν και μόνο αν υπάρχουν οι πλευρικές της παράγωγοι και είναι ίσες. Τότε ισχύει ότι

$$f'_+(\xi)=f'_-(\xi)=f'(\xi).$$

Μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο σύνολο** $\mathrm{A}\subseteq D(f)$ όταν υπάρχει η παράγωγός της σε κάθε σημείο του Α.

Ειδικά αν $A=D(f)$ η συνάρτηση ονομάζεται **παραγωγίσιμη**.

Αν σε κάθε σημείο $x\in D(f)$ στο οποίο η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη αντιστοιχίσουμε την τιμή $f'(x)$, τότε ορίζεται μια καινούργια συνάρτηση f' η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** ή (απλά) **παράγωγος** της συνάρτησης f και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D(f')=\left\{x\in D(f): f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x\right\}.$$

Πρόταση 1.1

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\xi \in D(f)$ τότε θα είναι συνεχής στο ξ.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να αποδειχθεί η πρόταση 1.1.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in D(f)/\{\xi\}$ είναι

$$f(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \cdot (x - \xi) + f(\xi) \qquad (1)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ θα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi) \in \mathbb{R}$,

οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \xi} f(x) &= \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \cdot \lim_{x \to \xi} (x - \xi) + f(\xi) \\ &= f'(\xi) \cdot 0 + f(\xi) \\ &= f(\xi). \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ξ.

Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, η συνεχής συνάρτηση $f(x)=|x|/\mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x}{x}=1,$$

ενώ

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{-x}{x}=-1.$$

Από τον ορισμό της παραγώγου προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι:

Βασικές παραγωγίσεις I

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$x^{n},\, n\in\mathbb{N}^{*}$	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^{x}	e^{x}
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να ευρεθούν με τη βοήθεια το ορισμού οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^n$, όπου $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$,

β) $g(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$,

γ) $\varphi(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $n=1$, τότε ο λόγος μεταβολής είναι

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\frac{x-\xi}{x-\xi}=1,$$

οπότε

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=1.$$

Αν $n\geq 2$, τότε ο λόγος μεταβολής είναι

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi}=x^{n-1}+x^{n-2}\xi+\cdots+x\xi^{n-2}+\xi^{n-1},$$

οπότε προκύπτει εύκολα ότι

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\xi+\cdots+x\xi^{n-2}+\xi^{n-1}\right)$$

$$=n\xi^{n-1}.$$

Άρα τελικά,

$$f'(x)=nx^{n-1} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } n\in\mathbb{N}^*.$$

β) Για $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ είναι

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

οπότε προκύπτει ότι

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\overset{1}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$=1\cdot\cos x=\cos x.$$

γ) Για $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ είναι

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}=e^{x}\frac{e^{h}-1}{h},$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=e^{x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=e^{x}\cdot 1=e^{x}.$$

---

[1] Επειδή $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ και η συνάρτηση $\cos x$ είναι συνεχής.

Κανόνες παραγώγισης

Αν f, g συναρτήσεις με $D(f)=D(g)$, παραγωγίσιμες στο ξ, τότε οι συναρτήσεις $\lambda f+\mu g$, όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$ (με $g(\xi)\neq 0$) είναι επίσης παραγωγίσιμες στο ξ και ισχύουν οι τύποι:

1. $\boldsymbol{(\lambda f+\mu g)'(\xi)=\lambda f'(\xi)+\mu g'(\xi)}$.

2. $\boldsymbol{(f\cdot g)'(\xi)=f'(\xi)\cdot g(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)}$.

3. $\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi)=\frac{f'(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g'(\xi)}{\left(g(\xi)\right)^2}}$.

Με τη βοήθεια των κανόνων παραγώγισης προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι:

Βασικές παραγωγίσεις ΙΙ

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{ctgh} x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να αποδειχθούν οι κανόνες παραγώγισης.

ΛΥΣΗ

1. $\left(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}+\boldsymbol{\mu}\mathbf{g}\right)'\left(\xi\right)=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}'\left(\xi\right)+\boldsymbol{\mu}\mathbf{g}'\left(\xi\right)$, **για κάθε** $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}$

Είναι

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\left(\lambda f+\mu g\right)\left(x\right)-\left(\lambda f+\mu g\right)\left(\xi\right)}{x-\xi}$$

$$=\lambda\lim_{x\to\xi}\frac{f\left(x\right)-f\left(\xi\right)}{x-\xi}+\mu\lim_{x\to\xi}\frac{g\left(x\right)-g\left(\xi\right)}{x-\xi}$$

$$=\lambda f'\left(\xi\right)+\mu g'\left(\xi\right).$$

Άρα η συνάρτηση $\lambda f+\mu g$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ, με

$$\left(\lambda f+\mu g\right)'\left(\xi\right)=\lambda f'\left(\xi\right)+\mu g'\left(\xi\right).$$

2. $\left(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\right)'\left(\xi\right)=\mathbf{f}'\left(\xi\right)\cdot\mathbf{g}\left(\xi\right)+\mathbf{f}\left(\xi\right)\cdot\mathbf{g}'\left(\xi\right)$

Είναι

$$\lim_{x\to\xi}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(\xi)}{x-\xi}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(\xi\right)}{x-\xi}g\left(x\right)+f\left(\xi\right)\frac{g\left(x\right)-g\left(\xi\right)}{x-\xi}\right)$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{f\left(x\right)-f\left(\xi\right)}{x-\xi}\lim_{x\to\xi}g\left(x\right)+f\left(\xi\right)\lim_{x\to\xi}\frac{g\left(x\right)-g\left(\xi\right)}{x-\xi}$$

$$=f'\left(\xi\right)g\left(\xi\right)+f\left(\xi\right)g'\left(\xi\right).$$

Άρα η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ, με

$$\left(f\cdot g\right)'\left(\xi\right)=f'\left(\xi\right)g\left(\xi\right)+f\left(\xi\right)g'\left(\xi\right).$$

3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi)=\frac{f'(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g'(\xi)}{\left(g(\xi)\right)^2}$, όταν $g(\xi)\neq 0$.

Είναι

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(\xi)}{x-\xi}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\frac{g(\xi)}{g(x)g(\xi)}-\frac{f(\xi)}{g(x)g(\xi)}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\frac{g(\xi)}{g(\xi)\cdot\lim\limits_{x\to\xi}g(x)}-\frac{f(\xi)}{g(\xi)\lim\limits_{x\to\xi}g(x)}\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$$

$$=\frac{f'(\xi)\cdot g(\xi)}{g(\xi)\cdot g(\xi)}-\frac{f(\xi)\cdot g'(\xi)}{g(\xi)\cdot g(\xi)}$$

$$=\frac{f'(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g'(\xi)}{\left(g(\xi)\right)^2}.$$

Άρα η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ, με

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi)=\frac{f'(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g'(\xi)}{\left(g(\xi)\right)^2}.$$

Πρόταση 1.2 (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης – Κανόνας αλυσίδας)

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με $\mathbf{R}(\mathbf{f}) \cap \mathbf{D}(\mathbf{g}) \neq \varnothing$ και ένα σημείο $\xi \in \mathbf{D}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{f}(\xi)$ τότε και η σύνθεσή τους $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ και ισχύει ότι

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\xi) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\xi)) \cdot \mathbf{f}'(\xi).$$

Παρατήρηση

Ο κανόνας της αλυσίδας μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια του συμβολισμού του Leibniz ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

όπου $y = g(u)$ και $u = f(x)$.

Με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας, προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι:

Βασικές παραγωγίσεις ΙΙΙ

$f(x)$	$f'(x)$
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
α^{x}	$\alpha^{x} \ln \alpha$

Πρέπει να τονισθεί ότι με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας υπολογίζεται η παράγωγος συναρτήσεων με πολύπλοκο τύπο. Ειδικά, υπολογίζεται η παράγωγος συναρτήσεων της μορφής

$$\varphi(x) = f(x)^{g(x)},$$

όπου f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D(f)$.

Πράγματι, επειδή $\varphi(x) = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$, είναι

$$\varphi'(x) = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\big(g(x)\cdot\ln f(x)\big)'$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $h(x) = x^x / (1,+\infty)$, β) $f(x) = (x^2+x+1)^{x^2} / \mathbb{R}$,

γ) $g(x) = (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}} / (0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας είναι:

α) $h'(x) = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)'$

$$= e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x\left(x'\ln x + x(\ln x)'\right) = x^x(\ln x + 1).$$

β) $f'(x)=\left(e^{\ln\left(x^2+x+1\right)^{x^2}}\right)'=\left(e^{x^2\ln\left(x^2+x+1\right)}\right)'$

$$=e^{x^2\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)}\cdot\left(x^2\ln\left(x^2+x+1\right)\right)'$$

$$=\left(x^2+x+1\right)^{x^2}\left(\left(x^2\right)'\ln\left(x^2+x+1\right)+x^2\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)'\right)$$

$$=\left(x^2+x+1\right)^{x^2}\left(2x\ln\left(x^2+x+1\right)+x^2\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}\right)$$

$$=\left(x^2+x+1\right)^{x^2-1}\left(2x\left(x^2+x+1\right)\ln\left(x^2+x+1\right)+2x^3+x^2\right).$$

γ) $g'(x)=\left(e^{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}}\right)'$

$$=\left(e^{\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)'$$

$$=e^{\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}\left(\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)'$$

$$=\left(1+\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\left(\sqrt{x}\right)'\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)'\right)$$

$$=\left(1+\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)'}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(1+\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).$$

Πρόταση 1.3 (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)

Αν $\mathbf{f}/(\alpha,\beta)$ είναι μια $\mathbf{1-1}$ και παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\neq 0$ για κάθε $\mathbf{x}\in(\alpha,\beta)$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $\mathbf{f}^{-1}/\mathbf{R}(\mathbf{f})$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(\mathbf{y})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}'\left(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\right)}.$$

Με τη βοήθεια της προηγουμένης πρότασης, προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι:

Βασικές παραγωγίσεις IV

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg\ x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$arcctg\ x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να αποδειχθεί ότι

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $y = f(x) = \sin x / \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$, όπου $y \in (-1,1)$ και

$$f'\left(f^{-1}(y)\right) = f'(x) = (\sin x)'$$

$$= \cos x \overset{2}{=} \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$= \sqrt{1-y^2}.$$

Εξάλλου, ισχύει ότι

$$\left(f^{-1}(y)\right)' \overset{3}{=} \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Άρα, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, για κάθε $x \in (-1,1)$.

---

[2] Επειδή $\cos x > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

[3] Σύμφωνα με την πρόταση 1.3.

2.ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο $\xi \in D(f)$, έτσι ώστε να υπάρχει μια περιοχή $\pi(\xi) \subseteq D(f)$ στην οποία η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη. Αν η συνάρτηση $f'/\pi(\xi)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ, τότε η συνάρτηση f ονομάζεται **δύο φορές παραγωγίσιμη στο ξ** και η παράγωγος της f' στο ξ ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος** ή **παράγωγος δεύτερης τάξης** της f στο ξ και σημειώνεται με

$$f''(\xi), \text{ ή } f^{(2)}(\xi), \text{ ή } \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi), \text{ ή } \ddot{f}(\xi),$$

δηλαδή ισχύει ότι

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}.$$

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **δύο φορές παραγωγίσιμη στο σύνολο** $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}(\mathbf{f})$ όταν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f σε κάθε σημείο του A.

Ειδικά αν $A = D(f)$ τότε η συνάρτηση f ονομάζεται **δύο φορές παραγωγίσιμη** και η συνάρτηση f'' που προκύπτει ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος** ή **παράγωγος δεύτερης τάξης** της f.

Επαγωγικά, για $n \geq 2$, αν η συνάρτηση $f^{(n-1)}/\pi(\xi)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε η συνάρτηση f ονομάζεται **n φορές παραγωγίσιμη** στο ξ και η παράγωγος της $f^{(n-1)}$ στο ξ ονομάζεται **n-οστή παράγωγος** ή **παράγωγος n-οστής τάξης** της f στο ξ και σημειώνεται με

$$f^{(n)}(\xi) \text{ ή } \frac{d^n f}{dx^n}(\xi),$$

δηλαδή, ισχύει ότι

$$f^{(n)}(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\xi)}{x - \xi}.$$

Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ η $f^{(n)}(x)$ για κάθε $x \in D(f)$, τότε η συνάρτηση f ονομάζεται **n-φορές παραγωγίσιμη** και η συνάρτηση $f^{(n)}$ που προκύπτει ονομάζεται **n-οστή παράγωγος** ή **παράγωγος n-οστής τάξης** της f.

Κατόπιν τούτων, για τον υπολογισμό της n-οστής παραγώγου (εφόσον υπάρχει) θα χρησιμοποιηθεί ο αναδρομικός τύπος

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \text{ όπου } n \in \mathbb{N}^*, \text{ και } f^{(0)} = f.$$

Επαγωγικά αποδεικνύονται οι ακόλουθοι τύποι:

Βασικές n-οστές παραγωγίσεις

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^{α}	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
α^{x}	$\alpha^{x}(\ln\alpha)^{n}$
$\log_{\alpha}(\beta x+\gamma)$	$\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,\beta^{n}}{\ln\alpha\cdot(\beta x+\gamma)^{n}}$

Κανόνες n-οστής παραγώγισης

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με $D(f)=D(g)$ των οποίων υπάρχουν οι n-οστές παράγωγοι, τότε θα υπάρχουν και οι n-οστές παράγωγοι των συναρτήσεων $\lambda f+\mu g$, όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $f\cdot g$, και ισχύουν οι τύποι:

1. $(\lambda f+\mu g)^{(n)}=\lambda f^{(n)}+\mu g^{(n)}$.

2. $(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}f^{(n-\kappa)}\cdot g^{(\kappa)}$ (**Τύπος του Leibniz**).

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να αποδειχθούν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ οι τύποι:

i) $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$, για κάθε $x>0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Οι αποδείξεις των δύο τύπων θα γίνουν με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

(i) Για $n=1$ ο πρώτος τύπος ισχύει διότι $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Υποτίθεται ότι ο τύπος ισχύει για $n=\kappa$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(\kappa)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\kappa+1)x^{\alpha-\kappa} \tag{1}$$

και θα αποδειχθεί για $n=\kappa+1$, δηλαδή θα αποδειχθεί ότι

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(\kappa+1)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\kappa+1)(\alpha-\kappa)x^{\alpha-\kappa-1} \tag{2}$$

Πραγματικά, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\left(x^{\alpha}\right)^{(\kappa+1)} &= \left(\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\kappa+1)x^{\alpha-\kappa}\right)' \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\kappa+1)\left(x^{\alpha-\kappa}\right)' \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\kappa+1)(\alpha-\kappa)x^{\alpha-\kappa-1},\end{aligned}$$

οπότε ισχύει η σχέση (2) και επομένως ο τύπος του (i) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Για $n=1$, ο δεύτερος τύπος ισχύει διότι

$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Υποτίθεται ότι ο τύπος ισχύει για $n=\kappa$ δηλαδή ισχύει ότι

$$(\sin x)^{(\kappa)} = \sin\left(x+\frac{\kappa\pi}{2}\right) \tag{3}$$

και θα αποδειχθεί για $n=\kappa+1$, δηλαδή θα αποδειχθεί ότι

$$(\sin x)^{(\kappa+1)} = \sin\left(x+\frac{(\kappa+1)\pi}{2}\right) \tag{4}$$

Πραγματικά, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(\kappa+1)} &= \left(\sin\left(x+\frac{\kappa\pi}{2}\right)\right)' \\ &= \cos\left(x+\frac{\kappa\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\kappa\pi}{2}\right)' \\ &= \sin\left(x+\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 \\ &= \sin\left(x+\frac{(\kappa+1)\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

οπότε ισχύει η σχέση (4), και επομένως ο τύπος του ii) ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να αποδειχθεί ο τύπος του Leibniz.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι

$$\left(f\cdot g\right)^{(n)}=\sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}f^{(n-\kappa)}g^{(\kappa)}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^{*}$.

Προφανώς, για $n=1$ ο τύπος γράφεται

$$\left(f\cdot g\right)'=\binom{1}{0}f^{(1)}g^{(0)}+\binom{1}{1}f^{(0)}g^{(1)}=f'g+fg'$$

το οποίο ισχύει.

Υποτίθεται ότι ο τύπος του Leibniz ισχύει για $n=\lambda$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\left(f\cdot g\right)^{(\lambda)}=\sum_{\kappa=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\kappa}f^{(\lambda-\kappa)}g^{(\kappa)}$$

και θα αποδειχθεί ότι ισχύει για $n=\lambda+1$, δηλαδή θα αποδειχθεί ότι

$$\left(f\cdot g\right)^{(\lambda+1)}=\sum_{\kappa=0}^{\lambda+1}\binom{\lambda+1}{\kappa}f^{(\lambda+1-\kappa)}g^{(\kappa)}.$$

Πραγματικά, είναι

$$(f\cdot g)^{(\lambda+1)}=\left(\sum_{\kappa=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\kappa}f^{(\lambda-\kappa)}g^{(\kappa)}\right)'$$

$$=\sum_{\kappa=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\kappa}\left(f^{(\lambda-\kappa)}g^{(\kappa)}\right)'$$

$$=\sum_{\kappa=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\kappa}\left(f^{(\lambda+1-\kappa)}g^{(\kappa)}+f^{(\lambda-\kappa)}g^{(\kappa+1)}\right)$$

$$\overset{\nu=\kappa+1}{=}\sum_{\kappa=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\kappa}f^{(\lambda+1-\kappa)}g^{(\kappa)}+\sum_{\nu=1}^{\lambda+1}\binom{\lambda}{\nu-1}f^{(\lambda+1-\nu)}g^{(\nu)}$$

$$=\sum_{\kappa=1}^{\lambda}\left(\binom{\lambda}{\kappa}+\binom{\lambda}{\kappa-1}\right)f^{(\lambda+1-\kappa)}g^{(\kappa)}+\binom{\lambda}{0}f^{(\lambda+1)}g^{(0)}+\binom{\lambda}{\lambda}f^{(0)}g^{(\lambda+1)}$$

$$\overset{2}{=}\sum_{\kappa=1}^{\lambda}\binom{\lambda+1}{\kappa}f^{(\lambda+1-\kappa)}g^{(\kappa)}+\binom{\lambda+1}{0}f^{(\lambda+1)}g^{(0)}+\binom{\lambda+1}{\lambda+1}f^{(0)}g^{(\lambda+1)}$$

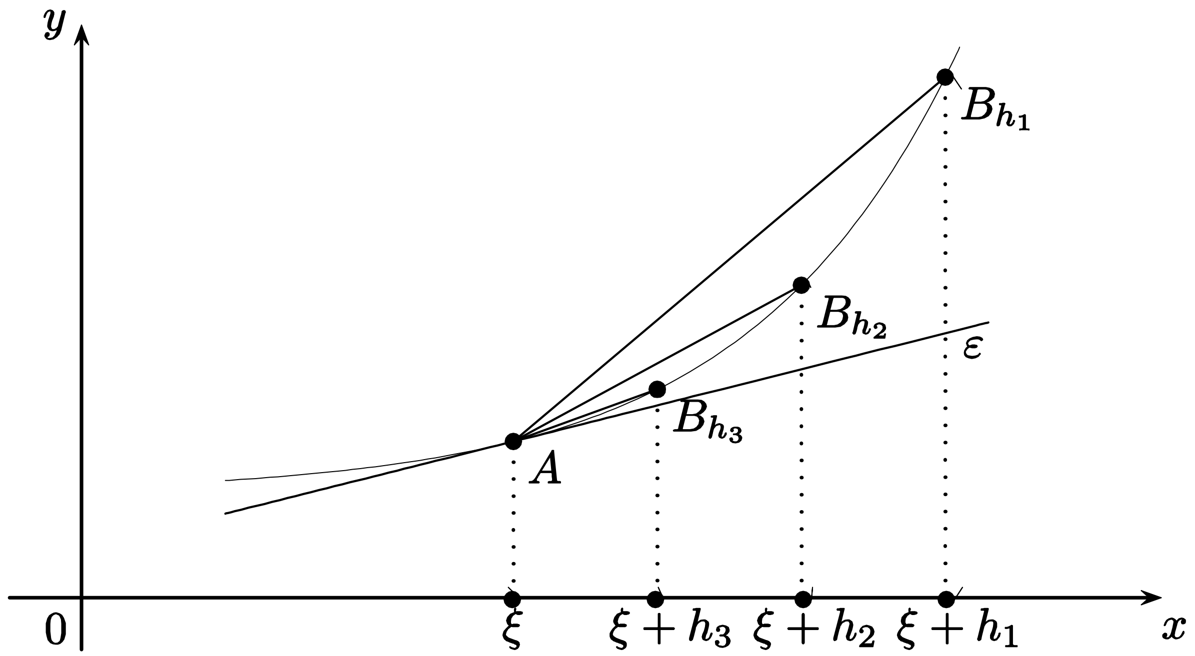
$$=\sum_{\kappa=0}^{\lambda+1}\binom{\lambda+1}{\kappa}f^{(\lambda+1-\kappa)}g^{(\kappa)}.$$

3. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Έστω $A\left(\xi, f\left(\xi\right)\right)$ ένα σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης *f*, όπου $\xi \in \left(D\left(f\right)\right)^{0}$ (δηλαδή, ξ **εσωτερικό σημείο** του $D\left(f\right)$).

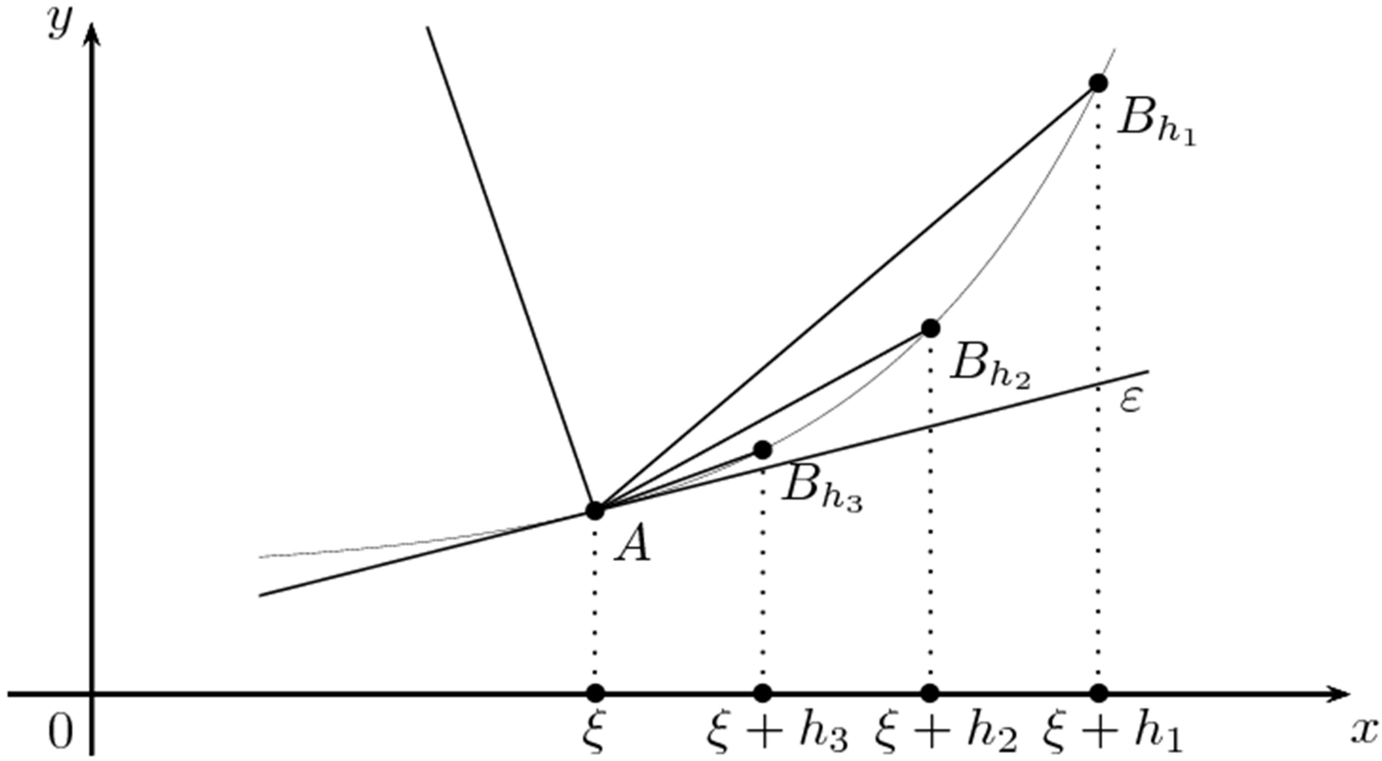
1. Αν f παραγωγίσιμη στο ξ, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης C_f στο σημείο *A* είναι:

$$y - f\left(\xi\right) = f'\left(\xi\right)\left(x - \xi\right)$$



Πράγματι, όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης στο σημείο $A\left(\xi, f\left(\xi\right)\right)$ ισούται με το όριο (όταν $h \to 0$) του συντελεστή λ_h των χορδών που ενώνουν το A με τα σημεία $B_h\left(\xi + h, f\left(\xi + h\right)\right)$, δηλαδή

$$\lambda = \lim_{h \to 0} \lambda_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + \eta) - f(\xi)}{\xi + h - \xi} = f'(\xi)$$



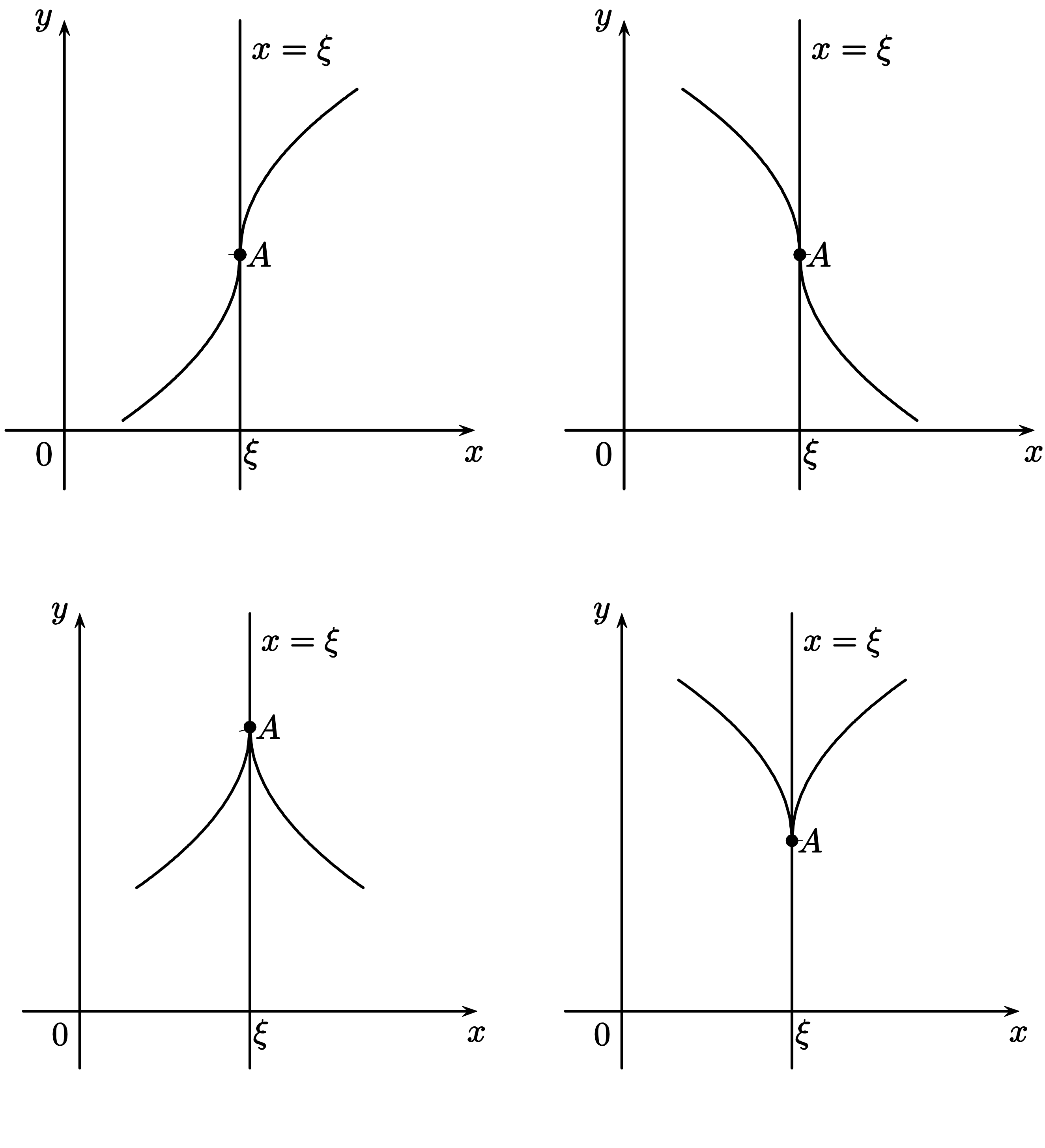
- Αν ξ είναι **στάσιμο** σημείο της C_f (δηλαδή $f'(\xi) = 0$), τότε η εφαπτομένη της C_f στο A είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.
- Η **κάθετη** ευθεία της C_f στο σημείο A είναι η ευθεία που περνάει από το A και είναι κάθετη στην εφαπτομένη, οπότε έχει εξίσωση

$$y - f(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}(x - \xi)$$

2. Αν f συνεχής στο ξ και

$$\lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi},\ \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \in \{-\infty, +\infty\},$$

τότε η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η **κατακόρυφη** ευθεία $x = \xi$.



4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό σημείο ξ του $D(f)$. Τότε η γραμμική απεικόνιση

$$\mathbb{R} \ni t \to f'(\xi)\cdot t \in \mathbb{R}$$

ονομάζεται **διαφορικό** της συνάρτησης f στο σημείο ξ και σημειώνεται με $df(\xi)$, δηλαδή

$$\big(df(\xi)\big)(t) = f'(\xi)\cdot t \qquad (1)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Επειδή από το διαφορικό της ταυτοτικής συνάρτησης $1(x) = x$ προκύπτει $dx(t) = t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έπεται από τη σχέση (1) ότι

$$df(\xi) = f'(\xi)\,dx \qquad (2)$$

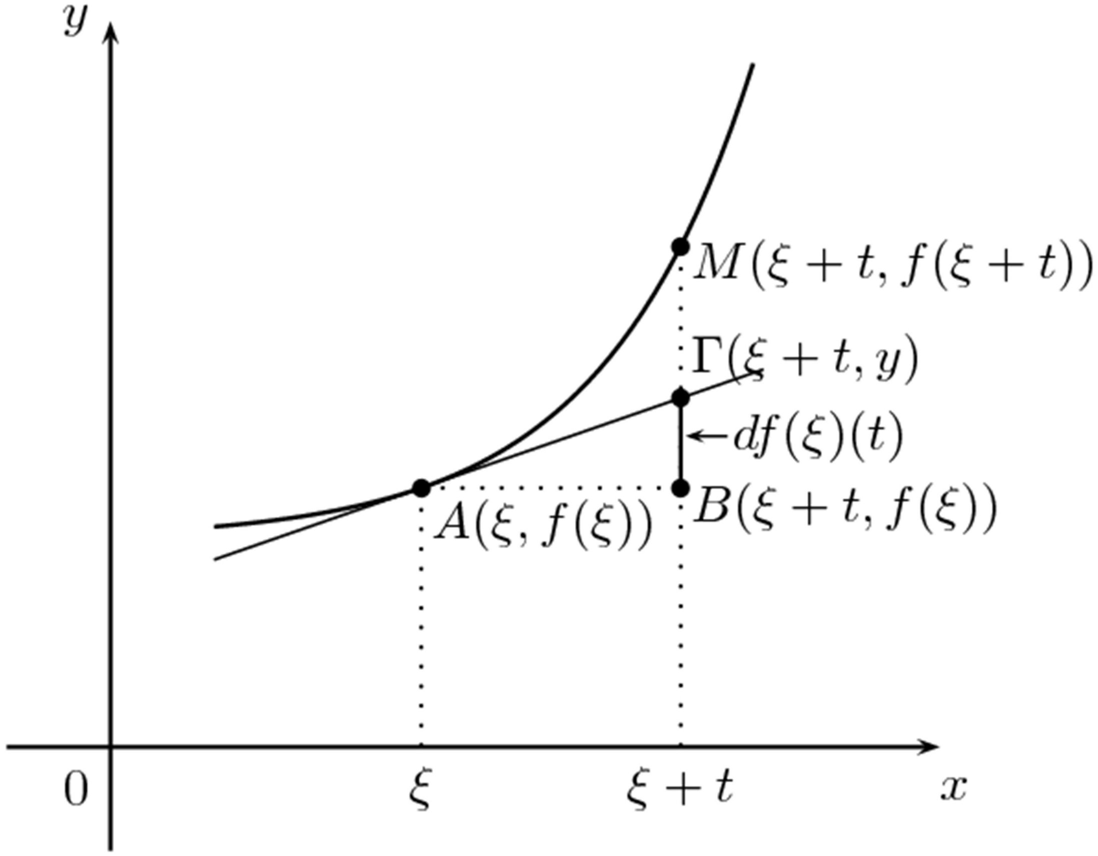
Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του $D(f)$, τότε η απεικόνιση df που ορίζεται στο $\big(D(f)\big)^o$ από τη σχέση (2) ονομάζεται διαφορικό της f, δηλαδή ισχύει

$$df = f'\cdot dx.$$

Ο παραπάνω τύπος δικαιολογεί το συμβολισμό του Leibniz $\dfrac{df}{dx}$ για την παράγωγο.

Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του $D(f)$ και $t \neq 0$ με $\xi + t \in D(f)$.



Αν τεθεί $x = \xi + t$ στην εξίσωση της εφαπτομένης $ΑΓ$ προκύπτει ότι η τεταγμένη y του $Γ$ είναι

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(\xi + t - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)t + f(\xi),$$

Οπότε $(\mathrm{B\Gamma}) = f'(\xi)t + f(\xi) - f(\xi) = f'(\xi)t = df(\xi)(t)$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $(\mathrm{B\Gamma})$ εκφράζει γεωμετρικά το διαφορικό της f στο ξ.

Αν υποτεθεί ότι το t είναι «πολύ μικρό» (δηλαδή $t \to 0$) προκύπτει ότι $(MB) \approx (B\Gamma)$, οπότε αν τεθεί

$\Delta x = t$ (**μεταβολή της μεταβλητής**)

και $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (**μεταβολή της συνάρτησης**) τότε προκύπτει ότι

$$\Delta y = f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \simeq (df)(\xi)(\Delta x) = f'(\xi)\Delta x \qquad (3)$$

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται για την κατά προσέγγιση εύρεση ορισμένων άρρητων αριθμών.

Συγκεκριμένα, για να υπολογίσουμε μια ρητή προσέγγιση του άρρητου αριθμού α επιλέγουμε μια κατάλληλη συνάρτηση f και κατάλληλες τιμές των ξ και Δx ώστε να έχουμε $\alpha = f\left(\xi + \Delta x\right)$ και εφαρμόζουμε τον προσεγγιστικό τύπο (3).

Για παράδειγμα, αν $\alpha = \sqrt{26}$ θέτουμε $f(x) = \sqrt{x} \big/ \left(0,+\infty\right)$, $\xi = 25$ και $\Delta x = 1$ οπότε προκύπτει ότι

$$df(25) = f'(25)dx = \frac{1}{2\sqrt{25}}dx = \frac{1}{10}dx$$

και

$$\begin{aligned}\sqrt{26} - \sqrt{25} &= f(26) - f(25) \\ &\simeq df(25)(1) \\ &= \frac{1}{10}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sqrt{26} \simeq 5 + \frac{1}{10} = 5.1\ .$$

5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Στις εφαρμογές εμφανίζονται συναρτήσεις οι οποίες δεν δίδονται στην κλασική μορφή $y=f(x)$ (δηλαδή το y συναρτήσει του x) αλλά η ανεξάρτητη μεταβλητή x και η εξαρτημένη μεταβλητή y εκφράζονται ως συναρτήσεις κάποιας άλλης μεταβλητής t η οποία ονομάζεται **παράμετρος**.

Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν συναρτήσεις φ_1, φ_2 ορισμένες σε ένα σύνολο (συνήθως διάστημα) A με

$$\left\{\begin{matrix} x=\varphi_1(t) \\ y=\varphi_2(t) \end{matrix}\right\}.$$

Στις περιπτώσεις αυτές, λέγεται ότι η συνάρτηση δίδεται σε **παραμετρική μορφή**.

Για τον υπολογισμό της παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ συναρτήσεων που δίδονται σε παραμετρική μορφή χρησιμοποιείται ο κανόνας της αλυσίδας, δηλαδή

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

υπό τον όρο ότι $\frac{dx}{dt}\neq 0$ και οι συναρτήσεις $x=\varphi_1(t)$ και $y=\varphi_2(t)$είναι παραγωγίσιμες.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης που δίδεται σε παραμετρική μορφή στο σημείο $\left(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)\right)$ με $\frac{dx}{dt}(\xi) \neq 0$ είναι

$$y - \varphi_2(\xi) = \frac{\frac{dy}{dt}(\xi)}{\frac{dx}{dt}(\xi)}\left(x - \varphi_1(\xi)\right)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{dx}{dt}(\xi)\left(y - \varphi_2(\xi)\right) = \frac{dy}{dt}(\xi)\left(x - \varphi_1(\xi)\right).$$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση που δίδεται στην παραμετρική μορφή

$$\begin{cases} x = \alpha\left(t - \sin t\right) \\ y = \alpha\left(1 - \cos t\right) \end{cases}, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ και } t \in \mathbb{R}.$$

(i) Να ευρεθούν οι παράγωγοι $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Λύση

Είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\alpha \sin t}{\alpha(1 - \cos t)} = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

και

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}}{\alpha(1 - \cos t)}$$

$$= -\frac{1}{4\alpha}\frac{1}{\sin^4\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης αυτής στα σημεία Α, Β με $t=\frac{\pi}{2}$ και $t=\frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα, τέμνονται κάθετα και να ευρεθεί το σημείο τομής τους.

Λύση

$\begin{cases} x=\alpha\left(t-\sin t\right) \\ y=\alpha\left(1-\cos t\right) \end{cases}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $t\in\mathbb{R}$.

Τα Α, Β έχουν συντεταγμένες $\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2}-1\right),\alpha\right)$ και $\left(\alpha\left(\frac{3\pi}{2}+1\right),\alpha\right)$, οπότε οι εφαπτόμενες στα σημεία αυτά έχουν εξισώσεις

$$y-\alpha=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\left(x-\alpha\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)\Leftrightarrow y=x-\frac{\alpha\pi}{2}+2\alpha$$

και

$$y-\alpha=\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\left(x-\alpha\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)\right)\Leftrightarrow y=-x+\frac{3\pi}{2}\alpha+2\alpha$$

αντίστοιχα.

Προφανώς, οι εφαπτόμενες τότε είναι κάθετες[4] με σημείο τομής το σημείο[5] $\left(\alpha\pi,\frac{\alpha\pi}{2}+2\alpha\right)$.

[4] Αφού οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι 1 και -1 αντίστοιχα.
[5] Προκύπτει με επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να μελετηθεί η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & \alpha\nu\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\\ \sin x, & \alpha\nu\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Προφανώς, επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, αρκεί να μελετηθεί η παραγωγισιμότητά της για $x=0$.

Για $h>0$ είναι

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\sin \mathrm{h}}{h},$$

οπότε

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{\sin h}{h}=1.$$

Για $h<0$ είναι $\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\sin^2 h}{h}$, οπότε

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{\sin^2 h}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0^{-}}\sin \mathrm{h}$$

$$=1\cdot\sin 0=0.$$

Άρα $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$ και επομένως, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:
α) $f(x) = \operatorname{tg} x$, β) $g(x) = \sinh x$, γ) $h(x) = \operatorname{ctgh} x$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

β) Για $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

γ) Για $x \in \mathbb{R}^*$ είναι

$$(\operatorname{ctgh} x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{(\cosh x)' \sinh x - \cosh x (\sinh x)'}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{\sinh^2 x}$$

$$= -\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να αποδειχθούν οι τύποι:

α) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, για κάθε $x>0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$,

β) $\left(\alpha^{x}\right)' = \alpha^{x}\ln\alpha$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας είναι

α) $$\left(x^{\alpha}\right)' = \left(e^{\ln x^{\alpha}}\right)' = \left(e^{\alpha\ln x}\right)'$$
$$= e^{\alpha\ln x}\left(\alpha\ln x\right)' = x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}$$
$$= \alpha x^{\alpha-1}.$$

β) $$\left(\alpha^{x}\right)' = \left(e^{\ln\alpha^{x}}\right)' = \left(e^{x\ln\alpha}\right)'$$
$$= e^{x\ln\alpha}\left(x\ln\alpha\right)'$$
$$= \alpha^{x}\ln\alpha.$$

ΑΣΚΗΣΗ 22

Να ευρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 3x + 1/\mathbb{R}$, η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 2x + 8$.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η ζητούμενη ευθεία $y = \alpha x + \beta$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $f/\mathbb{R}$ στο σημείο (ξ, η).

Τότε θα είναι

$$\alpha = f'(\xi) = 2\xi + 3 \qquad (1)$$

Επιπλέον, από την παραλληλία των ευθειών $y = 2x + 8$ και $y = \alpha x + \beta$ προκύπτει ότι $\alpha = 2$ και επομένως με τη βοήθεια της σχέσης (1) θα είναι $\xi = -\frac{1}{2}$ και

$$\eta = \xi^2 + 3\xi + 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{4}.$$

Επειδή το σημείο $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ ανήκει στην ευθεία $y = \alpha x + \beta$, θα είναι

$$-\frac{1}{4} = \alpha\left(-\frac{1}{2}\right) + \beta$$

$$\beta = \frac{3}{4}.$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = 2x + \frac{3}{4}$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να ευρεθούν οι σταθερές $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f/\mathbb{R}$, $g/\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^2+\alpha x+\beta \text{ και } g(x)=x^3-\gamma$$

τέμνονται στο σημείο $(1,2)$ και έχουν την ίδια εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

ΛΥΣΗ

Επειδή οι C_f, C_g διέρχονται από το σημείο $(1,2)$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f(1)=g(1)=2 &\Leftrightarrow 1^2+\alpha\cdot 1+\beta=1^3-\gamma=2 \\ &\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta=1-\gamma=2 \\ &\Leftrightarrow \alpha+\beta=1 \;\; \textit{και} \;\; \gamma=-1. \end{aligned}$$

Επειδή οι C_f, C_g έχουν την ίδια εφαπτομένη στο σημείο $(1,2)$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f'(1)=g'(1) &\Leftrightarrow 2\cdot 1+\alpha=3\cdot 1^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha=1, \end{aligned}$$

οπότε τελικά $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=-1$.

ΑΣΚΗΣΗ 26

Να ευρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\alpha,\beta>0$, στο σημείο $\mathrm{A}(\xi,\eta)$, όπου $\eta<0$.

ΛΥΣΗ

Από την έλλειψη προκύπτουν δύο συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\ /\left[-\alpha,\alpha\right] \text{ και}$$

$$g(x)=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\ /\left[-\alpha,\alpha\right].$$

Επειδή $\eta<0$ το σημείο $\mathrm{A}(\xi,\eta)$ θα ευρίσκεται στη γραφική παράσταση της g.

Επειδή

$$g'(x)=-\frac{\beta}{\alpha}\ \frac{-2x}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\frac{\beta x}{\alpha\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

για κάθε $x\in\left(-\alpha,\alpha\right)$, προκύπτει ότι

$$g'(\xi)=\frac{\beta\xi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}=\frac{\beta\xi}{\alpha\left(-\frac{\alpha}{\beta}\eta\right)}=-\frac{\beta^2\xi}{\alpha^2\eta},$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{A}(\xi,\eta)$ της έλλειψης είναι

$$y-\eta=-\frac{\beta^2\xi}{\alpha^2\eta}(x-\xi)\Leftrightarrow \alpha^2\eta y-\alpha^2\eta^2=-\beta^2\xi x+\beta^2\xi^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^2\xi x+\alpha^2\eta y=\beta^2\xi^2+\alpha^2\eta^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi x}{\alpha^2}+\frac{\eta y}{\beta^2}=\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi}{\alpha^2}x+\frac{\eta}{\beta^2}y=1.$$

Η εξίσωση της κάθετης στο σημείο $\mathrm{A}(\xi,\eta)$ της έλλειψης είναι

$$y-\eta=\frac{\alpha^2\eta}{\beta^2\xi}(x-\xi)\Leftrightarrow \beta^2\xi y-\eta\beta^2\xi=\alpha^2\eta x-\alpha^2\eta\xi$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\eta x-\beta^2\xi y=\eta\alpha^2\xi-\eta\beta^2\xi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta x}{\beta^2}-\frac{\xi y}{\alpha^2}=\eta\xi\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 28

Να υπολογισθεί με τη βοήθεια του διαφορικού μια προσεγγιστική τιμή του αριθμού $\sqrt[3]{123}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x}\big/(0,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, με

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

και

$$(df)(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο[6]

$$f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\simeq(df)(\xi)(\Delta x)$$

για $\xi=125$ και $\Delta x=-2$, προκύπτει ότι

$$f(123)-f(125)\simeq(df)(125)(-2)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{123}-\sqrt[3]{125}\simeq\frac{1}{3}(125)^{-\frac{2}{3}}(-2)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{123}\simeq 5-\frac{2}{3}\frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{123}\simeq 4.97\overline{3}.$$

[6] Βλ. παράγραφο 4.

ΑΣΚΗΣΗ 30

Έστω η συνάρτηση που δίδεται στην παραμετρική μορφή

$$\begin{cases} x = \alpha\cos^3 t \\ y = \alpha\sin^3 t \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $0 \le t \le \pi$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης αυτής σε ένα σημείο Α με $t = \xi$ τέμνει τους άξονες των x και y στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει σταθερό μήκος (δηλαδή ανεξάρτητο του ξ).

ΛΥΣΗ

Επειδή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\alpha\sin^2 t\cos t}{-3\alpha\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t,$$

προκύπτει ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $A\left(\alpha\cos^3\xi, \alpha\sin^3\xi\right)$ είναι $y - \alpha\sin^3\xi = -\operatorname{tg}\xi\left(x - \alpha\cos^3\xi\right)$ ή, ισοδύναμα,

$$y\cos\xi + x\sin\xi = \alpha\sin\xi\cos\xi.$$

Έτσι, στο Β (όπου $y = 0$) είναι $x = \alpha\cos\xi$ και στο Γ (όπου $x = 0$) είναι $y = \alpha\sin\xi$.

Κατόπιν τούτων, οι συντεταγμένες των σημείων Β, Γ είναι $(\alpha\cos\xi, 0)$ και $(0, \alpha\sin\xi)$ αντίστοιχα και

$$(\mathrm{B\Gamma}) = \sqrt{(\alpha\cos\xi - 0)^2 + (0 - \alpha\sin\xi)^2} = \sqrt{\alpha^2\left(\cos^2\xi + \sin^2\xi\right)} = |\alpha|$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού
Ο κανόνας L’ Hopital

6. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 6.1 (Fermat)

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $\xi \in D(f)$, το οποίο είναι σημείο τοπικού ακρότατου, τότε θα είναι $f'(\xi) = 0$.

Παρατηρήσεις

1. Το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι $f'(0) = 0$ ενώ το σημείο $\xi = 0$ δεν είναι σημείο τοπικού ακρότατου.
2. Η υπόθεση «το ξ είναι εσωτερικό σημείο του $D(f)$» δεν μπορεί να παραλειφθεί στο θεώρημα του Fermat. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2 / [0,1]$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $\xi = 1$ ενώ είναι $f'(1) = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Fermat.

ΛΥΣΗ

Αν υποτεθεί ότι το εσωτερικό σημείο ξ είναι και σημείο τοπικού μεγίστου[7] τότε υπάρχει περιοχή $\pi(\xi)=(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$ για την οποία ισχύει ότι

$$\pi(\xi)\subseteq D(f) \text{ και } f(x)\leq f(\xi) \text{ για κάθε } x\in\pi(\xi).$$

Τότε είναι

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geq 0, \text{ για κάθε } x\in(\xi-\varepsilon,\ \xi)$$

και

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leq 0, \text{ για κάθε } x\in(\xi,\ \xi+\varepsilon),$$

οπότε

$$f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geq 0 \text{ και}$$

$$f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leq 0.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, έπεται ότι $f'(\xi)=f'_-(\xi)=f'_+(\xi)$, οπότε τελικά $f'(\xi)=0$.

[7] Ανάλογα αποδεικνύεται όταν το ξ είναι σημείο τοπικού ελάχιστου.

ΑΣΚΗΣΗ 32

Δίδονται δύο θετικοί αριθμοί α, β με $\alpha^x+\beta^x\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $\alpha\cdot\beta=1$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\alpha^x+\beta^x-2$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον, το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελάχιστου αφού

$$f(x)=\alpha^x+\beta^x-2\geq 0=f(0)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Κατόπιν τούτων, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat προκύπτει ότι

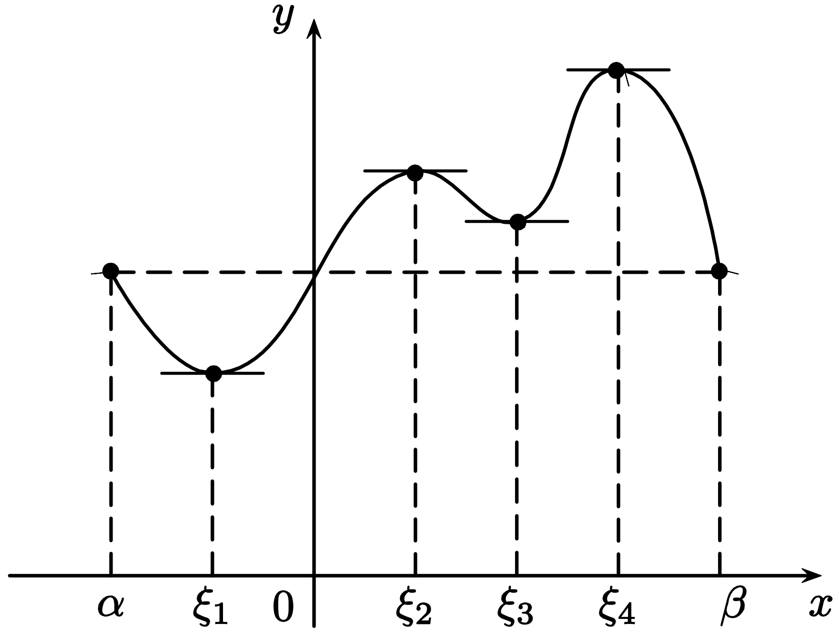
$$\begin{aligned} f'(0)=0 &\Leftrightarrow \alpha^0\ln\alpha+\beta^0\ln\beta=0\\ &\Leftrightarrow \ln(\alpha\cdot\beta)=0\\ &\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=1. \end{aligned}$$

Θεώρημα 6.2 (Rolle)

Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β) **και ισχύει ότι** $f(\alpha)=f(\beta)$**, τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο** $\xi\in(\alpha,\beta)$ **με** $f'(\xi)=0$**.**

Παρατηρήσεις

1) Γεωμετρικά, η υπόθεση "$f(\alpha)=f(\beta)$" του θεωρήματος του Rolle σημαίνει ότι τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta,f(\beta))$ ευρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία και το συμπέρασμα δηλώνει ότι υπάρχει ένα (τουλάχιστον) $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\Gamma(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των τετμημένων όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, όπου υπάρχουν 4 τέτοια ξ στο (α,β).



2) Τα επόμενα τρία παραδείγματα τονίζουν τη σημασία των υποθέσεων του θεωρήματος του Rolle.

(i) Για τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}-1, & \alpha\nu\ 0<x\le 1\\ 0, & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$$

που παραγωγίζεται στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$, με $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}\neq 0$ και για την οποία $f(0)=f(1)$, το αποτέλεσμα του θεωρήματος δεν ισχύει, διότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x=0$.

(ii) Για τη συνεχή συνάρτηση $f(x)=|x|/[-2,2]$, που παραγωγίζεται στο $(-2,0)\cup(0,2)$, με $f'(x)=\begin{cases}-1, & -2<x<0,\\ 1, & 0<x<2,\end{cases}$ και για την οποία $f(2)=f(-2)$, το αποτέλεσμα του θεωρήματος δεν ισχύει, διότι δεν υπάρχει η παράγωγός της στο σημείο $x=0$.

(iii) Για τη συνεχή συνάρτηση $f(x)=x^2/[1,2]$ που παραγωγίζεται στο ανοικτό διάστημα $(1,2)$, με $f'(x)=2x\neq 0$, το αποτέλεσμα του θεωρήματος δεν ισχύει διότι $f(1)\neq f(2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 33

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Rolle:

Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και ισχύει ότι $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=0$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής θα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in[\alpha,\beta]$ με

$$f(\xi_1)=\inf\{f(x):x\in[\alpha,\beta]\} \text{ και}$$

$$f(\xi_2)=\sup\{f(x):x\in[\alpha,\beta]\}.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\xi_1,\xi_2\in\{\alpha,\beta\}$, τότε $f(\xi_1)=f(\xi_2)$ οπότε η συνάρτηση f είναι σταθερή και επομένως, $f'(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
2. Αν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ ή $\xi_2\in(\alpha,\beta)$, τότε ένα τουλάχιστον από τα ξ_1,ξ_2 είναι εσωτερικό σημείο και σημείο τοπικού ακρότατου, οπότε από το θεώρημα του Fermat προκύπτει ότι $f'(\xi_1)=0$ ή $f'(\xi_2)=0$.

Κατόπιν τούτων, σε όλες τις περιπτώσεις θα υπάρχει ένα (τουλάχιστον) $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 35

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-1=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική λύση.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-1/[0,+\infty)$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Επειδή $f(0)\cdot f(64)=(-1)\cdot(3)<0$
εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση $f/[0,64]$ οπότε θα υπάρχει $\xi\in(0,64)$ με $f(\xi)=0$, δηλαδή η δοσμένη εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση.

Θα αποδειχθεί ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.

Πραγματικά, αν υπάρχουν δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις ρ_1,ρ_2 της δοσμένης εξίσωσης με $0\le\rho_1<\rho_2$, εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $f/[\rho_1,\rho_2]$, οπότε θα υπάρχει $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$ με $f'(\rho)=0$. Τότε ισχύουν διαδοχικά οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$f'(\rho)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\rho^2}}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{\rho}=3\sqrt[3]{\rho^2}\Leftrightarrow\rho=\left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Τούτο όμως είναι άτοπο, αφού

$$\rho>\rho_1\overset{1}{=}\left(\sqrt[3]{\rho_1}+1\right)^2>1.$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μια πραγματική λύση.

---

1. Η ισότητα ισχύει διότι το ρ_1 είναι λύση της δοσμένης εξίσωσης.

Ακολουθία του Rolle

Το θεώρημα του Rolle μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του πλήθους των πραγματικών ριζών ενός ακεραίου πολυωνύμου $p(x)$ με τη βοήθεια των ριζών της εξίσωσης $p'(x)=0$.

Αν $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n$ είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $p'(x)=0$, τότε προκύπτει η πεπερασμένη ακολουθία τιμών

$$p(-\infty),p(\xi_1),p(\xi_2),\ldots,p(\xi_n),p(+\infty)$$

όπου $p(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}p(x)$ και $p(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}p(x)$, γνωστή ως **ακολουθία του Rolle**.

Πρέπει να τονισθεί ότι δεν υπάρχουν δύο διαδοχικοί όροι $p(\xi_\kappa)$, $p(\xi_{\kappa+1})$ της ακολουθίας του Rolle οι οποίοι να είναι ίσοι με 0, διότι τότε θα υπήρχε $\xi\in(\xi_\kappa,\xi_{\kappa+1})$ με $p'(\xi)=0$, το οποίο είναι άτοπο.

Πρόταση 6.3

Το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $p(x)=0$ που δεν είναι λύσεις της εξίσωσης $p'(x)=0$ ισούται με το πλήθος των εναλλαγών των προσήμων των όρων της ακολουθίας του Rolle.

ΑΣΚΗΣΗ 39

Να ευρεθεί το πλήθος των διαφορετικών πραγματικών ριζών του πολυωνύμου $p(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 16$.

ΛΥΣΗ

Επειδή οι ρίζες της παραγώγου $p'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$ είναι οι αριθμοί 0, 2 και 4 με $p(0) = p(4) = -16$ και $p(2) = 0$ προκύπτει ο πίνακας:

$p(-\infty)$	$p(0)$	$p(2)$	$p(4)$	$p(+\infty)$
$+$	$-$	0	$-$	$+$

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι το πλήθος των εναλλαγών της ακολουθίας του Rolle είναι 2 οπότε θα υπάρχουν[9] δύο ακριβώς πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $p(x) = 0$ οι οποίες δεν είναι λύσεις της εξίσωσης $p'(x) = 0$. Αν προστεθεί σ' αυτές και η διπλή[10] ρίζα $\rho = 2$, τότε θα υπάρχουν συνολικά 3 διαφορετικές πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου $p(x)$.

---

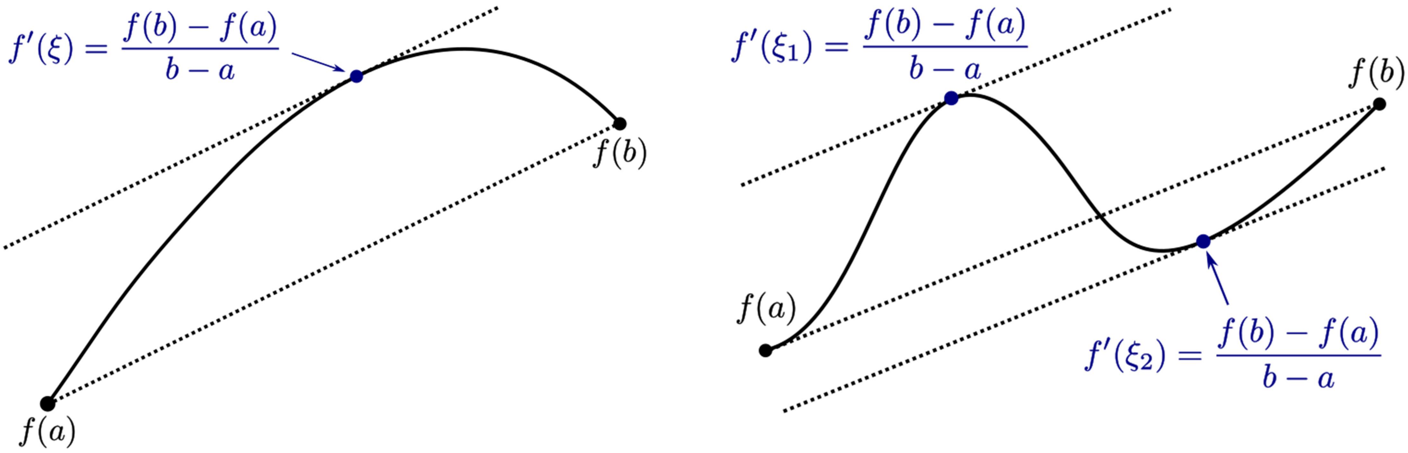
[9] Σύμφωνα με την πρόταση 6.3.

[10] Ένας αριθμός ρ είναι ρίζα πολλαπλότητας κ ενός πολυωνύμου $p(x)$ αν και μόνο αν $p^{(\nu)}(\rho) = 0$ για κάθε $0 \le \nu \le \kappa - 1$ και $p^{(\kappa)}(\rho) \ne 0$.

Θεώρημα 6.4 (Lagrange, ή μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού)

Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β), **τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο** $\xi\in(\alpha,\beta)$ **με**

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$



Το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (ή συνοπτικά Θ.Μ.Τ.) είναι γενίκευση του θεωρήματος του Rolle και γεωμετρικά το συμπέρασμα δηλώνει ότι υπάρχει ένα (τουλάχιστον) $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο $\Gamma(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta,f(\beta))$.

ΑΣΚΗΣΗ 41

Να αποδειχθεί το θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = f(\alpha) - f(x) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} / [\alpha,\beta]$$

η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

Επιπλέον, είναι $F(\alpha) = F(\beta) = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -f'(\xi) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Παρατήρηση

Μια λίγο απλούστερη συνάρτηση, που μπορεί να δώσει με τον ίδιο τρόπο μια άλλη λύση, είναι η συνάρτηση

$$G(x) = f(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x.$$

Το πλεονέκτημα της F είναι ότι με μια μικρή μετατροπή της δίνει, με τον ίδιο τρόπο, μια απόδειξη για το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy.

Θεώρημα 6.6 (Μέσης Τιμής του Cauchy)

Αν δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g/[\alpha,\beta]$ **είναι παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα** (α,β) **και ισχύει** $g'(x) \neq 0$ **για κάθε** $x \in (\alpha,\beta)$**, τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο** $\xi \in (\alpha,\beta)$ **με**

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}.$$

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Θ.Μ.Τ., χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$F(x) = f(\alpha) - f(x) + \big(g(x)-g(\alpha)\big)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} \,/\, [\alpha,\beta]$$

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ., η ανισότητα

$$e^x \geq x+1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Προφανώς, για $x=0$ η σχέση ισχύει ως ισότητα.

Αν $x>0$, τότε εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(t)=e^t/[0,x]$, οπότε θα υπάρχει $\xi \in (0,x)$ με

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-e^0}{x}$$

$$\Leftrightarrow xe^{\xi}=e^x-1.$$

Εξάλλου, επειδή $0<\xi$ έπεται ότι $1<e^{\xi}$ και $x<xe^{\xi}$. Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι $x+1<e^x$.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η περίπτωση όπου $x<0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(t)=e^t/[x,0]$.

Πόρισμα 6.5

i) **Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε η συνάρτηση είναι σταθερή.**

ii) **Αν δύο συνεχείς συναρτήσεις $f,g/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (α,β) με $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε διαφέρουν κατά μια σταθερά.**

Το πρώτο μέρος του προηγουμένου πορίσματος χρησιμοποιείται για την απόδειξη ορισμένων ταυτοτήτων.

ΑΣΚΗΣΗ 46

Να αποδειχθεί το πόρισμα 6.5(i).

ΛΥΣΗ

Αν $\gamma,\delta\in[\alpha,\beta]$ με $\gamma<\delta$, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f\,/\,[\gamma,\delta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\gamma,\delta)$ με

$$f'(\xi)=\frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}$$

Επειδή $f'(\xi)=0$, προκύπτει ότι $f(\delta)=f(\gamma)$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι σταθερή.

ΑΣΚΗΣΗ 47

Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [-1,1]$,

β) $arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \dfrac{1}{2}\arcsin x = \dfrac{\pi}{4}$, για κάθε $x \in (-1,1]$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x / [-1,1]$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$, με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\arcsin x)' + (\arccos x)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Τότε, από την πρόταση 6.5 προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Εξάλλου, επειδή

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

προκύπτει ότι $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$, δηλαδή

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

για κάθε $x \in [-1,1]$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\arcsin x\,/\left(-1,1\right]$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\left(-1,1\right]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, με

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1+x}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{4}(1+x)^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{(1+x)^2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Τότε, από την πρόταση 6.5 προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή. Εξάλλου, επειδή

$$f(0)=arctg\sqrt{\frac{1-0}{1+0}}+\frac{1}{2}\arcsin 0=arctg1=\frac{\pi}{4},$$

προκύπτει ότι $f(x)=\frac{\pi}{4}$ για κάθε $x\in\left(-1,1\right]$, δηλαδή

$$arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\arcsin x=\frac{\pi}{4},\text{ για κάθε } x\in\left(-1,1\right].$$

7. ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Είναι γνωστό ότι οι **απροσδιόριστες μορφές** είναι οι

$$\frac{0}{0},\ \frac{+\infty}{+\infty},\ (+\infty)+(-\infty),\ 0\cdot(+\infty),\ 0^0,\ 1^{+\infty},\ \text{και } (+\infty)^0.$$

Από αυτές, οι δύο πρώτες αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια του κανόνα του L' Hospital, ενώ οι υπόλοιπες με κατάλληλους μετασχηματισμούς ανάγονται σε μια εκ των μορφών $\frac{0}{0}$ ή $\frac{+\infty}{+\infty}$.

I. Οι μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{+\infty}{+\infty}$

Κανόνας του L' Hospital

Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο $\mathrm{A}=(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$ **με** $g'(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in A$ **και**

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\lim_{x\to\xi} g(x)=0$$

ή

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\pm\infty \ \textbf{και}\ \lim_{x\to\xi} g(x)=\pm\infty.$$

Τότε, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$ **θα υπάρχει και το** $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$ **και μάλιστα θα είναι ίσα, δηλαδή**

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ο κανόνας του L' Hospital ισχύει και όταν $\xi=+\infty$ ή $\xi=-\infty$.

II. Η μορφή $(+\infty)+(-\infty)$

Για τον προσδιορισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to\xi}\left(f(x)+g(x)\right)$ όταν

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to\xi} g(x)=-\infty$$

χρησιμοποιούνται οι μετασχηματισμοί

$$F(x)=\frac{1}{f(x)} \text{ και } G(x)=\frac{1}{g(x)},$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\xi}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to\xi}\frac{F(x)+G(x)}{F(x)\cdot G(x)} \text{ (μορφή } \frac{0}{0}\text{).}$$

III. Η μορφή $0\cdot(+\infty)$

Για τον προσδιορισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to\xi}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ όταν

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=0 \text{ και } \lim_{x\to\xi} g(x)=+\infty$$

χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $G(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\xi}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{G(x)} \text{ (μορφή } \frac{0}{0}\text{).}$$

IV Οι μορφές 0^0, $1^{+\infty}$ και $(+\infty)^0$

Για τον προσδιορισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$ όταν

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = 0,$$

ή

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = 1 \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty,$$

ή

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{x\to\xi} g(x) = 0$$

χρησιμοποιείται ο τύπος

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\xi}\left[\ln f(x)^{g(x)}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to\xi}\left[g(x)\ln f(x)\right]}$$

όπου το όριο $\lim\limits_{x\to\xi}\left[g(x)\ln f(x)\right]$ είναι της μορφής $0\cdot(+\infty)$, ή $0\cdot(-\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 36

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 9x^2 + 22x - 12 = 0$ έχει τρεις πραγματικές λύσεις στο διάστημα $[0,6]$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 - 48x / \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 0$, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle τρεις φορές διαδοχικά για τη συνάρτηση αυτή, περιορισμένη στα διαστήματα $[0,2]$, $[2,4]$ και $[4,6]$, οπότε θα υπάρχουν τρία σημεία $\xi_1 \in (0,2)$, $\xi_2 \in (2,4)$ και $\xi_3 \in (4,6)$ με

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0 \tag{1}$$

Επειδή $f'(x) = 4(x^3 - 9x^2 + 22x - 12)$, από την σχέση (1) προκύπτει ότι οι αριθμοί ξ_1, ξ_2 και ξ_3 είναι λύσεις της δοσμένης εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να αποδειχθεί η πρόταση 6.3:
Το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $p(x)=0$ που δεν είναι λύσεις της εξίσωσης $p'(x)=0$ ισούται με το πλήθος των εναλλαγών των προσήμων των όρων της ακολουθίας του Rolle.

ΛΥΣΗ

Έστω $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n$ οι διαφορετικές πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $p'(x)=0$ και $p(-\infty),p(\xi_1),p(\xi_2),\ldots,p(\xi_n),p(+\infty)$ είναι η ακολουθία του Rolle.

Κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,\xi_1),(\xi_1,\xi_2),\ldots,(\xi_{n-1},\xi_n),(\xi_n,+\infty)$ περιέχει το πολύ μια πραγματική λύση της εξίσωσης $p(x)=0$, διότι διαφορετικά σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, σ' ένα απ' αυτά θα ανήκε μια ρίζα της παραγώγου.

Αν $p(\xi_k)$, $p(\xi_{k+1})$, όπου $\xi\in[n-1]$, είναι δύο διαδοχικοί όροι της ακολουθίας του Rolle με $p(\xi_k)p(\xi_{k+1})<0$ τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $p(x)=0$ στο διάστημα (ξ_k,ξ_{k+1}).

Αντίθετα, αν $p(\xi_k)p(\xi_{k+1})>0$ τότε η εξίσωση $p(x)=0$ δεν έχει καμία πραγματική λύση στο (ξ_k,ξ_{k+1}). Πραγματικά αν $p(\xi_k),p(\xi_{k+1})>0$ και $\xi\in[\xi_k,\xi_{k+1}]$ με $p(\xi)=\min\{p(x):x\in[\xi_k,\xi_{k+1}]\}$, τότε $\xi=\xi_k$ ή $\xi=\xi_{k+1}$, διότι διαφορετικά, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα ήταν $p'(\xi)=0$. Έτσι, το πολυώνυμο θα λαμβάνει μόνο θετικές τιμές στο διάστημα $[\xi_k, \xi_{k+1}]$. Ανάλογα, όταν $p(\xi_k), p(\xi_{k+1}) < 0$ τότε το πολυώνυμο θα λαμβάνει μόνο αρνητικές τιμές στο διάστημα $[\xi_k, \xi_{k+1}]$.

Ανάλογο αποτέλεσμα προκύπτει και για τις ειδικές περιπτώσεις των διαδοχικών όρων

$$p(-\infty), p(\xi_1) \text{ και } p(\xi_n), p(+\infty).$$

Τέλος, αν $p(\xi_k) = 0$ για κάποιο $k \in [n]$, τότε η εξίσωση $p(x) = 0$ δεν έχει καμία πραγματική λύση στα διαστήματα (ξ_{k-1}, ξ_k) και (ξ_k, ξ_{k+1}) (όπου $\xi_0 = -\infty$ και $\xi_{n+1} = +\infty$) διότι αν υπήρχε $\xi \in (\xi_{k-1}, \xi_k)$ (αντ. $\xi \in (\xi_k, \xi_{k+1})$) με $p(\xi) = 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπήρχε μια ρίζα της παραγώγου στο διάστημα (ξ, ξ_k) (αντ. (ξ_k, ξ)) το οποίο είναι άτοπο.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $p(x) = 0$ που δεν είναι λύσεις της εξίσωσης $p'(x) = 0$, ισούται με το πλήθος των εναλλαγών των προσήμων των όρων της ακολουθίας του Rolle.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Να ευρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι τρεις λύσεις της εξίσωσης

$$x^3 + 3\alpha x + 2\beta = 0$$

να είναι πραγματικές και άνισες.

ΛΥΣΗ

Έστω $p(x) = x^3 + 3\alpha x + 2\beta / \mathbb{R}$.

Για να έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες η δοσμένη εξίσωση $p(x)=0$, θα πρέπει, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, να έχει μια πραγματική ρίζα η εξίσωση $p'(x)=0$. Τότε όμως, επειδή $p'(x)= 3(x^2+\alpha)$ θα πρέπει να είναι $\alpha \le 0$.

Στην περίπτωση αυτή, οι ρίζες της $p'(x)=0$ είναι

$$x_1 = -\sqrt{-\alpha} \text{ και } x_2 = \sqrt{-\alpha}.$$

Επομένως, έχουμε την ακολουθία του Rolle:

$p(-\infty)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(+\infty)$
$-$	$-2\alpha\sqrt{-\alpha}+2\beta$	$2\alpha\sqrt{-\alpha}+2\beta$	$+$

Για να έχει η εξίσωση $p(x)=0$ τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες, πρέπει να έχουμε τρεις εναλλαγές, δηλαδή πρέπει

$$-2\alpha\sqrt{-\alpha}+2\beta>0 \text{ και } 2\alpha\sqrt{-\alpha}+2\beta<0.$$

Για να ισχύουν οι δύο παραπάνω ανισότητες, πρέπει και αρκεί να ισχύει η συνθήκη

$$\alpha^3+\beta^2<0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να αποδειχθούν, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ., οι ανισότητες:

α) $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln \alpha}{x} + \dfrac{1}{\alpha}$, όταν $x > \alpha > 0$,

β) $1 + \alpha x < (1+x)^{\alpha}$, όταν $\alpha > 1$ και $x > 0$,

γ) $\dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} < \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta < \dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}$, αν $0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(t) = \ln t \,/\, [\alpha, x]$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\ln x - \ln \alpha}{x - \alpha}.$$

Τότε όμως, θα είναι

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln \alpha}{x} + \frac{x - \alpha}{x} \cdot \frac{1}{\xi}$$

$$< \frac{\ln \alpha}{x} + \frac{1}{\xi}$$

$$< \frac{\ln \alpha}{x} + \frac{1}{\alpha}.$$

β) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(t) = t^{\alpha} / [1, 1+x]$, υπάρχει $\xi \in (1, 1+x)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(1+x) - f(1)}{(1+x) - 1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha \xi^{\alpha-1} = \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x}.$$

Άρα θα είναι

$$(1+x)^{\alpha} = \alpha x \xi^{\alpha-1} + 1 > \alpha x + 1,$$

διότι $\xi > 1$ και $\alpha - 1 > 0$.

γ) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(t) = \operatorname{tg} t / [\beta, \alpha]$, υπάρχει $\xi \in (\beta, \alpha)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\alpha - \beta} \qquad (1)$$

Επειδή $0 < \beta < \xi < \alpha < \frac{\pi}{2}$, προκύπτει ότι

$$\cos\alpha < \cos\xi < \cos\beta \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα είναι

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\alpha - \beta} < \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} < \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta < \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 50

Να ευρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+x-2\sin x}{x^2}$, β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{x+1}$, όπου $n\in\mathbb{N}^*$,

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x-1+x-2\sin x\right)=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x-2\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1+x-2\sin x\right)'}{\left(x^2\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1-2\cos x}{2x}$$

(1)

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+1-2\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}(2x)=0$, εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα του L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1-2\cos x}{2x}=\lim_{n\to 0}\frac{\left(e^x+1-2\cos x\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2\sin x}{2}=\frac{1}{2}\quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x-2\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

β) Εφαρμόζοντας διαδοχικά n φορές τον κανόνα του L' Hospital, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[(\ln x)^n\right]'}{(x+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\left[(\ln x)^{n-1}\right]'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{x}$$

$$=0.$$

γ) Επειδή

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}$$

και

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x-1-x\right)=\lim_{x\to 0}x\left(e^x-1\right)=0,$$

εφαρμόζοντας διαδοχικά δύο φορές τον κανόνα του L' Hospital, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x\left(e^x-1\right)\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1+xe^x\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 51

Να ευρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}$, β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$, γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2+2x+7\right)^{\frac{1}{x}}$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$(x-1)^{x-1}=e^{(x-1)\ln(x-1)},\ \text{για } x>1.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x-1)=-\infty$,

εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\lim_{x\to 1^+}\big((x-1)\ln(x-1)\big)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\big(\ln(x-1)\big)'}{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^+}(1-x)=0,$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)}$$

$$=e^0$$

$$=1.$$

β) Είναι $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x}}$, για $x \in (-1,1)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x^2} = 2,$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x}} = e^2.$$

γ) Είναι $\left(3x^2+2x+7\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln\left(3x^2+2x+7\right)}{x}}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(3x^2+2x+7\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$, εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(3x^2+2x+7\right)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\ln\left(3x^2+2x+7\right)\right)'}{x'}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(3x^2+2x+7\right)'}{3x^2+2x+7} = \lim_{x\to +\infty}\frac{6x+2}{3x^2+2x+7} = 0,$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to +\infty}\left(3x^2+2x+7\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(3x^2+2x+7\right)}{x}} = e^0 = 1.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Περιεχόμενα διάλεξης:
Μονοτονία, ακρότατα
Κυρτότητα, σημεία καμπής
Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

9. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Αρχικά, δίδεται ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός της μονοτονίας των παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Πρόταση 9.1

Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β)**, τότε είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) αν και μόνο αν** $f'(x)\geq 0$ **(αντ.** $f'(x)\leq 0$**) για κάθε** $x\in(\alpha,\beta)$**.**

Πρόταση 9.2

Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β) **με** $f'(x)>0$ **(αντ.** $f'(x)<0$**) για κάθε** $x\in(\alpha,\beta)$**, τότε η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα (αντ. γνήσια φθίνουσα).**

Η απόδειξη των δύο παραπάνω προτάσεων γίνεται με τη βοήθεια του ΘΜΤ (παρόμοια με τη λυμένη άσκηση 46).

Με την τελευταία πρόταση προσδιορίζονται τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων. Το αντίστροφό της δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3/[-1,1]$ είναι γνήσια αύξουσα αλλά $f'(0)=0$.

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της Ανάλυσης είναι ο προσδιορισμός των ακρότατων τιμών των συναρτήσεων. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων μιας συνάρτηση f που ορίζεται σ’ ένα διάστημα I είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του I στα οποία η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και έχει παράγωγο ίση με 0.

2. Τα εσωτερικά σημεία του I στα οποία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.

3. Τα άκρα του I (αν η f ορίζεται σ’ αυτά).

Τα σημεία που αναφέρονται στα 1 και 2 ονομάζονται **κρίσιμα σημεία** της συνάρτησης.

Παρακάτω, δίδονται ικανές συνθήκες για να είναι ένα κρίσιμο σημείο θέση τοπικού ακρότατου.

Πρόταση 9.3

Αν η συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$ και συνεχής στο ξ τότε

(i) Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\xi)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\xi,\beta)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ.

(ii) Αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\xi)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\xi,\beta)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ξ.

Πρόταση 9.4

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ για την οποία υπάρχει σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ξ με $f'(\xi)=0$ και $f''(\xi)\neq 0$. Τότε

(i) Αν $f''(\xi)>0$, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ξ.

(ii) Αν $f''(\xi)<0$, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ.

Το κριτήριο της προηγούμενης πρότασης είναι πιο εύχρηστο από αυτό της πρότασης 9.3, αλλά απαιτεί την ύπαρξη της δεύτερης παραγώγου. Αντίθετα, το κριτήριο της πρότασης 9.3 εφαρμόζεται και σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο ξ.

ΑΣΚΗΣΗ 55

Να ευρεθούν οι ακρότατες τιμές της συνάρτησης f, όταν:

α) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-2x^2+7}$, β) $f(x)=\begin{cases}-x, & \alpha\nu\ -1\le x\le 0\\ 2x^3-4x^2+2x, & \alpha\nu\ 0<x\le 2.\end{cases}$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $x^4-2x^2+7=\left(x^2-1\right)^2+6>0$, έπεται ότι η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=-\frac{4x(x-1)(x+1)}{\left(x^4-2x^2+7\right)^2}.$$

Προφανώς,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1.$$

Κατόπιν τούτου, η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f προκύπτουν από τον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			τ.μ.		τ.ε.		τ.μ.		

Άρα για $x=-1$ και $x=1$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=f(1)=\dfrac{1}{6}$, ενώ για $x=0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0)=\dfrac{1}{7}$.

β) Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \alpha\nu\ -1\le x\le 0\\ 2x^3-4x^2+2x, & \alpha\nu\ 0<x\le 2.\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-1,0\right)\cup\left(0,2\right]$ με

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & \alpha\nu\ -1\le x<0\\ 6x^2-8x+2, & \alpha\nu\ 0<x\le 2.\end{cases}$$

Στο σημείο $x=0$ η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη. Πραγματικά, εύκολα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Από την άλλη,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)}{x}=-1$$

και

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^3-4x^2+2x}{x}=2.$$

Επειδή $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, έπεται ότι η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Για τον προσδιορισμό των κρίσιμων σημείων, θεωρούμε την εξίσωση

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-8x+2=0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 0<x\le 2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\ \ \acute{\eta}\ \ x=1.$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι οι αριθμοί 0, $\dfrac{1}{3}$ και 1.

Κατόπιν τούτων, έχουμε τον πίνακα:

x	-1		0		$\frac{1}{3}$		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.ε.		τ.μ.		τ.ε.		

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι για $x=-1$, $\frac{1}{3}$ και 2 η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά μέγιστα τα $f(-1)=1$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{27}$ και $f(2)=4$, οπότε το ολικό μέγιστο της συνάρτησης είναι ίσο με 4. Επίσης, για $x=0$ ή 1 η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $f(0)=f(1)=0$, οπότε το ολικό ελάχιστό της είναι ίσο με 0.

Παρατήρηση.

Αν M, m είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή μιας συνεχούς, όχι σταθερής, συνάρτησης $f/[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει

$$R(f)=[m,M].$$

Πράγματι, επειδή $m\le f(x)\le M$, για κάθε $x\in[a,\beta]$, έπεται ότι $R(f)\subseteq[m,M]$.

Από την άλλη, αν $y\in[m,M]$, $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$, όπου $x_1,x_2\in[a,\beta]$, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για τον περιορισμό της f στο διάστημα με άκρα τα x_1,x_2, θα υπάρχει x μεταξύ αυτών, με $y=f(x)\in R(f)$, οπότε $[m,M]\subseteq R(f)$, και τελικά $R(f)=[m,M]$.

Έτσι, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f του δεύτερου μέρους της προηγούμενης άσκησης είναι το διάστημα $[0,4]$.

10. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Μία συνάρτηση f ονομάζεται:

(i) **Κυρτή** (αντ. **κοίλη**) σε ένα διάστημα $I \subseteq D(f)$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ και $t \in (0,1)$ ισχύει ότι

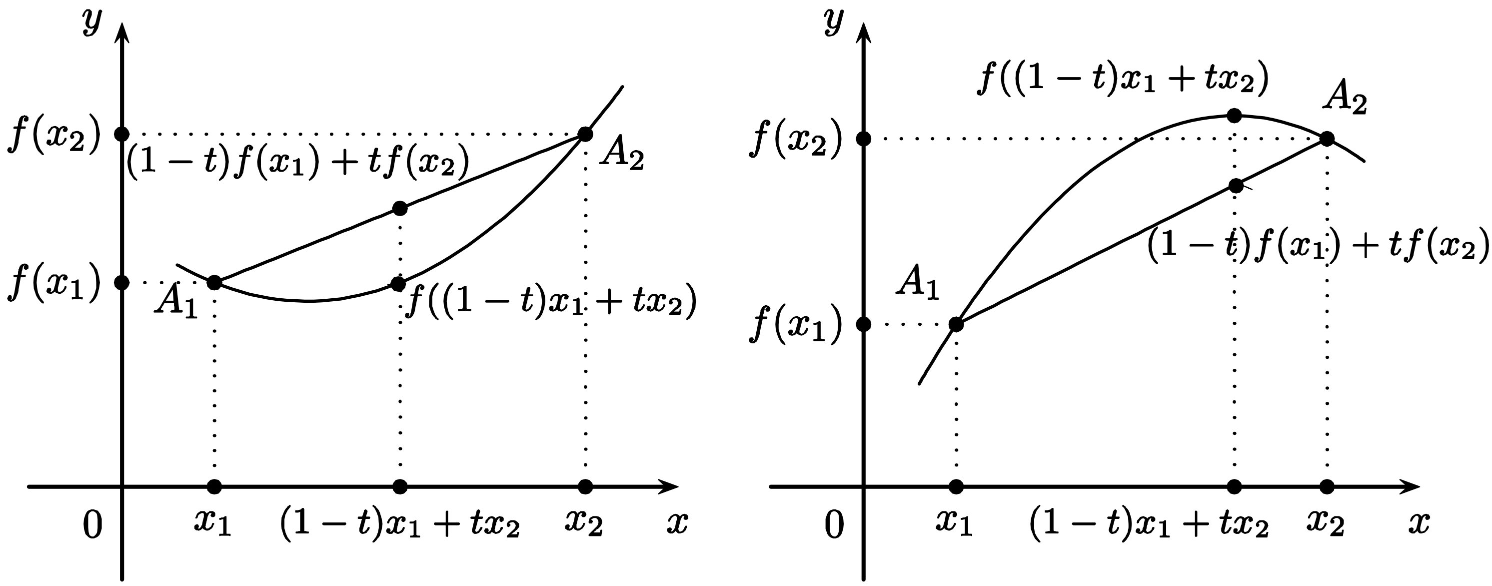
$$f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \leq (1-t)f\left(x_1\right) + tf\left(x_2\right),$$

$$(\text{αντ. } f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \geq (1-t)f\left(x_1\right) + tf\left(x_2\right)).$$

(ii) **Γνήσια κυρτή** (αντ. **γνήσια κοίλη**) σε ένα διάστημα $I \subseteq D(f)$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ και $t \in (0,1)$ ισχύει ότι

$$f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) < (1-t)f\left(x_1\right) + tf\left(x_2\right),$$

(αντ. $f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) > (1-t)f\left(x_1\right) + tf\left(x_2\right)$).



Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η κυρτότητα των συναρτήσεων με τη βοήθεια της παραγώγου.

Μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι συνεχής, αλλά όχι κατ' ανάγκη παραγωγίσιμη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|/(-1,1)$ είναι κυρτή αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0.

Οι επόμενες δύο προτάσεις δίνουν χαρακτηρισμούς της κυρτότητας για παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Πρόταση 10.1

Αν η συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Η συνάρτηση $f'/(\alpha,\beta)$ είναι αύξουσα.

(ii) Η συνάρτηση f είναι κυρτή.

(iii) $f(x_2)-f(x_1)\geq f'(x_1)(x_2-x_1)$ για κάθε $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$.

Πρόταση 10.2

Αν η συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

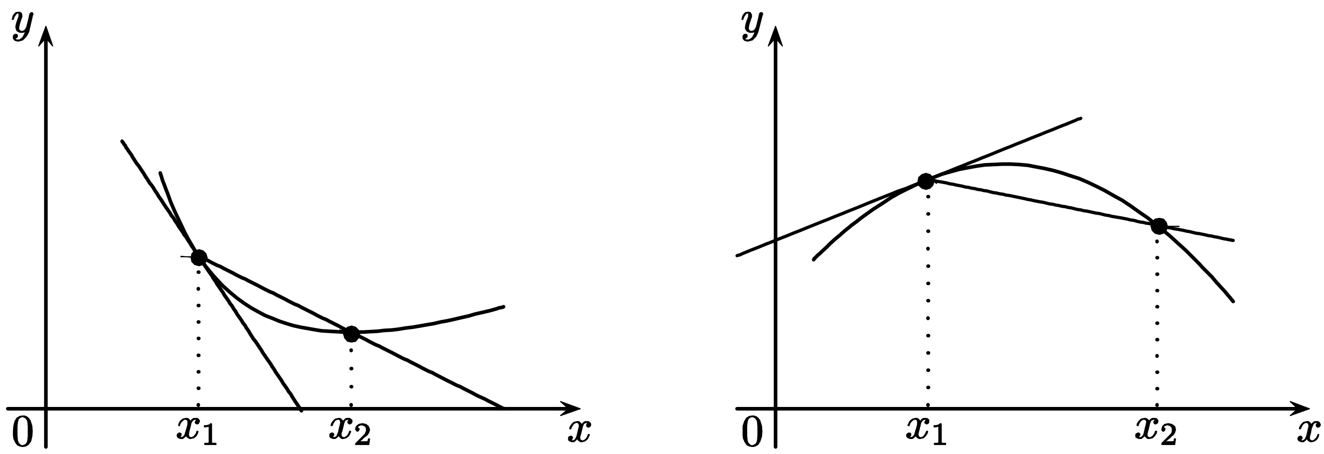
(i) Η συνάρτηση $f'/(\alpha,\beta)$ είναι φθίνουσα.

(ii) Η συνάρτηση f είναι κοίλη.

(iii) $f(x_2)-f(x_1)\leq f'(x_1)(x_2-x_1)$ για κάθε $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$.

Παρατήρηση

Από την τρίτη συνθήκη της πρότασης 10.1 (αντ. 10.2) προκύπτει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας κυρτής (αντ. κοίλης) συνάρτησης f σε κάθε σημείο του (α,β) ευρίσκεται κάτω (αντ. πάνω) από τη γραφική της παράσταση, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Πρόταση 10.3

Αν μια συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη τότε η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι κυρτή (αντ. κοίλη) είναι $f''(x)\geq 0$ (αντ. $f''(x)\leq 0$).

Πρόταση 10.4

Αν μια συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ (αντ. $f''(x)<0$) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε είναι γνήσια κυρτή (αντ. κοίλη).

Το αντίστροφο της πρότασης αυτής δεν ισχύει πάντα. Έτσι, η συνάρτηση $f(x)=x^4/(-1,1)$ είναι γνήσια κυρτή, αλλά $f''(0)=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 58

Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\lambda}<\frac{\alpha^{\lambda}+\beta^{\lambda}}{2}$$

για κάθε $\alpha,\beta>0$ με $\alpha\neq\beta$ και $\lambda>1$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=x^{\lambda}/(0,+\infty).$$

Επειδή $f''(x)=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, έπεται ότι η συνάρτηση $f/(0,+\infty)$ είναι γνήσια κυρτή. Οπότε ισχύει ότι

$$f\big((1-t)x_1+tx_2\big)<(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$

για κάθε $x_1,x_2>0$ και $t\in(0,1)$.

Αν εφαρμοσθεί η προηγούμενη ανισότητα για $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$ και $t=\dfrac{1}{2}$ προκύπτει ότι

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

Άρα,

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\lambda}<\frac{\alpha^{\lambda}+\beta^{\lambda}}{2}.$$

Σημεία καμπής

Έστω μια συνάρτηση f και ξ ένα εσωτερικό σημείο του $D(f)$. Το σημείο $A\left(\xi, f\left(\xi\right)\right)$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f, αν

(i) Η f είναι συνεχής στο ξ.

(ii) Η f είναι κυρτή αριστερά του ξ και κοίλη δεξιά του ξ ή αντίστροφα.

(iii) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Αν το σημείο $A\left(\xi, f\left(\xi\right)\right)$ είναι ένα σημείο καμπής, τότε το ξ ονομάζεται **θέση σημείου καμπής**.

Πρόταση 10.5

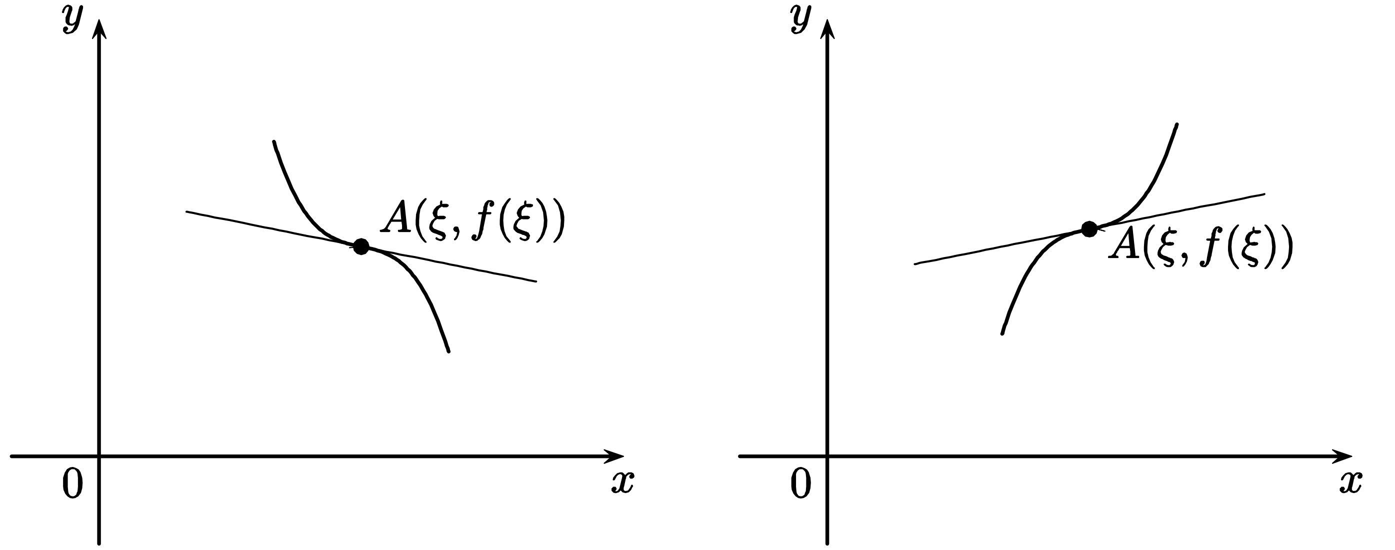
Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in D\left(f\right)$ το οποίο είναι θέση σημείου καμπής, τότε θα είναι $f''\left(\xi\right)=0$.

Η απόδειξη είναι εφαρμογή του θεωρήματος Fermat για την f'. Το αντίστροφο της πρότασης αυτής δεν ισχύει πάντα. Έτσι, για τη συνάρτηση $f\left(x\right)=x^4/\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f''\left(0\right)=0$ ενώ το $\xi=0$ δεν είναι θέση σημείου καμπής.

Παρατηρήσεις

1. Τα σημεία $\xi \in D\left(f\right)$ που είναι θέσεις σημείων καμπής αναζητούνται μεταξύ των σημείων ξ όπου η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''\left(\xi\right)=0$ και των σημείων ξ όπου δεν υπάρχει η $f''\left(\xi\right)$.

2. Αν $A\left(\xi, f(\xi)\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τότε η εφαπτομένη στο σημείο αυτό «διαπερνά» τη γραφική παράσταση της f, όπως φαίνεται στα επόμενα σχήματα:



Παρακάτω, δίδεται μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη σημείων καμπής, με τη βοήθεια της τρίτης παραγώγου.

Πρόταση 10.6

Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο ξ του $D(f)$ με $f''(\xi)=0$ και $f'''(\xi)\neq 0$, τότε το ξ είναι θέση σημείου καμπής.

Πρέπει να τονισθεί ότι η συνθήκη της προηγουμένης πρότασης είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία. Έτσι, για τη συνάρτηση $f(x)=x^5/\mathbb{R}$ ισχύει $f''(0)=f'''(0)=0$, ενώ το 0 είναι θέση σημείου καμπής.

ΑΣΚΗΣΗ 59(δ)

Να ευρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^4-2x^3, & \text{αν } x\geq 0 \\ x^3+3x^2, & \text{αν } x<0 \end{cases}$$

είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορισθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, ελέγχεται η παραγωγισιμότητα της φ στο 0. Είναι

$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4-2x^3}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(x^3-2x^2\right)=0$$

και

$$\varphi'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+3x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+3x\right)=0$$

Επειδή $\varphi'_+(0)=\varphi'_-(0)=0$, η φ είναι παραγωγίσιμη στο 0. Προφανώς, επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi'(x)=\begin{cases} 4x^3-6x^2, & \text{αν } x\geq 0 \\ 3x^2+6x, & \text{αν } x<0. \end{cases}$$

Η συνάρτηση φ' είναι συνεχής στο 0 αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0^-}\varphi'(x)=\varphi'(0)=0,$$

αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0 αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-6x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(4x^2+6x\right)=0,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2+6x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(3x+6)=6.$$

Αντίθετα, η συνάρτηση φ' παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}^*$ με

$$\varphi''(x)=\begin{cases}12x(x-1), & \text{αν } x>0\\ 6(x+1), & \text{αν } x<0.\end{cases}$$

Επειδη $\varphi''(x)=0$ αν και μόνο αν $x=-1$ ή $x=1$, έπεται ότι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής είναι τα $-1,1$ (όπου μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος) και το 0 (όπου δεν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος).

Επειδή

$$\varphi''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$$

και

$$\varphi''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,1),$$

έπεται ότι η συνάρτηση θα είναι γνήσια κυρτή στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(1,+\infty)$, και γνήσια κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(0,1)$. Τέλος, τα σημεία $(-1,2)$, $(1,-1)$ και $(0,0)$ είναι τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της φ.

11. ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη μελέτη και τη χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

1. Προσδιορισμός του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.
2. Εξέταση της συνέχειας της f.
3. Προσδιορισμός των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
4. Εύρεση ασύμπτωτων (αν υπάρχουν).
5. Υπολογισμός των δύο πρώτων παραγώγων της συνάρτησης.
6. Προσδιορισμός των ακρότατων και σημείων καμπής με τη βοήθεια των f', f'' αντίστοιχα.
7. Κατασκευή του **πίνακα μεταβολών** που περιέχει τη μεταβολή του πρόσημου των συναρτήσεων f', f'' και f, απ' όπου προκύπτει η μονοτονία, η κυρτότητα και θέση της γραφικής παράστασης της f στο επίπεδο.
8. Χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι πολλές φορές είναι χρήσιμος ο έλεγχος ειδικών ιδιοτήτων της συνάρτησης (όπως αν η συνάρτηση είναι άρτια, περιττή ή περιοδική) απ' όπου προκύπτουν σημαντικές πληροφορίες για τη γραφική της παράσταση.

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{(x-1)^2}$ είναι:

1.**Πεδίο ορισμού**

Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2.**Συνέχεια**

Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, ως ρητή.

3.**Σημεία τομής με τους άξονες**

Επειδή $f(0)=-8$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0,-8)$. Επειδή $f(x)=0\Leftrightarrow x=2$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(2,0)$.

4.**Εύρεση ασύμπτωτων**

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$, προκύπτει ότι η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Για ασύμπτωτες της μορφής $y=\alpha x+\beta$ έχουμε ότι

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^3}{x(x-1)^2}=1$$

και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2+11x-8}{(x-1)^2}=-4$$

.

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει όταν $x \to -\infty$.

Άρα η ευθεία $y = x - 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

5. **Υπολογισμός παραγώγων**

Είναι $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-1)^3}$ και $f''(x) = \dfrac{6(x-2)}{(x-1)^4}$.

6. **Ακρότατα και σημεία καμπής**

Επειδή $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$, τα ακρότατα της συνάρτησης θα αναζητηθούν στα $x = -1$ και $x = 2$.

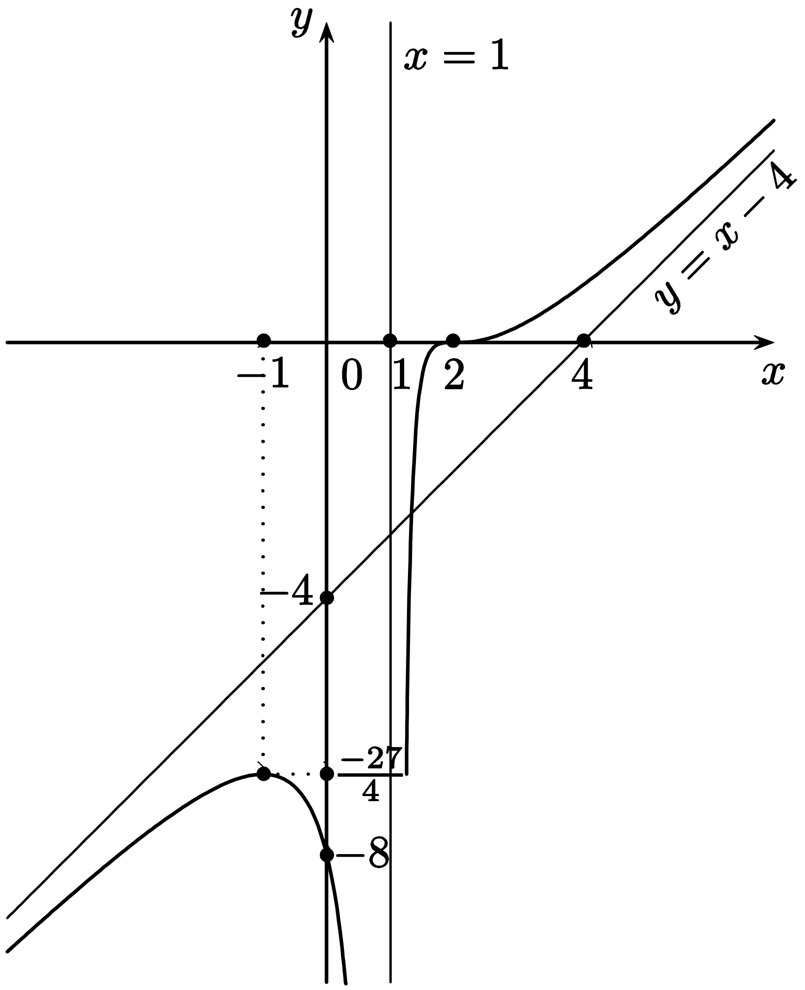
Επειδή $f''(-1) = -\dfrac{9}{8} < 0$, προκύπτει ότι το σημείο $\left(-1, -\dfrac{27}{4}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης.

Αντίθετα, επειδή $f''(2) = 0$ πρέπει να εξετασθεί η τρίτη παράγωγος. Είναι $f'''(x) = \dfrac{-18x + 42}{(x-1)^5}$, οπότε $f'''(2) = 6 \neq 0$ και επομένως το σημείο $(2,0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

7. Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	‖	$-$		$+$	
		↗		↘	‖	↗		↗	
			τ.μ.				σ.κ.		

8. Χάραξη της γραφικής παράστασης



ΑΣΚΗΣΗ 57

Να εγγραφεί σε κώνο ύψους h και ακτίνας βάσης r κύλινδρος, με τον άξονα του κυλίνδρου να ταυτίζεται με αυτόν του κώνου, ώστε ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μέγιστος.

ΛΥΣΗ

Αν x είναι το ύψος του κυλίνδρου και ρ η ακτίνα βάσης του, από τα όμοια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΖ (βλ. επόμενο σχήμα) προκύπτει ότι

$$\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΓΔ}}$$

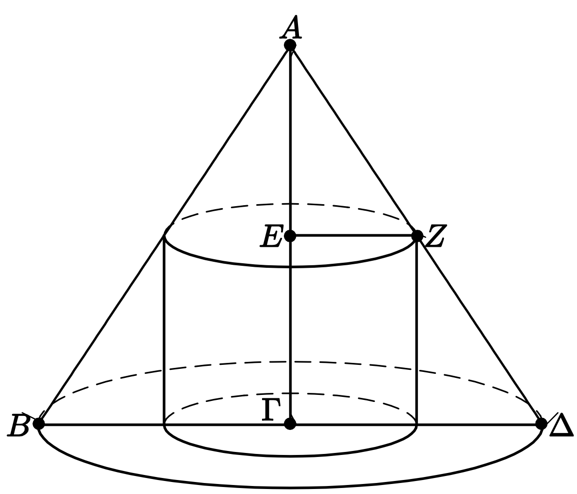
$$\frac{h-x}{h} = \frac{\rho}{r},$$

οπότε θα είναι

$$\rho = r\left(1-\frac{x}{h}\right) \quad (1)$$

Αν V είναι ο όγκος του κυλίνδρου, τότε με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει ότι

$$V = \pi\rho^2 x = \pi r^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 x,$$



οπότε θα είναι

$$\frac{dV}{dx} = \pi r^2 \left(2\left(1-\frac{x}{h}\right)\left(-\frac{1}{h}\right)x + \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 \right)$$

$$= \pi r^2 \left(1-\frac{x}{h}\right)\left(1-\frac{3x}{h}\right)$$

(2)

και

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \pi r^2 \left(\left(-\frac{1}{h}\right)\left(1-\frac{3x}{h}\right) + \left(-\frac{3}{h}\right)\left(1-\frac{x}{h}\right) \right)$$

$$= -\frac{\pi r^2}{h}\left(4-\frac{6x}{h}\right)$$

(3)

Από τη σχέση (2) και επειδή $x < h$, προκύπτει ότι

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}.$$

Επιπλέον, από τη σχέση (3) για $x = \frac{h}{3}$ θα είναι

$$\frac{d^2V}{dx^2}\left(\frac{h}{3}\right) = -\frac{2\pi r^2}{h} < 0.$$

Άρα η συνάρτηση του όγκου παρουσιάζει μέγιστο όταν $x = \frac{h}{3}$ οπότε από τη σχέση (1) θα είναι $\rho = \frac{2}{3}r$ και επομένως ο ζητούμενος κύλινδρος μέγιστου όγκου θα έχει ύψος $\frac{h}{3}$ και ακτίνα βάσης $\frac{2}{3}r$.

ΑΣΚΗΣΗ 59 (α, β, γ)

Να ευρεθούν τα διαστήματα στα οποία οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορισθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων:

α) $f(x)=x^4-2x^3+15x+4/\mathbb{R}$,

β) $g(x)=\ln(1+x^2)/\mathbb{R}$,

γ) $h(x)=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}\ /\ \mathbb{R}^*$

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$f'(x)=4x^3-6x^2+15 \text{ και } f''(x)=12x(x-1).$$

Επειδή

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1,$$
$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

και

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,1),$$

έπεται ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(1,+\infty)$, και γνήσια κοίλη στο διάστημα $(0,1)$. Τα σημεία καμπής είναι τα $(0,f(0))=(0,4)$ και $(1,f(1))=(1,18)$.

β) $g(x)=\ln(1+x^2)/\mathbb{R}$. Είναι

$$g'(x)=\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2} \text{ και } g''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Επειδή

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1,$$
$$g''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$$

και

$$g''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),$$

έπεται ότι η συνάρτηση g είναι γνήσια κυρτή στο διάστημα $(-1,1)$ και γνήσια κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$. Τα σημεία καμπής είναι τα $(-1,g(-1))=(-1,\ln 2)$ και $(1,g(1))=(1,\ln 2)$.

γ) $h(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$ / $\mathbb{R}^*$. Είναι

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)'e^{-\frac{1}{x^2}}=x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

και

$$h''(x)=\left(x^{-3}\right)'e^{-\frac{1}{x^2}}+x^{-3}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=-3x^{-4}e^{-\frac{1}{x^2}}+2x^{-6}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-3x^{-6}e^{-\frac{1}{x^2}}\left(x^2-\frac{2}{3}\right).$$

Επειδή

$$h''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2/3} \text{ ή } x=\sqrt{2/3},$$

$$h''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{2/3},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2/3}\right)$$

και

$$h''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{2/3}\right)\cup\left(\sqrt{2/3},+\infty\right),$$

έπεται ότι η συνάρτηση h είναι γνήσια κυρτή στα διαστήματα $\left(-\sqrt{2/3},0\right)$ και $\left(0,\sqrt{2/3}\right)$ και γνήσια κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{2/3}\right)$ και $\left(\sqrt{2/3},+\infty\right)$.

Τα σημεία καμπής είναι τα $\left(-\sqrt{2/3},h\left(-\sqrt{2/3}\right)\right)=\left(-\sqrt{2/3},\frac{1}{2}e^{-3/2}\right)$ και $\left(\sqrt{2/3},h\left(\sqrt{2/3}\right)\right)=\left(\sqrt{2/3},\frac{1}{2}e^{-3/2}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 60

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

α) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{2x-1}$, β) $f(x)=x^2e^x$.

ΛΥΣΗ

α) 1. **Πεδίο ορισμού**

Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

2. **Συνέχεια**

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ ως ρητή.

3. **Σημεία τομής με τους άξονες**

Επειδή $f(0)=-1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0,-1)$.

Επειδή η διακρίνουσα της εξίσωσης $2x^2+x+1=0$ είναι αρνητική, η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν τέμνει τον άξονα των τετμημένων.

4. **Εύρεση ασύμπτωτων**

Επειδή

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty,$$

προκύπτει ότι η ευθεία $x = \dfrac{1}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Για ασύμπτωτες της μορφής $y = \alpha x + \beta$ έχουμε:

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{(2x-1)x} = 1$$

και

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \alpha x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2 + x + 1}{2x-1} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{2x-1} = 1.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει όταν $x \to -\infty$.

Άρα η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

5. Υπολογισμός παραγώγων

Είναι

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(2x-3)}{(2x-1)^2}$$

και

$$f''(x) = \frac{16}{(2x-1)^3}.$$

6. Ακρότατα και σημεία καμπής

Επειδή $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ή $x = \frac{3}{2}$, προκύπτει ότι τα ακρότατα της συνάρτησης θα αναζητηθούν όταν $x = -\frac{1}{2}$ ή $x = \frac{3}{2}$.

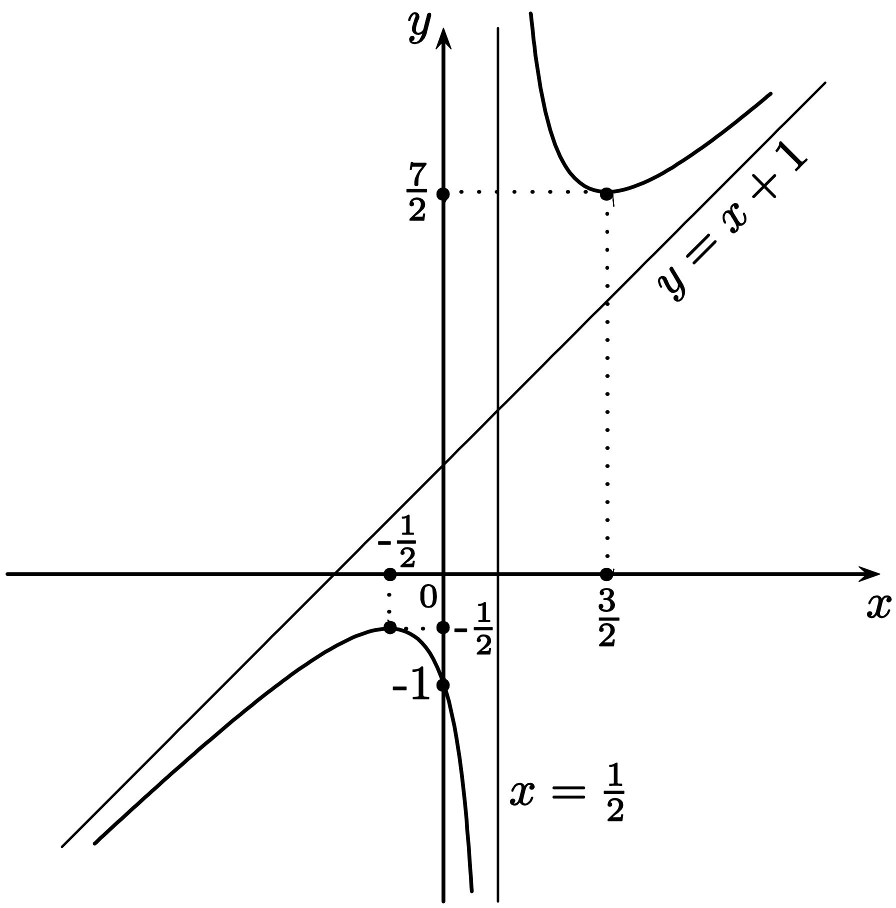
Επειδή $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$ και $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 2 > 0$, προκύπτει ότι το $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ είναι σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το σημείο $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ είναι σημείο τοπικού ελάχιστου.

Τέλος, επειδή η f'' δεν μηδενίζεται, δεν θα υπάρχουν σημεία καμπής.

7. Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
		↗		↘	‖	↘		↗	
			τ.μ.				τ.ε.		

8. Χάραξη της γραφικής παράστασης



β) 1. **Πεδίο ορισμού**

Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. **Συνέχεια**

Η συνάρτηση είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

3. **Σημεία τομής με τους άξονες**

Επειδή $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων και δεν υπάρχει άλλο σημείο της κοινό με τους άξονες.

4. **Εύρεση ασύμπτωτων**

Η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για τις ασύμπτωτες της μορφής $y=\alpha x+\beta$ έχουμε:

$$\alpha = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x'}{\left(e^{-x}\right)'} = -\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

και

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-0x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}$$

$$= -2\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.$$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

Επειδή η τιμή του α είναι $+\infty$ όταν $x\to+\infty$ προκύπτει ότι δεν υπάρχει ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

5. **Υπολογισμός παραγώγων**

Είναι
$$f'(x) = x(x+2)e^x$$
και
$$f''(x) = \left(x^2 + 4x + 2\right)e^x .$$

6. **Ακρότατα και σημεία καμπής**

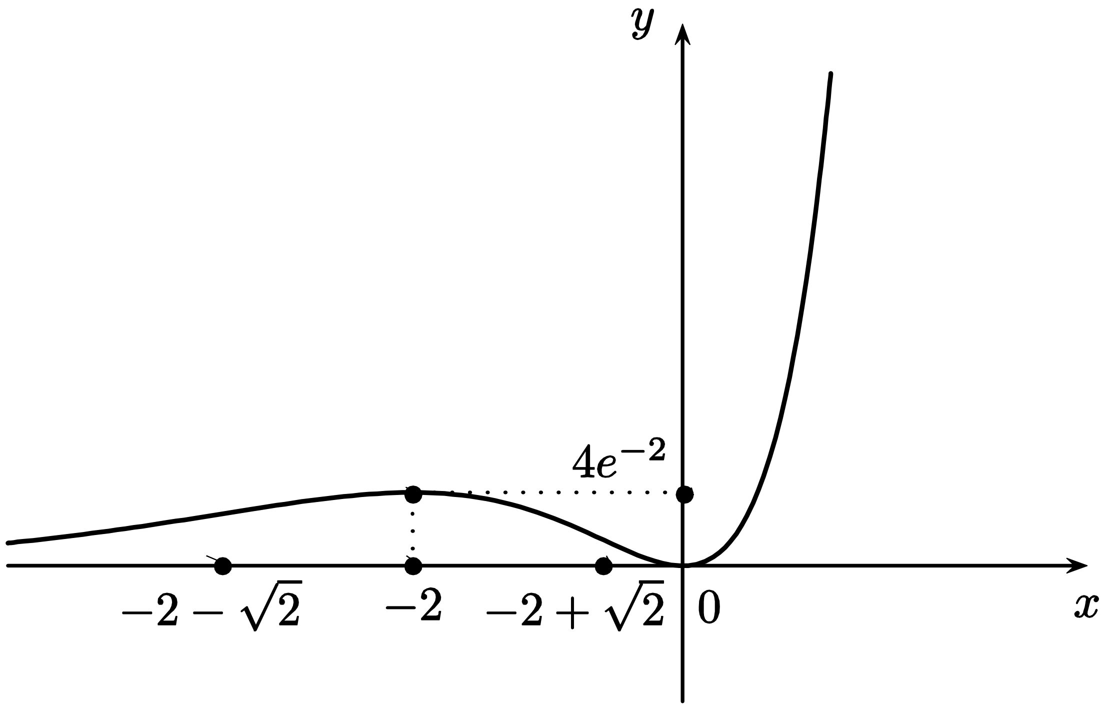
Επειδή $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$, προκύπτει ότι τα ακρότατα της συνάρτησης θα αναζητηθούν όταν $x = -2$ ή $x = 0$. Επειδή $f''(-2) = -2e^{-2} < 0$ και $f''(0) = 2 > 0$, προκύπτει ότι το σημείο $\left(-2, 4e^{-2}\right)$ είναι σημείο τοπικού μέγιστου ενώ το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο τοπικού ελάχιστου.

Επειδή $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2-\sqrt{2}$ ή $x = -2+\sqrt{2}$, προκύπτει ότι τα σημεία καμπής θα αναζητηθούν όταν $x = -2-\sqrt{2}$ ή $x = -2+\sqrt{2}$. Επειδή
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$$
και
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right),$$
προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνήσια κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right)$ και $\left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$ ενώ είναι γνήσια κοίλη στο διάστημα $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$, οπότε τα σημεία
$$\left(-2-\sqrt{2}, \left(6+4\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}\right) \text{ και } \left(-2+\sqrt{2}, \left(6-4\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\right)$$
είναι σημεία καμπής.

7. Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
		↗		↗		↘		↘		↗	
			$\sigma.\kappa.$		τ.μ.		$\sigma.\kappa.$		τ.ε.		

8. Χάραξη της γραφικής παράστασης



ΔΙΑΛΕΞΗ 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Θεώρημα Taylor
Σειρές Taylor

12. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ TAYLOR

Δίδεται μια συνάρτηση f, ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f και ένας φυσικός αριθμός n. Στην παράγραφο αυτή μελετάται το πρόβλημα προσέγγισης των τιμών της συνάρτησης $f(x)$ για x «κοντά στο x_0», από τις τιμές ενός πολυωνύμου βαθμού n.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο p_n βαθμού n με $f^{(\kappa)}(x_0) = p_n^{(\kappa)}(x_0)$, για κάθε $\kappa = 0,1,\ldots,n$. Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται **πολυώνυμο του Taylor** και έχει τύπο

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{(\kappa)}(x_0)}{\kappa!}(x-x_0)^\kappa.$$

Η διαφορά

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

ονομάζεται **συνάρτηση υπόλοιπο**.

Στο ακόλουθο θεώρημα δίδεται ο **τύπος του Taylor** ο οποίος μας δίδει διάφορους τρόπους υπολογισμού της συνάρτησης υπόλοιπο.

Θεώρημα 12.1 (Taylor)

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **έχει παραγώγους** $f',f'',\ldots,f^{(n)}/[\alpha,\beta]$ **συνεχείς, καθώς και παράγωγο** $f^{(n+1)}/(\alpha,\beta)$**, τότε για κάθε** $\nu\in[n+1]$ **υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο** $\xi\in(\alpha,\beta)$ **με**

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\cdots+$$

$$+\frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^\nu(\beta-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu\cdot n!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Παρατηρήσεις

1. Το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Taylor για $n=0$.

   Πράγματι, για n = 0 προκύπτει ότι ν = 1 και

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^1(\beta-\xi)^{0-1+1}}{1\cdot 0!}f^{(0+1)}(\xi)$$

$$=f(\alpha)+(\beta-\alpha)f'(\xi)$$

   Άρα, $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

2. Αποδεικνύεται ότι ο τύπος του Taylor ισχύει και όταν εναλλάξουμε τα α, β σ' αυτόν, δηλαδή ισχύει ότι

$$f(\alpha)=f(\beta)+\frac{\alpha-\beta}{1!}f'(\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^2}{2!}f''(\beta)+\cdots+$$

$$+\frac{(\alpha-\beta)^n}{n!}f^{(n)}(\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^\nu(\alpha-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu\cdot n!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(a+b-x)\,/\,[\alpha,\beta],$$

τότε ισχύει ότι

$$g^{(k)}(x)=(-1)^k f^{(k)}(a+b-x),\quad \text{για κάθε}\,[\alpha,\beta].$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Taylor για τη συνάρτηση αυτή, προκύπτει ότι υπάρχει $z\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f(a)=g(\beta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\beta-\alpha)^k}{k!}g^{(k)}(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^\nu(\beta-z)^{n-\nu+1}}{\nu\cdot n!}g^{(n+1)}(z)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\beta-\alpha)^k}{k!}(-1)^k f^{(k)}(\beta)+\frac{(\beta-\alpha)^\nu(\beta-z)^{n-\nu+1}(-1)^{n+1}}{\nu\cdot n!}f^{(n+1)}(a+\beta-z)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha-\beta)^k}{k!}f^{(k)}(\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^\nu(z-\beta)^{n-\nu+1}}{\nu\cdot n!}f^{(n+1)}(\alpha+\beta-z)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha-\beta)^k}{k!}f^{(k)}(\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^\nu(a-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu\cdot n!}f^{(n+1)}(\xi)$$

όπου $\xi=\alpha+\beta-z\in(\alpha,\beta)$.

ΑΣΚΗΣΗ 61

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Taylor:

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ *έχει παραγώγους* $f', f'', \ldots, f^{(n)}/[\alpha,\beta]$ *συνεχείς, καθώς και παράγωγο* $f^{(n+1)}/(\alpha,\beta)$*, τότε για κάθε* $\nu\in[n+1]$ *υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *με*

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\cdots+$$

$$+\frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^\nu(\beta-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu\cdot n!}f^{(n+1)}(\xi).$$

ΛΥΣΗ

Έστω Μ ο αριθμός που ορίζεται από τη σχέση

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\cdots+$$

$$\frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)+(\beta-\alpha)^\nu M \qquad (1)$$

και η συνάρτηση $F/[\alpha,\beta]$ με

$$F(x)=f(x)+\frac{(\beta-x)}{1!}f'(x)+\frac{(\beta-x)^2}{2!}f''(x)+\cdots+$$

$$\frac{(\beta-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)+(\beta-x)^\nu M.$$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\beta\right)$, με

$$F\ '(x)=f'(x)-f'(x)+\left(\beta-x\right)f''(x)-\left(\beta-x\right)f''(x)+$$

$$+\frac{\left(\beta-x\right)^2}{2!}f^{(3)}(x)-\frac{\left(\beta-x\right)^2}{2!}f^{(3)}(x)$$

$$+\cdots+\frac{\left(\beta-x\right)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)-\frac{\left(\beta-x\right)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)$$

$$+\frac{\left(\beta-x\right)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-\nu\left(\beta-x\right)^{\nu-1}M$$

$$=\frac{\left(\beta-x\right)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-\nu\left(\beta-x\right)^{\nu-1}M,$$

Επιπλέον, επειδή $F\left(\alpha\right)=F\left(\beta\right)=f\left(\beta\right)$, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $F'\left(\xi\right)=0$. Επομένως,

$$\frac{\left(\beta-\xi\right)^n}{n!}f^{(n+1)}\left(\xi\right)-\nu\left(\beta-\xi\right)^{\nu-1}M=0$$

και άρα

$$M=\frac{\left(\beta-\xi\right)^{n-\nu+1}}{\nu\cdot n!}f^{(n+1)}\left(\xi\right) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έπεται ο τύπος του Taylor:

$$f\left(\beta\right)=f\left(\alpha\right)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'\left(\alpha\right)+\frac{\left(\beta-\alpha\right)^2}{2!}f''\left(\alpha\right)+\cdots+$$

$$\frac{\left(\beta-\alpha\right)^n}{n!}f^{(n)}\left(\alpha\right)+\frac{\left(\beta-\alpha\right)^{\nu}\left(\beta-\xi\right)^{n-\nu+1}}{\nu\cdot n!}f^{(n+1)}\left(\xi\right).$$

Πολυωνυμική προσέγγιση

Όπως έχει ήδη λεχθεί, ισχύει ότι

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x),$$

όπου $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ είναι το πολυώνυμο Taylor και $R_n(x)$ είναι το υπόλοιπο Taylor.

Αν $x, x_0 \in [\alpha, \beta]$ με $x \neq x_0$, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Taylor για τον περιορισμό της συνάρτησης f στο διάστημα με άκρα τα x, x_0, προκύπτει ότι

$$f(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{(\kappa)}(x_0)}{\kappa!}(x - x_0)^\kappa + \frac{(x - x_0)^\nu (x - \xi)^{n-\nu+1}}{\nu \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$= p_n(x) + \frac{(x - x_0)^\nu (x - \xi)^{n-\nu+1}}{\nu \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

όπου το σημείο ξ ευρίσκεται μεταξύ των x, x_0.

Κατόπιν τούτων, η συνάρτηση υπόλοιπο δίδεται από τη σχέση

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^\nu (x - \xi)^{n-\nu+1}}{\nu \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

και παίρνει διάφορες μορφές για τις τιμές του $\nu \in [n+1]$.

Οι κυριότερες από τις μορφές της συνάρτησης $R_n(x)$ είναι οι εξής:

1.Αν $\nu = n+1$, τότε

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Στην περίπτωση αυτή ονομάζεται **υπόλοιπο Lagrange**.

2.Αν $\nu = 1$, τότε

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Στην περίπτωση αυτή ονομάζεται **υπόλοιπο Cauchy**.

Οπότε, από τη σχέση $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, τότε $f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$, δηλαδή η συνάρτηση f προσεγγίζεται από πολυώνυμα Taylor. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση εκφράζεται από μια σειρά Taylor.

Σειρές Taylor

Αν για μια συνάρτηση f και ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της υπάρχουν οι παράγωγοι $f^{(n)}(x_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ονομάζεται **σειρά Taylor** της συνάρτησης f γύρω από το σημείο x_0.

Ειδικά αν $x_0 = 0$, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ονομάζεται **σειρά Maclaurin**.

Μια συνάρτηση f **αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από το** x_0 αν υπάρχει περιοχή $\pi(x_0) \subseteq D(f)$ με

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

για κάθε $x \in \pi(x_0)$.

Ειδικά αν $x_0 = 0$, η συνάρτηση **αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin** αν υπάρχει περιοχή $\pi(0) \subseteq D(f)$ με

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

για κάθε $x \in \pi(0)$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι μια συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Taylor (ή Maclaurin) αν και μόνο αν $R_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \pi(x_0)$.

Βασικές σειρές Maclaurin

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, για κάθε $x \in (-1,1]$.

5. $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$, όπου $m \in \mathbb{R}^*$, για κάθε $x \in (-1,1)$.

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$ ονομάζεται **διωνυμική σειρά m-τάξης** και έχει πολλές εφαρμογές. Έτσι, αν εφαρμοσθεί ο τύπος 5 για $x=\dfrac{\alpha}{\beta}$ προκύπτει ο τύπος

$$(\alpha+\beta)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}\alpha^n\beta^{m-n}.$$

ο οποίος αποτελεί μια γενίκευση του διώνυμου του Νεύτωνα.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι η γεωμετρική σειρά είναι ειδική περίπτωση της διωνυμικής, αφού

$$\binom{-1}{n}=\frac{(-1)(-2)\cdots(-1-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^n n!}{n!}=(-1)^n$$

και για $m=-1$, και $-x$ αντί x, ο τύπος 5 δίδει

$$\frac{1}{1-x}=(1+(-x))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(-x)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

ΑΣΚΗΣΗ 62

Να αποδειχθούν οι τύποι:

(i) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (ii) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

(i) Θα αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = e^x / \mathbb{R}$.

Επειδή $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας το υπόλοιπο Lagrange προκύπτει ότι

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi},$$

όπου το ξ ευρίσκεται μεταξύ των x και 0.

Η ακολουθία $\left(R_n(x)\right)$ είναι μηδενική, αφού

$$\left| \frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} e^{\xi}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}} \right| = \frac{|x|}{n+2}$$

και επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1.$$

Άρα,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Θα αναπτυχθεί σε σειρά η συνάρτηση $f(x) = \sin x / \mathbb{R}$.
Επειδή

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

χρησιμοποιώντας το υπόλοιπο Lagrange προκύπτει ότι

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\xi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

όπου το ξ ευρίσκεται μεταξύ των x και 0.
Η ακολουθία $\left(R_n(x)\right)$ είναι μηδενική, αφού

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ και } \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Άρα,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

αφού

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 2\kappa \\ (-1)^{\kappa}, & \text{αν } n = 2\kappa + 1. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 66

Να ευρεθεί η σειρά Taylor των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sin x$, γύρω από το σημείο $x_0=\pi$,

β) $g(x)=\ln x$, γύρω από το σημείο $x_0=e^2$,

γ) $h(x)=\dfrac{1}{(2x-3)^3}$, γύρω από το σημείο $x_0=2$.

ΛΥΣΗ

α) Αν τεθεί $y=x-\pi$, τότε είναι

$$f(x)=\sin x=\sin(y+\pi)=-\sin y$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

β) Αν τεθεί $y=x-e^2$, τότε είναι

$$g(x)=\ln x=\ln\left(e^2+y\right)=\ln\left(e^2\left(1+\frac{y}{e^2}\right)\right)=\ln e^2+\ln\left(1+\frac{y}{e^2}\right)$$

$$=2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(y/e^2\right)^n}{n}=2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(x-e^2\right)^n}{ne^{2n}}.$$

γ) Αν τεθεί $y=x-2$, τότε είναι

$$h(x)=\frac{1}{(2x-3)^3}=(2(y+2)-3)^{-3}=(1+2y)^{-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(2y)^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)!}{n!}2^n y^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)2^n(x-2)^n.$$

ΑΣΚΗΣΗ 67

Να ευρεθεί, με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου Taylor, μια κατά προσέγγιση τιμή του αριθμού $\ln(1.05)$ με ακρίβεια 10^{-6}.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $f(x)=\ln(1+x)/(-1,1)$, τότε είναι

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

για κάθε $x\in(-1,1)$ και $n\in\mathbb{N}^*$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange για τη συνάρτηση $f/(-1,1)$, προκύπτει ότι

$$\ln(1+x)=p_n(x)+R_n(x)$$

όπου

$$p_n(x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{f^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}x^\kappa=\sum_{\kappa=1}^{n}(-1)^{\kappa-1}\frac{(\kappa-1)!}{\kappa!}x^\kappa=\sum_{\kappa=1}^{n}(-1)^{\kappa-1}\frac{x^\kappa}{\kappa}$$

και

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^n \frac{n!x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}},$$

όπου το ξ ευρίσκεται μεταξύ των x και 0.

Για να ευρεθεί μια κατά προσέγγιση τιμή του $\ln(1.05)$ θέτουμε $x = 0.05$, οπότε $0 < \xi < 0.05$.

Κατόπιν τούτου, είναι $\left|R_n(0.05)\right| < \dfrac{(0.05)^{n+1}}{n+1}$.

Για να επιτύχουμε ακρίβεια 10^{-6}, πρέπει να ευρεθεί ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}^*$ με

$$\frac{(0.05)^{n+1}}{n+1} < 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 2^{2n-4} 5^{n-5},$$

από όπου προκύπτει ότι $n = 4$.

Άρα θα χρησιμοποιηθεί το πολυώνυμο p_4 δηλαδή

$$\ln(1.05) \simeq 0.05 - \frac{0.05^2}{2} + \frac{0.05^3}{3} - \frac{0.05^4}{4}$$

$$\simeq 0.048790.$$