ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:
Βασικές έννοιες
Κριτήρια ολοκληρωσιμότητας
Ιδιότητες ολοκληρωσιμότητας

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Διαμέριση ενός κλειστού διαστήματος $\left[\alpha,\beta\right]\subseteq\mathbb{R}$ ονομάζεται κάθε πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο $\delta=\left(x_i\right), i=0,1,...,n$ σημείων του $\left[\alpha,\beta\right]$ τέτοιο ώστε

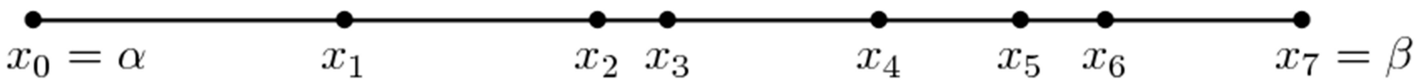
$$\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=\beta.$$

Το σύνολο των διαμερίσεων του διαστήματος $\left[\alpha,\beta\right]$ σημειώνεται με $\Delta\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)$.

Λεπτότητα της διαμέρισης $\delta=\left(x_i\right),\quad i=0,1,...,n$ ονομάζεται ο αριθμός

$$\lambda(\delta)=\max\left\{x_i-x_{i-1}:i\in[n]\right\}.$$

Μια διαμέριση $\delta\in\Delta\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)$ ονομάζεται **λεπτότερη** μιας διαμέρισης $\delta'\in\Delta\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)$ όταν $\delta'\subseteq\delta$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι $\lambda(\delta)\leq\lambda(\delta')$.



Για παράδειγμα, η διαμέριση $\delta=(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$ του παραπάνω σχήματος είναι λεπτότερη της $\delta'=(x_0,x_1,x_3,x_5,x_6,x_7)$ Προφανώς, $\lambda(\delta)=x_1-x_0<\lambda(\delta')=x_5-x_3$.

Έστω $f/[\alpha,\beta]$ μια φραγμένη συνάρτηση και $\delta \in \Delta([\alpha,\beta])$ με $\delta = (x_i), \quad i = 0,1,...,n$. Τότε ορίζουμε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ για $i \in [n]$ και

$$M_i(f) = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$m_i(f) = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Τα αθροίσματα

$$U(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i \text{ και } L(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i$$

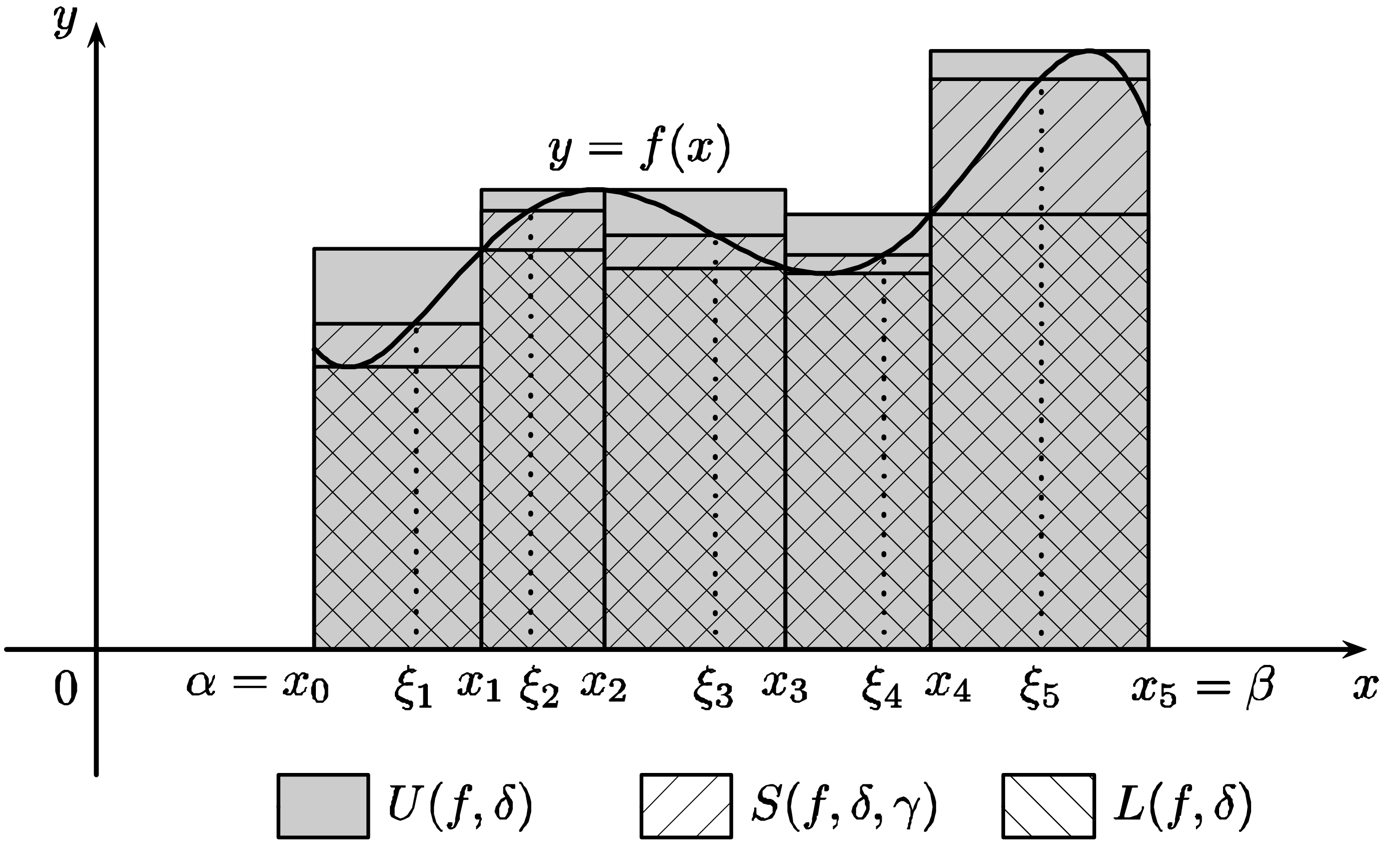
ονομάζονται αντίστοιχα **άνω** και **κάτω άθροισμα** της συνάρτησης f για τη διαμέριση δ.

Αν $\gamma = (\xi_i), \; i \in [n]$ είναι μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της διαμέρισης $\delta = (x_i), i = 0,1,...,n$, δηλαδή $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i \in [n]$, τότε το άθροισμα

$$S(f,\delta,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ονομάζεται **ενδιάμεσο άθροισμα** της συνάρτησης f για τη διαμέριση δ και την επιλογή γ.

Γεωμετρικά, για $f \geq 0$ τα $U(f,\delta)$, $L(f,\delta)$και $S(f,\delta,\gamma)$ είναι αθροίσματα από εμβαδά ορθογωνίων, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Ιδιότητες των αθροισμάτων

1. $m(\beta-\alpha)\leq L(f,\delta)\leq S(f,\delta,\gamma)\leq U(f,\delta)\leq M(\beta-\alpha)$, όπου
$$M=\sup\{f(x):x\in[\alpha,\beta]\}\text{και}$$
$$m=\inf\{f(x):x\in[\alpha,\beta]\}.$$

2. $L(-f,\delta)=-U(f,\delta)$ και $U(-f,\delta)=-L(f,\delta)$.

3. $L(f,\delta')\leq L(f,\delta)$ και $U(f,\delta')\geq U(f,\delta)$, αν η δ είναι λεπτότερη της δ'.

4. $L(f,\delta_1)\leq U(f,\delta_2)$, για κάθε $\delta_{1,}\delta_2\in\Delta([\alpha,\beta])$.

Παρατηρήσεις

1. Η ιδιότητα 3 αποδεικνύεται με επαγωγή ως προς το πλήθος ν των στοιχείων της δ που δεν περιέχονται στην δ′ (βλ. λυμένη άσκηση 1).
2. Η ιδιότητα 4 αποδεικνύεται δια εφαρμογής της ιδιότητας 3 δύο φορές, για τις $\delta_1,\delta_1\cup\delta_2$ και $\delta_2,\delta_1\cup\delta_2$.

Αν $f/[\alpha,\beta]$ μια φραγμένη συνάρτηση, οι αριθμοί

$$U(f)=\inf\left\{U(f,\delta):\delta\in\Delta\left([\alpha,\beta]\right)\right\}$$

και

$$L(f)=\sup\left\{L(f,\delta):\delta\in\Delta\left([\alpha,\beta]\right)\right\}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **άνω** και **κάτω ολοκλήρωμα** της f. Από τις ιδιότητες 1 και 4 του άνω και του κάτω αθροίσματος προκύπτει ότι

$$m(\beta-\alpha)\leq L(f)\leq U(f)\leq M(\beta-\alpha).$$

Αν $L(f)=U(f)$, τότε η συνάρτηση ονομάζεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemann** (ή απλά **ολοκληρώσιμη**), η δε κοινή αυτή τιμή ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα κατά Riemann** (ή απλά **ορισμένο ολοκλήρωμα**) της συνάρτησης στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και σημειώνεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Οι αριθμοί α, β ονομάζονται **άκρα του ορισμένου ολοκληρώματος**. Το σύμβολο του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται και όταν $\beta\leq\alpha$, ως εξής:

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx=0$$

και

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=-\int_\beta^\alpha f(x)\,dx,\ \text{όταν β < α}.$$

Παραδείγματα

1. Αν $f(x) = c / [\alpha, \beta]$ είναι μια σταθερή συνάρτηση, τότε είναι

$$U(f, \delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f) \Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(\beta - \alpha)$$

και

$$L(f, \delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f) \Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(\beta - \alpha)$$

για κάθε $\delta \in \Delta([\alpha, \beta])$, οπότε ισχύει ότι

$$U(f) = c(\beta - \alpha) = L(f)$$

και επομένως, η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη με

$$\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha).$$

2. Η συνάρτηση του Dirichlet $f\,/\,[0,1]$, με

$$f(x)=\begin{cases}1, & \alpha\nu\; x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \alpha\nu\; x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη αφού

$$U(f,\delta)=\sum_{i=1}^{n}M_i(f)\Delta x_i \overset{1}{=} \sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=1$$

και

$$L(f,\delta)=\sum_{i=1}^{n}m_i(f)\Delta x_i \overset{2}{=} \sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0$$

για κάθε $\delta\in\Delta\big([0,1]\big)$, οπότε

$$L(f)=0\neq 1=U(f).$$

[1] Αφού κάθε διάστημα περιέχει τουλάχιστον ένα ρητό αριθμό.
[2] Αφού κάθε διάστημα περιέχει τουλάχιστον ένα άρρητο αριθμό.

Βασική διαμέριση διαστήματος

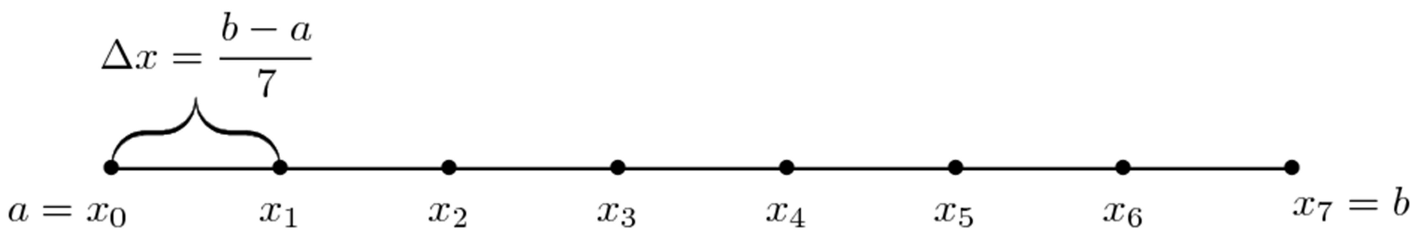
Σε πολλές περιπτώσεις, χρησιμοποιείται η διαμέριση

$$\delta_n = \left(x_i^{\,n}\right), i = 0,1,2,\ldots,n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

που προκύπτει διαμερίζοντας ένα διάστημα $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα $\left[x_{i-1}^{\,n}, x_i^{\,n}\right]$. Στην περίπτωση αυτή, τα διαστήματα που προκύπτουν έχουν μήκος $\dfrac{b-a}{n}$, δηλαδή τα άκρα τους δίνονται από τον τύπο

$$x_i^{\,n} = a + i\frac{b-a}{n}, \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα για $n = 7$



3. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x-4/[1,3]$ είναι ολοκληρώσιμη και να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμά της.

Θεωρούμε $n\in\mathbb{N}^*$ και διαμερίζουμε το διάστημα $[1,3]$ σε n ίσα μέρη, οπότε προκύπτει η διαμέριση

$$\delta_n=\left(x_i^n\right), i=0,1,\ldots,n \text{ με } x_i^n=1+\frac{2i}{n}.$$

Θα αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$U\left(f,\delta_n\right)=2\frac{n+1}{n}-6 \text{ και } L\left(f,\delta_n\right)=2\frac{n-1}{n}-6.$$

Πραγματικά, είναι

$$U\left(f,\delta_n\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\left(f\right)\Delta x_i^n\overset{3}{=}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^n-4\right)\Delta x_i^n$$

$$\overset{4}{=}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}-4\right)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i-3\sum_{i=1}^{n}1\right)$$

$$=\frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{6}{n}\cdot n=2\frac{n+1}{n}-6.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.

---

[3] Αφού η συνάρτηση f είναι αύξουσα.

[4] Αφού $\Delta x_i^n=\left(1+\frac{2i}{n}\right)-\left(1+\frac{2(i-1)}{n}\right)=\frac{2}{n}$.

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$2\frac{n-1}{n}-6=L\left(f,\delta_n\right)\leq L\left(f\right)\leq U\left(f\right)\leq U\left(f,\delta_n\right)=2\frac{n+1}{n}-6$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\frac{n-1}{n}-6\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2\frac{n+1}{n}-6\right)=-4$$

προκύπτει ότι $U\left(f\right)=L\left(f\right)=-4$ και επομένως η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, με

$$\int_1^3(x-4)\,dx=-4.$$

2. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Θεώρημα 2.1 (Riemann)

Μια φραγμένη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε ε > 0 υπάρχει** $\delta \in \Delta\left([\alpha,\beta]\right)$ **με**

$$U(f,\delta) - L(f,\delta) < \varepsilon.$$

Το θεώρημα αυτό έχει πολλές εφαρμογές. Για παράδειγμα, με τη βοήθειά του αποδεικνύεται ότι κάθε μονότονη ή συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να αποδειχθεί ότι κάθε μονότονη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα[5] (ανάλογα αποδεικνύεται και για φθίνουσα) και $f(\alpha)<f(\beta)$ (αλλιώς, θα ήταν σταθερή οπότε θα ήταν και ολοκληρώσιμη). Θα εφαρμοσθεί το θεώρημα του Riemann. Για $\varepsilon>0$, επιλέγεται μια διαμέριση $\delta=(x_i)$, $i=0,1,...,n$ με $\lambda(\delta)<\dfrac{\varepsilon}{f(\beta)-f(\alpha)}$. Τότε είναι

$$\mathrm{U}(\mathrm{f},\delta)-\mathrm{L}(\mathrm{f},\delta)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M_i}(\mathrm{f})\Delta\mathrm{x_i}-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m_i}(\mathrm{f})\Delta\mathrm{x_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x_i})-\mathrm{f}(\mathrm{x_{i-1}})\right)\Delta\mathrm{x_i}\le\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x_i})-\mathrm{f}(\mathrm{x_{i-1}})\right)\lambda(\delta)$$

$$=\lambda(\delta)\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)=\lambda(\delta)\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)-\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\right)$$

$$\overset{j=i-1}{=}\lambda(\delta)\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)-\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\right)$$

$$=\lambda(\delta)\left(f(x_n)-f(x_0)\right)=\lambda(\delta)\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)<\varepsilon$$

Άρα η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

---

[5] Η συνάρτηση θα είναι τότε και φραγμένη, αφού $\mathrm{f}(\alpha)\le\mathrm{f}(\mathrm{x})\le\mathrm{f}(\beta)$, για κάθε $\mathrm{x}\in[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα 2.2 (Darboux)

Μια φραγμένη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει αριθμός** $I\in\mathbb{R}$ **τέτοιος ώστε για κάθε ε > 0 υπάρχει θ > 0 έτσι ώστε**

$$\left|S(f,\delta,\gamma)-I\right|<\varepsilon$$

για κάθε $\delta\in\Delta([\alpha,\beta])$ **με** $\lambda(\delta)<\theta$ **και για οποιαδήποτε επιλογή γ ενδιάμεσων σημείων της δ.**

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$I=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Πρόταση 2.3

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει ο τύπος

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S(f,\delta_n,\gamma_n),$$

όπου (δ_n) **είναι μια ακολουθία διαμερίσεων του** $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ **με** $\lim_{n\to\infty}\lambda(\delta_n)=0$ **και** γ_n **οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων της** δ_n**.**

Για τις ακολουθίες $\delta_n=(x_i^n)$ και $\gamma_n=(\xi_i^n)$, με

$$x_0^n = \alpha \text{ και } x_i^n = \xi_i^n = \alpha + \frac{(\beta-\alpha)i}{n}, \quad i \in [n],$$

είναι

$$\Delta x_i^n = x_i^n - x_{i-1}^n = \alpha + \frac{(\beta-\alpha)i}{n} - \alpha - \frac{(\beta-\alpha)(i-1)}{n} = \frac{(\beta-\alpha)}{n},$$

και επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\delta_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{n} = 0$$

και

$$S(f,\delta_n,\gamma_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)\Delta x_i^n = \frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}i\right).$$

Κατόπιν τούτων, εφαρμόζοντας την πρόταση 2.3, προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.4

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ **ισχύει ότι**

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}i\right).$$

Ο τύπος του προηγούμενου πορίσματος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ορίων ακολουθιών που ορίζονται μέσω αθροισμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να υπολογισθούν με τη βοήθεια του πορίσματος 2.4 τα όρια των ακολουθιών (α_n), (β_n)και (γ_n), όταν:

(i) $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$,

(ii) $\beta_n = \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{2n^2}$,

(iii) $\gamma_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n^2}}$.

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί ο τύπος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n} i\right).$$

Σε κάθε μια από τις δοσμένες ακολουθίες πρέπει να προσδιορισθεί η κατάλληλη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ για την εφαρμογή του τύπου.

(i) $\alpha_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$,

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}},$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

(ii) $\beta_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2}$

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2},$$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = [ar\operatorname{ctg} x]_0^1 = ar\operatorname{ctg} 1 - ar\operatorname{ctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(iii) $\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}$

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}} = \lim_{n\to\infty}\gamma_n .$$

Για τον υπολογισμό του $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ τίθεται $x=\sinh t$, οπότε θα είναι $dx=\cosh t\,dt$, $\sqrt{1+x^2} \;=\cosh t$ και $t=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, διότι

$$x=\sinh t \Leftrightarrow x=\frac{e^t-e^{-t}}{2} \Leftrightarrow e^{2t}-2xe^t-1=0$$

$$\overset{y=e^t}{\Leftrightarrow} y^2-2xy-1=0, \quad y>0$$

$$\Leftrightarrow y=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow t=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\frac{\cosh t}{\cosh t}dt=[t]_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

1. Αν οι συναρτήσεις $f, g / [\alpha, \beta]$ **είναι ολοκληρώσιμες και** $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, **τότε και η συνάρτηση** $\kappa f + \lambda g / [\alpha, \beta]$ **είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει η σχέση**

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\kappa f + \lambda g)(x)\, dx = \kappa \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx.$$

2. Αν οι συναρτήσεις $f, g / [\alpha, \beta]$ **είναι ολοκληρώσιμες και** $f(x) \leq g(x)$, **για κάθε** $x \in [\alpha, \beta]$ **τότε ισχύει ότι**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx.$$

3. Έστω μια φραγμένη συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ **και** $c \in (\alpha, \beta)$. **Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν οι περιορισμοί της στα διαστήματα** $[\alpha, c]$ **και** $[c, \beta]$ **είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Επιπλέον ισχύει η σχέση**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\beta} f(x)\, dx.$$

Η ισότητα της παραπάνω ιδιότητας ονομάζεται **σχέση του Chasles** και επιτρέπει τον υπολογισμό ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζονται με περισσότερους του ενός τύπους.

Η σχέση του Chasles επεκτείνεται για περισσότερα του ενός σημεία c που μπορεί να μην ανήκουν στο διάστημα (α,β).

4. Έστω μια φραγμένη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ και $(c_i), i\in[n]$ μια πεπερασμένη γνήσια αύξουσα ακολουθία στο $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$. Αν ισχύει η συνθήκη:

Για οποιεσδήποτε πεπερασμένες και γνήσια αύξουσες ακολουθίες $(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}})$ και $(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{i}})$, όπου $i\in[n]$, στο $[\alpha,\beta]$ με

$$\alpha_1\le c_1<\beta_1<\alpha_2<c_2<\beta_2<\cdots<\alpha_n<c_n\le\beta_n$$

όπου οι ισότητες $\alpha_1=c_1$ και $c_n=\beta_n$ ισχύουν μόνο όταν $c_1=\alpha$ και $c_n=\beta$ αντίστοιχα,

οι περιορισμοί της συνάρτησης f στα διαστήματα

$$[\alpha,\alpha_1],[\beta_{1,}\alpha_2],[\beta_2,\alpha_3],\ldots,[\beta_{n\text{-}1},\alpha_n],[\beta_n,\beta]$$

είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις,

τότε η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη.

Δύο πολύ σημαντικές συνέπειες της προηγούμενης ιδιότητας είναι οι εξής:

(i) Αν $f/[\alpha,\beta]$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση και $(c_i), i \in [n]$ είναι μια γνήσια αύξουσα πεπερασμένη ακολουθία στο $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε οι περιορισμοί της f στα διαστήματα

$$[\alpha,c_1),(c_1,c_2),(c_2,c_3),\ldots,(c_{n-1},c_n),(c_n,\beta]$$

να είναι συνεχείς ή μονότονες συναρτήσεις, τότε η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

(ii) Αν δυο συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ διαφέρουν σε πεπερασμένο το πλήθος σημεία και η μια είναι ολοκληρώσιμη, τότε θα είναι και η άλλη ολοκληρώσιμη και τα ορισμένα ολοκληρώματά τους θα είναι ίσα.

5. Αν $f/[\alpha,\beta]$ ολοκληρώσιμη με $\kappa \le f(x) \le \lambda$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και $\phi/[\kappa,\lambda]$ συνεχής, τότε η $h = \phi \circ f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

Η ιδιότητα αυτή έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές:
Αν η $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε

(i) Η $f^2/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.
Προκύπτει από την ιδιότητα 5, για $\phi(x) = x^2$.

(ii) Η $f \cdot g/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.
Προκύπτει από την $f \cdot g = \dfrac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$, το (i) και την ιδιότητα 1.

(iii) Η $\sqrt[n]{f}/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.
Προκύπτει από την ιδιότητα 5, για $\phi(x) = \sqrt[n]{x}$.

(iv) Η $|f|/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.
Προκύπτει από την ιδιότητα 1, για $\phi(x) = |x|$.
Επιπλέον, $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$$\Rightarrow -\int_\alpha^\beta |f(x)| dx \le \int_\alpha^\beta f(x) dx \le \int_\alpha^\beta |f(x)| dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_\alpha^\beta f(x)\, dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + 1/[0,1]$ είναι ολοκληρώσιμη και να υπολογισθεί το ορισμένο της ολοκλήρωμα.

ΛΥΣΗ

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και $\delta_n = \left(x_i^n\right), i = 0,1,\dots,n$ η διαμέριση που ορίζεται από τις σχέσεις $\left(x_i^n\right) = \dfrac{i}{n}, i = 0,1,\dots,n$.

Τότε θα είναι $\Delta x_i^n = \dfrac{1}{n}$, για κάθε $i \in [n]$ και

$$\mathrm{U}\left(\mathrm{f}, \delta_{\mathrm{n}}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{M}_{\mathrm{i}}(\mathrm{f}) \Delta \mathrm{x}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}} + 1\right) = \frac{n+1}{2n} + 1 \qquad (1)$$

$$L\left(f, \delta_n\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f) \Delta x_i^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n} + 1\right) = \frac{n-1}{2n} + 1 \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) και τους ορισμούς του άνω και κάτω ολοκληρώματος, προκύπτει ότι

$$\frac{n-1}{2n} + 1 \le L(f) \le U(f) \le \frac{n+1}{2n} + 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε όμως, για $n \to \infty$ θα είναι

$\dfrac{3}{2} \le L(f) \le U(f) \le \dfrac{3}{2}$ δηλαδή, $L(f) = \dfrac{3}{2} = U(f)$.

Επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη με $\int_0^1 (x+1)\,dx = \dfrac{3}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να αποδειχθεί το θεώρημα 2.1.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, υποτίθεται ότι η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη και θα αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta\in\Delta[\alpha,\beta]$ με $U(f,\delta)-L(f,\delta)<\varepsilon$ (1)

Πραγματικά, από τους ορισμούς των άνω και κάτω ολοκληρωμάτων προκύπτει ότι για $\varepsilon>0$ υπάρχουν $\delta_1,\delta_2\in\Delta([\alpha,\beta])$ με

$$U(f,\delta_1)<U(f)+\frac{\varepsilon}{2} \text{ και } L(f,\delta_2)>L(f)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν τεθεί $\delta=\delta_1\cup\delta_2$, τότε θα είναι

$$\begin{aligned} U(f,\delta)-L(f,\delta) &\le U(f,\delta_1)-L(f,\delta_2) \\ &< \left(U(f)+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(L(f)-\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= U(f)-L(f)+\varepsilon \overset{1}{=} \varepsilon. \end{aligned}$$

Αντίστροφα, υποτίθεται ότι ισχύει η συνθήκη (1) και θα αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

Πραγματικά, για κάθε $\varepsilon>0$ είναι

$$L(f)\le U(f)\le U(f,\delta)<L(f,\delta)+\varepsilon<L(f)+\varepsilon,$$

οπότε ισχύει ότι

$$0\le U(f)-L(f)<\varepsilon, \text{ για κάθε } \varepsilon>0.$$

Άρα $U(f)=L(f)$ και επομένως η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη.

---

[6] Αφού $U(f)=L(f)$ επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\theta>0$ με

$$U(f,\delta)-L(f,\delta)<\varepsilon$$

για κάθε $\delta\in\Delta([\alpha,\beta])$ με $\lambda(\delta)<\theta$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής, οπότε για κάθε $\varepsilon>0$ θα υπάρχει $\theta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x,y\in[\alpha,\beta]$ με $|x-y|<\theta$, έπεται ότι

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

Αν $\delta=(x_i)$, $i=0,1,...,n$ είναι μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ με $\lambda(\delta)<\theta$, τότε από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής προκύπτει ότι

$$M_i(f)=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}=f(t_i)$$

και

$$m_i(f)=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}=f(z_i)$$

όπου $t_i,z_i\in[x_{i-1},x_i]$ για κάθε $i\in[n]$, οπότε είναι

$$
\begin{aligned}
U(f,\delta)-L(f,\delta) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(f(t_i)-f(z_i)\big)\Delta x_i \\
&< \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\Delta x_i
\end{aligned}
$$

διότι $|t_i - z_i| \le |x_i - x_{i-1}| \le \lambda(\delta) < \theta,$ οπότε από την ομοιόμορφη συνέχεια θα είναι $|f(t_i)-f(z_i)| < \dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
U(f,\delta)-L(f,\delta) &< \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση

Από την προηγούμενη άσκηση και το θεώρημα του Riemann προκύπτει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να υπολογισθεί με τη βοήθεια της πρότασης 2.3 το ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x) = x^3 / [0,1]$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\delta_n = \left(x_i^n\right),\ i = 0,1,...,n$ και $\gamma_n = \left(\xi_i^n\right),\ i \in [n]$ με $x_0^n = 0$ και $x_i^n = \xi_i^n = \dfrac{i}{n}, i \in [n]$.

Τότε θα είναι

$\Delta x_i^n = \dfrac{1}{n}$ και $\lambda\left(\delta_n\right) = \dfrac{1}{n} \to 0$, οπότε επειδή

$$S\left(f,\delta_n,\gamma_n\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^n\right)\Delta\left(x_i^n\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 \overset{1}{=} \frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2},$$

από την πρόταση 2.3 προκύπτει ότι

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} S\left(f,\delta_n,\gamma_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη και συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$, με $f(x_0) \neq 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|dx > 0.$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά, εφαρμόζεται η συνέχεια της συνάρτησης f στο x_0, οπότε για $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2} > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ με

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [\alpha,\beta]$$

και

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2} \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Τότε προκύπτει ότι

$$|f(x_0)| - |f(x)| < \frac{|f(x_0)|}{2} \Leftrightarrow |f(x_0)| < \frac{|f(x)|}{2}$$

για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|dx \geq \frac{1}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x_0)|dx$$

$$= \frac{1}{2}|f(x_0)|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} 1dx$$

$$= \delta|f(x_0)| > 0.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Ολοκλήρωση και παραγώγιση

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Βασικές προτάσεις

4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Θεώρημα 4.1 ($1^{ο}$ θεμελιώδες θεώρημα του Απ. Λογ.)

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η συνάρτηση[7] $F/[\alpha,\beta]$ με

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\xi\in[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο ξ και ισχύει ότι

$$F'(\xi)=f(\xi).$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να αποδειχθεί το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

ΛΥΣΗ

Καταρχήν, χρησιμοποιώντας την ολοκληρωσιμότητα της συνάρτησης $f/[\alpha,\beta]$ θα αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt/[\alpha,\beta]$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz, δηλαδή

[7] Η συνάρτηση F είναι καλά ορισμένη αφού κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f /[α,β] είναι επίσης ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα του [α,β].

$$\left|F(x)-F(y)\right| \leq M\,|x-y|, \text{ για κάθε } x,y\in[\alpha,\beta],$$
όπου $M=\sup\{\left|f(x)\right| : x\in[\alpha,\beta]\}$.

Πράγματι, αν $x,y\in[\alpha,\beta]$, με $x<y$, τότε είναι

$$\begin{aligned}
\left|F(y)-F(x)\right| &= \left|\int_{\alpha}^{y} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_{\alpha}^{y} f(t)\,dt+\int_{x}^{\alpha} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x}^{y} f(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_{x}^{y}\left|f(t)\right|dt \leq \int_{x}^{y} M\,dt = M(y-x).
\end{aligned}$$

Ομοίως, για $y<x$ είναι $\left|F(x)-F(y)\right|\leq M(x-y)$ οπότε τελικά, ισχύει ότι

$$\left|F(x)-F(y)\right|\leq M\left|x-y\right| \text{ για κάθε } x,y\in[\alpha,\beta].$$

Η ομοιόμορφη συνέχεια προκύπτει από τη συνθήκη του Lipschitz. Πράγματι, για $\varepsilon>0$ εκλέγεται $\theta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$ και είναι

$$\left|x-y\right|<\theta \Rightarrow \left|F(x)-F(y)\right|<M\theta=\varepsilon$$

για κάθε $x,y\in[\alpha,\beta]$ και επομένως η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ακολούθως, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της συνάρτησης f στο ξ, δηλαδή ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\theta>0$ τέτοιο ώστε

$$t\in[\alpha,\beta] \text{ και } \left|t-\xi\right|<\theta \Rightarrow \left|f(t)-f(\xi)\right|<\varepsilon \quad (1)$$

θα αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ με $F'(\xi)=f(\xi)$.

Αρχικά, θα αποδειχθεί ότι $F'_+(\xi)=f(\xi)$.

Πραγματικά, για $x\in[\alpha,\beta]$ με $\xi<x$ και $\left|x-\xi\right|<\theta$ είναι

$$\left|\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi}-f(\xi)\right| = \left|\frac{F(x)-F(\xi)-(x-\xi)f(\xi)}{x-\xi}\right|$$

$$=\frac{\left|\int_\alpha^x f(t)dt-\int_\alpha^\xi f(t)dt-\int_\xi^x f(\xi)dt\right|}{x-\xi}$$

$$=\frac{\left|\int_\xi^x f(t)dt-\int_\xi^x f(\xi)dt\right|}{x-\xi} = \frac{\left|\int_\xi^x \left(f(t)-f(\xi)\right)dt\right|}{x-\xi}$$

$$\leq \frac{\int_\xi^x \left|f(t)-f(\xi)\right|dt}{x-\xi} \leq \frac{\int_\xi^x \varepsilon dt}{x-\xi}=\varepsilon.$$

Άρα $F'_+(\xi)=f(\xi)$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $F'_-(\xi)=f(\xi)$, οπότε τελικά η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ θα είναι παραγωγίσιμη στο ξ με $F'(\xi)=f(\xi)$.

ΑΣΚΗΣΗ 19(α)

Να ευρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης G με

$$\mathrm{G}(x)=\int_0^{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+7}\frac{1}{2+\sqrt{\mathrm{t}}}\mathrm{dt}\,/\,\mathbb{R},$$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$g(x)=x^2+3x+7\,/\,\mathbb{R}$ και $F(x)=\int_0^x\frac{1}{2+\sqrt{t}}dt\,/\,[0,+\infty)$.

Επειδή η $f(x)=\frac{1}{2+\sqrt{x}}\,/\,[0,+\infty)$ είναι συνεχής, έπεται ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη, με

$$F'(x)=\frac{1}{2+\sqrt{x}},\text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Εξάλλου, επειδή $R(g)\subset(0,+\infty)$ ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων g, F και είναι $G=F\circ g$.

Τότε, προκύπτει ότι

$$G'(x)=(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{g(x)}}(2x+3)=\frac{2x+3}{2+\sqrt{x^2+3x+7}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 21(β)

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x\sqrt{e^{2t+1}+1}dt\right)^2}{\int_0^x\sqrt{e^{4t+3}+2}dt}$.

ΛΥΣΗ

β) Αν τεθούν για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x)=\int_0^x\sqrt{e^{2t+1}+1}dt \text{ και } G(x)=\int_0^x\sqrt{e^{4t+3}+2}dt,$$

τότε επειδή οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{e^{2x+1}+1}$ και $g(x)=\sqrt{e^{4x+3}+2}$ είναι συνεχείς για κάθε $x\in\mathbb{R}$ προκύπτει ότι οι F, G είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$F'(x)=\sqrt{e^{2x+1}+1} \text{ και } G'(x)=\sqrt{e^{4x+3}+2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον, ισχύει ότι $F(x)>x$ και $G(x)>x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Πράγματι, $F(x)=\int_0^x\sqrt{e^{2t+1}+1}dt>\int_0^x 1dt=x$ και ομοίως προκύπτει ότι $G(x)>x$.

Κατόπιν τούτων, ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}G(x)=+\infty.$$

και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L’ Hospital, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x\sqrt{e^{2t+1}+1}dt\right)^2}{\int_0^x\sqrt{e^{4t+3}+2}dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{F^2(x)}{G(x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(F^2(x)\right)'}{G'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2F(x)F'(x)}{G'(x)}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)\sqrt{e^{2x+1}+1}}{\sqrt{e^{4x+3}+2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)e^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{1+e^{-(2x+1)}}}{e^{2x+\frac{3}{2}}\sqrt{1+2e^{-(4x+3)}}}$$

$$=\frac{2}{e}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{e^x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+e^{-(2x+1)}}}{\sqrt{1+2e^{-(4x+3)}}}$$

$$=\frac{2}{e}\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{\left(e^x\right)'}\cdot 1=\frac{2}{e}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{e^{2x+1}+1}}{e^x}$$

$$=\frac{2}{e}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{1+e^{-(2x+1)}}}{e^x}=\frac{2}{e}\cdot e^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Θεώρημα 4.2 (2^o θεμελιώδες θεώρημα του Απ. Λογ.)
Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής και $F/[\alpha,\beta]$ είναι μια παράγουσά της, τότε ισχύει ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να αποδειχθεί το Θεώρημα 4.2.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$, όπου F είναι μία παράγουσα της f. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, σύμφωνα με το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού η συνάρτηση

$F_1(x) = \int_\alpha^x f(t)dt \,/\, [\alpha,\beta]$, είναι μια παράγουσα της f.

Κατόπιν τούτων, οι συναρτήσεις F και F_1 θα διαφέρουν κατά μια σταθερά, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με

$$F(x) - F_1(x) = c, \text{ για κάθε } x \in [\alpha,\beta].$$

Έτσι, για $x = \alpha$ προκύπτει ότι

$$F(\alpha) = F(\alpha) - F_1(\alpha) = c \qquad (1)$$

ενώ για $x = \beta$, $F(\beta) - F_1(\beta) = c$, δηλαδή

$$F(\beta) - \int_\alpha^\beta f(x)dx = c \qquad (2)$$

Κατόπιν τούτων, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Η διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$σημειώνεται με $\left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$.

Το θεώρημα 4.2 επιτρέπει τον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των αόριστων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού ισχύει γενικότερα για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f/\left[\alpha,\beta\right]$ οι οποίες έχουν παράγουσα.

Παρακάτω, δίδεται μια απλή εφαρμογή του.

Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx$$

αρχικά υπολογίζεται το αντίστοιχο αόριστο.

Αν τεθεί $y=\cos x$ τότε είναι $dy=-\sin x dx$ και

$$\int \sin x \cos^2 x dx = -\int y^2 dy = -\frac{y^3}{3}+c = -\frac{\cos^3 x}{3}+c.$$

Άρα,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{3}-\cos 0\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{24}.$$

Στις επόμενες δύο προτάσεις περιγράφονται οι βασικές μέθοδοι υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος.

Πρόταση 4.3 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση)
Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\phi/[c,d]$ τέτοια ώστε η παράγωγός της να είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$ και $\phi([c,d])=[\alpha,\beta]$. Αν $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $(f\circ\phi)\phi'/[c,d]$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,dx=\int_c^d f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt.$$

Παραδείγματα

1. Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$$

όπου $\alpha>0$, τίθεται $x=\alpha\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε είναι

$$dx=\alpha\cos t\,dt$$

και

$$\sqrt{\alpha^2-x^2}=\sqrt{\alpha^2(1-\sin^2 t)}=\alpha|\cos t|=\alpha\cos t.$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\alpha\cos t)(\alpha\cos t)\,dt$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)\right)$$

$$=\frac{\alpha^2\pi}{2}.$$

2. Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$$

τίθεται $x=\ln t,\ t\in[1,e]$, οπότε είναι

$$dx=(\ln t)'\,dt=\frac{dt}{t}$$

και

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{t-1}{t+1}.$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I&=\int_1^e \frac{t-1}{(t+1)t}dt\\
&=\int_1^e\left(\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t}\right)dt\\
&=2[\ln(t+1)]_1^e-[\ln t]_1^e\\
&=2\ln(e+1)-2\ln 2-(\ln e-\ln 1)\\
&=2\ln(e+1)-2\ln 2-1.
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 25(β, γ)

Να υπολογισθούν οι τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

$$\beta)\ \int_0^2 x^3 e^{-x^2} dx, \qquad \gamma)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x}{4\cos^2 x + \sin^2 x} dx.$$

ΛΥΣΗ

β) Θέτουμε $y = -x^2$, οπότε $x = \sqrt{-y}$, $dx = -\dfrac{dy}{2\sqrt{-y}}$ και

$$\int_0^2 x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^{-4} \left(\sqrt{-y}\right)^3 e^y \left(-\frac{dy}{2\sqrt{-y}}\right) = \frac{-1}{2}\int_0^{-4} \left(\sqrt{-y}\right)^2 e^y dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-4}^0 y e^y dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-4}^0 y \left(e^y\right)' dy = -\frac{1}{2}\left[y \cdot e^y\right]_{-4}^0 + \frac{1}{2}\int_{-4}^0 y' e^y dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left[0e^0 - (-4)e^{-4}\right] + \frac{1}{2}\left[e^y\right]_{-4}^0$$

$$= -2e^{-4} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 5e^{-4}\right).$$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x}{4\cos^2 x + \sin^2 x} dx$

Θέτουμε $y = tgx$, οπότε $x = arctgy$, $dx = \dfrac{dy}{1+y^2}$ και

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x}{4\cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 - tg^2 x}{4 + tg^2 x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2 - y^2}{\left(4+y^2\right)\left(1+y^2\right)} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{2}{4+y^2} \right) dy$$

$$= \left[arctgy\right]_0^1 - \left[arctg \frac{y}{2} \right]_0^1$$

$$= arctg1 - arctg0 - arctg\frac{1}{2} + arcty0$$

$$= \frac{\pi}{4} - arctg\frac{1}{2}.$$

Πρόταση 4.4 (Παραγοντική Ολοκλήρωση)
Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g / [\alpha, \beta]$ **με παραγώγους** f', g' **ολοκληρώσιμες στο** $[\alpha, \beta]$**. Τότε ισχύει η σχέση**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) g(x) dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 30 (γ)

Να υπολογισθεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \cos \mathrm{x} \, \mathrm{dx}$.

ΛΥΣΗ

γ) Θέτουμε $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$, οπότε

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\cos x)' dx$$

$$= [e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} - e^0 \cos 0] + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sin x dx$$

$$= -1 + [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' dx$$

$$= -1 + \left(e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0 \right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I.$$

Άρα, $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$, δηλαδή $I = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$.

5. ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στην ενότητα αυτή, θα δοθούν μερικές βασικές προτάσεις των ορισμένων ολοκληρωμάτων, οι οποίες συνδέονται με έννοιες που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια και έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

Το πρώτο θεώρημα που θα δούμε είναι στενά συνδεδεμένο με την έννοια της μέσης τιμής.

Αν $f/[\alpha,\beta]$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε ο αριθμός

$$\overline{f} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}{\beta-\alpha}$$

ονομάζεται **μέση τιμή της συνάρτησης** $f/[\alpha,\beta]$.

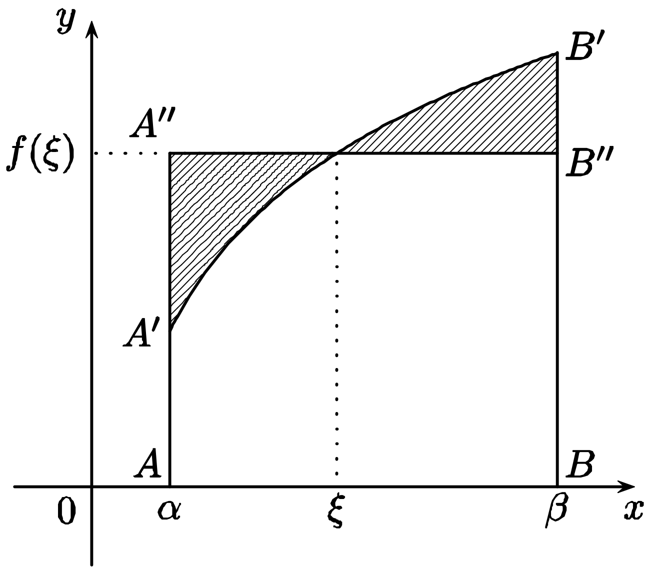
Θεώρημα 5.1 (Μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)(\beta - \alpha).$$

Το θεώρημα αυτό δηλώνει ότι η μέση τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης $f/[\alpha,\beta]$ λαμβάνεται από την συνάρτηση σε κάποιο σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$, δηλαδή $\overline{f} = f(\xi)$.

Γεωμετρικά, για μη αρνητικές συναρτήσεις αυτό φαίνεται στο επόμενο σχήμα, όπου η μέση τιμή $\overline{f} = f(\xi)$ είναι το ύψος ενός ορθογώνιου $ΑΑ''Β''Β$ το οποίο είναι ισοεμβαδικό με το χωρίο $ΑΑ'Β'Β$που εκφράζει γεωμετρικά το ορισμένο ολοκλήρωμα.



Πρέπει να σημειωθεί ότι το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού αποδεικνύεται με δύο τελείως διαφορετικούς τρόπους.

Ο πρώτος χρησιμοποιεί εργαλεία της συνέχειας (θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής και θεωρία ενδιάμεσων τιμών), ενώ ο δεύτερος εργαλεία της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης (Θ.Μ.Τ. και πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού).

ΑΣΚΗΣΗ 35

Να αποδειχθεί το θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού με δύο τρόπους:

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha).$$

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος

Επειδή η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, εφαρμόζεται το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in[\alpha,\beta]$ με $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Τότε, προκύπτει ότι

$$f(x_1)(\beta-\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\le f(x_2)(\beta-\alpha).$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(x_1)(\beta-\alpha)$, ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(x_2)(\beta-\alpha)$, τότε η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ θα είναι σταθερή και η ζητούμενη ισότητα θα επαληθεύεται για κάθε $\xi\in[\alpha,\beta]$.

Πραγματικά, αν για παράδειγμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(x_1)(\beta-\alpha)$ τότε θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta}\big(f(x)-f(x_1)\big)dx=0$, και δεδομένου ότι η συνάρτηση $f(x)-f(x_1)$ είναι συνεχής και μη αρνητική στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, πρέπει να ισχύει ότι $f(x)-f(x_1)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

2. Αν $f(x_1)(\beta-\alpha)<\int_\alpha^\beta f(x)\,dx<f(x_2)(\beta-\alpha)$, τότε

προκύπτει ότι $f(x_1)<\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\beta-\alpha}<f(x_2)$,

οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για τον περιορισμό της συνάρτησης f στο διάστημα που ορίζεται από τα x_1, x_2, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με

$f(\xi)=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\beta-\alpha}$, οπότε τελικά, $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=f(\xi)(\beta-\alpha)$.

2ος Τρόπος

Επειδή η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, σύμφωνα με το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt\,/\,[\alpha,\beta]$$

είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση $F/[\alpha,\beta]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $F'(\xi)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$

ή, ισοδύναμα, $f(\xi)=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-0}{\beta-\alpha}$

και τελικά, $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=f(\xi)(\beta-\alpha)$.

ΑΣΚΗΣΗ 36

Αν η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση

$$2\int_0^3 f(x)dx = 3\int_3^5 f(x)dx = 6\int_5^6 f(x)dx,$$

να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,6)$ με $f''(\xi) = 0$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, εφαρμόζουμε το θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού για τους περιορισμούς της συνάρτησης f στα διαστήματα [0,3], [3,5], και [5,6], οπότε υπάρχουν $z_1 \in (0,3), z_2 \in (3,5)$, και $z_3 \in (5,6)$ με

$$\int_0^3 f(x)dx = (3-0)f(z_1) = 3f(z_1)$$

$$\int_3^5 f(x)dx = (5-3)f(z_2) = 2f(z_2)$$

και

$$\int_5^6 f(x)dx = (6-5)f(z_3) = f(z_3).$$

Κατόπιν τούτων, και από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι

$$f(z_1) = f(z_2) = f(z_3).$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle για τους περιορισμούς της συνάρτησης f στα διαστήματα $[z_1, z_2]$ και $[z_2, z_3]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,6)$ με $\xi_1 < \xi_2$ και $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Τέλος, εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $f'/[\xi_1, \xi_2]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (0,6)$ με $f''(\xi) = 0$.

Θεώρημα 5.2

Αν δύο συναρτήσεις $f, g / [\alpha, \beta]$ είναι συνεχείς και η δεύτερη δεν αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχει (ένα τουλάχιστον) σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

Σημειώνεται ότι το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος 5.2 για $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 1 / [\alpha, \beta]$. Για το λόγο αυτό το θεώρημα 5.2 αναφέρεται συνήθως στη βιβλιογραφία ως **Γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού**.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται συχνά για τον προσδιορισμό του σφάλματος στους τύπους της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ΑΣΚΗΣΗ. Να αποδειχθεί το Θεώρημα 5.2.

Υπόδειξη: Η απόδειξη είναι παραλλαγή της πρώτης απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα σημείο $z \in (0,2)$ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\frac{6}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos\left(4x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \cos z.$$

ΛΥΣΗ

Αν εφαρμοσθεί το γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \cos\left(4x^2-1\right) / \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ και } g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} / \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

τότε θα υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ με

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos\left(4x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \cos(4\xi^2-1)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \cos(4\xi^2-1)[\arcsin x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \cos(4\xi^2-1)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\cos(4\xi^2-1).\end{aligned}$$

Άρα, αν τεθεί $z = 4\xi^2 - 1$, θα είναι $z \in (0,2)$ και

$$\frac{6}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos\left(4x^2-1\right)}{\sqrt{1\text{-}x^2}}dx = \cos z.$$

Θεώρημα 5.3

Έστω $f/[\alpha,\beta]$ μονότονη συνάρτηση και $g/[\alpha,\beta]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση η οποία δεν αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$. Τότε υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $\xi\in[\alpha,\beta]$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} g(x)dx + f(\beta)\int_{\xi}^{\beta} g(x)dx.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το θεώρημα 5.3 ισχύει και για συναρτήσεις $g/[\alpha,\beta]$ οι οποίες ενδέχεται να αλλάζουν πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ όταν αυτές υποτεθεί ότι είναι συνεχείς.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση του θεωρήματος αυτού είναι όταν $g(x)=1$, όπου ο τύπος του διαμορφώνεται ως εξής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi}).$$

Στη μορφή αυτή, το θεώρημα 5.3 αναφέρεται από ορισμένους συγγραφείς ως **δεύτερο θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού** (θεωρώντας το θεώρημα 5.1 ως πρώτο θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού).

Η επόμενη πρόταση σχετίζεται με το θεώρημα του Taylor.

Ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος Taylor

Πρόταση 5.4

Αν η συνάρτηση $\mathbf{f/[\alpha,\beta]}$ έχει παραγώγους $\mathbf{f,f',\dots,f^{(n+1)}/[\alpha,\beta]}$ συνεχείς, τότε ισχύει ότι

$$f(\beta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\beta-\alpha)^k}{k!}f^{(k)}(\alpha)+\frac{1}{n!}\int_{\alpha}^{\beta}(\beta-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Ο τύπος της προηγούμενης πρότασης ονομάζεται **τύπος του Taylor με ολοκληρωτική μορφή υπολοίπου**.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η γενικότερη μορφή του υπολοίπου Taylor

$$R_n=\frac{(\beta-\alpha)^{\nu}}{\nu\cdot n!}(\beta-\xi)^{n-\nu+1}f^{(n+1)}(\xi),$$

όπου $\nu\in[n+1]$ και $\xi\in(\alpha,\beta)$, προκύπτει άμεσα από την ολοκληρωτική μορφή

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_{\alpha}^{\beta}(\beta-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Πράγματι, αν εφαρμοσθεί το θεώρημα 5.2 για τις συναρτήσεις $\left(\beta-x\right)^{n-\nu+1} f^{(n+1)}(x)$ και $\left(\beta-x\right)^{\nu-1}$, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\beta-x\right)^{n} f^{(n+1)}(x)\,dx \\
&=\frac{1}{n!}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\beta-x\right)^{n-\nu+1} f^{(n+1)}(x)\left(\beta-x\right)^{\nu-1} dx \\
&\qquad=\frac{1}{n!}\left(\beta-\xi\right)^{n-\nu+1} f^{(n+1)}(\xi)\int_{\alpha}^{\beta}\left(\beta-x\right)^{\nu-1}dx \\
&\qquad=\frac{1}{n!}\left(\beta-\xi\right)^{n-\nu+1} f^{(n+1)}(\xi)\left[-\frac{\left(\beta-x\right)^{\nu}}{\nu}\right]_{\alpha}^{\beta} \\
&\qquad=\frac{\left(\beta-\alpha\right)^{\nu}}{\nu\cdot n!}\left(\beta-\xi\right)^{n-\nu+1} f^{(n+1)}(\xi),
\end{aligned}
$$

όπου $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$.

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θα δοθεί ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για τη σύγκλιση των σειρών, που χρησιμοποιεί το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω $f/[1,+\infty)$ **μια μη αρνητική φθίνουσα συνάρτηση. Τότε η σειρά** $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ **συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία** (S_n)**, με** $S_n=\int_1^n f(x)\,dx$ **συγκλίνει και στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανισότητα**

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος, η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Τέλος, πρέπει να τονισθεί ότι για την εφαρμογή του κριτηρίου αυτού δεν είναι απαραίτητο η συνάρτηση f να ορίζεται σε όλο το διάστημα $[1,+\infty)$ αλλά σε ένα υποδιάστημα της μορφής $[m,+\infty)$, αρκεί η συνάρτηση να είναι μη αρνητική και φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να αποδειχθεί το κριτήριο του ολοκληρώματος:
Αν $f/[1,+\infty)$ μια μη αρνητική φθίνουσα συνάρτηση, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) με $S_n = \int_1^n f(x)dx$ συγκλίνει και στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανισότητα $\lim_{n\to\infty} S_n \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \lim_{n\to\infty} S_n$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(i)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε πρέπει να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (σ_n) συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) συγκλίνει.

Επειδή η συνάρτηση $f/[1,+\infty)$ είναι μη αρνητική, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \sum_{i=1}^{n+1} f(i) - \sum_{i=1}^{n} f(i) = f(n+1) \ge 0$$

και

$$S_{n+1} - S_n = \int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^{n} f(x)dx$$

$$= \int_1^{n} f(x)dx + \int_n^{n+1} f(x)dx - \int_1^{n} f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx \ge 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε οι ακολουθίες (σ_n) και (S_n) είναι αύξουσες. Τότε όμως, αρκεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία

(σ_n) είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) είναι άνω φραγμένη.

Για το σκοπό αυτό, θα αποδειχθεί η ανισότητα

$$S_{n+1} \le \sigma_n \le f(1) + S_n \qquad (1)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι,

$$S_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} f(i)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$
$$= \sigma_n$$

και

$$S_n = \int_1^{n} f(x)\,dx = \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(x)\,dx \ge \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(i)\,dx = \sum_{i=2}^{n} f(i)$$
$$= \sigma_n - f(1).$$

Κατόπιν τούτων, ισχύει η ανισότητα (1), από όπου προκύπτει ότι η ακολουθία (σ_n) είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) είναι άνω φραγμένη.

Τέλος, στην περίπτωση αυτή, για $n \to \infty$ η σχέση (1) δίδει

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \lim_{n\to\infty} S_n.$$

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Επιπλέον, να αποδειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{p-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{p}{p-1}, \text{ για κάθε } p \in (1, +\infty).$$

ΛΥΣΗ

Για $p \leq 0$ η σειρά δεν συγκλίνει, αφού η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ δεν είναι μηδενική.

Για $p > 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^p} / [1, +\infty)$$

η οποία είναι μη αρνητική και φθίνουσα.

Επιπλέον, για $p \neq 1$ είναι

$$S_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^n = \frac{1}{1-p}\left(n^{1-p} - 1\right)$$

ενώ για $p = 1$ είναι

$$S_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^n = \ln n.$$

Τότε όμως, προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \alpha\nu \;\; p>1 \\ +\infty, & \alpha\nu \;\; p\leq 1 \end{cases}$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $p>1$.

Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι

$$\frac{1}{p-1} = \lim_{n\to\infty} S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{1}{p-1},$$

οπότε τελικά, είναι

$$\frac{1}{\mathrm{p}-1} \leq \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{p}}} \leq \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}-1}$$

για κάθε $p>1$.

ΑΣΚΗΣΗ 44

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\text{arctg}n}}{1+n^2}$ συγκλίνει, και ότι ισχύει η σχέση $e^{\pi/2}-e^{\pi/4}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\text{arctg}n}}{1+n^2}\le e^{\pi/2}-\frac{e^{\pi/4}}{2}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{\text{arctg}x}}{1+x^2}/[1,+\infty)$, η οποία είναι μη αρνητική και φθίνουσα, διότι

$$f'(x)=\frac{\left(e^{\text{arctg}x}\right)'\left(1+x^2\right)-e^{\text{arctg}x}\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{(\text{arctg}x)'e^{\text{arctg}x}\left(1+x^2\right)-2xe^{\text{arctg}x}}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{(1-2x)\cdot e^{\text{arctg}x}}{\left(1+x^2\right)^2}<0$$

για κάθε $x\in[1,+\infty)$. Έστω $S_n=\int_1^n\frac{e^{\text{arctg}x}}{1+x^2}dx$, για $n\in\mathbb{N}^*$.

Αν τεθεί $y=\text{arctg}x$, τότε $dy=(\text{arctg}x)'dx=\frac{dx}{1+x^2}$ και

$$S_n=\int_{\text{arctg}1}^{\text{arctg}n}e^y dy=\left[e^y\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arctg}n}=e^{\text{arctg}n}-e^{\pi/4}.$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty}S_n=e^{\lim_{n\to\infty}\text{arctg}n}-e^{\pi/4}=e^{\pi/2}-e^{\pi/4}$.

Κατόπιν τούτων, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, η σειρά συγκλίνει και ισχύει ότι

$$e^{\pi/2}-e^{\pi/4}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\text{arctg}n}}{1+n^2}\le f(1)+e^{\pi/2}-e^{\pi/4}=\frac{e^{\pi/4}}{2}+e^{\pi/2}-e^{\pi/4}=e^{\pi/2}-\frac{e^{\pi/4}}{2}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 19(β)

Να ευρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης G με

$\mathrm{G}(x)=\int_0^{\cos\left(3\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+5\right)}\frac{1}{\sqrt{2-\mathrm{t}^2}}\mathrm{dt}\,/\,\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=\cos\left(3x^2+2x+5\right)/\,\mathbb{R}$ και $F(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt\,/\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,/\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ είναι συνεχής, έπεται ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ για κάθε $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Εξάλλου, επειδή $R(g)\subset\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων g, F και είναι $G=F\circ g$.

Τότε, προκύπτει ότι

$$G'(x)=\left(F\circ g\right)'(x)=F'\left(g(x)\right)g'(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-\cos^2\left(3x^2+2x+5\right)}}\left(-\sin\left(3x^2+2x+5\right)\right)\left(3x^2+2x+5\right)'$$

$$=-\frac{6x+2}{\sqrt{1+\sin^2\left(3x^2+2x+5\right)}}\sin\left(3x^2+2x+5\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Έστω $f/[0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Να υπολογισθεί ο αριθμός $f(2)$ όταν ισχύει η σχέση

α) $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, β) $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$,

γ) $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$

για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(x) = \int_0^x f(t)dt / [0,+\infty)$ τότε οι τρεις ισότητες της άσκησης γράφονται ισοδύναμα:

α) $F(x) = x^2(1+x)$,

β) $F\left(x^2(1+x)\right) = x$,

γ) $F\left(x^2\right) = x^2(1+x)$,

για κάθε $x \geq 0$. Έτσι, παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη των παραπάνω ισοτήτων έχουμε ότι:

α) Ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$F'(x) = \left(x^2(1+x)\right)'$$

$$f(x) = x(3x+2),$$

οπότε $f(2) = 2(3\cdot 2+2) = 16$.

β) Ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$\left(F\left(\mathrm{x}^{2}(1+\mathrm{x})\right)\right)' = x',$$

$$f\left(\mathrm{x}^{2}(1+\mathrm{x})\right)\cdot\left(\mathrm{x}^{2}(1+\mathrm{x})\right)' = 1,$$

$$f\left(x^{3}+x^{2}\right)\cdot x(3x+2) = 1 \qquad (1)$$

για κάθε $x \geq 0$.

Κατόπιν τούτου, αναζητούμε $x \geq 0$ με $x^{3}+x^{2}=2$.

Ισοδύναμα, προκύπτει ότι

$$\left(x^{3}-1\right)+\left(x^{2}-1\right)=0,$$

$$(x-1)\left(x^{2}+2x+2\right)=0,$$

$$x=1.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τη σχέση (1) για $x=1$, προκύπτει ότι $f(2)\cdot 1\cdot 5=1$, οπότε $f(2)=\dfrac{1}{5}$.

γ) Ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$\left(F(x)\right)' = \left(x^{2}(1+x)\right)',$$

$$f\left(x^{2}\right)\left(x^{2}\right)' = x(3x+2),$$

$$f\left(x^{2}\right)2x = x(3x+2),$$

$$f\left(x^{2}\right) = \frac{3x+2}{2}$$

για κάθε $x \geq 0$. Επομένως, για $x=\sqrt{2}$ προκύπτει ότι

$$f(2) = \frac{3\sqrt{2}}{2}+1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 21(α)

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt$,

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt\,/\,\mathbb{R}$ τότε επειδή η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+2}\,/\,\mathbb{R}$ είναι συνεχής, έπεται ότι η συνάρτηση $F\,/\,\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\dfrac{x^3}{x^4+2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Κατόπιν τούτων, είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{\left(x^4\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{x^4+2}}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\left(x^4+2\right)}=\frac{1}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 25(α, δ)

Να υπολογισθούν οι τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

$$\alpha)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{(1+\mathrm{x})\sqrt{\mathrm{x}}}, \qquad \delta)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{dx}}{1+7\cos\mathrm{x}}.$$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $y=\sqrt{x}$, οπότε $x=y^2$, $dx=2ydy$ και

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+\mathrm{x})\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2y}{(1+y^2)y}dy = 2[arctgy]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

δ) Θέτουμε $y=tg\dfrac{x}{2}$, οπότε $x=2arctgy$, $dx=\dfrac{2}{1+y^2}dy$,

$\cos x=\dfrac{1-y^2}{1+y^2}$ και

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+7\cos x} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1+y^2}{8-6y^2}\frac{2}{1+y^2}dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dy}{4-3y^2} = \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dy}{2-\sqrt{3}y} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dy}{2+\sqrt{3}y}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}y\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}y\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}y}{2-\sqrt{3}y}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(\ln 3-\ln 1) = \frac{\sqrt{3}}{12}\ln 3.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26

α) Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/[0,\alpha]$, όπου $\alpha > 0$, ισχύει η σχέση

$$f(\alpha - x) = f(x)$$

για κάθε $x \in [0,\alpha]$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\alpha} xf(x)dx = \frac{1}{2}\alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx.$$

β) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $\quad I = \int_0^{\alpha} xf(x)dx,$

οπότε, για $y = \alpha - x$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\alpha}^{0}(\alpha - y)f(\alpha - y)dy \\ &= \alpha\int_0^{\alpha} f(y)dy - \int_0^{\alpha} yf(y)dy \\ &= \alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx - I. \end{aligned}$$

Άρα,

$$2I = \alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

οπότε

$$I = \frac{1}{2}\alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx.$$

β) Αν εφαρμοσθεί το α) για τη συνάρτηση

$$f(\mathrm{x})=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}/[0,\pi]$$

προκύπτει ότι

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θέτουμε $z=\cos x$, οπότε $dz=-\sin x dx$ και άρα,

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \quad =-\int_1^{-1}\frac{dz}{1+z^2}=\int_{-1}^{1}\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=arctg1-arctg(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 30 (α,β)

Να υπολογισθούν οι τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

$$\text{α) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{xcosxdx}, \qquad \text{β) } \int_0^1 \mathrm{arctgxdx}.$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)' dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x'\sin x dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\sin 0 + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

β) Είναι

$$\int_0^1 arctgxdx = \int_0^1 x' arctgxdx = [xarctgx]_0^1 - \int_0^1 x(arctx)'dx$$

$$= arctg1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln 2 - \ln 1] = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να υπολογισθούν οι τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

α) $\int_0^1 \mathrm{xarctgxdx}$, β) $\int_1^e \mathrm{x}^2(\ln \mathrm{x})^2 \mathrm{dx}$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\int_0^1 xarctgxdx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' arctgxdx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}arctgx\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}(arctgx)'dx$$

$$= \frac{1}{2}arctg1 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[arctgx]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

β) Είναι

$$\int_1^e x^2(\ln x)^2\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'(\ln x)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\left((\ln x)^2\right)'dx$$

$$=\frac{e^3}{3}(\ln e)^2-\frac{1}{3}(\ln 1)^2-\frac{2}{3}\int_1^e x^3\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x\,dx$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e+\frac{2}{3}\int_1^e\frac{x^3}{3}(\ln x)'dx$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\frac{e^3}{3}\ln e+\frac{2}{3}\frac{1}{3}\ln 1+\frac{2}{9}\int_1^e x^3\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{9}e^3+\frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e$$

$$=\frac{e^3}{9}+\frac{2}{27}\left(e^3-1\right)$$

$$=\frac{1}{27}\left(5e^3-2\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας (α_n) με

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}dx.$$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{(x^n)'}{1+x}dx = \left[\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1+x}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx. \qquad (1)$$

Επειδή $0 \le \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \le x^n$, για κάθε $x \in [0,1]$, προκύπτει ότι

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \le \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \le \alpha_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως είναι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}.$

ΑΣΚΗΣΗ 37

Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $e^{\xi_1}\cos\xi_1 + e^{\xi_2}\cos\xi_2 = \frac{2(e^{\pi/2}-1)}{\pi}$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού για τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cos x$ στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε θα υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ με

$$\left(\frac{\pi}{4}-0\right)e^{\xi_1}\cos\xi_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos x dx$$

και

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{\xi_2}\cos\xi_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι

$$e^{\xi_1}\cos\xi_1 + e^{\xi_2}\cos\xi_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx \quad (1)$$

Αλλά $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$, οπότε, από τη σχέση (1), προκύπτει τελικά ότι $e^{\xi_1}\cos\xi_1 + e^{\xi_2}\cos\xi_2 = \frac{2(e^{\pi/2}-1)}{\pi}$.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Να αποδειχθεί το θεώρημα 5.3.

ΛΥΣΗ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα και η συνάρτηση g είναι μη αρνητική.

Θα αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ με

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi g(x)dx + f(\beta)\int_\xi^\beta g(x)dx.$$

Επειδή η συνάρτηση $g/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη, έπεται ότι η συνάρτηση $H/[\alpha,\beta]$ με

$$H(x) = f(\alpha)\int_\alpha^x g(t)dt + f(\beta)\int_x^\beta g(t)dt$$

είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$H(\beta) = f(\alpha)\int_\alpha^\beta g(x)dx \overset{1}{\leq} \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx \leq f(\beta)\int_\alpha^\beta g(x)dx = H(\alpha),$$

οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για τη συνάρτηση $H/[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ με

$$H(\xi) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi g(x)dx + f(\beta)\int_\xi^\beta g(x)dx.$$

[8] Αφού $f/[\alpha,\beta]$ αύξουσα και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $q>1$. Επιπλέον, να αποδειχθεί η σχέση

$$\frac{1}{(q-1)(\ln 2)^{q-1}}\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}\le\frac{q-1+2\ln 2}{2(q-1)(\ln 2)^q}.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^q}\,/\,[2,+\infty)$$

η οποία είναι μη αρνητική, με παράγωγο

$$f'(x)=-\frac{\left[x(\ln x)^q\right]'}{x^2(\ln x)^{2q}}=-\frac{(\ln x)^q+qx\frac{1}{x}(\ln x)^{q-1}}{x^2(\ln x)^{2q}}=-\frac{\ln x+q}{x^2(\ln x)^{q+1}}$$

.

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[m,+\infty)$, όπου $m=\max\{2,e^{-q}\}$, έπεται ότι η συνάρτηση $f/[m,+\infty)$ είναι φθίνουσα, οπότε ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του κριτήριου του ολοκληρώματος.

Επιπλέον, για $q\neq 1$, είναι

$$S_n=\int_2^n\frac{1}{x(\ln x)^q}dx\overset{y=\ln x}{=}\int_{\ln 2}^{\ln n}y^{-q}dy=\left[\frac{y^{-q+1}}{-q+1}\right]_{\ln 2}^{\ln n}$$

$$=\frac{(\ln n)^{1-q}}{1-q}+\frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}.$$

Ανάλογα, για $q=1$, είναι

$$S_n=\int_2^n \frac{dx}{x\ln x}=[\ln(\ln(x))]_2^n=\ln(\ln n)-\ln(\ln 2).$$

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\begin{cases}\dfrac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}, & \text{αν } q>1\\ +\infty, & \text{αν } q\le 1\end{cases}$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $q>1$ και ισχύει ότι

$$\frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}\le\frac{1}{2(\ln 2)^q}+\frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{(q-1)(\ln 2)^{q-1}}\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}\le\frac{q-1+2\ln 2}{2(q-1)(\ln 2)^q}.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

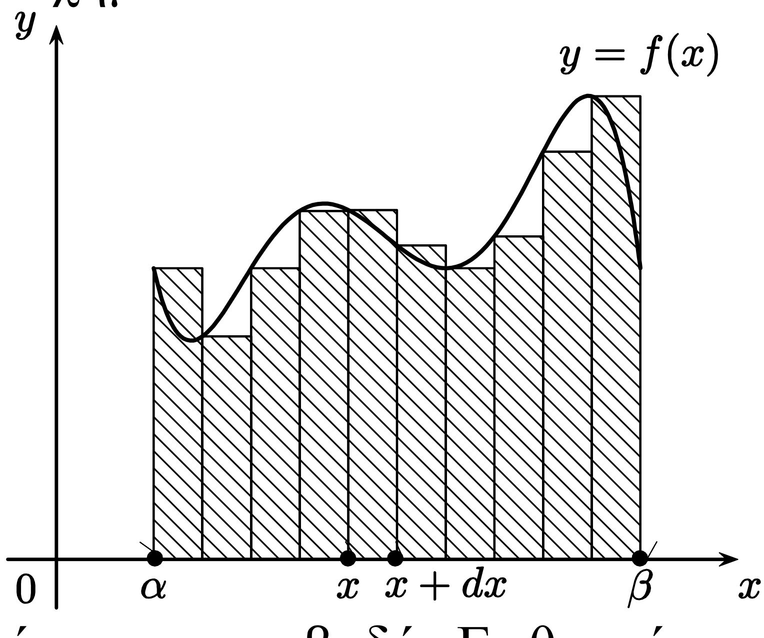
Εμβαδό επίπεδου χωρίου
Μήκος τόξου καμπύλης
Όγκος στερεού εκ περιστροφής

ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f\,/\left[\alpha,\beta\right]$ και R το χωρίο του επιπέδου που ορίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν η συνάρτηση f είναι μη αρνητική στο $\left[\alpha,\beta\right]$, τότε το εμβαδό Ε του χωρίου R μπορεί να θεωρηθεί ως το «άπειρο» άθροισμα των εμβαδών στοιχειωδών ορθογωνίων με βάση dx και ύψος $f\left(x\right)$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



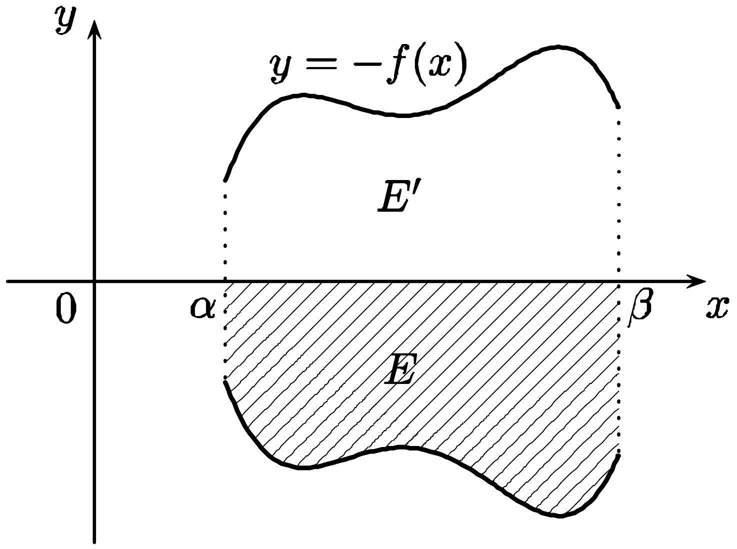
Με άλλα λόγια, το εμβαδό Ε θα είναι το όριο μιας ακολουθίας από ενδιάμεσα αθροίσματα, δηλαδή $\mathrm{E}=\lim\limits_{n\to\infty}S\left(f,\delta_n,\gamma_n\right)$ όπου (δ_n) μια ακολουθία διαμερίσεων του $\left[\alpha,\beta\right]$ με $\lambda\left(\delta_n\right)\to 0$ και γ_n μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της δ_n.

Τότε όμως, από τη πρόταση 2.3 θα είναι

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(x\right)dx.$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι μη θετική στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδό Ε του χωρίου R θα ισούται με το αντίστοιχο εμβαδό Ε′ της μη αρνητικής συνάρτησης $-f$, (όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα), οπότε

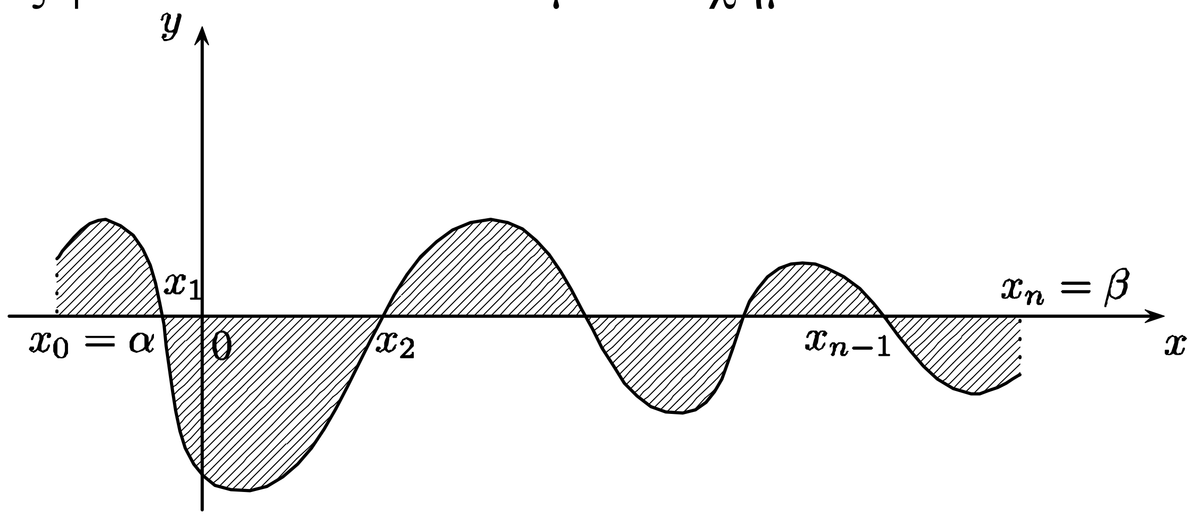
$$\mathrm{E} = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$



3. Αν η συνάρτηση f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στα υποδιαστήματα του $[\alpha,\beta]$ που η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, προκύπτει ότι

$$\mathrm{E} = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$$

όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.

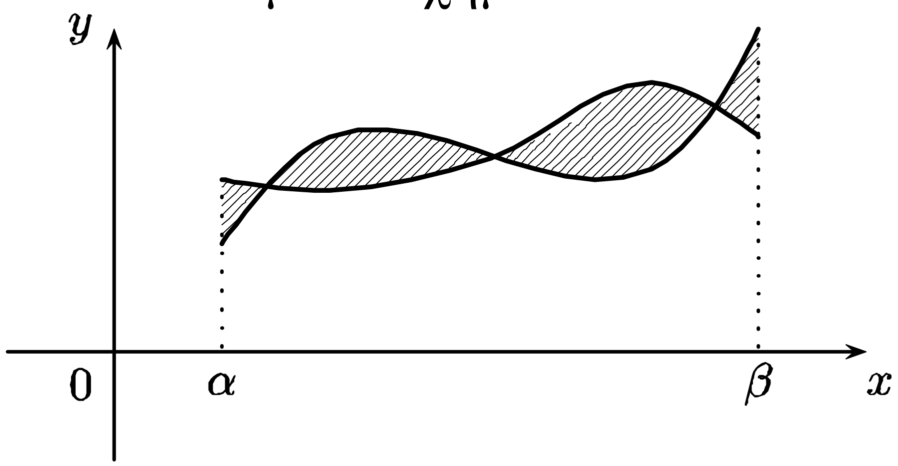


Εμβαδό μεταξύ των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

Αν $f,g/[\alpha,\beta]$ είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις, τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ δίδεται από τον τύπο

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ 47

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ:

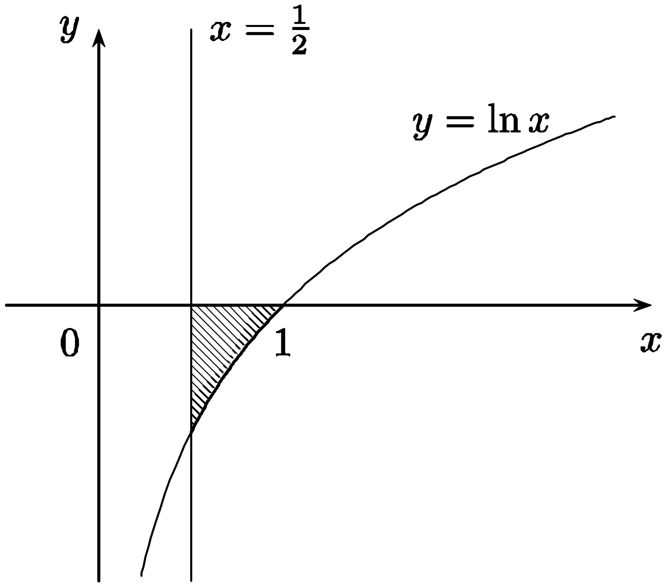
α) Της λογαριθμικής συνάρτησης και των ευθειών $\mathrm{x}=\dfrac{1}{2}$ και $\mathrm{y}=0$.

β) Της άνω ημιπεριφέρειας με εξίσωση $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=4$ και της παραβολής $\mathrm{y}=\dfrac{1}{3}\mathrm{x}^2$.

γ) Της ημιτονοειδούς καμπύλης, της συνημιτονοειδούς καμπύλης και των ευθειών $\mathrm{x}=0$ και $\mathrm{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

ΛΥΣΗ

α)



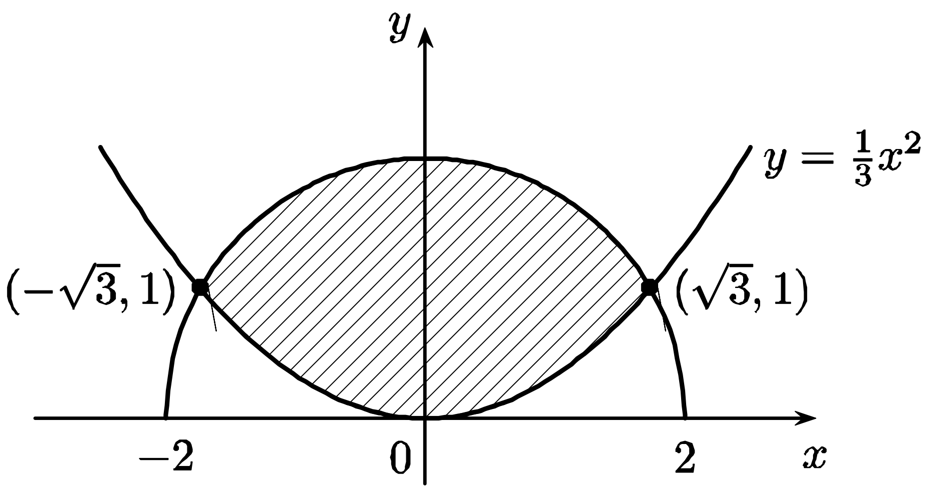
Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} x' \ln x dx = -[x \ln x]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(\ln x)' dx$$

$$= -\ln 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 dx = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$$

$$= \ln \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

β)



Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \dfrac{x^2}{3} \end{cases}$$

προκύπτει ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία $\left(-\sqrt{3},1\right)$ και $\left(\sqrt{3},1\right)$. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{3} \right) dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$E = 2\left(\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3}\,dx \right) \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος, θέτουμε

$$x = 2\sin t,$$

οπότε είναι $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t,\ dx = 2\cos t dt$ και

$$2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos t) 2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} [1+\cos 2t] dt$$

$$= 4\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

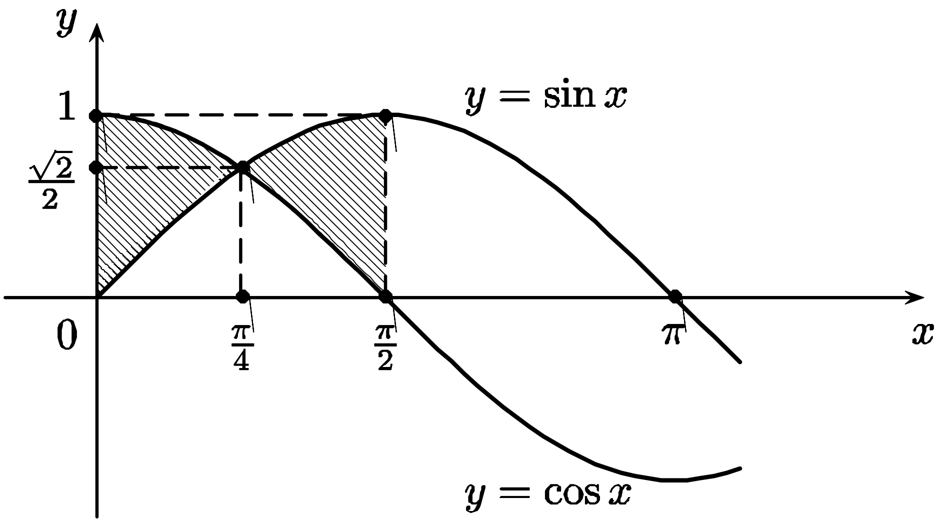
οπότε τελικά,

$$2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\text{E} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} - 2\left[\frac{x^3}{9} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

γ)



Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ τέμνονται μόνο στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\mathrm{E} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) - (1-0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από συναρτήσεις σε παραμετρική μορφή

Αν μια συνάρτηση (ή γενικότερα καμπύλη) δίδεται σε παραμετρική μορφή, δηλαδή

$$x = x(t), y = y(t) \text{ όπου } t \in [c, d]$$

τότε το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

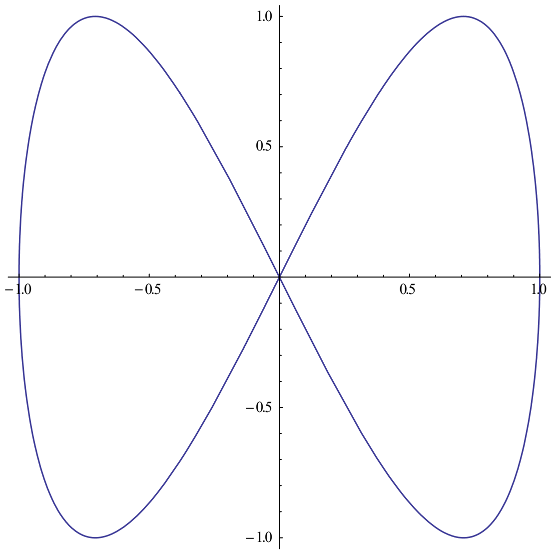
$$\mathrm{E} = \int_c^d y(t) x'(t) dt$$

υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $x'(t), y(t)$ είναι συνεχείς, μη αρνητικές και ισχύει ότι $x(c) = \alpha$ και $x(d) = \beta$.

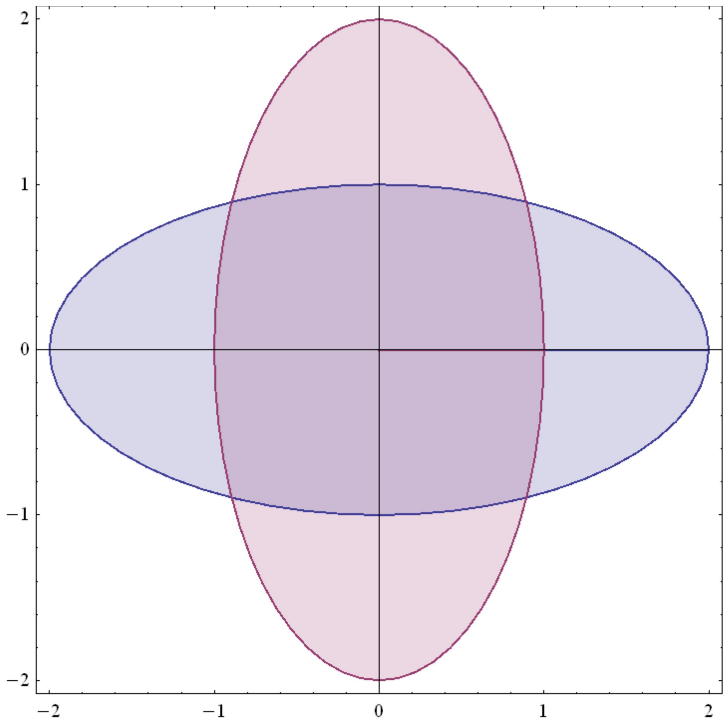
Ο προηγούμενος τύπος προκύπτει άμεσα, δεδομένου ότι

$$\mathrm{E} = \int_\alpha^\beta y dx \text{ και } dx = x'(t) dt.$$

Σημείωση: Η συνθήκη $x'(t) \geq 0$ εξασφαλίζει ότι το x αυξάνει καθώς αυξάνει το t, δηλαδή η καμπύλη διαγράφεται από αριστερά προς τα δεξιά. Στην αντίθετη περίπτωση, το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται με $-E$. Ομοίως, η συνθήκη $y(t) \geq 0$ εξασφαλίζει ότι η καμπύλη βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x. Στην αντίθετη περίπτωση, το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται με $-E$.



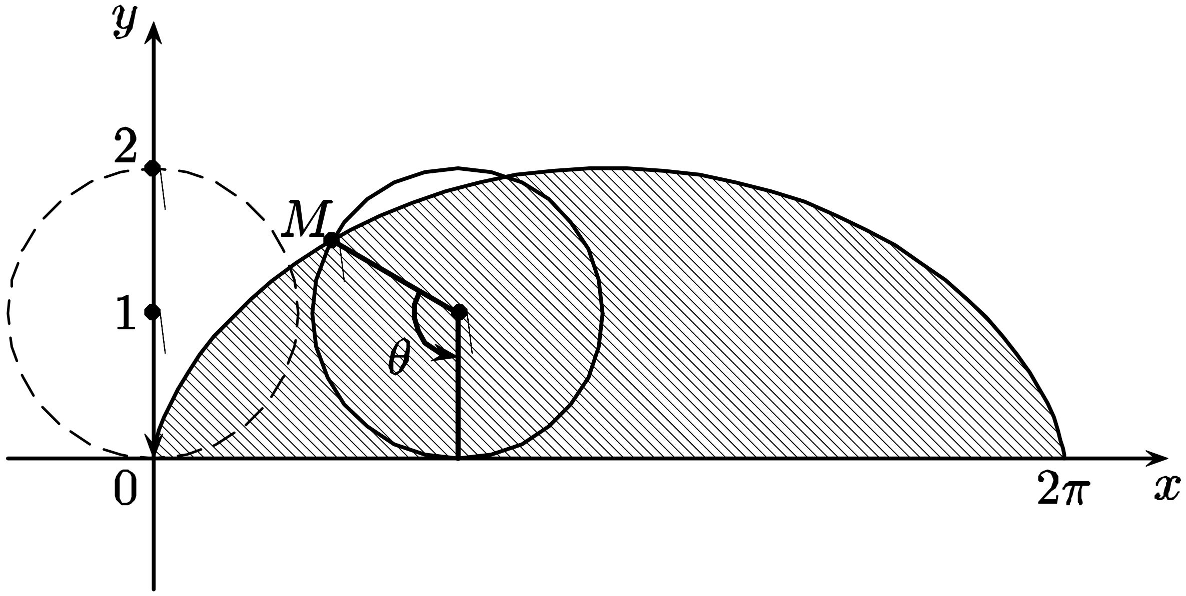
ParametricPlot[{Sin[t],Sin[2t]},{t,0,2Pi}]




```
ParametricPlot[
{{2rCos[t],rSin[t]},{rCos[t],2rSin[t]}},
{t,0,2Pi},{r,0,1},
Mesh→False,PlotLegends→Automatic]
```

ΑΣΚΗΣΗ 50

Να υπολογισθεί το εμβαδό μιας αψίδας της **κυκλοειδούς καμπύλης** με εξισώσεις $x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$, όπου $\theta\in[0,2\pi]$.



ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)(\theta-\sin\theta)'d\theta=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}1d\theta-2\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$$

$$=[\theta]_0^{2\pi}-2[\sin\theta]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=2\pi-0-2(\sin2\pi-\sin0)+\frac{1}{2}[\theta]_0^{2\pi}+\frac{1}{4}[\sin2\theta]_0^{2\pi}$$

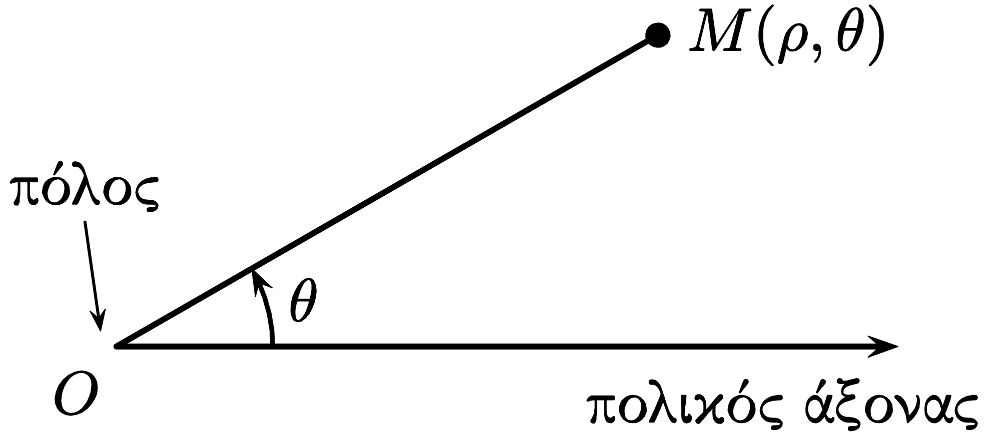
$$=2\pi+\pi+\frac{1}{4}(\sin4\pi-\sin0)=3\pi.$$

Πολικές συντεταγμένες

Όπως είναι γνωστό, η θέση ενός σημείου Μ του επιπέδου καθορίζεται από το ζεύγος (x, y) των καρτεσιανών του συντεταγμένων.

Ένας άλλος τρόπος για τον καθορισμό της θέσης των σημείων του επιπέδου είναι ο εξής:

Θεωρούμε ένα σημείο Ο του επιπέδου το οποίο ονομάζεται **πόλος** και ένα ημιάξονα με αφετηρία το Ο, ο οποίος ονομάζεται **πολικός άξονας**. Κατόπιν τούτου η θέση ενός σημείου Μ του επιπέδου καθορίζεται από το ζεύγος (ρ, θ) όπου ρ είναι η απόσταση του σημείου Μ από τον πόλο Ο και θ η γωνία που σχηματίζει ο πολικός άξονας με την ημιευθεία ΟΜ.

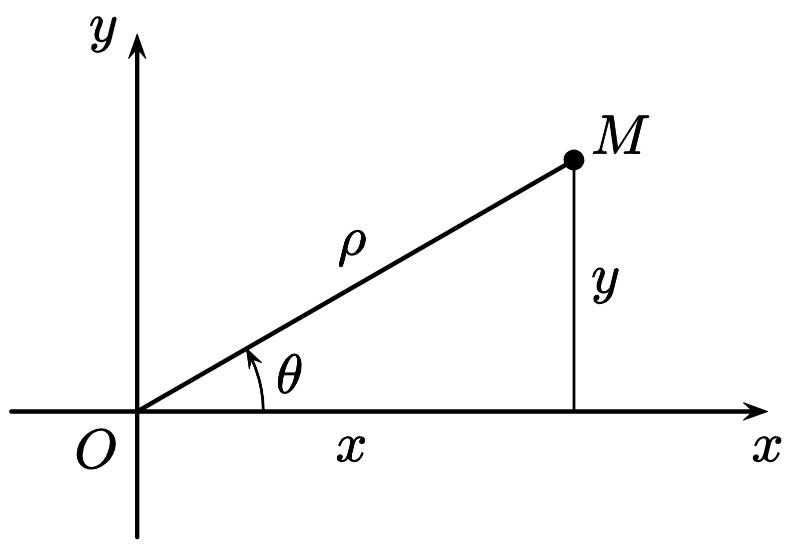


Τα στοιχεία του ζεύγους (ρ, θ) ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου Μ.

Προκειμένου να συσχετισθούν οι πολικές και οι καρτεσιανές συντεταγμένες λαμβάνεται ως πόλος η αρχή των αξόνων και ως πολικός άξονας ο ημιάξονας Ox. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \mathbf{x = \rho\cos\theta} \\ \mathbf{y = \rho\sin\theta} \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \mathbf{tg\theta = \dfrac{y}{x}} \end{cases}$$

όπως προκύπτει άμεσα από το επόμενο ορθογώνιο τρίγωνο.



Είναι φανερό ότι οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου M δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες, αφού τα σημεία με συντεταγμένες (ρ,θ) και $(\rho,\theta+2n\pi)$, όπου $n\in\mathbb{Z}$, συμπίπτουν.

Έτσι, προκειμένου να υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των σημείων του επιπέδου (εκτός του O, όπου $\rho=0$) και των πολικών συντεταγμένων τους, θα θεωρούμε ότι $\rho>0$ και ότι το θ ανήκει σε ένα διάστημα μήκους 2π, συνήθως το $[0,2\pi)$ ή το $(-\pi,\pi]$.

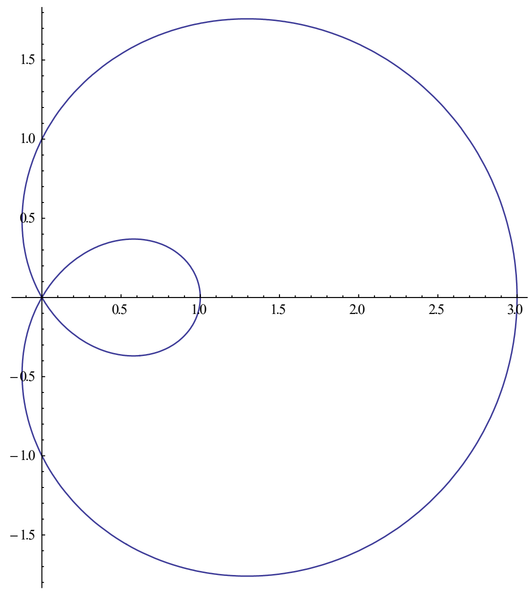
Παραδείγματα

1. Η πολική εξίσωση του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας r είναι $\rho = r$,
2. Η πολική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Ο και σχηματίζει γωνία φ με το πολικό άξονα είναι $\theta = \varphi$
3. Η πολική εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής είναι $\rho^2 \cos 2\theta = \alpha^2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άλλες καμπύλες που η πολική τους εξίσωση είναι απλούστερη από την καρτεσιανή είναι:

1. Οι **καρδιοειδείς καμπύλες** με πολικές εξισώσεις της μορφής

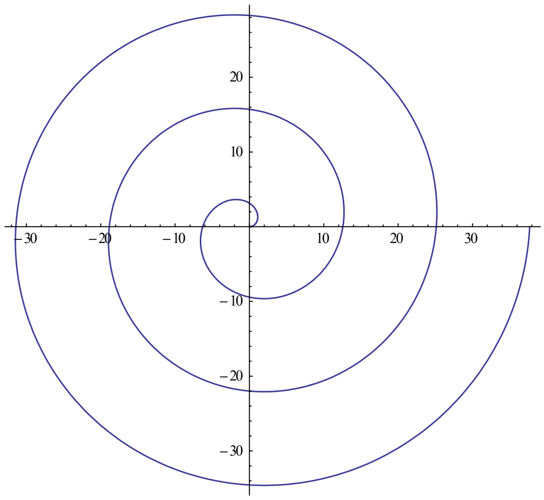
$$\rho = \beta + \alpha \cos\theta \text{ ή } \rho = \beta + \alpha \sin\theta$$



PolarPlot[1+2*Cos[t],{t,0,2*Pi}]

2. Η **έλικα του Αρχιμήδη** με πολική εξίσωση

$$\rho = \alpha\theta$$

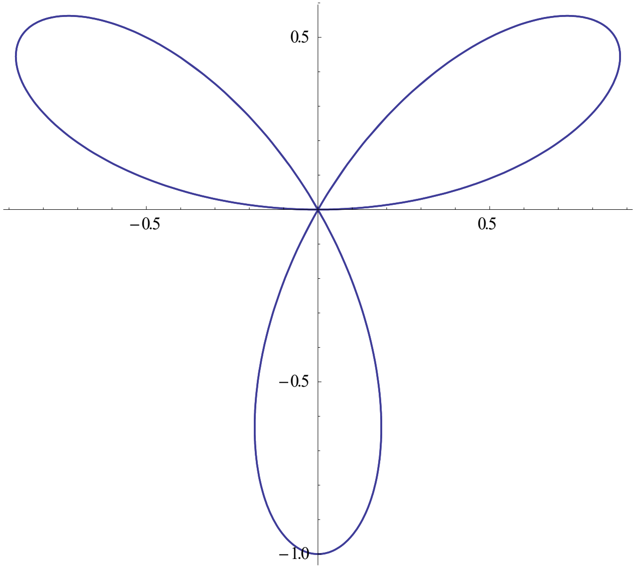


PolarPlot[2*t,{t,0,6*Pi}]

3. Ο **λημνίσκος** με πολικές εξισώσεις

$$\rho^2 = \alpha\cos\kappa\theta \text{ ή } \rho^2 = \alpha\sin\kappa\theta \text{ ή } \rho = \alpha\cos\kappa\theta \text{ ή } \rho = \alpha\sin\kappa\theta,$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{N}^*$.



PolarPlot[Sin[3t],{t,0,2*Pi}]

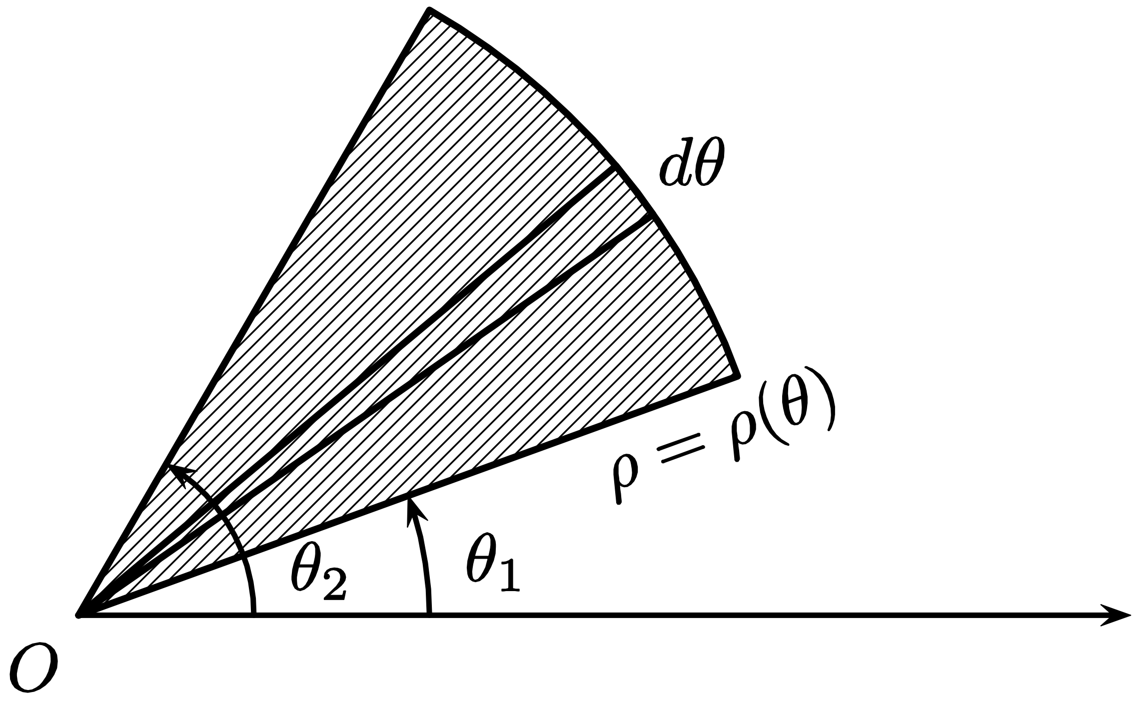
Εμβαδό χωρίου σε πολικές συντεταγμένες

Το εμβαδό Ε του χωρίου του επιπέδου, στο σύστημα των πολικών συντεταγμένων, που περικλείεται από μια καμπύλη C η οποία έχει πολική εξίσωση $\rho = \rho(\theta)$ όπου $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ με $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ δίδεται από τον τύπο

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\, d\theta,$$

αφού το εμβαδό dE του στοιχειώδους χωρίου προκύπτει από τον γνωστό τύπο του εμβαδού κυκλικού τομέα

$$d\mathrm{E} = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta.$$



ΑΣΚΗΣΗ 52

α) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της παραβολής

$$\rho = \frac{2}{1+\cos\theta}$$

και των ημιευθειών $\theta = 0$ και $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

β) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη καρδιοειδή καμπύλη με εξίσωση

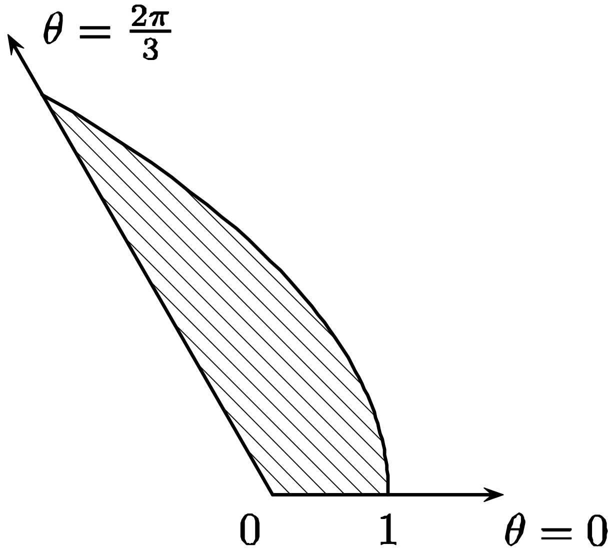
$$\rho = \sqrt{2}(1+\cos\theta),\ \theta \in [0, 2\pi].$$

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από το λημνίσκο με εξίσωση

$$\rho^2 = \cos 2\theta,\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζουμε τον τύπο $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\,d\theta$ για τη συνάρτηση $\rho = \frac{2}{1+\cos\theta}$.



Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{4}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

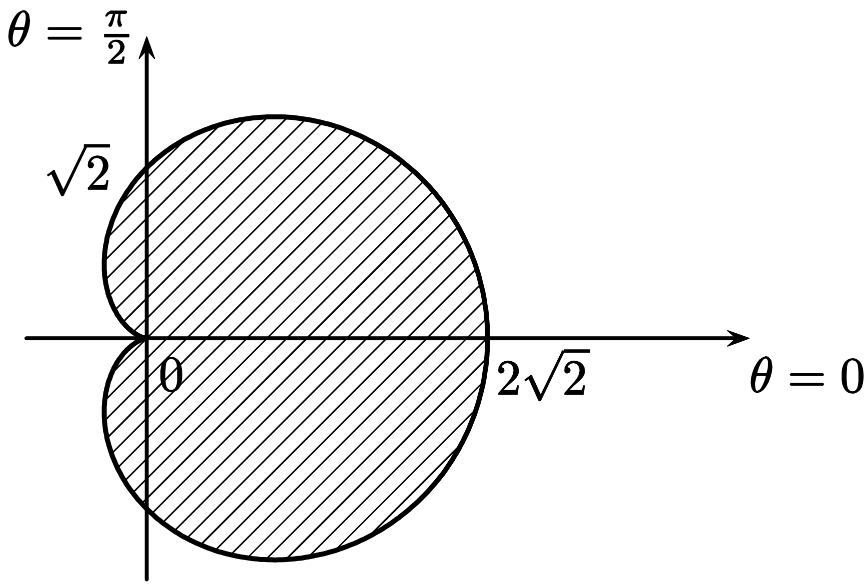
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left[1 + tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta.$$

Αν τεθεί $y = tg\frac{\theta}{2}$, προκύπτει ότι $dy = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$, οπότε

$$E = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1+y^2\right) dy = \left[y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

β) Εφαρμόζουμε τον τύπο $\mathrm{E}=\dfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2(\theta)\,d\theta$ για τη συνάρτηση $\rho=\sqrt{2}(1+\cos\theta),\ \theta\in[0,2\pi]$.



Το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

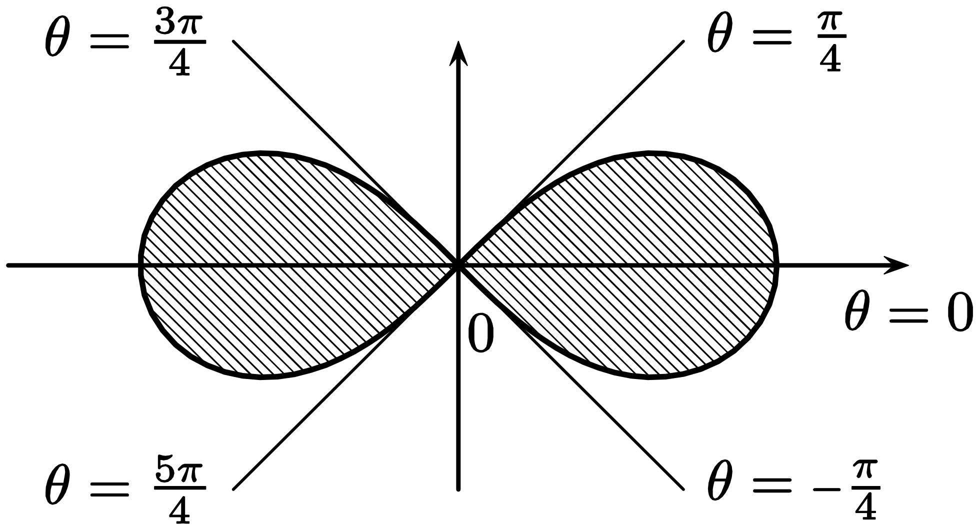
$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}1d\theta+2\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$$

$$=2\pi+2[\sin\theta]_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=2\pi+\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=3\pi\,.$$

γ)



$$\rho^2 = \cos 2\theta,\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Επειδή, από τη συμμετρία του σχήματος, τα φύλλα του λημνίσκου έχουν ίσο εμβαδό, το συνολικό εμβαδό θα είναι

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}[\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

7. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

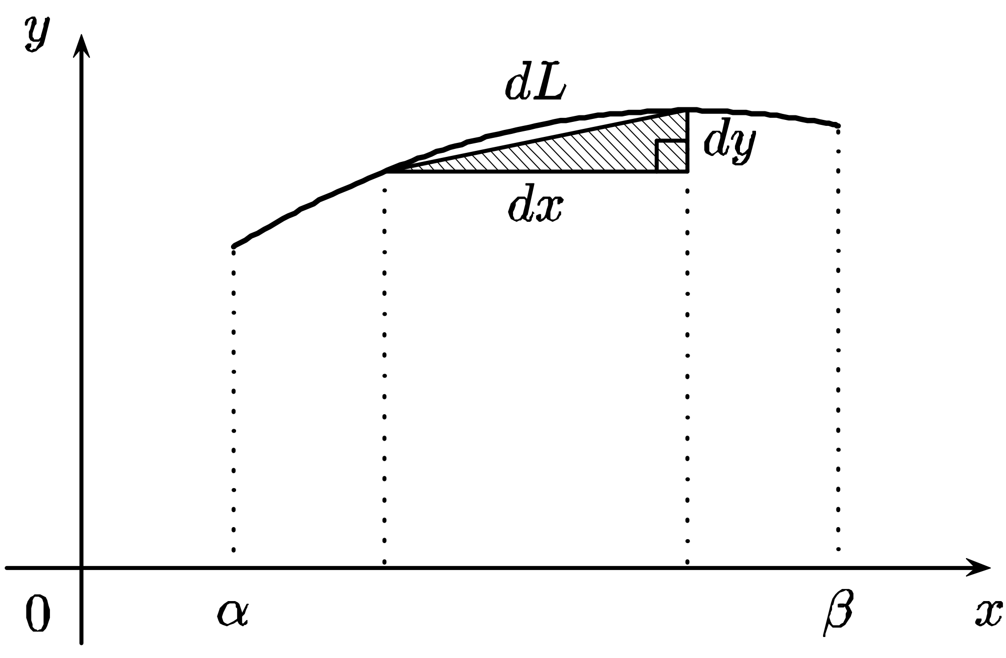
1. Μήκος τόξου της γραφικής παράστασης συνάρτησης

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ με παράγωγο συνεχή. Τότε, το μήκος τόξου της γραφικής παράστασης ισούται με

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

αφού το μήκος dL του στοιχειώδους τόξου μπορεί να θεωρηθεί ίσο με το μήκος της υποτείνουσας του γραμμοσκιασμένου τριγώνου του επόμενου σχήματος, οπότε θα ισχύει ότι

$$dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$



ΑΣΚΗΣΗ 55

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης

$$y = \cosh x \,/\, [0, \ln 3].$$

ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο μήκος τόξου θα είναι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + \left((\cosh x)'\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{\ln 3} \\
&= \sinh(\ln 3) - \sinh 0 \\
&= \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Μήκος τόξου καμπύλης σε παραμετρική μορφή

Το μήκος του τόξου μιας καμπύλης που δίδεται σε παραμετρική μορφή

$$x = x(t),\ y = y(t) \text{ όπου } t \in [c, d],$$

δίδεται από τον τύπο

$$L = \int_c^d \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι **παραγωγίσιμες με παραγώγους συνεχείς**.

Παράδειγμα

Το μήκος τόξου L ενός κύκλου ακτίνας r που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία φ είναι ίσο με $r \cdot \varphi$.

Πραγματικά, θεωρώντας την παραμετρική μορφή του τόξου αυτού

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ t \in [0, \varphi],$$

προκύπτει ότι

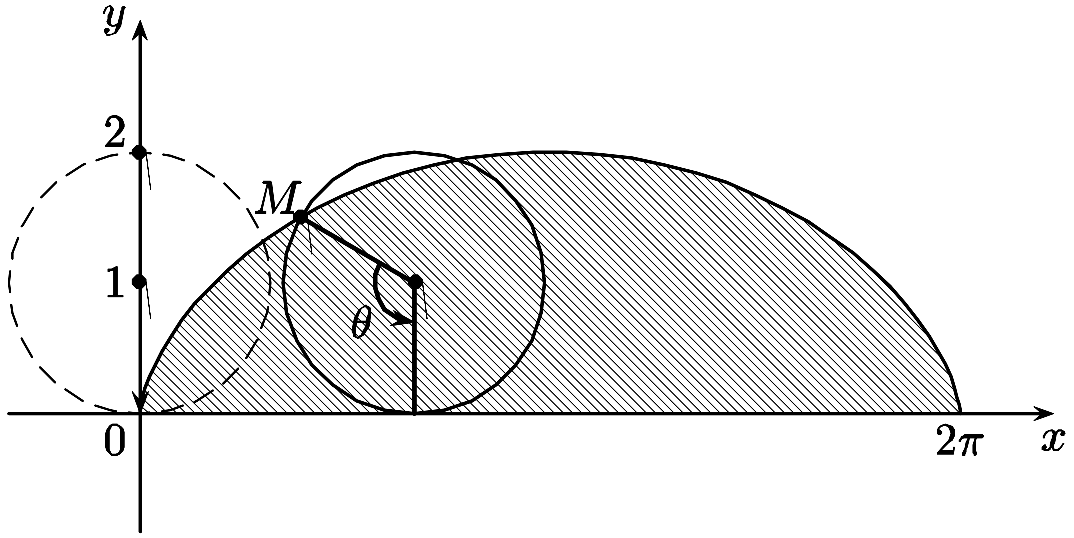
$$\text{L}= \int_0^\varphi \sqrt{\left((r\cos t)'\right)^2 + \left((r\sin t)'\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^\varphi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = r\int_0^\varphi 1 dt = r \cdot \varphi.$$

ΑΣΚΗΣΗ 56

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου μιας αψίδας του κυκλοειδούς με εξισώσεις:

$$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta,\ \text{όπου } \theta \in [0, 2\pi].$$



ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο μήκος τόξου είναι

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4(-\cos\pi + \cos 0) = 8.$$

Μήκος τόξου καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες

Το μήκος τόξου L μιας επίπεδης καμπύλης C που ορίζεται στο σύστημα πολικών συντεταγμένων, με πολική εξίσωση $\rho = \rho(\theta)$, όπου $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ με $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$ δίδεται από τον τύπο

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)\right)^2}\, d\theta \qquad (1)$$

Πραγματικά, καμπύλη C γράφεται στην παραμετρική μορφή

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta,\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

οπότε χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο του μήκους τόξου για συναρτήσεις σε παραμετρική μορφή προκύπτει ότι

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\left(\rho(\theta)\cos\theta\right)'\right)^2 + \left(\left(\rho(\theta)\sin\theta\right)'\right)^2}\, d\theta \qquad (2)$$

Αλλά

$$\left(\left(\rho(\theta)\cos\theta\right)'\right)^2 + \left(\left(\rho(\theta)\sin\theta\right)'\right)^2$$

$$= \left(\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta\right)^2 + \left(\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta\right)^2$$

$$= \left(\rho'(\theta)\right)^2\cos^2\theta + \left(\rho(\theta)\right)^2\sin^2\theta - 2\rho(\theta)\rho'(\theta)\cos\theta\sin\theta +$$

$$\left(\rho'(\theta)\right)^2\sin^2\theta + \left(\rho(\theta)\right)^2\cos^2\theta + 2\rho(\theta)\rho'(\theta)\cos\theta\sin\theta$$

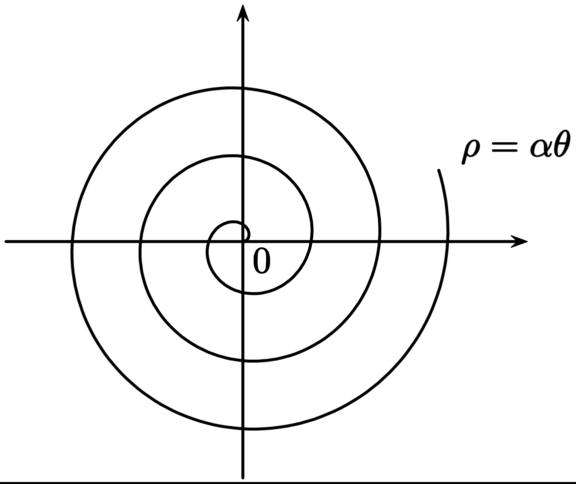
$$= \left(\rho'(\theta)\right)^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \left(\rho(\theta)\right)^2\left(s\mathrm{in}^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$= \left(\rho'(\theta)\right)^2 + \left(\rho(\theta)\right)^2.$$

Επομένως, από τη σχέση (2) προκύπτει άμεσα ο τύπος (1).

ΑΣΚΗΣΗ 58

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου της έλικας του Αρχιμήδη, με εξίσωση $\rho = \alpha\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\alpha > 0$



ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο μήκος της έλικας του Αρχιμήδη του παραπάνω σχήματος είναι

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2\theta^2 + \alpha^2}\, d\theta$$

$$= \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta \qquad (1)$$

Αν τεθεί $\theta = \sinh t$, τότε είναι $d\theta = \cosh t dt$ και $\sqrt{\theta^2 + 1} = \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \cosh t$,

οπότε

$$\int \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta = \int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1 + \cosh 2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sinh 2t$$

$$= \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsinh}\theta + \theta\sqrt{\theta^2 + 1})$$

Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}\right).$$

8. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

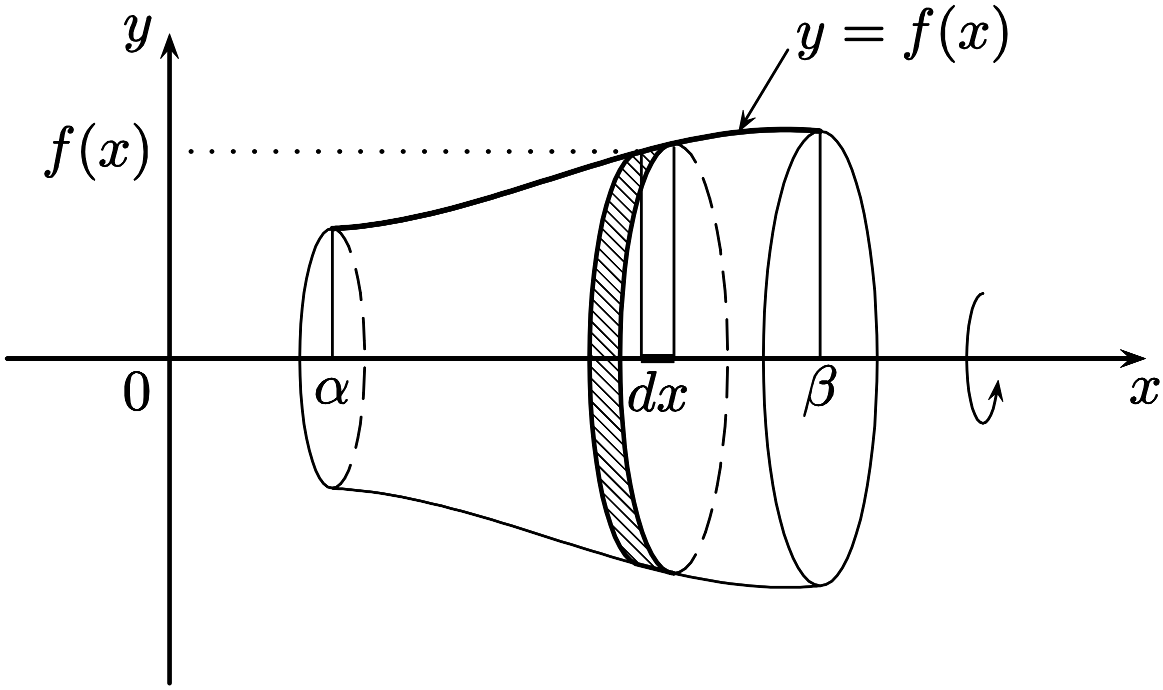
Έστω μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ και R το χωρίο που ορίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Τότε ο όγκος V του στερεού που προκύπτει με περιστροφή του χωρίου R γύρω από τον άξονα των τετμημένων ισούται με

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)\right)^2 dx,$$

αφού ο όγκος dV του στοιχειώδους στερεού μπορεί να θεωρηθεί ίσος με τον όγκο του κυλίνδρου, ύψους dx και ακτίνας βάσης $f(x)$, του επόμενου σχήματος, οπότε θα ισχύει

$$dV=\pi\left(f(x)\right)^2 dx.$$

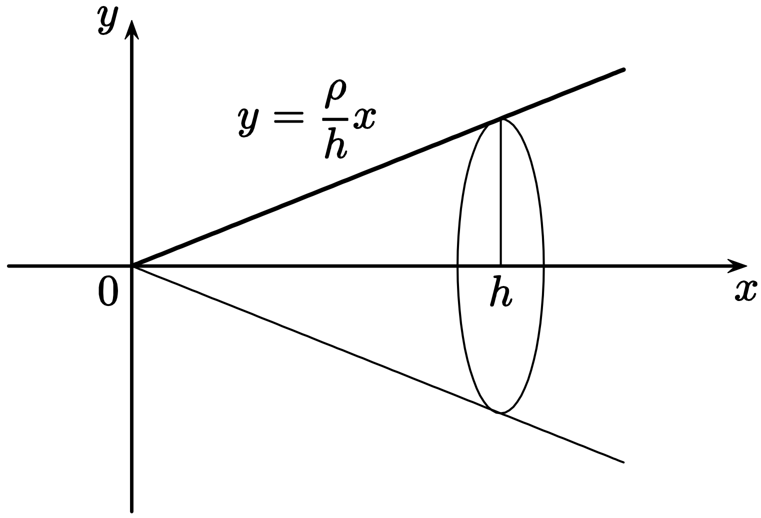


Παραδείγματα

Α) Ο κώνος ύψους h και ακτίνας βάσης ρ μπορεί να προκύψει με περιστροφή του τριγώνου που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\rho}{h}x\,/\left[0,h\right]$$

με τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x=h$, γύρω από τον άξονα των τετμημένων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



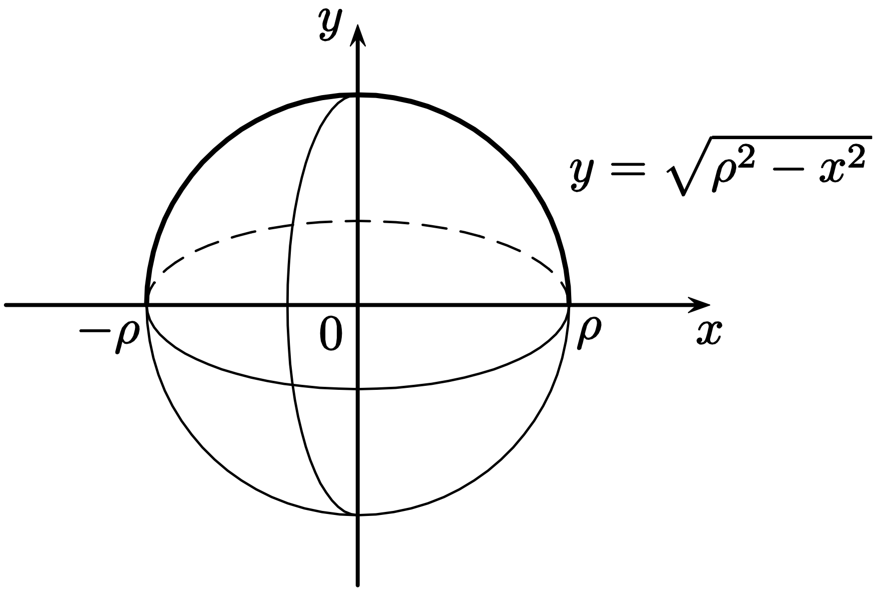
Κατόπιν τούτου, είναι

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^h\left(\frac{\rho}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi\rho^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi\rho^2 h.$$

Β) Η σφαίρα ακτίνας ρ μπορεί να προκύψει με περιστροφή του άνω ημικυκλίου που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{\rho^2-x^2}\;/\left[-\rho,\rho\right]$$

με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x=-\rho$, $x=\rho$ γύρω από τον άξονα των τετμημένων, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Κατόπιν τούτων, είναι

$$V=\pi\int_{-\rho}^{\rho}\left(\sqrt{\rho^2-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\left[\rho^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\rho}^{\rho}=\pi\left(\rho^3-\frac{\rho^3}{3}-\left(-\rho^3+\frac{\rho^3}{3}\right)\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

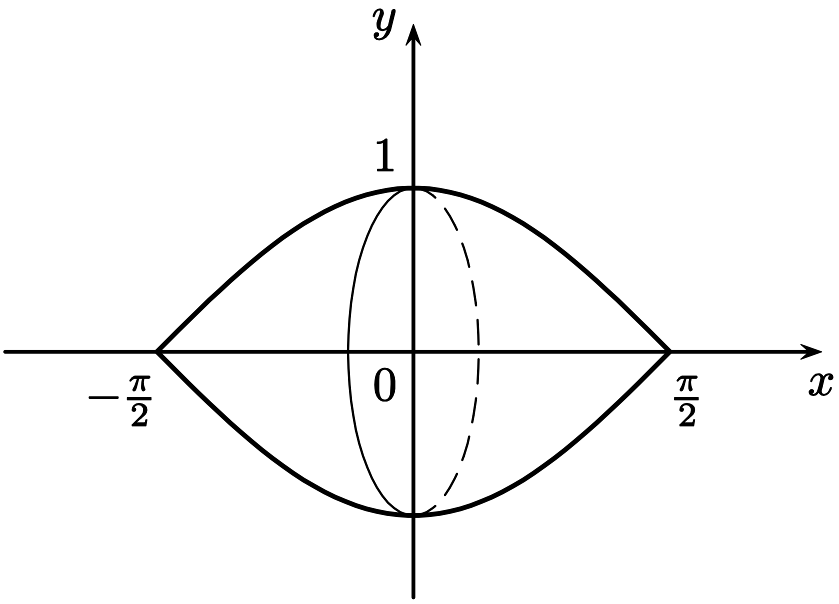
Ο τύπος του όγκου εκ περιστροφής εφαρμόζεται και σε πιο σύνθετες περιπτώσεις. Έτσι, αν $f, g / [\alpha, \beta]$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις με $0 \le f(x) \le g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ο όγκος V του στερεού που προκύπτει με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g και των ευθειών $x = \alpha, x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(g^2(x) - f^2(x) \right) dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 59

Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει με περιστροφή περί τον άξονα των τετμημένων, του χωρίου της συνάρτησης

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{cosx} \,/\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$



ΛΥΣΗ

Ο ζητούμενος όγκος του στερεού που παράγεται δια περιστροφής (βλ. σχήμα) είναι

$$\mathrm{V} = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$