8 Όριο -συνέχεια

Όριο συνάρτησης: Αν $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in D(f)$ με

$$\boxed{\begin{cases} 0 < |x-\xi| < \delta, & \text{αν } \xi \in \mathbb{R}, \\ x > \delta, & \text{αν } \xi = +\infty, \\ x < -\delta, & \text{αν } \xi = -\infty, \end{cases} \quad \text{να ισχύει} \quad \begin{cases} |f(x)-\ell| < \varepsilon, & \text{αν } \ell \in \mathbb{R}, \\ f(x) > \varepsilon, & \text{αν } \ell = +\infty, \\ f(x) < -\varepsilon, & \text{αν } \ell = -\infty. \end{cases}}$$

Τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi^-} f(x)$ στο $\xi \in \mathbb{R}$ ορίζονται όπως παραπάνω, με την επιπλέον απαίτηση να είναι $x > \xi$ (αντίστοιχα $x < \xi$). Το όριο της f στο ξ υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα.

Αρχή της μεταφοράς: Αν $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $x_n \in D(f) \setminus \{\xi\}$ και $\lim x_n = \xi$ ισχύει $\lim f(x_n) = \ell$.

Εφαρμογές: $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

Ιδιότητες ορίου: Οι τρεις πρώτες ιδιότητες ισχύουν αρκεί να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$, με $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, και να μην προκύπτει απροσδιοριστία ($+\infty - \infty$, $0\cdot(\pm\infty)$). Οι τρεις τελευταίες απαιτούν να πληρούνται οι αντίστοιχες προϋποθέσεις σε μια περιοχή $\pi(\xi)\setminus\{\xi\}$.

- $\lim_{x\to\xi}(kf(x) + \lambda g(x)) = k\lim_{x\to\xi} f(x) + \lambda \lim_{x\to\xi} g(x)$.
- $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x) \lim_{x\to\xi} g(x)$.
- $\lim_{x\to\xi} |f(x)|^k = |\lim_{x\to\xi} f(x)|^k$, για κάθε $k \in \mathbb{Q}^*$. (Το απόλυτο μπορεί να παραληφθεί, όταν $k \in \mathbb{N}^*$.)
- (Κριτήριο παρεμβολής) Αν $\lim_{x\to\xi} h(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = \ell$ και $h(x) \le f(x) \le g(x)$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$.
- (Σύνθεση) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to\ell} g(x) = m$ και $f(x) \neq \ell$, τότε $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = m$.
- Αν $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = a \in (0, +\infty)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = b \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to\xi}(f(x))^{g(x)} = a^b$.

Βασικά όρια:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$. (Αποδεικνύονται με το κριτήριο παρεμβολής.)

  Εφαρμογές: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x} - e^{3x}}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x(e^x + e^{-x})}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x(x+2)}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$.
- $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Ασύμπτωτες:

- Αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε η ευθεία $x = \xi$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = \pm\infty$.

- Αν $\xi = \pm\infty$, τότε η ευθεία $y = ax+b$ είναι $\begin{cases} \text{πλάγια ασύμπτωτη της } f, & \text{αν } a \neq 0, \\ \text{οριζόντια ασύμπτωτη της } f, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} (f(x) - (ax+b)) = 0$.

  Οι a, b υπολογίζονται ως εξής: $a = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{x}$ και $b = \lim_{x\to\xi}(f(x) - ax)$.

9 Συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in D(f)$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Ακολουθιακός ορισμός: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in D(f)$ και $\lim x_n = \xi$ είναι $\lim f(x_n) = f(\xi)$.

Βασικές συνεχείς συναρτήσεις:

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση.
- Κάθε ρητή συνάρτηση (πηλίκο δύο πολυωνύμων) είναι συνεχής.
- Η $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
- Οι τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις.
- Οι a^x και $\log_a x$, $1 \neq a > 0$.
- Αν f, g συνεχείς τότε είναι και οι

  $kf+\lambda g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}, \quad (f(x))^{g(x)}$, αν $f(x) > 0$, $\quad |f|^a$, όπου $a > 0$. $\quad g\circ f$, αν $R_f \subseteq D_g > 0$.

Συνέχεια σε κλειστό διάστημα: Έστω $f/[a, b]$ συνεχής.

- Η f είναι φραγμένη.
- Υπάρχουν $m, M \in [a, b]$ με $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$, για κάθε $x \in [a, b]$. (Θεώρημα μεγίστου-ελαχίστου)
- Αν $f(a) < \gamma < f(b)$ ή $f(b) < \gamma < f(a)$, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f(\xi) = \gamma$. (Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής)
- Αν $f(a)f(b) < 0$, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f(\xi) = 0$. (Θεώρημα Bolzano)
- Αν $f : [a, b] \to [a, b]$, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ με $f(\xi) = \xi$. (Θεώρημα σταθερού σημείου)
- Αν η f είναι 1-1, τότε η $f^{-1}/f([a, b])$ είναι επίσης συνεχής.

Ομοιόμορφη (ή ομαλή) συνέχεια: Η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε } (x, y \in D(f) \text{ και } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).}$$

Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας αναφέρεται σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της f και όχι σε μεμονωμένο σημείο. Αποδεικνύεται ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Όμως, κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ασυνέχεια:

- πρώτου είδους: Αν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to \xi^+}, \lim_{x \to \xi^-} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι και τα δύο ίσα με $f(\xi)$.
- δεύτερου είδους: Αν κάποιο από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει.

Ασκήσεις

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 3, (βλ. άλυτη άσκηση 4)). *Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης* $f(x) = \cos(1/x)/\mathbb{R}^*$, *όταν* $x \to 0$.

Λύση. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι το πλευρικό όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n) και (y_n) θετικών αριθμών, τέτοιες ώστε $\lim x_n = \lim y_n = 0$ και τα όρια των ακολουθιών $(f(x_n))$, $(f(y_n))$ να υπάρχουν αλλά να είναι διαφορετικά.

Επιλέγουμε $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ και $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$, οι οποίες είναι προφανώς μηδενικές. Επιπλέον, είναι

$$\lim f(x_n) = \lim \cos(2\pi n) = \lim \cos(0) = 1,$$

$$\lim f(y_n) = \lim \cos(2\pi n + \pi/2) = \lim \cos(\pi/2) = 0 \neq 1,$$

άρα πράγματι το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει. (Αν υπήρχε, τότε θα έπρεπε να είναι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.)

Ομοίως, το πλευρικό όριο $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι αν επιλέξουμε δύο μηδενικές ακολουθίες αρνητικών αριθμών, π.χ. τις $x_n = \dfrac{1}{-2\pi n}$ και $y_n = \dfrac{1}{-2\pi n - \pi/2}$, τότε

$$\lim f(x_n) = \lim \cos(-2\pi n) = \lim \cos(0) = 1,$$

$$\lim f(y_n) = \lim \cos(-2\pi n - \pi/2) = \lim \cos(-\pi/2) = 0 \neq 1.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 13). *Να ευρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια:*

$$i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor, \qquad ii)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt[\lfloor x\rfloor]{x}, \qquad iii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3}.$$

Λύση. i) Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1$, ή ισοδύναμα

$$x-1<\lfloor x\rfloor\le x.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}-1\right)\le\frac{1}{x}\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\le\frac{1}{x}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Επειδή, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=\frac{1}{2}$.

ii) Ομοίως, για $x>1$, προκύπτει ότι

$$\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor}\le\sqrt[\lfloor x\rfloor]{x}<\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor+1}\le\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor}=\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor}\,\sqrt[\lfloor x\rfloor]{2}$$

Από τα γνωστά όρια $\lim\sqrt[n]{n}=\lim\sqrt[n]{2}=1$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[\lfloor x\rfloor]{2}=1$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[\lfloor x\rfloor]{x}=1$.

Εναλλακτικά, θέτοντας $f(x)=\sqrt[\lfloor x\rfloor]{x}$, έχουμε ότι

$$\frac{\ln x}{x}\le\ln f(x)=\ln x^{1/\lfloor x\rfloor}=\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\ln x<\frac{\ln x}{x-1}$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=0$.

Για το πρώτο όριο, για $x>1$, έχουμε ότι

$$0<\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(\sqrt{x})^2}{x}=\frac{2\ln\sqrt{x}}{x}<\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}},$$

οπότε δεδομένου ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$, έπεται ότι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Επομένως, είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=0\cdot1=0.$$

iii) Ομοίως,

$$\frac{x^2-x}{4x^2+3}=\frac{x(x-1)}{4x^2+3}<\frac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3}\le\frac{x^2}{4x^2+3}$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{4x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x^2+3}=\frac{1}{4}$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3}=\frac{1}{4}$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 23 (βλ. άλυτες ασκήσεις 25, 26)). *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x},\qquad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x},\qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, καθώς και η γνωστή ταυτότητα $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, οπότε

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x).$$

$$\begin{aligned} i)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos^2 x}(1+\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x}(1+\cos x)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 1(1+\cos 0) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}(1+\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{\sin^2 x}(1+\cos x)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}+1\right)(1+\cos x) = \left(1+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\\ &= (1+1)(1+\cos 0) = 4. \end{aligned}$$

$$iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos bx}{1-\cos x}-\frac{1-\cos ax}{1-\cos x}\right).$$

Επιπλέον, είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos bx}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 bx}{1-\cos^2 x}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 bx}{\sin^2 x}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin bx}{bx}\right)^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{bx}{\sin x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\ &= \left(\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\right)^2 b^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\ &= 1\cdot b^2\cdot 1\cdot\frac{1+1}{1+1} = b^2. \end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτει και $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos x}=a^2$.

Άρα, τελικά είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x}=b^2-a^2$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 25 (βλ. άλυτη άσκηση 28)). *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x},\qquad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x(e^{x}+e^{-x})},\qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-b^{x}}{x},\quad a,b>0.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$.

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x}=\lim_{x\to 0}e^{3x}\frac{e^{4x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}(4e^{3x})\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}=4e^{0}\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}=4.$$

$ii)$ Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με e^{x}, προκύπτει

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x(e^{x}+e^{-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x(e^{2x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\frac{2}{e^{2x}+1}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^{2x}+1}=1\cdot\frac{2}{1+1}=1.$$

$iii)$ Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln a^{x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}\ln a=\ln a,$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-b^{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x}-1}{x}-\frac{b^{x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^{x}-1}{x}=\ln a-\ln b.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 30 (βλ. άλυτη άσκηση 32)). *Να υπολογισθεί το όριο*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+1}\right)^x.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$. Θέτουμε

$$f(x) = \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+1}\right)^x = \left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)^x \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{x^2+x+1}{3x+2},$$

οπότε

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^x = \left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)\frac{x}{g(x)}}.$$

Αν επιπλέον τεθούν

$$G(x) = \left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \frac{x}{g(x)},$$

τότε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{x(3x+2)}{x^2+x+1} = 3,$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x)^{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} G(x)^{\lim_{x\to+\infty} h(x)} = e^3.$$

Εναλλακτικά,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(3x+2)}{x^2+x+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)}{\frac{3x+2}{x^2+x+1}}$$
$$= 3\lim_{z\to1}\frac{\ln z}{z-1} = 3,$$

επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln f(x)} = e^3.$$

□

10 Παράγωγος

Ορισμός: Η παράγωγος $f'(\xi)$ της f στο σημείο ξ του πεδίου ορισμού της ταυτίζεται με το όριο
$\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, όταν αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Αν η f/A είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\xi \in A$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τα ζεύγη $(\xi, f'(\xi))$ ονομάζεται *παράγωγος συνάρτηση* της f και συμβολίζεται με $f'(x)$ ή $\dfrac{df}{dx}$.

Πρόταση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, τότε θα είναι και συνεχής σε αυτό.

Κανόνες παραγώγισης: Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

- $(\lambda f + kg)' = \lambda f' + kg'$ (Γραμμικότητα)
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$, ή ισοδύναμα $\dfrac{df\circ g}{dx} = \dfrac{df\circ g}{dg}\dfrac{dg}{dx}$ (Κανόνας αλυσίδας)
- $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ (διότι $1 = \dfrac{dx}{dx} = \dfrac{df^{-1}\circ f}{dx} = \dfrac{df^{-1}\circ f}{df}\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df^{-1}}{dy}\dfrac{df}{dx}$)

Βασικές παραγωγίσεις:

$f(x)$	c	x^a	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	a^x	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$f'(x)$	0	ax^{a-1}	$\frac{1}{x}$	e^x	$a^x\ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Παράγωγος ανώτερης τάξης: Η n-οστή παράγωγος $f^{(n)}(x)$ (ή $\dfrac{d^nf}{dx^n}$) της $f(x)$, όπου $n \in \mathbb{N}$, ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ και $f^{(0)}(x) = f(x)$ (με την προϋπόθεση βέβαια ότι η $f^{(k)}(x)$ παραγωγίζεται, για κάθε $k < n$).

Βασικές παράγωγοι n τάξης: $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Εφαπτομένη: Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι:

- Η $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$, αν η f παραγωγίζεται στο ξ.

  Η κάθετη στην εφαπτομένη αυτή είναι η $y - f(\xi) = -\dfrac{1}{f'(\xi)}(x-\xi)$.

- Η $x = \xi$, αν $\lim\limits_{x\to\xi^-} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}, \lim\limits_{x\to\xi^+} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \in \{-\infty, +\infty\}$.

Η τιμή $f'(\xi)$ ονομάζεται *συντελεστής διεύθυνσης* ή *κλίση* της εφαπτομένης.

Παραμετρική μορφή: Αν μια καμπύλη C δίνεται σε παραμετρική μορφή δύο μεταβλητών x, y ως προς μια παράμετρο $t \in A$, δηλαδή $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t), y = g(t), t \in A\}$, τότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε ότι $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{g'}{f'}$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την εφαπτομένη της σε κάποιο σημείο ξ.

Θεώρημα (Fermat). *Αν η f/A είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του A και παρουσιάζει σε αυτό τοπικό ακρότατο, τότε είναι $f'(\xi) = 0$. (Το ξ είναι εσωτερικό σημείο του A όταν υπάρχει περιοχή $\pi(\xi) \subseteq A$.)*

Θεώρημα (Rolle). *Αν η f συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Θεώρημα (Μέσης Τιμής). *Αν η f συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Πόρισμα. *$f'(x) = g'(x)$, τότε $f(x) = g(x) + c$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$.*

Απροσδιόριστες μορφές: $\dfrac{0}{0}$, $(\pm 1)\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\pm\infty + (\mp\infty)$, $0(\pm\infty)$, 0^0, $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$

Ο κανόνας του L' Hopital: Αν $f, g/\pi(\xi)\setminus\{\xi\}$ παραγωγίσιμες, $g'(x) \neq 0$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi} g(x) = \ell$, όπου $\ell \in \{0, -\infty, +\infty\}$, και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Οι υπόλοιπες απροσδιόριστες μορφές μπορούν να επιλυθούν με τον κανόνα του L' Hopital, αφού πρώτα αναχθούν σε κάποια από τις δύο πρώτες μορφές με τη βοήθεια των τύπων:

$$f - g = \frac{\frac{f-g}{fg}}{\frac{1}{fg}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}, \qquad fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}, \qquad f^g = e^{\ln f^g} = e^{g\ln f}$$

Μονοτονία: Αν f συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε

- f αύξουσα $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ (αντίστοιχα f φθίνουσα $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$), για κάθε $x \in (a,b)$.
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα), για κάθε $x \in (a,b)$.

  (Προσοχή, στη δεύτερη περίπτωση δεν ισχύει η ισοδυναμία.)

Ακρότατα: Τα υποψήφια σημεία τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης ονομάζονται *κρίσιμα σημεία* και είναι: τα εσωτερικά σημεία όπου μηδενίζεται ή δεν ορίζεται η παράγωγος, καθώς και τα άκρα διαστημάτων (αρκεί η συνάρτηση να ορίζεται στα άκρα αυτά). Αν ισχύει κάποια από τις επόμενες συνθήκες:

- η f είναι συνεχής στο ξ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\begin{cases} x \in (\xi - \delta, \xi) \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ και} \\ x \in (\xi, \xi + \delta) \Rightarrow f'(x) < 0. \end{cases}$

- η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποια περιοχή $\pi(\xi)$, με $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$,

τότε το ξ είναι θέση τοπικού μεγίστου της f. Αλλάζοντας τις ανισότητες για τις f', f'', προκύπτει θέση τοπικού ελαχίστου.

Κυρτότητα: Η $f/(a, b)$ είναι κυρτή αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- $(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1-t)x_1 + tx_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ και $t \in (0, 1)$. (Ορισμός)

- $f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$, για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$.

- $f'/(a, b)$ αύξουσα.

- $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (a, b)$.

Αλλάζοντας τις ανισότητες (και θέτοντας $f'/(a, b)$ φθίνουσα), προκύπτουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να είναι η f κοίλη. Αν ισχύουν γνήσιες ανισότητες, τότε η f είναι γνησίως κυρτή (αντίστοιχα κοίλη).

Σημείο καμπής: Κάθε σημείο της γραφικής παράστασης στο οποίο η συνάρτηση αλλάζει κυρτότητα.

- Αν το ξ είναι θέση σημείου καμπής, τότε $f''(\xi) = 0$.

- Αν $f''(\xi) = 0$ και $f'''(\xi) \neq 0$, τότε το ξ είναι θέση σημείου καμπής.

Ασκήσεις

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 13 (βλ. άλυτη άσκηση 17)). *Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων*

$$f(x) = x^x/(1,+\infty), \qquad g(x) = (x^2+x+1)^{x^2}/\mathbb{R}$$

Λύση.

$$(f(x))' = (x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\,(x\ln x)' = x^x\,(x'\ln x + x(\ln x)') = x^x\,(\ln x + 1)$$

$$\begin{aligned}\frac{g'(x)}{g(x)} &= (\ln g(x))' = (x^2\ln(x^2+x+1))' = \left(2x\ln(x^2+x+1) + \frac{x^2}{x^2+x+1}(x^2+x+1)'\right)\\ &= \left(2x\ln(x^2+x+1) + \frac{x^2(2x+1)}{x^2+x+1}\right)\end{aligned}$$

επομένως, $g'(x) = g(x)\left(2x\ln(x^2+x+1) + \dfrac{x^2(2x+1)}{x^2+x+1}\right)$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 23 (βλ. άλυτη άσκηση 28)). *Να ευρεθούν οι σταθερές $a, b, c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + ax + b/\mathbb{R}$ και $g(x) = x^3 - c/\mathbb{R}$ τέμνονται στο σημείο $(1,2)$ και έχουν κοινή εφαπτομένη σε αυτό.*

Λύση. Αφού, τέμνονται στο $(1,2)$, θα πρέπει να είναι

$$2 = f(1) = 1 + a + b = g(1) = 1 - c,$$

οπότε

$$a + b = 1 \qquad \text{και} \qquad c = -1.$$

Επιπλέον, έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό, άρα

$$f'(1) = 2\cdot 1 + a = 2 + a = g'(1) = 3\cdot 1^2 = 3,$$

οπότε $a = 1$ και ως εκ τούτου $b = 0$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 28 (βλ. άλυτες ασκήσεις 35, 36)). *Να υπολογισθεί με τη βοήθεια του διαφορικού μια προσεγγιστική τιμή του $\sqrt[3]{123}$.*

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}/(0,+\infty)$, οπότε $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Για $x_0 = 125$, είναι $f(x_0) = 5$ και $f'(x_0) = \dfrac{1}{3\cdot 5^2} = \dfrac{1}{75}$. Επομένως, για $x = 123$, είναι

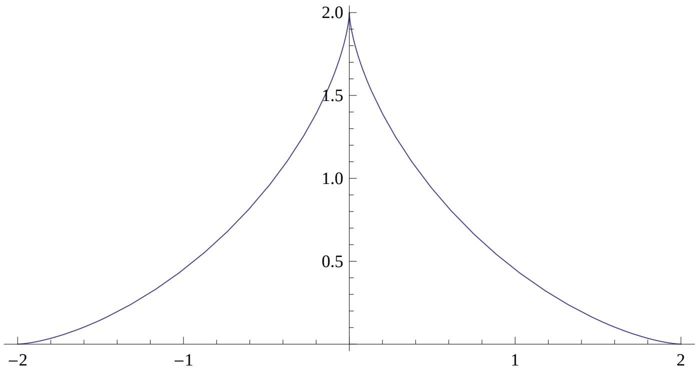
$$\sqrt[3]{123} = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 5 + \frac{1}{75}(123 - 125) = 5 - \frac{2}{75}.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 30 (βλ. άλυτες ασκήσεις 38, 39)). *Έστω η καμπύλη με παραμετρική μορφή*

$$x = x(t) = a\cos^3 t, y = y(t) = a\sin^3 t, \qquad t \in [0,\pi], a \neq 0.$$

Αν η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $A(x(t), y(t))$ τέμνει τους άξονες στα B, Γ, να δειχθεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει σταθερό μήκος (ανεξάρτητο του t).



(Σχήμα.)

Λύση. Η παράγωγος της συνάρτησης δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a3\sin^2 t\cos t}{a3\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x(t), y(t))$ έχει εξίσωση

$$y - a\sin^3 t = -\frac{\sin t}{\cos t}(x - a\cos^3 t) \Rightarrow y\cos t - a\sin^3 t\cos t = -x\sin t + a\cos^3 t\sin t$$

οπότε

$$y\cos t + x\sin t = a\sin t\cos t.$$

Θέτοντας $y = 0$, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου B, δηλαδή $B = (a\cos t, 0)$. Θέτοντας $x = 0$, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, δηλαδή $\Gamma = (0, a\sin t)$. Επομένως, το τετράγωνο του μήκους του $B\Gamma$ ισούται με

$$(a\cos t - 0)^2 + (0 - a\sin t)^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2,$$

δηλαδή είναι σταθερό. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 50 (βλ. άλυτη άσκηση 64)). *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x+1}, n\in\mathbb{N}^*, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

Λύση. Για το πρώτο όριο, έχουμε απροσδιοριστία ∞/∞ και εφαρμόζουμε n φορές τον κανόνα L' Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(\ln x)^{n-1}(1/x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x}$$
$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{x}=0.$$

Για το δεύτερο όριο, έχουμε απροσδιοριστία $\infty-\infty$, οπότε μετασχηματίζουμε πρώτα την παράσταση σε μορφή $0/0$ και έπειτα εφαρμόζουμε τον κανόνα 2 φορές:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 51 (βλ. άλυτη άσκηση 65)). *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+2x+7\right)^{1/x}$$

Λύση. Το πρώτο όριο είναι της μορφής 1^∞, οπότε θέτουμε $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to 0}\ln f(x)$ με τον κανόνα L' Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'-(\ln(1-x))'}{1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1-x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{-1}=2.$$

Επομένως, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{\ln f(x)}=e^2$.

Το δεύτερο όριο είναι της μορφής ∞^0, οπότε θέτουμε $g(x)=(3x^2+2x+7)^{1/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty}\ln g(x)$ με τον κανόνα L' Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x^2+2x+7)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{3x^2+2x+7}=0.$$

Επομένως, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln g(x)}=e^0=1$. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 18). *Να αποδειχθεί ότι* $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $y = f(x) = \operatorname{tg} x/(-\pi/2, \pi/2)$, οπότε $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Βάσει της ταυτότητας $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, διαιρώντας κατά μέλη με $\cos^2 x$, προκύπτει ότι

$$1 + y^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Επιπλέον

$$\operatorname{arctg} y = f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}\operatorname{arctg} y = 1 \Rightarrow \frac{d}{dy}\operatorname{arctg} y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\operatorname{arctg} y = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

□

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 51). *Να αποδειχθούν, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ., οι ανισότητες*

$$p(x-1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x-1), \qquad x > 1, p > 1,$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1-x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4} - \frac{1-x}{2}, \qquad 0 < x < 1.$$

Λύση.

$$p(x-1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x-1) \Leftrightarrow p < \frac{x^p - 1}{x-1} < px^{p-1}$$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $f(t) = t^p/[1, x]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (1, x)$, τέτοιο ώστε $p\xi^{p-1} = f'(\xi) = \dfrac{x^p - 1}{x-1}$. Όμως, για $p > 1$, είναι

$$1 < \xi < x \Rightarrow p < p\xi^{p-1} < px^{p-1},$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Ομοίως για τη δεύτερη ανισότητα,

$$-\frac{1-x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x - \pi/4 < -\frac{1-x}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{1+x^2} < \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{1-x} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{x-1} < \frac{1}{1+x^2}$$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $g(t) = \operatorname{arctg} t/[x, 1]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x, 1)$, τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{1+\xi^2} = g'(\xi) = \dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1}{x-1} = \dfrac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{x-1}$. Όμως,

$$x < \xi < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+x^2},$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 44). *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση* $e^{x-2} + x - 3 = 0$ *έχει ακριβώς μία λύση.*

Λύση. Έστω $f(x) = e^{x-2} + x - 3/\mathbb{R}$, οπότε $f'(x) = e^{x-2} + 1 > 0$. Παρατηρούμε ότι $f(2) = 1 - 1 = 0$, άρα το 2 είναι μια ρίζα της εξίσωσης. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και μια δεύτερη ρίζα $\rho \neq 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\rho > 2$. Τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[2, \rho]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (2, \rho)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $f'(x) > 0$ για κάθε x. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 54). *Έστω* $f/[a, b]$ *συνεχής συνάρτηση, για την οποία υπάρχει η* $f''/(a, b)$. *Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία* $A(a, f(a))$ *και* $B(b, f(b))$ *τέμνει τη γραφική παράσταση της* f *σε ένα τρίτο σημείο* $C(c, f(c))$, *με* $a < c < b$, *να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο* $\xi \in (a, b)$ *με* $f''(\xi) = 0$.

Λύση. Το ευθύγραμμο τμήμα AC έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ και το ευθύγραμμο τμήμα CB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}$. επειδή τα σημεία A, C, B είναι συνευθειακά, έπεται ότι

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Επιπλέον εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στα διαστήματα $[a, c]$ και $[c, b]$ προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (a, c)$ και $\xi_2 \in (c, b)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Επομένως, $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 58). *Να αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}(1+x+x^2), \qquad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(1+n+n^2)$.

Λύση. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg} x$ και $g(x) = \operatorname{arcctg}(1+x+x^2)$. Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-(1+(1+x)^2)}{(1+(1+x)^2)(1+x^2)} = \frac{x^2-(1+x)^2}{(1+1+2x+x^2)(1+x^2)} \\ &\overset{y=1+x+x^2}{=} \frac{-2x-1}{(1+x+y)(y-x)} = \frac{-2x-1}{y-x+xy-x^2+y^2-yx} = \frac{-2x-1}{y-x-x^2+y^2} \\ &= \frac{-2x-1}{1+y^2} = g'(x), \end{aligned}$$

άρα η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $f(x)-g(x) = c$, για κάποια σταθερά c, την οποία υπολογίζουμε θέτοντας οποιαδήποτε τιμή στο x:

$$c = f(0) - g(0) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\pi}{4} = 0.$$

Επομένως, η ταυτότητα ισχύει.

Κατόπιν τούτου,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arcctg}(1+k+k^2) = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{arctg}(1+k) - \operatorname{arctg} k) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

και επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(1+n+n^2) = \lim s_n = \lim \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

□