14 Διαφορικές εξισώσεις

Διαφορική εξίσωση (μίας μεταβλητής) (ΔΕ) είναι κάθε εξίσωση που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ και κάποιες παραγώγους της y.

Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται σε αυτήν καθορίζει την τάξη της.

Ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεγαλύτερης παραγώγου καθορίζει τον βαθμό της.

Λύση της εξίσωσης είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Καμπύλη ολοκλήρωσης της εξίσωσης ονομάζεται η καμπύλη μιας λύσης της.

Χωριζομένων μεταβλητών: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{14.1}$$

οπότε είναι $g(y)dy = f(x)dx$ και ολοκληρώνοντας έχουμε ότι $\int g(y)dy = \int f(x)dx$. Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα προκύπτει η μορφή των λύσεών τους.

Ομογενείς: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \qquad \text{όπου} \quad \frac{f(tx,ty)}{g(tx,ty)} = \frac{t^k f(x,y)}{t^k g(x,y)} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{14.2}$$

Μετατρέπονται σε χωριζομένων μεταβλητών, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ux$.

Η μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{14.3}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής αυτής λύνονται ως εξής:

- Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, τότε τίθεται $z = a_1x + b_1y$, οπότε είναι

  $$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right)$$

  Επειδή $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, έπεται ότι

  $$z = a_1x + b_1y = \frac{a_1}{a_2}(a_2x + b_2y),$$

  οπότε η διαφορική εξίσωση ανάγεται στην

  $$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = \frac{z + c_1}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{b_1z + b_1c_1}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2} + a_1 = \frac{b_1z + b_1c_1 + a_2z + a_1c_2}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2}$$

  και τελικά, στην

  $$\frac{\frac{a_2}{a_1}z + c_2}{(b_1 + a_2)z + b_1c_1 + a_1c_2}dz = dx,$$

  η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

- Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, τότε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση, έστω την (x_0, y_0), οπότε, θέτοντας $X = x - x_0$ και $Y = y - y_0$, η διαφορική εξίσωση ανάγεται στην

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1(X + x_0) + b_1(Y + y_0) + c_1}{a_2(X + x_0) + b_2(Y + y_0) + c_2} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}.$$

Η τελευταία είναι ομογενής, επομένως λύνεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $Y = UX$.

Γραμμικές: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x). \tag{14.4}$$

Έστω $\Phi = \Phi(x)$ μια παράγουσα της $\phi(x)$, δηλαδή $\Phi'(x) = \phi(x)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: 1) Αν $\sigma(x) = 0$, τότε η ΔΕ ονομάζεται **γραμμική ομογενής** και λύνεται άμεσα ως χωριζομένων μεταβλητών:

$$y' = -\phi(x)y \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{y'}{y} = -\phi(x) \Rightarrow (\ln|y|)' = -\phi(x) \Rightarrow \ln|y| = k - \Phi(x) \Rightarrow |y| = e^k e^{-\Phi(x)}$$

οπότε τελικά η γενική λύση της γραμμικής ομογενούς είναι η

$$y = ce^{-\Phi(x)} = cy_0, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{όπου } y_0 = y_0(x) = e^{-\Phi(x)} \tag{14.5}$$

είναι η μερική λύση της γραμμικής ομογενούς, για $c = 1$, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο και στην γενική περίπτωση, όπως φαίνεται παρακάτω.

Στη γενική περίπτωση, αναζητάμε μια θετική συνάρτηση $I = I(x)$, η οποία ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**, τέτοια ώστε $(Iy)' = (y' + \phi y)I$, έτσι ώστε, πολλαπλασιάζοντας την (14.4) με I, να προκύψει

$$(y' + \phi y)I = \sigma I \Rightarrow (Iy)' = \sigma I$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $I(x) = e^{\Phi(x)} = \dfrac{1}{y_0(x)}$, αφού $I'(x) = \phi(x)e^{\Phi(x)} = \phi(x)I(x)$, οπότε

$$(y' + \phi y)I = y'I + \phi I y = y'I + I'y = (Iy)'$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$(I(x)y)' = I(x)\sigma(x) \Rightarrow I(x)y = c + \int I(x)\sigma(x)dx \Rightarrow y = \frac{c + \int I(x)\sigma(x)dx}{I(x)}$$

οπότε, η γενική λύση της (14.4) είναι η

$$y = cy_0(x) + y_0(x)\int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)}dx, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{14.6}$$

Εναλλακτικά, σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η γενική λύση της εξίσωσης (14.4) προκύπτει ως το άθροισμα της γενικής λύσης cy_0 της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μιας (οποιασδήποτε) μερικής λύσης ψ της (14.4), δηλαδή είναι

$$y = cy_0 + \psi,$$

οπότε το πρόβλημα της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης ανάγεται στην εύρεση μιας μερικής λύσης ψ.

Για το σκοπό αυτό, ακολουθείται η **μέθοδος του Lagrange**, σύμφωνα με την οποία αναζητείται συνάρτηση ψ της μορφής $\psi = gy_0$. Αφού η ψ είναι λύση της (14.4), έπεται ότι

$$\psi' + \phi\psi = \sigma \Rightarrow g'y_0 + gy_0' + \phi g y_0 = \sigma \Rightarrow g'y_0 + g(y_0' + \phi y_0) = \sigma \Rightarrow g'y_0 = \sigma.$$

Η τελευταία σχέση προέκυψε διότι η y_0 είναι λύση της ομογενούς, δηλαδή $y_0' + \phi y_0 = 0$. Επομένως, είναι

$$g' = \frac{\sigma}{y_0},$$

οπότε, μια κατάλληλη συνάρτηση g είναι η

$$g = \int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)} dx = \int \sigma(x) e^{\Phi(x)} dx,$$

ώστε η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y = cy_0 + \psi = cy_0 + y_0 g = cy_0 + y_0 \int \frac{\sigma}{y_0} dx,$$

όπως προέκυψε και με την προηγούμενη μέθοδο (βλ. (14.6)).

Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli: Είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x)y^a.$$

Αν $a = 0$ ή $a = 1$, τότε η ΔΕ είναι γραμμική. Αλλιώς, θέτουμε $u = y^{1-a}$. Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει την εξίσωση σε γραμμική. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $(1-a)y^{-a}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&(1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} + (1-a)\phi(x)y^{1-a} = (1-a)\sigma(x) \\
\Leftrightarrow &(y^{1-a})' + (1-a)\phi(x)y^{1-a} = (1-a)\sigma(x) \\
\Leftrightarrow &u' + (1-a)\phi(x)u = (1-a)\sigma(x).
\end{aligned}$$

Άσκηση. *Να λυθεί η (γραμμική) διαφορική εξίσωση*

$$y' + \frac{1}{x}y = 3\sin(2x), \quad x > 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi} \tag{14.7}$$

1. *Με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα.*

2. *Σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.*

Λύση. Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, με $\phi(x) = \dfrac{1}{x}$ και $\sigma(x) = 3\sin(2x)$ (βλ. (14.4)). Μια παράγουσα της $\phi(x)$ είναι η $\Phi(x) = \ln x$.

1) Θέτοντας $I(x) = e^{\Phi(x)} = x$, έχουμε ότι

$$I(x)y' + I(x)\frac{1}{x}y = (I(x)y)'.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την (14.7) με $I(x)$, έχουμε

$$xy' + y = 3x\sin(2x) \Rightarrow (xy)' = 3x\sin(2x) \Rightarrow xy = c_1 + \int 3x\sin(2x)dx \Rightarrow y = \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x}\int 3x\sin(2x)dx$$

Στη συνέχεια, προσδιορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα $\int 3x\sin(2x)dx$ ως εξής

$$\begin{aligned}\int 3x\sin(2x)dx &= \int \frac{-3}{2}x\,(\cos(2x))'\,dx = \frac{-3}{2}x\cos(2x) - \int \left(\frac{-3}{2}x\right)'\cos(2x)dx\\ &= \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int \cos(2x)dx = \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)' dx\\ &= c_2 + \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\end{aligned}$$

Άρα, η γενική λύση της (14.7) είναι η

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x}\left(c_2 + \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\right) = \frac{c}{x} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x)\right), \tag{14.8}$$

όπου $c = c_1 + c_2$.

Χρησιμοποιώντας την δοσμένη τιμή $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}$, προσδιορίζουμε την τιμή της σταθεράς c, ως εξής

$$\frac{1}{\pi} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi} - 0\right) = \frac{4c+3}{\pi}$$

Άρα, $\dfrac{4c+3}{\pi} = \dfrac{1}{\pi} \Rightarrow 4c + 3 = 1 \Rightarrow c = -\dfrac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας την τιμή της c στην (14.8), βρίσκουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

2) Μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

$$y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

είναι ως γνωστό η $y_0 = e^{-\Phi(x)} = \dfrac{1}{x}$. οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y = \frac{c}{x}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{14.9}$$

Στη συνέχεια, αναζητούμε μερική λύση της (14.7), της μορφής $\psi = gy_0$. Ως γνωστό, μια κατάλληλη συνάρτηση g είναι μια παράγουσα της $\sigma(x)e^{\Phi(x)} = 3x\sin(2x)$, οπότε επιλύοντας το ολοκλήρωμα, επιλέγουμε την

$$g = \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x).$$

Τελικά, η γενική λύση της (14.7) είναι το άθροισμα της λύσης (14.9) της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής λύσης ψ, δηλαδή

$$y = \frac{c}{x}+\psi = \frac{c}{x}+y_0g = \frac{c}{x}+\frac{1}{x}g = \frac{c}{x}+\frac{1}{x}\left(\frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\right) = \frac{c}{x}+\frac{3}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x)\right),$$

όπως άλλωστε προέκυψε και στο προηγούμενο ερώτημα.

Η τιμή της σταθεράς c προσδιορίζεται όπως και πριν, θέτοντας $x = \dfrac{\pi}{4}$ στον παραπάνω τύπο. □

Άσκηση (ΦΕΒ 2019). *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}, \qquad y(\pi/2) = 1.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας την ΔΕ κατά μέλη x^3, παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} x^3y' + 3x^2y &= \sin x \\ (x^3y)' &= (-\cos x)' \\ x^3y &= c - \cos x, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = \frac{c - \cos x}{x^3}.$$

Θέτοντας $x = \pi/2$, έχουμε ότι

$$1 = y(\pi/2) = \frac{c - 0}{(\pi/2)^3},$$

οπότε $c = (\pi/2)^3$ και η ζητούμενη μερική λύση είναι η

$$y = \frac{(\pi/2)^3 - \cos x}{x^3}.$$

□

Άσκηση. *Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις*

$$i)\ y' \cos^2 x = y(y-1), y(0) = 2, \qquad iii)\ y' = a - by, b \neq 0.$$

Λύση. i) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

όταν $y \neq 0, 1$. Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int (\operatorname{tg} x)' dx \\
&\Leftrightarrow \ln|y-1| - \ln|y| = k - 2\operatorname{tg} x, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |(y-1)/y| = e^{k-2\operatorname{tg} x} \Leftrightarrow 1 - 1/y = \pm e^k e^{-2\operatorname{tg} x} \\
&\Leftrightarrow 1/y = 1 - ce^{-2\operatorname{tg} x}, \quad c \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = (1 - ce^{-2\operatorname{tg} x})^{-1}, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{ή} \qquad y = 0.$$

Στη συνέχεια, βάσει της αρχικής συνθήκης $y(0) = 2$, υπολογίζουμε τη σταθερά c ως

$$2 = y(0) = (1-c)^{-1} \Leftrightarrow 1 - c = 1/2 \Leftrightarrow c = 1/2$$

οπότε η ειδική λύση με $y(0) = 2$ είναι η $y = (1 - e^{-2\operatorname{tg} x}/2)^{-1}$.

ii) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{a - by} = dx.$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{a-by} = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{b}\ln|a-by| = k + x, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ln|a-by| = -bk - bx \\
&\Leftrightarrow |a-by| = e^{-bk-bx} \Leftrightarrow a - by = \pm e^{-bk}e^{-bx} \Leftrightarrow a - by = c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^* \\
&\Leftrightarrow by = a - c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = \frac{a}{b} - ce^{-bx}, \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

□

Άσκηση. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, x > 0$$

Λύση. Η ΔΕ γράφεται στη μορφή

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

και είναι ομογενής. Θέτοντας $y = ux$, έχουμε ότι $y' = u + u'x$ και

$$\begin{aligned} y' &= u + u'x = \frac{\sqrt{x^2(1-u^2)} + ux}{x} \Leftrightarrow u'x = \frac{x\sqrt{1-u^2} + ux}{x} - u = \sqrt{1-u^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$\arcsin u = c + \ln x, \qquad c \in \mathbb{R}^*$$

δηλαδή $u = \sin(c + \ln x)$ και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = x \sin(c + \ln x), \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

□

Άσκηση. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = \frac{x + 2y + 5}{2x + 4y + 6}.$$

Λύση. Θέτοντας $z = x + 2y$, οπότε $z' = 1 + 2y'$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y' &= \frac{z' - 1}{2} = \frac{z+5}{2z+6} \Rightarrow z' = \frac{2z+10}{2z+6} + 1 = \frac{4z+16}{2z+6} = \frac{2z+8}{z+3} \Rightarrow \frac{z+3}{2z+8}dz = dx \\ &\Rightarrow \frac{2z+6}{2z+8}dz = 2dx \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{2z+8}\right)dz = 2dx \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$2x + c = \int 2dx = \int \left(1 - \frac{2}{2z+8}\right)dz = z - \ln|2z+8| = x + 2y - \ln|2x + 4y + 8|$$

οπότε η γενική λύση της ΔΕ σε πεπλεγμένη μορφή είναι η

$$2y = x + \ln|2x + 4y + 8| + c.$$

□

Άσκηση. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = \frac{x+y-2}{-x+y-4}.$$

Λύση. Βάσει του ακόλουθου συστήματος

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ -x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

θέτουμε $X = x+1$ και $Y = y-3$, οπότε $dY = dy$, $dX = dx$, $y' = dY/dX$ και η ΔΕ μετατρέπεται στην

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X-1)+(Y+3)-2}{-(X-1)+(Y+3)-4} = \frac{X+Y}{-X+Y}.$$

Η νέα ΔΕ είναι ομογενής, οπότε θέτοντας $Y = UX$, μετατρέπεται στην

$$\frac{dU}{dX}X + U = \frac{X+UX}{-X+UX} = \frac{U+1}{U-1} \Rightarrow \frac{dU}{dX}X = \frac{U+1}{U-1} - U = \frac{2U+1-U^2}{U-1},$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται ως

$$\frac{U-1}{2U+1-U^2}dU = \frac{dX}{X}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη,

$$c_1 + \ln|X| = \int \frac{dX}{X} = -\int \frac{U-1}{U^2-2U-1}dU = \frac{-1}{2}\int \frac{(U^2-2U-1)'}{U^2-2U-1}dU = \frac{-1}{2}\ln|U^2-2U-1|,$$

όπου $c_1 \in \mathbb{R}$, και τελικά

$$\ln|U^2-2U-1| = -2c_1 - \ln X^2 \Rightarrow U^2-2U-1 = \frac{c_2}{X^2}, \quad c_2 \in \mathbb{R}^*$$

Αντικαθιστώντας, είναι $U = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y-3}{x+1}$ και

$$\begin{aligned} U^2-2U-1 &= \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y-3}{x+1} + 1 = \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y+x-2}{x+1} = \frac{(y-3)^2+(y+x-2)(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{y^2+x^2+xy-x-5y+7}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή της αρχικής ΔΕ είναι η

$$y^2+x^2+xy-x-5y = c, \qquad c \in \mathbb{R}\setminus\{-7\}.$$

□

Άσκηση (ΦΕΒ 2015). *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' + \frac{4}{x}y = 12\sqrt{y}x^3, \qquad y(1) = 4.$$

Λύση. Επειδή $\sqrt{y} = y^{1/2}$, θέτουμε $a = 1/2$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τη ΔΕ με $(1-a)y^{-a} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, παίρνοντας την

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{2}{x}\sqrt{y} = 6x^3.$$

Θέτοντας $u = y^{1-a} = \sqrt{y}$, οπότε $u' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$, η τελευταία ΔΕ μετατρέπεται στην

$$u' + \frac{2}{x}u = 6x^3.$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^2 (ολοκληρωτικός παράγοντας), παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} x^2u' + 2xu &= 6x^5 \\ (x^2u)' &= (x^6)' \\ x^2u &= x^6 + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ x^2\sqrt{y} &= x^6 + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ \sqrt{y} &= x^4 + \frac{c}{x^2}, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι η

$$y = \left(x^4 + \frac{c}{x^2}\right)^2, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Θέτοντας $x = 1$, έχουμε ότι

$$4 = y(1) = (1+c)^2 \Rightarrow 1 + c = \in \{-2, 2\} \Rightarrow c \in \{-3, 1\}$$

και έτσι προκύπτουν δύο μερικές λύσεις για την αρχική συνθήκη $y(1) = 4$, οι

$$y = \left(x^4 - \frac{3}{x^2}\right)^2, \qquad y = \left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

□

Παράρτημα 1 - Η μέθοδος του Euler

Πολλά φαινόμενα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ), δηλαδή εξισώσεις που περιέχουν μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(t)$ και κάποιες παραγώγους της. δηλαδή εξισώσεις που περιέχουν μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(t)$ και κάποιες παραγώγους της. Για παράδειγμα η ποσότητα $y(t)$ ενός ραδιενεργού υλικού φθίνει συναρτήσει του χρόνου t, σύμφωνα με την εξίσωση

$$y'(t) = -cy(t) \tag{14.10}$$

όπου $c > 0$ κάποια σταθερά. Αν η αρχική ποσότητα είναι ίση με $y(0)$, ποια ποσότητα θα έχει απομείνει μετά από χρόνο t;

Διαφορικές εξισώσεις, όπως η παραπάνω ονομάζονται πρώτης τάξης, γιατί περιλαμβάνουν μόνο την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης. Η γενική μορφή μιας ΔΕ πρώτης τάξης είναι η

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{14.11}$$

όπου $f(x, y)$ κάποια γνωστή συνάρτηση δύο μεταβλητών. Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι $f(x, y) = -cy$.

Συχνά, δεν μπορούμε να επιλύσουμε τη ΔΕ και να προσδιορίσουμε επακριβώς την άγνωστη συνάρτηση y, οπότε καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους. Η πιο βασική από αυτές είναι η μέθοδος Euler, η οποία βασίζεται στον προσεγγιστικό τύπο

$$y(t + h) \approx y(t) + y'(t)h.$$

Αντικαθιστώντας τον όρο $y'(t)$ με το δεξί μέλος της ΔΕ, δηλαδή με $f(t, y)$, παίρνουμε τον τύπο

$$y(t + h) \approx y(t) + f(t, y(t))h. \tag{14.12}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε την f και μια αρχική τιμή $y(t_0)$, μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή $y(t_0 + h)$.

Στη συνέχεια, μπορούμε ομοίως να χρησιμοποιήσουμε την $y(t_0 + h)$, προκειμένου να προσεγγίσουμε την $y(t_0 + 2h)$, κ.ο.κ. Προφανώς, όσο επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία, το σφάλμα της προσέγγισης αυξάνεται.

Η ΔΕ (14.10) έχει απλή λύση: Για $y \neq 0$ είναι

$$\begin{aligned} y'(t) = -cy(t) \Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -c \Rightarrow (\ln|y(t)|)' = (-cx)' \\ \Rightarrow \ln|y(t)| = k - cx, k \in \mathbb{R} \Rightarrow |y(t)| = e^{k-cx} \Rightarrow y(t) = \pm e^k e^{-cx} \end{aligned}$$

και τελικά

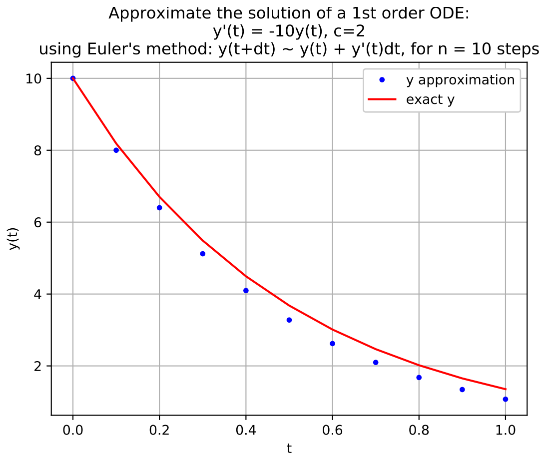
$$y(t) = y(0)e^{-cx},$$

δηλαδή, η αρχική τιμή $y(0)$ και η σταθερά c καθορίζουν πλήρως τη συνάρτηση $y(t)$.

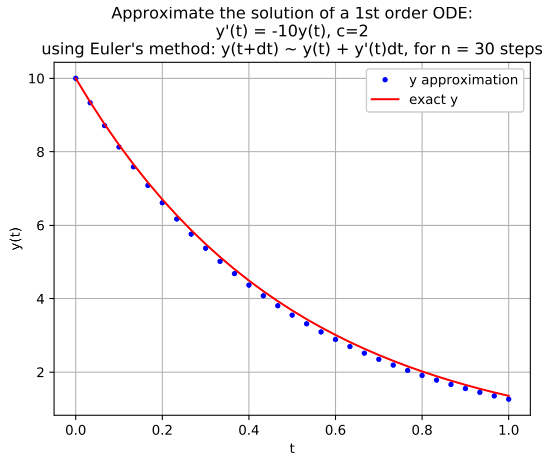
Ο κώδικας που ακολουθεί, προσεγγίζει την τιμή $y(1)$, όταν $c = 2$ και $y(0) = 10$, σε $n = 10$ βήματα, οπότε $h = (1 - 0)/n = 0.1$. Προφανώς, αύξηση του n σημαίνει μικρότερο h και μεγαλύτερη ακρίβεια.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#solve the ODE: y' = -c*y  (1)
#using Euler's method
t0, y0 = 0, 10  #initial values
tfinal = 1    #target: y(tfinal)
n = 10      #number of steps
c = 2

rhs = lambda t, y: -c*y  #right hand side of ODE: y' = rhs

def euler(rhs, y0, t0, tfinal, n):
    h = (1.0*(tfinal-t0))/n
    t=np.zeros((n+1,1))
    y=np.zeros((n+1,1))
    t[0], y[0] = t0, y0
    for i in range(n):
        y[i+1] = y[i] + h*rhs(t[i], y[i])
        t[i+1] = t[i] + h
    return (t,y)

t,y = euler(rhs, y0, t0, tfinal, n)
yreal = 10*np.exp(-c*t) #exact solution is y(t) = y(0)*exp(-c*t)

#plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t,y, 'b.', label = 'y approximation')
ax.plot(t,yreal, 'r', label = 'exact y')
#ax.axis('equal') #x/y ratio = 1
plt.grid(True)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y(t)')
str = "Approximate the solution of a 1st order ODE:\n"
str += "y'(t) = -%dy(t), c=%d"%(y0,c)
str += "\nusing Euler's method: y(t+dt)   y(t) + y'(t)dt"
str += ", for n = %d steps"%n
plt.title(str)
plt.legend()
plt.show()
```

Όπως φαίνεται, στο επόμενο σχήμα, η προσεγγιστικές τιμές αποκλίνουν από τις πραγματικές, καθώς αυξάνει το t. Η προσέγγιση μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά, αν αυξήσουμε το πλήθος βημάτων n.



i) $n = 10$



ii) $n = 30$

Αποδεικνύεται ότι το απόλυτο σφάλμα $|y(t) - \hat{y}(t)|$ μεταξύ της πραγματικής και της προσεγγιστικής τιμής είναι γραμμικά ανάλογο του h.

Ασκήσεις

1. Η ταχύτητα $s(t)$ ενός σώματος σε ελεύθερη πτώση ικανοποιεί την ΔΕ $s'(t) = g - ks(t)$, όπου $g = 9.81m/s^2$ η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας και $k > 0$ μια σταθερά.

   Αν $s(0) = 0$ και $k = 0.1$, προσεγγίστε την ταχύτητά του $s(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 5$, υλοποιώντας τη μέθοδο Euler για διάφορες τιμές του n

   (Η ακριβής λύση της ΔΕ είναι η $s(t) = g/k(1 - e^{-kt})$.)

2. Να προσεγγισθεί, εφαρμόζοντας 2 βήματα της μεθόδου Euler, η τιμή $y(2)$, όταν $y'(t) = \frac{1}{t} - y^2(t)$ και $y(1) = 2$.

3. Η συνάρτηση $y(t) = e^{t^2}$ ικανοποιεί την εξίσωση $y'(t) = e^{t^2}2t = 2ty(t)$. Προσεγγίστε τον αριθμό $y(2) = e^4$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler για την $y(t)$ με αρχική τιμή $y(0) = 1$.

4. Η μέθοδος του μεσαίου σημείου βελτιώνει το σφάλμα της μεθόδου Euler, χρησιμοποιώντας την καλύτερη προσέγγιση $\dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx y'(t + h/2)$ του λόγου, οπότε

   $$y(t+h) - y(t) \approx hy'(t + \tfrac{h}{2}) = hf(t + \tfrac{h}{2}, y(t + \tfrac{h}{2})) \approx hf(t + \tfrac{h}{2}, y(t) + \tfrac{h}{2}f(t, y(t)))$$

   όπου χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση $y(t + \frac{h}{2}) \approx y(t) + \frac{h}{2}f(t, y(t))$ του άγνωστου όρου $y(t + \frac{h}{2})$.

   Υλοποιήστε τη μέθοδο, εφαρμόστε την για τις ασκήσεις 1, 2, 3 και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Παράρτημα 2 - Επίλυση διαφορικών εξισώσεων χωρίς μεθοδολογία

Η μελέτη αυτής της ενότητας είναι προαιρετική και δεν είναι απαραίτητη για την προετοιμασία για τις εξετάσεις. Παρουσιάζονται ορισμένες τεχνικές για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, πέρα των γνωστών μεθοδολογιών που παρουσιάστηκαν στα πλαίσια του μαθήματος. Στόχος αυτής της ενότητας είναι η εξοικείωση με την έννοια της παράγουσας και την αναγνώρισή της σε σύνθετες παραστάσεις. Η ικανότητα αυτή οδηγεί πολλές φορές σε πιο γρήγορη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ή ενός αόριστου ολοκληρώματος.

Κατά σύμβαση, σε όλες τις διαφορικές εξισώσεις που ακολουθούν, συμβολίζουμε με x την ανεξάρτητη μεταβλητή και με $y = y(x)$ την άγνωστη συνάρτηση. Όλες οι παραγωγίσεις θεωρούνται ως προς τη μεταβλητή x.

Η κεντρική ιδέα πίσω από τις τεχνικές αυτές είναι η μετατροπή της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης στη μορφή

$$(A(x,y))' = (B(x))' \tag{14.13}$$

όπου το πρώτο μέλος είναι μια παράσταση των x, y, οπότε θα είναι

$$A(x,y) = B(x) + c,$$

οπότε λύνοντας ως προς y, προσδιορίζουμε την άγνωστη συνάρτηση.

Το πρώτο βήμα, προκειμένου να φτάσουμε στη μορφή (14.13), είναι να αναγνωρίσουμε στη δοσμένη διαφορική εξίσωση την παράγουσα κάποιας σύνθετης συνάρτησης. Συνήθως αναζητούμε τις ακόλουθες μορφές

$$\begin{aligned}
f'(y)y' &= (f(y))' \\
y^a y' &= \left(\frac{1}{a+1}y^{a+1}\right)', \quad a \neq -1 \\
\frac{y'}{y} &= (\ln|y|)' \\
fy' + f'y &= (fy)' \\
\frac{fy' - f'y}{f^2} &= \left(\frac{y}{f}\right)'
\end{aligned}$$

οι οποίες είναι ουσιαστικά οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης. Η $f = f(x)$ είναι κάποια συνάρτηση του x. Αναγνωρίζοντας την παράσταση του πρώτου μέλους στη διαφορική εξίσωση, μπορούμε να την αντικαταστήσουμε από το δεύτερο μέλος, έχουμε δηλαδή προσδιορίσει μια παράγουσά της.

Πολλές φορές, χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε την αρχική εξίσωση με κάποια συνάρτηση, ώστε να εμφανίσουμε την επιθυμητή παράσταση. Για παράδειγμα, για τη διαφορική εξίσωση $y' + f'(x)y = g(x)$, πολλαπλασιάζοντας με $e^{f(x)}$, έχουμε

$$y' + f'(x)y = g(x) \Rightarrow e^{f(x)}y' + e^{f(x)}f'(x)y = e^{f(x)}g(x) \Rightarrow \left(e^{f(x)}y\right)' = e^{f(x)}g(x)$$

οπότε η επίλυση της εξίσωσης ανάγεται στην εύρεση μιας παράγουσας του δεύτερου μέλους. Σημειώνεται ότι στην ίδια ιδέα βασίζεται και η μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα, για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 1. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}(1+e^y).$$

Λύση. Είναι

$$y' = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}(1+e^y) \Rightarrow \frac{1}{1+e^y}y' = \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}.$$

Στο σημείο αυτό, παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε λύνεται με ολοκλήρωση κατά μέλη.

Μπορούμε όμως να προσδιορίζουμε τις παράγουσες του πρώτου και του δεύτερου μέλους με το εξής τέχνασμα: στο πρώτο μέλος, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με e^{-y}, ενώ στο δεύτερο μέλος, προσθαφαιρούμε τη μονάδα από το $\cos x$. Οπότε, προκύπτει η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-y}}{e^{-y}+1}y' = \frac{2\sin x(1-1+\cos x)}{1+\cos x} = 2\sin x - \frac{2\sin x}{1+\cos x}\\
&\Rightarrow -(\ln(1+e^{-y}))' = -2(\cos x)' + 2(\ln(1+\cos x))'\\
&\Rightarrow (\ln(1+e^{-y}))' = (2\cos x - 2\ln(1+\cos x))'\\
&\Rightarrow \ln(1+e^{-y}) = k + 2\cos x - 2\ln(1+\cos x)\\
&\Rightarrow 1+e^{-y} = e^{k+2\cos x-2\ln(1+\cos x)}\\
&\Rightarrow e^{-y} = -1 + e^k e^{2\cos x} e^{-2\ln(1+\cos x)} = -1 + \frac{ce^{2\cos x}}{(1+\cos x)^2}\\
&\Rightarrow -y = \ln\left(\frac{ce^{2\cos x}}{(1+\cos x)^2} - 1\right)\\
&\Rightarrow y = -\ln\left(\frac{ce^{2\cos x}}{(1+\cos x)^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x.$$

Λύση.

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x \Rightarrow y' - e^x = (y-e^x)^2 \overset{y\neq e^x}{\Rightarrow} \frac{y'-e^x}{(y-e^x)^2} = 1 \Rightarrow \frac{-(e^x-y)'}{(e^x-y)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{e^x-y}\right)' = x' \Rightarrow \frac{1}{e^x-y} = x + c \Rightarrow e^x - y = \frac{1}{x+c} \Rightarrow y = e^x - \frac{1}{x+c}$$

Η $y = e^x$ που παραβλέφθηκε κατά τη διαδικασία, είναι επίσης λύση της εξίσωσης, η οποία δεν συμπεριλαμβάνεται στην πραπάνω γενική λύση. □

Παράδειγμα 3. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$2xyy' = x^2 + 3y^2$$

Λύση.

$$2xyy' = x^2 + 3y^2 \Rightarrow 2xyy' - 3y^2 = x^2 \Rightarrow x(y^2)' - 3y^2 = x^2 \Rightarrow x^3(y^2)' - 3x^2y^2 = x^4$$

$$\Rightarrow x^3(y^2)' - (x^3)'y^2 = x^4 \Rightarrow \frac{x^3(y^2)' - (x^3)'y^2}{x^6} = \frac{x^4}{x^6} \Rightarrow \left(\frac{y^2}{x^3}\right)' = \left(-\frac{1}{x}\right)'$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^3} = c - \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = cx^3 - x^2 = x^2(cx-1) \Rightarrow y = |x|\sqrt{cx-1}$$

Ο παραπάνω τύπος έχει νόημα, μόνο όταν $c \neq 0$ και $cx - 1 \geq 0$. □

Παράδειγμα 4. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 6x^3.$$

Λύση.

$$y' + \frac{2}{x}y = 6x^3 \Rightarrow xy' + 2y = 6x^4 \Rightarrow x^2y' + 2xy = 6x^5 \Rightarrow (x^2y)' = (x^6)' \Rightarrow x^2y = x^6 + c \Rightarrow y = x^4 + \frac{c}{x^2}$$

Ο πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με x^2, που εφαρμόστηκε παραπάνω, ουσιαστικά ταυτίζεται με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα, για $I(x) = x^2$. □

Παράδειγμα 5. *Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις*

$$y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}, \qquad y' + \frac{3y}{x} = \frac{\sin x}{x^3}.$$

Λύση. Κι εδώ, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, για τις οποίες ο ολοκληρωτικός παράγοντας προκύπτει άμεσα, χωρίς να χρειαστεί επίλυση ολοκληρώματος.

Για την πρώτη, έχουμε

$$y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}} \Rightarrow e^xy' + e^xy = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \Rightarrow (e^xy)' = (\operatorname{arctg} e^x)' \Rightarrow y = \frac{c + \operatorname{arctg} e^x}{e^x}.$$

Για τη δεύτερη, έχουμε

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{\sin x}{x^3} \Rightarrow x^3y' + 3x^2y = \sin x \Rightarrow (x^3y)' = (-\cos x)' \Rightarrow y = \frac{c - \cos x}{x^3}.$$

□

Παράδειγμα 6. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^3}\ln x, \qquad x > 0.$$

Λύση.

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^3}\ln x \Rightarrow \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{y^2}{x^4}\ln x \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{\ln x}{x^2}$$

Θέτοντας $\frac{y}{x} = u$, για απλότητα, έχουμε

$$u' = u^2\frac{\ln x}{x^2} \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{u'}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Παρατηρώντας ότι $\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' \Rightarrow \frac{1}{u} = c + \frac{1+\ln x}{x} \Rightarrow u = \frac{x}{cx+1+\ln x},$$

οπότε, τελικά είναι $y = \frac{x^2}{cx+1+\ln x}$. Η $y=0$, που παραλήφθηκε, αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης. □

Παράδειγμα 7. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' + xy = \frac{x}{y^2}, \qquad y \neq 0.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας με y^2, προκύπτει ότι

$$y' + xy = \frac{x}{y^2} \Rightarrow y^2y' + xy^3 = x \Rightarrow 3y^2y' + 3xy^3 = 3x \Rightarrow (y^3)' + 3xy^3 = 3x.$$

Στο σημείο αυτό, αναζητούμε κατάλληλη συνάρτηση $f(x)$, με $f'(x) = 3xf(x)$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $e^{\frac{3}{2}x^2}$, οπότε

$$e^{\frac{3}{2}x^2}(y^3)' + 3xe^{\frac{3}{2}x^2}y^3 = 3xe^{\frac{3}{2}x^2} \Rightarrow e^{\frac{3}{2}x^2}(y^3)' + (e^{\frac{3}{2}x^2})'y^3 = (e^{\frac{3}{2}x^2})' \Rightarrow (e^{\frac{3}{2}x^2}y^3)' = (e^{\frac{3}{2}x^2})'$$

και τελικά, $e^{\frac{3}{2}x^2}y^3 = e^{\frac{3}{2}x^2} + c \Rightarrow y^3 = 1 + ce^{-\frac{3}{2}x^2}$.

Σημειώνεται ότι, ουσιαστικά, ακολουθήθηκε η μεθοδολογία επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων Bernoulli. Ο πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με $3y^2$ μετέτρεψε την εξίσωση σε γραμμική ως προς τη νέα συνάρτηση $u = y^3$, ενώ ο πολλαπλασιασμός με την $e^{\frac{3}{2}x^2}$ αντιστοιχεί στη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα. □

Παράδειγμα 8. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = 1 + (x-y)^2.$$

Λύση.

$$y' = 1+(x-y)^2 \Rightarrow y'-1 = (x-y)^2 \Rightarrow (y-x)' = (y-x)^2 \overset{y\neq x}{\Rightarrow} \frac{-(y-x)'}{(y-x)^2} = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y-x}\right)' = (-x)' \Rightarrow \frac{1}{y-x} = c - x \Rightarrow y - x = \frac{1}{c-x} \Rightarrow y = x + \frac{1}{c-x}$$

Η περίπτωση $y = x$ που παραλήφθηκε, αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης. □

Παράδειγμα 9. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$xy^2(y + xy') = 13.$$

Λύση.

$$xy^2(y+xy') = 13 \Rightarrow xy^3 + x^2y^2y' = 13 \Rightarrow 3xy^3 + x^2(y^3)' = 39 \Rightarrow 3x^2y^3 + x^3(y^3)' = 39x$$

$$\Rightarrow (x^3y^3)' = \left(\frac{39}{2}x^2\right)' \Rightarrow x^3y^3 = \frac{39}{2}x^2 + c \Rightarrow y^3 = \frac{39}{2x} + \frac{c}{x^3}$$

□

Παράδειγμα 10. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$yy' = 5$$

και στη συνέχεια, να βρεθεί η καμπύλη ολοκλήρωσής της, που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

Λύση. Αναζητείται η λύση της εξίσωσης, με $y(1) = 2$.

$$yy' = 5 \Rightarrow 2yy' = 10 \Rightarrow (y^2)' = (10x)' \Rightarrow y^2 = 10x + c$$

Θέτοντας $x = 1$,

$$(y(1))^2 = 10 + c \Rightarrow 4 = 10 + c \Rightarrow c = -6.$$

Επομένως, είναι $y^2 = 10x - 6 \Rightarrow y = \sqrt{10x - 6}$. □

Παράδειγμα 11. *Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις*

$$y' = 2y(e^x + \ln y), \qquad x + y^3 + 6xy^2y' = 0.$$

Λύση. Για την πρώτη, αρχικά θέτουμε $y = e^u$, οπότε $y' = e^u u'$.

$$y' = 2y(e^x + \ln y) \Rightarrow e^u u' = 2e^u(e^x + u) \Rightarrow u' = 2(e^x + u) \Rightarrow u' - 2u = 2e^x \Rightarrow e^{2x}u' - 2e^{2x}u = 2e^{3x}$$
$$\Rightarrow \frac{e^{2x}u' - 2e^{2x}u}{e^{4x}} = 2e^{-x} \Rightarrow \left(\frac{u}{e^{2x}}\right)' = (-2e^{-x})' \Rightarrow \frac{u}{e^{2x}} = c - 2e^{-x} \Rightarrow u = ce^{2x} - 2e^x \Rightarrow y = e^{ce^{2x} - 2e^x}.$$

Για τη δεύτερη, είναι

$$x + y^3 + 6xy^2y' = 0 \Rightarrow y^3 + 2x(y^3)' = -x \Rightarrow e^{x^2}y^3 + 2xe^{x^2}(y^3)' = -xe^{x^2}$$
$$\Rightarrow (e^{x^2}y^3)' = \left(-\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' \Rightarrow e^{x^2}y^3 = c - \frac{1}{2}e^{x^2} \Rightarrow y^3 = ce^{-x^2} - \frac{1}{2}.$$

□

Παράδειγμα 12. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$(1 - 3xy)y' = y^2.$$

Λύση.

$$(1 - 3xy)y' = y^2 \Rightarrow y' = 3xyy' + y^2 \Rightarrow yy' = 3xy^2y' + y^3 \Rightarrow \left(\frac{y^2}{2}\right)' = (xy^3)' \Rightarrow \frac{y^2}{2} = xy^3 + c.$$

□