ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΚΕΦ. 6: Αόριστο ολοκλήρωμα - Διαφορικές εξισώσεις

Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

2021-2022

Αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός

Έστω συνάρτηση f/A, όπου το πεδίο ορισμού A είναι διάστημα (ή ένωση διαστημάτων). Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $F(x)+c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $F'(x)=f(x)$. δηλαδή είναι

$$\int f(x)dx = F(x)+c \Leftrightarrow F'(x)=f(x).$$

Η συνάρτηση F ονομάζεται παράγουσα της f.

Ως πεδίο ορισμού της F θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του A στο οποίο η F είναι παραγωγίσιμη.
Από τον ορισμό προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $\int f'(x)dx = f(x)+c$
- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $\int (kf(x)+\lambda g(x))dx = k\int f(x)dx + \lambda\int g(x)dx$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Άσκηση

Να ευρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων:

$$x^2 + 3x + 2, \quad e^{2x+3}, \quad \sqrt{x}, \quad \frac{2x+1}{x^2+x+2}, \quad \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}.$$

Απάντηση

$$\left(\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 2x + c\right)' = x^2 + 3x + 2, \qquad \left(\frac{e^{2x+3}}{2} + c\right)' = e^{2x+3},$$

$$\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' = x^{1/2},$$

$$\left(\ln(x^2 + x + 2)\right)' = \frac{2x+1}{x^2+x+2},$$

$$\left(2\sqrt{x^2+x+2}\right)' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}.$$

Άσκηση

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx, \qquad I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx$$

Λύση

Αφού $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx \\ &= A \ln|x-1| + B \ln|x+2| + c. \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Τα A, B προσδιορίζονται ως εξής:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x+2) + B(x-1) = (A+B)x + 2A - B = 1$$

Θέτοντας $x = 1$, βρίσκουμε $A = 1/3$. Θέτοντας $x = -2$, βρίσκουμε $B = -1/3$.

Λύση (συνέχεια)

Για το I_2, έχουμε ότι

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4.$$

Επομένως, θέτοντας $2y = x + 2$, οπότε $2dy = dx$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{2dy}{4y^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y + c \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + c. \end{aligned}$$

Γενικά, για την επίλυση του $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, με $b^2-4ac<0$, ακολουθούμε την ίδια μέθοδο όπως στο I_2 της προηγούμενης άσκησης.
Έστω $p(x)=ax^2+bx+c$, με $a\neq 0$ και $\Delta=b^2-4ac<0$. Ως γνωστό, όταν η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική, τότε το $p(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και επιπλέον είναι ομόσημο του a, για κάθε x.
Η επίλυση του ολοκληρώματος

$$I=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

γίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης arctg, για την οποία ως γνωστό ισχύει

$$\frac{d(\operatorname{arctg} y)}{dy}=\frac{1}{1+y^2}, \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad c+\operatorname{arctg} y=\int \frac{1}{1+y^2}dy, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Προσπαθούμε λοιπόν να μετατρέψουμε το ax^2+bx+c στη μορφή y^2+1, για κάποιο y το οποίο είναι συνάρτηση του x. Η διαδικασία μετατροπής έχει ως εξής: αρχικά δημιουργούμε ένα τέλειο τετράγωνο (το άθροισμα των τετραγώνων δύο ποσοτήτων και του διπλάσιου γινομένου τους) και στη συνέχεια βγάζουμε κοινό παράγοντα τον σταθερό όρο.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right). \end{aligned}$$

Επειδή $\Delta<0$, για απλότητα στις πράξεις, τέθηκε $k=\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$.

Θέτοντας

$$ky = x + \frac{b}{2a}, \qquad \text{οπότε} \qquad kdy = dx,$$

έχουμε ότι $ax^2 + bx + c = a(k^2y^2 + k^2) = ak^2(y^2 + 1)$, επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{ak^2(y^2+1)} kdy \\ &= \frac{1}{ak} \int \frac{1}{y^2+1} dy = c + \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} y \\ &= c + \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) \end{aligned}$$

Άσκηση

Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{3-5x}{6x^2-2x+4}dx$.

Λύση

το πολυώνυμο $p(x) = 6x^2 - 2x + 4$ έχει αρνητική διακρίνουσα και παράγωγο $p'(x) = 12x - 2$. Μπορούμε να εμφανίσουμε την παράγωγο στον αριθμητή ως εξής:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{3-5x}{6x^2-2x+4}dx &= \int \frac{\frac{-5}{12}(12x-2) - 2\frac{5}{12} + 3}{6x^2-2x+4}dx \\ &= \frac{-5}{12}\ln|6x^2-2x+4| + \frac{13}{6}\int \frac{1}{6x^2-2x+4}dx \\ &= \frac{-5}{12}\ln(6x^2-2x+4) + \frac{13}{36}\int \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}dx \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Για την επίλυση του τελευταίου ολοκληρώματος, έχουμε

$$x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = x^2 - 2\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{2}{3} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36},$$

άρα, θέτοντας $\frac{\sqrt{23}}{6}y = x - \frac{1}{6}$, οπότε $\frac{\sqrt{23}}{6}dy = dx$, έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}dx = \int \frac{1}{(x - \frac{1}{6})^2 + \frac{23}{36}}dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{23}{36}y^2 + \frac{23}{36}}\frac{\sqrt{23}}{6}dy = \frac{6}{\sqrt{23}}\int \frac{1}{y^2+1}dy = c + \frac{6}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg} y \\ &= c + \frac{6}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right) \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Από τον κανόνα παραγώγισης $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,$$

ο οποίος, λαμβάνοντας υπόψη ότι $df = f'(x)dx$ και $dg = g'(x)dx$, μπορεί να γραφτεί συνοπτικά ως εξής:

$$\int g\ df = fg - \int f\ dg.$$

Στις επόμενες περιπτώσεις εφαρμόζεται ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

- $\int e^{ax+b} p(x)dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο.
  Θέτουμε $e^{ax+b} = (\frac{1}{a}e^{ax+b})'$.
  Εφαρμογές: $\int x^2 e^x dx$, $\int (x^2 + 6x - 1)e^x dx$.

- $\int \sin(ax+b)p(x)dx$ και $\int \cos(ax+b)p(x)dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο. Θέτουμε αντίστοιχα $\sin(ax+b) = (\frac{-1}{a}\cos(ax+b))'$ και $\cos(ax+b) = (\frac{1}{a}\sin(ax+b))'$.
  Εφαρμογές: $\int x\sin(3x-1)dx$, $\int(2x^2-3x+5)\cos 4xdx$.
- $\int e^{ax+b}\sin(cx+d)dx$ και $\int e^{ax+b}\cos(cx+d)dx$.
  Θέτουμε $e^{ax+b} = (\frac{1}{a}e^{ax+b})'$ και εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση 2 φορές.
  Εφαρμογές: $\int e^{2x}\sin xdx$, $\int e^{x}\cos 3xdx$, $\int xe^{x}\cos 3xdx$.
- $\int f(x)\ln(g(x))dx$, $\int f(x)\arctan(g(x))dx$ και $\int f(x)\arcsin(g(x))dx$, όπου $f(x)$ ρητή συνάρτηση. Βρίσκουμε μια $F(x)$ ώστε $F'(x) = f(x)$.
  Εφαρμογές: $\int(3x^2+4x+1)\ln(\frac{x^2+1}{x})dx$,
  $\int(4x^3+x)\arctan(x^2-1)dx$, $\int \arcsin xdx$.
- Αναγωγικοί τύποι, δηλαδή ολοκληρώματα της μορφής $I_n = \int A(x,n)dx$.
  Εφαρμογές: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$, $\int \sin^n xdx$, $\int \cos^n xdx$, $\int x^n e^{-x}dx$.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Άσκηση

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \operatorname{arctg} x \; dx, \qquad I_2 = \int e^x \cos x \; dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x' \operatorname{arctg} x \; dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

$$I_2 = \int (e^x)' \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx$$
$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I_2 + c_1$$

Άρα

$$2I_2 = e^x(\cos x + \sin x) + c_1 \Rightarrow I_2 = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$$

Ο γενικός τύπος αντικατάστασης έχει ως εξής:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy.$$

Θέτουμε $y = g(x)$, οπότε $dy = g'(x)dx$ και αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος παίρνουμε το δεύτερο.
Γενικά, για τον μετασχηματισμό $f(y) = g(x)$, η σχέση μεταξύ dy και dx προκύπτει παραγωγίζοντας ως προς x, οπότε είναι

$$\begin{aligned} f(y) = g(x) &\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \Rightarrow \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} \\ &\Rightarrow f'(y)dy = g'(x)dx. \end{aligned}$$

Το διαφορικό dx στον συμβολισμό του ολοκληρώματος υποδηλώνει ότι η x είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης (και παραγώγισης). Την θέση της μεταβλητής x μπορεί να έχει οποιαδήποτε (παραγωγίσιμη) συνάρτηση και έτσι έχουμε για παράδειγμα ότι

$$\int df = f + c, \qquad \text{όπως έχουμε και ότι} \int dx = x + c.$$

Αυτό εξάλλου επαληθεύεται και από τη σχέση $df = f'(x)dx$.
Η αντικατάσταση αλλάζει την μεταβλητή ολοκλήρωσης, οδηγώντας πολλές φορές σε μια παράσταση της οποία προσδιορίζουμε πιο εύκολα την παράγουσα.
Για παράδειγμα, θέτοντας $y = 1 + x^2$, οπότε $dy = 2xdx$, έχουμε ότι

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + c = \ln(1+x^2) + c,$$

το οποίο πιο συνοπτικά αλλά ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) = \ln(1+x^2) + c.$$

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\cos x, \sin x)dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση (δηλαδή πηλίκο δύο πολυωνύμων), ως προς τις μεταβλητές x, y, λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς y) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \qquad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+y^2}dy.$$

Οι τύποι αυτοί αποδεικνύονται εύκολα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x, \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\sin x$), τότε τίθεται $y = \cos x$.
- Αν $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\cos x$), τότε τίθεται $y = \sin x$.
- Αν $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι άρτια ως προς τα $\sin x$ και $\cos x$), τότε τίθεται $y = \mathrm{tg}\, x$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, \qquad dx = \frac{1}{1+y^2}dy$$

Παρατήρηση: Οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t \in (-\infty, +\infty),$$

περιγράφουν το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$, εκτός του $(-1, 0)$.
Αντίστοιχα, οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad t \in (-1, 1),$$

περιγράφουν το σύνολο όλων των σημείων (x, y), με $x > 0$, της υπερβολής με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$.

Άσκηση

Να λυθούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx, \qquad \int \frac{1}{\cos x}dx, \qquad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx.$$

Λύση

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτουμε $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, οπότε είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}dy \\
&= \int \frac{2}{1+y^2+1-y^2+2y}dy \\
&= \int \frac{1}{1+y}dy \\
&= \ln|1+y|+c = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c
\end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Για το $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$, θέτουμε $y = \sin x$ (διότι η παράσταση είναι περιττή ως προς το $\cos x$), οπότε είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x dx = \int \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy \\
&= \frac{1}{2}(\ln|1+y| - \ln|1-y|) + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+y)^2}{|1-y^2|} + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin x^2} + c = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} + c \\
&= \ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|} + c
\end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Για το $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx$, η παράσταση είναι και περιττή ως προς το $\sin x$, και περιττή ως προς το $\cos x$, και άρτια ως προς τα $\cos x, \sin x$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις διαθέσιμες αντικαταστάσεις. Αν επιλέξουμε την αντικατάσταση $y = \operatorname{tg} x$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx &= \int \frac{y^3}{1+y^2}dy = \int \frac{y^3+y-y}{1+y^2}dy \\ &= \int \frac{y^3+y}{1+y^2}dy - \int \frac{y}{1+y^2}dy = \int ydy - \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy \\ &= \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + c \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x} + c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + c\end{aligned}$$

Άσκηση

Να λυθούν τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int \cos^2 x dx, \qquad \int \sin^2 x dx.$

Λύση

Για τα ολοκληρώματα αυτά είναι πιο εύκολο, αντί για αντικατάσταση, να εφαρμόσουμε απευθείας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$

οπότε

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c,$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c.$$

Η μορφή $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$

Για την επίλυση ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση, ως προς τις μεταβλητές x, y, χρησιμοποιούνται ταυτότητες με υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ανάλογες με αυτές της προηγούμενης ενότητας. Γενικά, τα ολοκληρώματα αυτής της μορφής λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς y) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \mathrm{tgh}\, \frac{x}{2}$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh x = \frac{1+y^2}{1-y^2}, \qquad \sinh x = \frac{2y}{1-y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1-y^2}dy.$$

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cosh x, -\sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\sinh x$), τότε τίθεται $y = \cosh x$.
- Αν $R(-\cosh x, \sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \sinh x$.
- Αν $R(-\cosh x, -\sinh x) = R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι άρτια ως προς τα $\sinh x$ και $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \mathrm{tgh}\, x$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1-y^2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{y^2}{1-y^2}, \qquad dx = \frac{1}{1-y^2}dy.$$

Η μορφή $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}dx$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}dx$, όπου $a, b > 0$, έχει νόημα όταν

$$b^2 - a^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{ax}{b}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{ax}{b} \leq 1.$$

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

Θέτουμε $ax = b\sin t$ (οπότε $adx = b\cos t dt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{b^2 - a^2x^2} = \sqrt{b^2 - b^2\sin^2 t} = b\sqrt{1 - \sin^2 t} = b\sqrt{\cos^2 t} = b|\cos t|.$$

Επιπλέον, θεωρούμε $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε είναι $\cos t \geq 0$ και

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{ax}{b} \leq 1.$$

Μάλιστα, επειδή ο περιορισμός της $\sin t$ στο συγκεκριμένο διάστημα είναι ένα προς ένα και επί, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{b^2 - a^2x^2}dx = \int b|\cos t|\frac{b}{a}\cos t dt = \int \frac{b^2}{a}\cos^2 t dt \\ &= \int \frac{b^2}{2a}(1+\cos(2t))dt = \int \left(\frac{b^2}{2a}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\right)' dt \\ &= \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{4a}\sin(2t) + c = \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{2a}\sin t \cos t + c \end{aligned}$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{2a}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + c = \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{ax}{b} + \frac{b^2}{2a}\frac{ax}{b}\sqrt{1 - \frac{a^2x^2}{b^2}} + c \\ &= \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{ax}{b} + \frac{x}{2}\sqrt{b^2 - a^2x^2} + c \end{aligned}$$

Για το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx$, όπου $a, b > 0$, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x,$$

θέτουμε $ax = b\sinh t$ (οπότε $adx = b\cosh t dt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{a^2x^2+b^2} = \sqrt{b^2\sinh^2 t + b^2} = b\sqrt{\sinh^2 t + 1} = b\sqrt{\cosh^2 t} = b\cosh t.$$

Μάλιστα, επειδή η $\sinh t/\mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα και επί, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx = \int b\cosh t\frac{b}{a}\cosh t dt = \int \frac{b^2}{a}\cosh^2 t dt \\
&= \int \frac{b^2}{2a}(\cosh(2t)+1)dt = \int \left(\frac{b^2}{2a}\left(\frac{\sinh(2t)}{2}+t\right)\right)' dt \\
&= \frac{b^2}{4a}\sinh(2t)+\frac{b^2}{2a}t+c = \frac{b^2}{2a}\sinh t\cosh t+\frac{b^2}{2a}t+c
\end{aligned}
$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{b^2}{2a}\sinh t\sqrt{\sinh^2 t+1}+\frac{b^2}{2a}t+c \\
&= \frac{b^2}{2a}\frac{ax}{b}\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2}+1}+\frac{b^2}{2a}\operatorname{arcsinh}\frac{ax}{b}+c \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2}+\frac{b^2}{2a}\operatorname{arcsinh}\frac{ax}{b}+c
\end{aligned}
$$

Η μορφή $\int \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx$

Το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx$, όπου $a, b > 0$, έχει νόημα όταν

$$a^2x^2 - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{b^2} \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{ax}{b}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{ax}{b} \geq 1 \text{ ή } \frac{ax}{b} \leq -1.$$

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x,$$

διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

i) Αν $\frac{ax}{b} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = b\cosh t$, όπου $t > 0$, (οπότε $adx = b\sinh t dt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{a^2x^2 - b^2} = \sqrt{b^2\cosh^2 t - b^2} = b\sqrt{\cosh^2 t - 1} = b\sqrt{\sinh^2 t}$$
$$= b|\sinh t| = b\sinh t.$$

Το απόλυτο στην τελευταία ισότητα μπορεί να παραληφθεί, διότι είναι

$$\sinh t \geq 0 \Leftrightarrow e^t - e^{-t} \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq e^{-t} \Leftrightarrow e^{2t} \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0.$$

Μάλιστα, επειδή η $\cosh t$ είναι ένα προς ένα και επί στο συγκεκριμένο διάστημα, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx = \int b \sinh t \frac{b}{a} \sinh t dt = \int \frac{b^2}{a} \sinh^2 t dt \\
&= \int \frac{b^2}{2a}(\cosh(2t) - 1)dt = \int \left(\frac{b^2}{2a} \left(\frac{\sinh(2t)}{2} - t \right) \right)' dt \\
&= \frac{b^2}{4a} \sinh(2t) - \frac{b^2}{2a} t + c = \frac{b^2}{2a} \sinh t \cosh t - \frac{b^2}{2a} t + c
\end{aligned}
$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{b^2}{2a} \cosh t \sqrt{\cosh^2 t - 1} - \frac{b^2}{2a} t + c \\
&= \frac{b^2}{2a} \frac{ax}{b} \sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2} - 1} - \frac{b^2}{2a} \operatorname{arccosh} \frac{ax}{b} + c \\
&= \frac{x}{2} \sqrt{a^2x^2 - b^2} - \frac{b^2}{2a} \operatorname{arccosh} \frac{ax}{b} + c
\end{aligned}
$$

$ii)$ Αν $\frac{ax}{b} \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = -b\cosh t$, όπου $t < 0$, (οπότε $adx = -b\sinh tdt$). Κατόπιν τούτων, και δεδομένου ότι $t < 0 \Rightarrow \sinh t < 0$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx = \int b|\sinh t|\frac{-b}{a}\sinh tdt \\ &= \int b(-\sinh t)\frac{-b}{a}\sinh tdt = \int \frac{b^2}{a}\sinh^2 tdt \end{aligned}$$

οπότε τελικά προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της προηγούμενης περίπτωσης.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 27)

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{9 - x^2}}dx, \qquad I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}}dx, \qquad I_3 = \int \sqrt{3x^2 + 2}dx.$$

Λύση

Για το I_1, θέτοντας $x = 3\sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{9 - x^2}}dx = \int \frac{9\sin^2 t + 9\sin t + 5}{\sqrt{9 - 9\sin^2 t}} 3\cos t dt \\ &= \int (9\sin^2 t + 9\sin t + 5)dt = \frac{9}{2}\int (1 - \cos 2t)dt + 9\int \sin t dt + 5\int dt \\ &= \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t - 9\cos t + 5t + c = \frac{19}{2}t - \frac{9}{2}\sin t\cos t - 9\cos t + c \\ &= \frac{19}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2} + c \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Για το $I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$, θέτοντας $x = 2\cosh t$, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{8\cosh^3 t}{\sqrt{4\cosh^2 t - 4}} 2\sinh t dt = 8\int \cosh^3 t dt \\
&= 8\int (1+\sinh^2 t) d(\sinh t) = 8\sinh t + \frac{8}{3}\sinh^3 t + c \\
&= \frac{8}{3}(3+\sinh^2 t)\sinh t + c = \frac{8}{3}(2+\cosh^2 t)\sqrt{\cosh^2 - 1} + c \\
&= \frac{1}{3}(8+4\cosh^2 t)\sqrt{4\cosh^2 - 4} + c = \frac{1}{3}(8+x^2)\sqrt{x^2-4} + c
\end{aligned}
$$

Λύση (συνέχεια)

Για το $I_3 = \int \sqrt{3x^2 + 2}dx$, θέτοντας $\sqrt{3}x = \sqrt{2}\sinh t$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \sqrt{2\sinh^2 t + 2}\sqrt{2/3}\cosh t dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \cosh^2 t dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int (e^t + e^{-t})^2 dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} + 2t) + c = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sinh(2t) + 2t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sinh t \cosh t + t) + c = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sinh t \sqrt{1 + \sinh^2 t} + t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{3}{2}x^2} + \mathrm{arcsinh} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} \right) \right) + c \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{2 + 3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{arcsinh} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} \right) + c
\end{aligned}$$

Διαφορικές εξισώσεις

Διαφορική εξίσωση (μίας μεταβλητής) (ΔΕ) είναι κάθε εξίσωση που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ και κάποιες παραγώγους της y.

Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται σε αυτήν καθορίζει την τάξη της.

Ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεγαλύτερης παραγώγου καθορίζει τον βαθμό της.

Λύση της εξίσωσης είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Καμπύλη ολοκλήρωσης της εξίσωσης ονομάζεται η καμπύλη μιας λύσης της.

Στη συνέχεια, θα δούμε ορισμένες μορφές διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Η κανονική μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης είναι η

$$y' = f(x, y),$$

όπου f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Χωριζομένων μεταβλητών: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{1}$$

οπότε είναι $g(y)dy = f(x)dx$ και ολοκληρώνοντας έχουμε ότι $\int g(y)dy = \int f(x)dx$. Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα, προκύπτει η μορφή των λύσεών τους.

Ομογενείς: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \qquad \text{όπου} \quad \frac{f(tx,ty)}{g(tx,ty)} = \frac{t^k f(x,y)}{t^k g(x,y)} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{2}$$

Μετατρέπονται σε χωριζομένων μεταβλητών, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ux$.

Άσκηση

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$i)\ y' \cos^2 x = y(y-1), y(0) = 2, \qquad iii)\ y' = a - by, b \neq 0.$$

Λύση

i) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

όταν $y \neq 0, 1$. Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int (\operatorname{tg} x)' dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y-1| - \ln|y| = k - 2 \operatorname{tg} x, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |(y-1)/y| = e^{k - 2 \operatorname{tg} x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1/y = \pm e^k e^{-2 \operatorname{tg} x} \Leftrightarrow 1/y = 1 - ce^{-2 \operatorname{tg} x}, \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

Λύση (συνέχεια)

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = (1 - ce^{-2\operatorname{tg} x})^{-1}, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{ή} \qquad y = 0.$$

Στη συνέχεια, βάσει της αρχικής συνθήκης $y(0) = 2$, υπολογίζουμε τη σταθερά c ως

$$2 = y(0) = (1 - c)^{-1} \Leftrightarrow 1 - c = 1/2 \Leftrightarrow c = 1/2$$

οπότε η ειδική λύση με $y(0) = 2$ είναι η $y = (1 - e^{-2\operatorname{tg} x}/2)^{-1}$.

Λύση (συνέχεια)

ii) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{a-by} = dx.$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\int \frac{dy}{a-by} = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{b} \ln|a-by| = k+x, k \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \ln|a-by| = -bk - bx \Leftrightarrow |a-by| = e^{-bk-bx} \Leftrightarrow a - by = \pm e^{-bk} e^{-bx}$$
$$\Leftrightarrow a - by = c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow by = a - c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^*$$

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = \frac{a}{b} - ce^{-bx}, \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, x > 0$.

Λύση

Η ΔΕ γράφεται στη μορφή $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$ και είναι ομογενής.
Θέτοντας $y = ux$, έχουμε ότι $y' = u + u'x$ και

$$
\begin{aligned}
y' =& u + u'x = \frac{\sqrt{x^2(1-u^2)} + ux}{x} \\
\Leftrightarrow& u'x = \frac{x\sqrt{1-u^2} + ux}{x} - u = \sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι
$\arcsin u = c + \ln x, \qquad c \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή $u = \sin(c + \ln x)$ και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = x\sin(c + \ln x), \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

Η μορφή: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$.
Οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής αυτής λύνονται ως εξής:
i) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, τότε τίθεται $z = a_1x + b_1y$, οπότε είναι

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right)$$

Επειδή $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, έπεται ότι $z = a_1x + b_1y = \frac{a_1}{a_2}(a_2x + b_2y)$, οπότε η ΔΕ ανάγεται στην

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = \frac{z + c_1}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{b_1z + b_1c_1}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2} + a_1$$

και τελικά, στην

$$\frac{\frac{a_2}{a_1}z + c_2}{(b_1 + a_2)z + b_1c_1 + a_1c_2}dz = dx,$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

ii) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, τότε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση, έστω την (x_0, y_0), οπότε, θέτοντας $X = x - x_0$ και $Y = y - y_0$, η διαφορική εξίσωση ανάγεται στην

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1(X + x_0) + b_1(Y + y_0) + c_1}{a_2(X + x_0) + b_2(Y + y_0) + c_2} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}.$$

Η τελευταία είναι ομογενής, επομένως λύνεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $Y = UX$.

Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \dfrac{x+2y+5}{2x+4y+6}$.

Λύση

Θέτοντας $z = x + 2y$, οπότε $z' = 1 + 2y'$, προκύπτει ότι

$$y' = \frac{z'-1}{2} = \frac{z+5}{2z+6} \Rightarrow z' = \frac{2z+10}{2z+6} + 1 = \frac{4z+16}{2z+6} = \frac{2z+8}{z+3}$$
$$\Rightarrow \frac{z+3}{2z+8}dz = dx \Rightarrow \frac{2z+6}{2z+8}dz = 2dx \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{2z+8}\right) dz = 2dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$2x + c = \int 2dx = \int \left(1 - \frac{2}{2z+8}\right) dz = z - \ln|2z+8|$$
$$= x + 2y - \ln|2x+4y+8|$$

οπότε η γενική λύση της ΔΕ σε πεπλεγμένη μορφή είναι η

$$2y = x + \ln|2x+4y+8| + c.$$

Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \dfrac{x+y-2}{-x+y-4}$.

Λύση

Βάσει του ακόλουθου συστήματος

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ -x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

θέτουμε $X = x+1$ και $Y = y-3$, οπότε $dY = dy$, $dX = dx$, $y' = dY/dX$ και η ΔΕ μετατρέπεται στην

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X-1)+(Y+3)-2}{-(X-1)+(Y+3)-4} = \frac{X+Y}{-X+Y}.$$

Η νέα ΔΕ είναι ομογενής, οπότε θέτοντας $Y = UX$, μετατρέπεται στην

Λύση (συνέχεια)

$$\frac{dU}{dX}X + U = \frac{X+UX}{-X+UX} = \frac{U+1}{U-1} \Rightarrow \frac{dU}{dX}X = \frac{U+1}{U-1} - U = \frac{2U+1-U^2}{U-1},$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται ως

$$\frac{U-1}{2U+1-U^2}dU = \frac{dX}{X}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη,

$$\begin{aligned} c_1 + \ln|X| &= \int \frac{dX}{X} = -\int \frac{U-1}{U^2-2U-1}dU = \frac{-1}{2}\int \frac{(U^2-2U-1)'}{U^2-2U-1}dU \\ &= \frac{-1}{2}\ln|U^2-2U-1|, \end{aligned}$$

όπου $c_1 \in \mathbb{R}$, και τελικά

Λύση (συνέχεια)

$$\ln|U^2-2U-1| = -2c_1 - \ln X^2 \Rightarrow U^2-2U-1 = \frac{c_2}{X^2}, \quad c_2 \in \mathbb{R}^*$$

Αντικαθιστώντας, είναι $U = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y-3}{x+1}$ και

$$\begin{aligned} U^2-2U-1 &= \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y-3}{x+1} + 1 = \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y+x-2}{x+1} \\ &= \frac{(y-3)^2+(y+x-2)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{y^2+x^2+xy-x-5y+7}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή της αρχικής ΔΕ είναι η

$$y^2+x^2+xy-x-5y = c, \qquad c \in \mathbb{R}\setminus\{-7\}.$$

Μια γραμμική διαφορική εξίσωση (ΓΔΕ) πρώτης τάξης έχει τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x). \tag{3}$$

Έστω $\Phi = \Phi(x)$ μια παράγουσα της $\phi(x)$, δηλαδή $\Phi'(x) = \phi(x)$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
1) Αν $\sigma(x) = 0$, τότε η ΔΕ ονομάζεται **γραμμική ομογενής** και λύνεται άμεσα ως χωριζομένων μεταβλητών:

$$y' = -\phi(x)y \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{y'}{y} = -\phi(x) \Rightarrow (\ln|y|)' = -\phi(x) \Rightarrow \ln|y| = k - \Phi(x)$$
$$\Rightarrow |y| = e^k e^{-\Phi(x)}$$

οπότε τελικά η γενική λύση της γραμμικής ομογενούς είναι η

$$y = ce^{-\Phi(x)} = cy_0, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{όπου } y_0 = y_0(x) = e^{-\Phi(x)} \tag{4}$$

είναι η μερική λύση της γραμμικής ομογενούς, για $c = 1$, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο και στην γενική περίπτωση, όπως φαίνεται παρακάτω.

2) Στη γενική περίπτωση, αναζητάμε μια θετική συνάρτηση $I = I(x)$, η οποία ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**, τέτοια ώστε $(Iy)' = (y' + \phi y)I$, έτσι ώστε, πολλαπλασιάζοντας την (3) με I, να προκύψει

$$(y' + \phi y)I = \sigma I \Rightarrow (Iy)' = \sigma I$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $I(x) = e^{\Phi(x)} = \dfrac{1}{y_0(x)}$, αφού $I'(x) = \phi(x)e^{\Phi(x)} = \phi(x)I(x)$, οπότε

$$(y' + \phi y)I = y'I + \phi Iy = y'I + I'y = (Iy)'$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$(I(x)y)' = I(x)\sigma(x) \Rightarrow I(x)y = c + \int I(x)\sigma(x)dx \Rightarrow y = \frac{c + \int I(x)\sigma(x)dx}{I(x)}$$

οπότε, η γενική λύση της (3) είναι η

$$y = cy_0(x) + y_0(x)\int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)}dx, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Εναλλακτικά, σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η γενική λύση της εξίσωσης (3) προκύπτει ως το άθροισμα της γενικής λύσης cy_0 της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μιας (οποιασδήποτε) μερικής λύσης ψ της (3), δηλαδή είναι

$$y = cy_0 + \psi,$$

οπότε το πρόβλημα της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης ανάγεται στην εύρεση μιας μερικής λύσης ψ.
Για το σκοπό αυτό, ακολουθείται η **μέθοδος του Lagrange**, σύμφωνα με την οποία αναζητείται συνάρτηση ψ της μορφής $\psi = gy_0$. Αφού η ψ είναι λύση της (3), έπεται ότι

$$\psi' + \phi\psi = \sigma \Rightarrow g'y_0 + gy_0' + \phi g y_0 = \sigma \Rightarrow g'y_0 + g(y_0' + \phi y_0) = \sigma \Rightarrow g'y_0 = \sigma.$$

Η τελευταία σχέση προέκυψε διότι η y_0 είναι λύση της ομογενούς, δηλαδή $y_0' + \phi y_0 = 0$.

Επομένως, είναι

$$g' = \frac{\sigma}{y_0},$$

οπότε, μια κατάλληλη συνάρτηση g είναι η

$$g = \int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)} dx = \int \sigma(x) e^{\Phi(x)} dx,$$

ώστε η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y = cy_0 + \psi = cy_0 + y_0 g = cy_0 + y_0 \int \frac{\sigma}{y_0} dx,$$

όπως προέκυψε και με την προηγούμενη μέθοδο (βλ. (5)).

Άσκηση (ΦΕΒ 2019)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}, \qquad y(\pi/2) = 1.$$

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την ΔΕ κατά μέλη με x^3, παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$x^3 y' + 3x^2 y = \sin x \Leftrightarrow (x^3 y)' = (-\cos x)' \Leftrightarrow x^3 y = c - \cos x, \qquad c \in \mathbb{R}$$

και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η $y = \dfrac{c - \cos x}{x^3}$.

Θέτοντας $x = \pi/2$, έχουμε ότι $1 = y(\pi/2) = \dfrac{c - 0}{(\pi/2)^3}$, οπότε $c = (\pi/2)^3$

και η ζητούμενη μερική λύση είναι η $y = \dfrac{(\pi/2)^3 - \cos x}{x^3}$.

Άσκηση

Να λυθεί η (γραμμική) διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{1}{x}y = 3\sin(2x), \quad x > 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi} \tag{6}$$

1. Με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα.
2. Σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Λύση

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, με $\phi(x) = \dfrac{1}{x}$ και $\sigma(x) = 3\sin(2x)$ (βλ. (3)). Μια παράγουσα της $\phi(x)$ είναι η $\Phi(x) = \ln x$.

Λύση (συνέχεια)

1) Θέτοντας $I(x) = e^{\Phi(x)} = x$, έχουμε ότι

$$I(x)y' + I(x)\frac{1}{x}y = (I(x)y)'.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την (6) με $I(x)$, έχουμε

$$xy' + y = 3x\sin(2x) \Rightarrow (xy)' = 3x\sin(2x) \Rightarrow xy = c_1 + \int 3x\sin(2x)dx$$
$$\Rightarrow y = \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x}\int 3x\sin(2x)dx$$

Στη συνέχεια, προσδιορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα $\int 3x\sin(2x)dx$ ως εξής:

Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\int 3x\sin(2x)dx &= \int \frac{-3}{2}x\left(\cos(2x)\right)' dx \\
&= \frac{-3}{2}x\cos(2x) - \int \left(\frac{-3}{2}x\right)' \cos(2x)dx \\
&= \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int \cos(2x)dx \\
&= \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)' dx \\
&= c_2 + \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)
\end{aligned}
$$

Λύση (συνέχεια)

Άρα, η γενική λύση της (6) είναι η

$$\begin{aligned} y &= \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x}\left(c_2 - \frac{3x}{2}\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\right) \\ &= \frac{c}{x} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x)\right), \end{aligned} \tag{7}$$

όπου $c = c_1 + c_2$.
Χρησιμοποιώντας την δοσμένη τιμή $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}$, προσδιορίζουμε την τιμή της σταθεράς c, ως εξής:

$$\frac{1}{\pi} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi} - 0\right) = \frac{4c+3}{\pi}$$

Άρα, $\dfrac{4c+3}{\pi} = \dfrac{1}{\pi} \Rightarrow 4c + 3 = 1 \Rightarrow c = -\dfrac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας την τιμή της c στην (7), βρίσκουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Λύση (συνέχεια)

2) Μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς: $y' + \frac{1}{x}y = 0$, είναι ως γνωστό η $y_0 = e^{-\Phi(x)} = \frac{1}{x}$. οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y = \frac{c}{x}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Στη συνέχεια, αναζητούμε μερική λύση της (6), της μορφής $\psi = gy_0$. Ως γνωστό, μια κατάλληλη συνάρτηση g είναι μια παράγουσα της $\sigma(x)e^{\Phi(x)} = 3x\sin(2x)$, οπότε επιλύοντας το ολοκλήρωμα, επιλέγουμε την

$$g = \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x).$$

Λύση (συνέχεια)

Τελικά, η γενική λύση της (6) είναι το άθροισμα της λύσης (8) της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής λύσης ψ, δηλαδή

$$y = \frac{c}{x} + \psi = \frac{c}{x} + y_0 g = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} g = \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{-3}{2} x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\right)$$
$$= \frac{c}{x} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x)\right),$$

όπως άλλωστε προέκυψε και στο προηγούμενο ερώτημα.
Η τιμή της σταθεράς c προσδιορίζεται όπως και πριν, θέτοντας $x = \dfrac{\pi}{4}$ στον παραπάνω τύπο.

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli έχουν την μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x)y^a.$$

Αν $a = 0$ ή $a = 1$, τότε η ΔΕ είναι γραμμική.
Αλλιώς, θέτουμε $u = y^{1-a}$. Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει την εξίσωση σε γραμμική.
Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $(1-a)y^{-a}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&(1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} + (1-a)\phi(x)y^{1-a} = (1-a)\sigma(x) \\
\Leftrightarrow&(y^{1-a})' + (1-a)\phi(x)y^{1-a} = (1-a)\sigma(x) \\
\Leftrightarrow&u' + (1-a)\phi(x)u = (1-a)\sigma(x).
\end{aligned}$$

Άσκηση (ΦΕΒ 2015)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{4}{x}y = 12\sqrt{y}x^3, \qquad y(1) = 4.$$

Λύση

Επειδή $\sqrt{y} = y^{1/2}$, θέτουμε $a = 1/2$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τη ΔΕ με $(1-a)y^{-a} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, παίρνοντας την

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{2}{x}\sqrt{y} = 6x^3.$$

Θέτοντας $u = y^{1-a} = \sqrt{y}$, οπότε $u' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$, η τελευταία ΔΕ μετατρέπεται στην

Λύση (συνέχεια)

$$u' + \frac{2}{x}u = 6x^3.$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^2, παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$x^2u' + 2xu = 6x^5 \Leftrightarrow (x^2u)' = (x^6)' \Leftrightarrow x^2u = x^6 + c, \Leftrightarrow x^2\sqrt{y} = x^6 + c$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = x^4 + \frac{c}{x^2}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

οπότε η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι η $y = \left(x^4 + \frac{c}{x^2}\right)^2, \quad c \in \mathbb{R}.$
Θέτοντας $x = 1$, έχουμε ότι

$$4 = y(1) = (1+c)^2 \Rightarrow 1 + c = \in \{-2, 2\} \Rightarrow c \in \{-3, 1\}$$

και έτσι προκύπτουν δύο μερικές λύσεις για $y(1) = 4$, οι

$$y = \left(x^4 - \frac{3}{x^2}\right)^2, \qquad y = \left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$