

ΚΕΦ. 7: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Πρόταση 2.3

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει ο τύπος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \delta_n, \gamma_n),$$

όπου (δ_n) είναι μια ακολουθία διαμερίσεων του $[a, b]$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\delta_n) = 0$ και γ_n οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων της δ_n .

Πόρισμα 2.4

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} i\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να υπολογισθούν με τη βοήθεια του πορίσματος 2.4 τα όρια των ακολουθιών (α_n) , (β_n) και (γ_n) , όταν:

$$(i) \quad \alpha_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad (ii) \quad \beta_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{2n^2},$$

$$(iii) \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}.$$

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί ο τύπος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} i\right).$$

Σε κάθε μια από τις δοσμένες ακολουθίες πρέπει να προσδιορισθεί η κατάλληλη συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ για την εφαρμογή του τύπου.

$$(i) \alpha_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}},$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Άρα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

$$(ii) \beta_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2},$$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} / [0,1]$$

και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{1-0}{n}i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n.$$

Άρα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = [\arctg x]_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(iii) \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + i^2}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + (i/n)^2}}$$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, τίθεται $x = \sinh t$, οπότε θα είναι

$$dx = \cosh t dt, \sqrt{1+x^2} = \cosh t \text{ και } t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \text{ διότι}$$

$$x = \sinh t \Leftrightarrow x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Leftrightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 1 = 0, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\text{Επομένως, προκύπτει ότι } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = [t]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \ln(1+\sqrt{2})$.

Θεώρημα 4.1 (1^ο θεμελιώδες θεώρημα του Απ. Λογ.)

Αν η συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η συνάρτηση $F / [\alpha, \beta]$ με

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\xi \in [\alpha, \beta]$, τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο ξ και ισχύει ότι

$$F'(\xi) = f(\xi).$$

Θεώρημα 4.2 (2^ο θεμελιώδες θεώρημα του Απ. Λογ.)

Αν η συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής και $F / [\alpha, \beta]$ είναι μια παράγουσά της, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Πρόταση 4.3 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση)

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\phi / [c, d]$ τέτοια ώστε η παράγωγός της να είναι ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$ και $\phi([c, d]) = [\alpha, \beta]$. Αν $f / [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $(f \circ \phi)\phi' / [c, d]$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

Πρόταση 4.4 (Παραγοντική Ολοκλήρωση)

Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g / [\alpha, \beta]$ με παραγώγους f', g' ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) g(x) dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 19(β)

Να ευρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης G με $G(x) = \int_0^{\cos(3x^2+2x+5)} \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt / \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = \cos(3x^2 + 2x + 5) / \mathbb{R}$ και

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt / (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} / (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

είναι συνεχής, έπεται ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ για κάθε

$x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Εξάλλου, επειδή $R(g) \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων g , F και είναι $G = F \circ g$. Τότε, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} G'(x) &= (F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = \frac{-\sin(3x^2 + 2x + 5)(3x^2 + 2x + 5)'}{\sqrt{2 - \cos^2(3x^2 + 2x + 5)}} \\ &= -\frac{6x + 2}{\sqrt{1 + \sin^2(3x^2 + 2x + 5)}} \sin(3x^2 + 2x + 5). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 21(α)

Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x \frac{t^3}{t^4 + 2} dt$,

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(x) = \int_0^x \frac{t^3}{t^4 + 2} dt / \mathbb{R}$ τότε επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} / \mathbb{R}$ είναι

συνεχής, έπεται ότι η συνάρτηση F / \mathbb{R} είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Κατόπιν τούτων, είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x \frac{t^3}{t^4 + 2} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^4 + 2}}{4x^3} = \frac{1}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26

α) Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f / [0, \alpha]$, όπου $\alpha > 0$, ισχύει η σχέση $f(\alpha - x) = f(x)$, για κάθε $x \in [0, \alpha]$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\alpha} xf(x) dx = \frac{1}{2} \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

β) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $I = \int_0^{\alpha} xf(x) dx$, οπότε, για $y = \alpha - x$, προκύπτει ότι

$$I = -\int_{\alpha}^0 (\alpha - y) f(\alpha - y) dy = \alpha \int_0^{\alpha} f(y) dy - \int_0^{\alpha} yf(y) dy = \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx - I.$$

Άρα,

$$2I = \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

οπότε

$$I = \frac{1}{2} \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

β) Αν εφαρμοσθεί το α) για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} / [0, \pi]$$

προκύπτει ότι

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θέτουμε $z = \cos x$, οπότε $dz = -\sin x dx$ και άρα,

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int_1^{-1} \frac{dz}{1 + z^2} = \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 + z^2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να υπολογισθούν οι τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

$$\alpha) \int_0^1 x \arctg x dx, \quad \beta) \int_1^e x^2 (\ln x)^2 dx.$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctg x dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \arctg x dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctg x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} (\arctg x)' dx \\ &= \frac{1}{2} \arctg 1 - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\arctg x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{4} (\pi - 2). \end{aligned}$$

β) Είναι

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2 (\ln x)^2 dx &= \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' (\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} ((\ln x)^2)' dx \\ &= \frac{e^3}{3} (\ln e)^2 - \frac{1}{3} (\ln 1)^2 - \frac{2}{3} \int_1^e x^3 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e + \frac{2}{3} \int_1^e \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \frac{e^3}{3} \ln e + \frac{2}{3} \frac{1}{3} \ln 1 + \frac{2}{9} \int_1^e x^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9} e^3 + \frac{2}{9} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{9} + \frac{2}{27} (e^3 - 1) \\ &= \frac{1}{27} (5e^3 - 2).\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας (α_n) με $\alpha_n = \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} dx$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{(x^n)'}{1+x} dx = \left[\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1+x} \right)' dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx. \quad (1)$$

Επειδή $0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$, για κάθε $x \in [0,1]$, προκύπτει ότι

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

Θεώρημα 5.2

Αν δύο συναρτήσεις $f, g / [\alpha, \beta]$ είναι συνεχείς και η δεύτερη δεν αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχει (ένα τουλάχιστον) σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$

Σημειώνεται ότι το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος 5.2 για $g(x) = 1 / [\alpha, \beta]$.

Για το λόγο αυτό το θεώρημα 5.2 αναφέρεται συνήθως στη βιβλιογραφία ως **Γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού**.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται συχνά για τον προσδιορισμό του σφάλματος στους τύπους της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ΑΣΚΗΣΗ (ΦΕΒ 2019). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $z \in (-2, 2)$, για το

οποίο ισχύει η σχέση
$$\frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(4x^2 - 2)}{1 + x^2} dx = \sin z.$$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν $f, g / [a, b]$ συνεχείς και η g δεν αλλάζει πρόσημο, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.

Οι $f, g / [0, 1]$, με $f(x) = \sin(4x^2 - 2)$ και $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, ώστε

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(4x^2 - 2)}{1 + x^2} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^1 f(x)g(x)dx = \frac{4}{\pi} f(\xi) \int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{\pi} f(\xi) \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{4}{\pi} f(\xi) [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{4}{\pi} f(\xi) \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = f(\xi) = \sin(4\xi^2 - 2) \end{aligned}$$

Τελικά, θέτοντας $z = 4\xi^2 - 2$, προκύπτει το ζητούμενο.

Κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω $f / [1, +\infty)$ μια μη αρνητική φθίνουσα συνάρτηση. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) , με $S_n = \int_1^n f(x) dx$ συγκλίνει και στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανισότητα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος, η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Τέλος, πρέπει να τονισθεί ότι για την εφαρμογή του κριτηρίου αυτού δεν είναι απαραίτητο η συνάρτηση f να ορίζεται σε όλο το διάστημα $[1, +\infty)$ αλλά σε ένα υποδιάστημα της μορφής $[m, +\infty)$, αρκεί η συνάρτηση να είναι μη αρνητική και φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να αποδειχθεί το κριτήριο του ολοκληρώματος.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(i)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε πρέπει να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (σ_n) συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) συγκλίνει.

Επειδή η συνάρτηση $f / [1, +\infty)$ είναι μη αρνητική, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \sum_{i=1}^{n+1} f(i) - \sum_{i=1}^n f(i) = f(n+1) \geq 0$$

και

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx \\ &= \int_1^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε οι ακολουθίες (σ_n) και (S_n) είναι αύξουσες. Τότε όμως, αρκεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (σ_n) είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) είναι άνω φραγμένη.

Για το σκοπό αυτό, θα αποδειχθεί η ανισότητα

$$S_{n+1} \leq \sigma_n \leq f(1) + S_n \quad (1)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \int_1^{n+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} f(i) dx = \sum_{i=1}^n f(i) \\ &= \sigma_n \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S_n &= \int_1^n f(x) dx = \sum_{i=2}^n \int_{i-1}^i f(x) dx \geq \sum_{i=2}^n \int_{i-1}^i f(i) dx = \sum_{i=2}^n f(i) \\ &= \sigma_n - f(1). \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, ισχύει η ανισότητα (1), από όπου προκύπτει ότι η ακολουθία (σ_n) είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) είναι άνω φραγμένη.

Τέλος, στην περίπτωση αυτή, για $n \rightarrow \infty$ η σχέση (1) δίδει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

ΑΣΚΗΣΗ (ΦΕΒ 2018). Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος,

να αποδειχθεί η ανισότητα $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3} \leq \frac{1}{4} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3} / [1, +\infty)$, η οποία είναι φθίνουσα και μη αρνητική, οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, ισχύει η σχέση

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

όπου

$$S_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{dx}{x^2 + 3} \stackrel{x=y\sqrt{3}}{=} \int_{1/\sqrt{3}}^{n/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} dy}{3y^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\operatorname{arctg} y]_{1/\sqrt{3}}^{n/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \text{ και } f(1) = \frac{1}{4},$$

προκύπτει τελικά η ζητούμενη ανισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $q > 1$. Επιπλέον, να αποδειχθεί η σχέση $\frac{1}{(q-1)(\ln 2)^{q-1}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q} \leq \frac{q-1+2\ln 2}{2(q-1)(\ln 2)^q}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^q} / [2, +\infty)$$

η οποία είναι μη αρνητική, με παράγωγο

$$f'(x) = -\frac{[x(\ln x)^q]'}{x^2(\ln x)^{2q}} = -\frac{(\ln x)^q + qx \frac{1}{x}(\ln x)^{q-1}}{x^2(\ln x)^{2q}} = -\frac{\ln x + q}{x^2(\ln x)^{q+1}}.$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [m, +\infty)$, όπου $m = \max\{2, e^{-q}\}$, έπεται ότι η συνάρτηση $f / [m, +\infty)$ είναι φθίνουσα, οπότε ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του κριτηρίου του ολοκληρώματος.

Επιπλέον, για $q \neq 1$, είναι

$$S_n = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^q} dx \stackrel{y=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln n} y^{-q} dy = \left[\frac{y^{-q+1}}{-q+1} \right]_{\ln 2}^{\ln n} = \frac{(\ln n)^{1-q}}{1-q} + \frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}.$$

Ανάλογα, για $q = 1$, είναι $S_n = \int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$.

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}, & \text{αν } q > 1 \\ +\infty, & \text{αν } q \leq 1 \end{cases}$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $q > 1$ και ισχύει ότι

$$\frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^q} + \frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}$$

ή, ισοδύναμα,
$$\frac{1}{(q-1)(\ln 2)^{q-1}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q} \leq \frac{q-1+2\ln 2}{2(q-1)(\ln 2)^q}.$$