ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΚΕΦ.2: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Ορισμός

Έστω E ένα μη κενό σύνολο. Ακολουθία είναι κάθε απεικόνιση $f : \mathbb{N}^* \to E$ και συμβολίζεται ως $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ή πιο απλά ως (f_n). Ειδικά αν $E \subseteq \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Παρατηρήσεις

- Η ακολουθίες αποτελούν μια ειδική κατηγορία απεικονίσεων (συναρτήσεων), στις οποίες το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών. Για το λόγο αυτό, η ανεξάρτητη μεταβλητή συνήθως συμβολίζεται με n αντί για x. Επιπλέον, η εικόνα του προτύπου n συμβολίζεται συνήθως, χάριν απλότητας, με f_n αντί για $f(n)$, και ονομάζεται n-**οστός όρος της ακολουθίας**.
- Πολλές φορές ως πεδίο ορισμού μιας ακολουθίας ορίζεται το $\mathbb{N}$ αντί για το $\mathbb{N}^*$.

Αναδρομικός (ή αναγωγικός) τύπος μιας ακολουθίας (a_n) ονομάζεται ένας τύπος ο οποίος καθορίζει την τιμή του γενικού όρου a_n συναρτήσει ενός ή και περισσότερων προηγούμενων όρων της ακολουθίας.
Για παράδειγμα, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = n!$ μπορεί να οριστεί ισοδύναμα μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_n = na_{n-1},$$

με αρχική συνθήκη $a_1 = 1$.
Τονίζεται ότι η αρχική συνθήκη είναι απαραίτητη για τον πλήρη καθορισμό της ακολουθίας, ενώ οποιαδήποτε αλλαγή αυτής αλλάζει τελείως και την ακολουθία που προκύπτει.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad 2! = 2 \quad , \quad 3! = 6 \quad , \quad 4! = 24$

$n! = (n-1)!\, n$

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= \cancel{a_n} + r \\ \cancel{a_n} &= \cancel{a_{n-1}} + r \\ \cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + r \\ &\vdots \\ \cancel{a_2} &= a_1 + r \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + nr$$

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= r a_n \\ a_n &= r a_{n-1} \\ a_{n-1} &= r a_{n-2} \\ &\vdots \\ a_2 &= r a_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r^0 a_{n+1} &= \cancel{r a_n} \\ \cancel{r^1 a_n} &= \cancel{r^2 a_{n-1}} \\ \cancel{r^2 a_{n-1}} &= \cancel{r^3 a_{n-2}} \\ &\vdots \\ \cancel{r^{n-1} a_2} &= r^n a_1 \end{aligned}\right\} \quad a_{n+1} = r^n a_1$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = S_n + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Αριθμητική πρόοδος: Ονομάζεται κάθε ακολουθία που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = a_n + \lambda,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Τελικά, προκύπτει ότι

$$a_n = a_1 + (n-1)\lambda.$$

Γεωμετρική πρόοδος: Ονομάζεται κάθε ακολουθία που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = \lambda a_n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \neq 1$. Τελικά, προκύπτει ότι

$$a_n = a_1 \lambda^{n-1}.$$

(1) $s_n = 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$

(2) $q s_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$

$(1-q)s_n = 1 - q^{n+1} \overset{q \neq 1}{\Longrightarrow} s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\boxed{\begin{array}{c} p \to q \;\;\text{H}\;\; \neg p \vee q \\ \\ \neg(\neg p \vee q) \;\;\text{H}\;\; p \wedge \neg q \end{array}}$$

Βασικά αθροίσματα όρων προόδων:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}, \qquad \lambda \neq 1.$$

Άλλα βασικά αθροίσματα:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Μονοτονία ακολουθίας

Μονοτονία: Η ακολουθία (a_n) είναι:

- *Αύξουσα*, αν $a_{n+1} - a_n \geq 0$ (ή $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ και $a_n > 0$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
  (Γνησίως αύξουσα, αν οι ανισότητες είναι γνήσιες).
- *Φθίνουσα*, αν $a_{n+1} - a_n \leq 0$ (ή $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ και $a_n > 0$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
  (Γνησίως φθίνουσα, αν οι ανισότητες είναι γνήσιες).

Όριο ακολουθίας

Ορισμός - Όριο ακολουθίας

Η ακολουθία (a_n) *συγκλίνει* στο $a \in \mathbb{R}$, οπότε γράφουμε $a_n \to a$ ή $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ή $\lim a_n = a$, αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$,

ή πιο συνοπτικά,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Η ακολουθία (a_n) *δεν συγκλίνει* στο $a \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν ισχύει το αντίθετο, δηλαδή

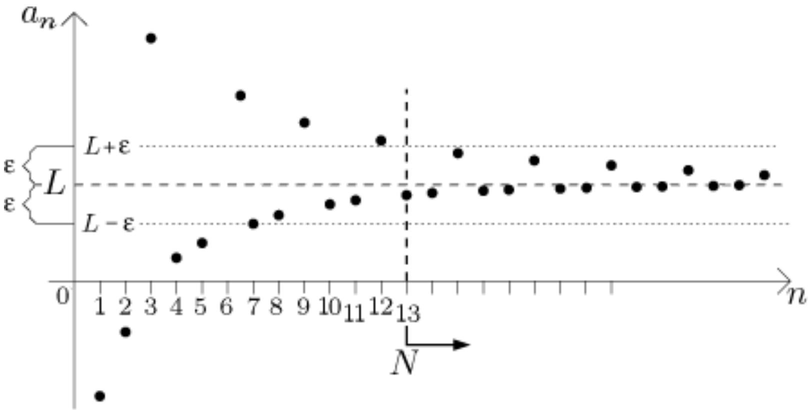
υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει $n \geq n_0$, τέτοιο ώστε $|a_n - a| \geq \varepsilon$,

ή πιο συνοπτικά,

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N}^*)(\exists n \in \mathbb{N}^*)(n \geq n_0 \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon).$$

Παρατηρήσεις:

- Μια ακολουθία που συγκλίνει στο 0 ονομάζεται **μηδενική ακολουθία**.
- Ερμηνεύοντας τον ορισμό της σύγκλισης, μια ακολουθία συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η απόσταση των όρων της από το a (δηλαδή η ποσότητα $|a_n - a|$) γίνεται τελικά (δηλαδή από κάποιο n_0 και μετά) οσοδήποτε μικρή (το ε μπορεί να είναι ένας θετικός αριθμός οσοδήποτε κοντά στο 0).
- Γενικά λέμε ότι μια σχέση ως προς τη μεταβλητή $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει **τελικά**, όταν ισχύει για κάθε n με $n \geq n_0$, όπου n_0 είναι ένας σταθερός προκαθορισμένος φυσικός αριθμός.
- Σημειώνεται ότι στην εφαρμογή του παραπάνω ορισμού της σύγκλισης η επιλογή του n_0 συνήθως εξαρτάται από την τιμή του ε, για το λόγο αυτό πολλές φορές γράφουμε $n_0 = n_0(\varepsilon)$, τονίζοντας αυτή την εξάρτηση.



a_n
$L+\varepsilon$
ε
L
ε
$L-\varepsilon$
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
n
N

Ιδιότητες ορίου ακολουθίας: Αν υπάρχουν τα $\lim a_n$, $\lim b_n$, $\lim c_n$ στο $\mathbb{R}$, τότε

- $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- $\lim (a_n)^k = (\lim a_n)^k$, για κάθε $k \neq 0$.
- $\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n$.
- $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$.
- (Κριτήριο παρεμβολής.) Αν $\lim b_n = \lim c_n = a$ και $b_n \leq a_n \leq c_n$, για κάθε $n \geq n_0$, τότε $\lim a_n = a$.
  Ειδική περίπτωση κριτήριου παρεμβολής: Αν $\lim b_n = 0$ και $|a_n| \leq b_n$, για κάθε $n \geq n_0$, τότε $\lim a_n = 0$.
  Εφαρμογές: $\sqrt[n]{2n^3 + 3n^2 + 5}$, $\sqrt[n]{4^n + 3^n}$, $\dfrac{\sin n}{n}$, $\dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

Όριο ακολουθίας

Κατ΄ εκδοχή σύγκλιση: Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $+\infty$ αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε $n \geq n_0 \Rightarrow a_n > \varepsilon$.

Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε $n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -\varepsilon$.

Βασικά όρια:

- $\lim \dfrac{1}{n^p} = 0$, για κάθε $p > 0$.
- $\lim a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \end{cases}$ (Αν $a \leq -1$ τότε το όριο δεν υπάρχει.)
- $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, για κάθε $a > 0$.
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.
- $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \lim \left(\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)!}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e.$

  Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός - Υπακολουθία

Για κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (k_n), η (a_{k_n}) ονομάζεται **υπακολουθία** της (a_n).

Δηλαδή, η $a_{k_n} = a(k(n))$ είναι η σύνθεση των ακολουθιών

$$k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \qquad \text{και} \qquad a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}.$$

- Μια χρήσιμη ιδιότητα της ακολουθίας δεικτών (k_n) είναι η εξής:

  $$k_n \geq n, \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

  και αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή.
- Από τον ορισμό του ορίου, προκύπτει ότι (βλ. επόμενη άσκηση)

  $$\lim a_n = a \Rightarrow \lim a_{k_n} = a.$$

Σημείο συσσώρευσης

Ορισμός - Σημείο συσσώρευσης

Το $a \in \mathbb{R}$ είναι *σημείο συσσώρευσης* της (a_n), αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$, με $m \geq n$, τέτοιος ώστε $|a_m - a| < \varepsilon$.

Δηλαδή, υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας σε κάθε οσοδήποτε μικρή περιοχή του σημείου συσσώρευσης a.

Πρόταση

Ο $a \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n), αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) με $\lim a_{k_n} = a$.

Φράγμα ακολουθίας

Ορισμός - Φράγμα ακολουθίας

Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι *φραγμένη* (ισοδύναμα *απολύτως φραγμένη*), αν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m \leq a_n \leq M$ (ισοδύναμα, αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $|a_n| \leq m$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

- Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
- Έστω (a_n) μια (τελικά) αύξουσα ακολουθία. Αν είναι άνω φραγμένη, τότε $\lim a_n = \sup a_n$, αλλιώς $\lim a_n = +\infty$. (Εφαρμογές: $a_{n+1} = \sqrt{18 + 7a_n}, a_1 = 1$.)
- Έστω (a_n) μια (τελικά) φθίνουσα ακολουθία. Αν είναι κάτω φραγμένη, τότε $\lim a_n = \inf a_n$, αλλιώς $\lim a_n = -\infty$.
- Αν (a_n) φραγμένη και (b_n) μηδενική, τότε $\lim(a_n b_n) = 0$. Εφαρμογές: $\dfrac{\sin n}{n}, \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Αν (a_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία, τότε ορίζονται οι ακολουθίες

$$\beta_n = \sup_{m \geq n} a_m = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \quad \text{και}$$
$$\gamma_n = \inf_{m \geq n} a_m = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}.$$

Άμεσα προκύπτει ότι οι (β_n) και (γ_n) είναι φραγμένες και μονότονες (η (β_n) είναι φθίνουσα, ενώ η (γ_n) είναι αύξουσα) και επιπλέον ισχύει ότι $\gamma_n \leq a_n \leq \beta_n$.
Επομένως υπάρχουν τα όρια $\lim \beta_n$ και $\lim \gamma_n$, τα οποία συμβολίζονται αντίστοιχα με

$$\limsup a_n \qquad \text{και} \qquad \liminf a_n.$$

Αν (a_n) είναι μια μη φραγμένη ακολουθία, τότε τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, αλλά δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί.

Φράγμα ακολουθίας

Πρόταση

Τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ μιας ακολουθίας (a_n) αποτελούν αντίστοιχα το μέγιστο και το ελάχιστο σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας.

Πόρισμα

Το όριο μιας ακολουθίας (a_n) υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $\limsup a_n = \liminf a_n$. Στην περίπτωση αυτή είναι $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Φράγμα ακολουθίας

Πρόταση

Για κάθε ακολουθία θετικών όρων ισχύει ότι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Πρόταση (Bolzano-Weierstrass)

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει σημείο συσσώρευσης.

Σύμφωνα με την τελευταία πρόταση, ισοδύναμα, κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.
Πιο ειδικά, ισχύει κάτι πιο ισχυρό: Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια μονότονη (άρα και συγκλίνουσα) υπακολουθία.

Βασική ακολουθία

Ορισμός - Βασική ακολουθία

Η ακολουθία (a_n), ονομάζεται **βασική** αν και μόνο αν

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ τέτοιος ώστε, για κάθε } m, n \geq n_0, \\ \text{ισχύει } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Πρόταση (Cauchy)

Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι βασική.

Η προηγούμενη πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την απόδειξη της μη σύγκλισης μιας ακολουθίας, ή για την απόδειξη της σύγκλισής της, όταν το όριό της είναι άγνωστο.

- Αν $a_n \neq 0$ και $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda < 1$, τότε $\lim a_n = 0$.
  Εφαρμογές: $\frac{4^n}{n!}$, $\frac{(-1)^n n^3}{2^n}$
- Αν $a_n \neq 0$ και $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$.
  Εφαρμογές: $\sqrt[n]{2n^3 + 3n^2 + 5}$, $\sqrt[n]{4^n + 3^n}$, $\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}$.
- (Stolz) Αν (A_n) μια γνησίως αύξουσα, όχι άνω φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών και $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim \frac{a_n}{A_n} = \ell$.
  Εφαρμογές: $\frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 5)

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες:

$$\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \beta_n = \frac{3n+2}{4^n}, \qquad \gamma_n = \frac{(-1)^n}{n^2+5n+2}.$$

Λύση

Είναι

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$= \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli:

$n \in \mathbb{N}, \theta > -1 \Rightarrow (1+\theta)^n \geq 1+n\theta$, για $\theta = \dfrac{-1}{(n+1)^2} > -1$,

Λύση (συνέχεια)

προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1$$

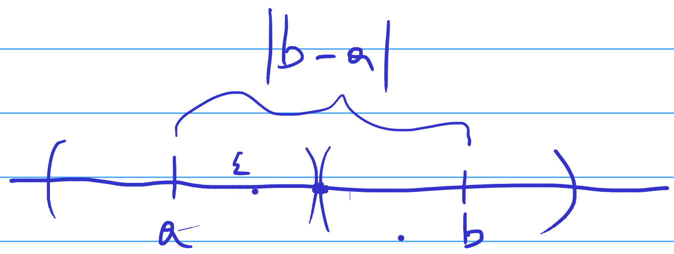
άρα η (α_n) είναι γνησίως αύξουσα.
Η ακολουθία (β_n) είναι γνησίως φθίνουσα, διότι

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{3n+5}{4^{n+1}}\frac{4^n}{3n+2} = \frac{1}{4}\frac{3n+5}{3n+2} \leq \frac{1}{4}\frac{3n+5n}{3n} = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

Η ακολουθία (γ_n) δεν μπορεί να είναι αύξουσα, ούτε φθίνουσα γιατί κάθε 2 διαδοχικοί όροι έχουν αντίθετο πρόσημο, δηλαδή ισχύει $\gamma_1 < \gamma_2 > \gamma_3 < \gamma_4 > \cdots$.

$n \geq 1$

$$\frac{3n+5}{3n+2} \leq \frac{3n+5n}{3n+2} = \frac{8n}{3n+2} \leq \frac{8n}{3n} = \frac{8}{3} < 4$$



$$\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$$

Τριγωνική ανισότητα:

$$|x \pm y| \leq |x| + |y| \quad , \; x, y \in \mathbb{R}$$

Ασκήσεις - Όριο ακολουθίας

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 9)

Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.

Απόδειξη.

Έστω ακολουθία (a_n), με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Αν η (a_n) συγκλίνει και σε κάποιον άλλον αριθμό $b \neq a$, τότε εφαρμόζοντας δύο φορές τον ορισμό της σύγκλισης, προκύπτει ότι για $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2} > 0$, υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{και} \qquad n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon.$$

Επιλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, οι δύο παραπάνω ανισότητες ισχύουν για $n \geq n_0$. Επομένως, για $n \geq n_0$, έχουμε

$$|a-b| = |\underline{a_n - b} - (\underline{a_n - a})| \leq |a_n - b| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|,$$

δηλαδή $|a-b| < |a-b|$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 12)

Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{8n^3 + 4n^2 - 5n + 7}{4n^3 + 10n^2 - 6n + 3}, \qquad \beta_n = \frac{3n^3 + 5n^2 + 6n - 2}{2n^4 + 3n^3 - 6n^2 + 11},$$

$$\gamma_n = \frac{2n^3 + 4n^2 - 7n + 3}{n^2 - 5n + 12}.$$

Λύση

Έχουμε ρητές παραστάσεις ως προς τη μεταβλητή n, οπότε σε κάθε περίπτωση βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο όρο από αριθμητή και παρονομαστή.

$$\begin{aligned} \lim \alpha_n &= \lim \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{8 + 4/n - 5/n^2 + 7/n^3}{4 + 10/n - 6/n^2 + 3/n^3} \\ &= \frac{8 + \lim(4/n) - \lim(5/n^2) + \lim(7/n^3)}{4 + \lim(10/n) - \lim(6/n^2) + \lim(3/n^3)} = \frac{8}{4} \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

$$\begin{aligned}\lim \beta_n &= \lim \frac{3/n + 5/n^2 + 6/n^3 - 2/n^4}{2 + 3/n - 6/n^2 + 11/n^4} \cdot \frac{n^3}{n^4} \\ &= \frac{\lim(3/n) + \lim(5/n^2) + \lim(6/n^3) - \lim(2/n^4)}{2 + \lim(3/n) - \lim(6/n^2) + \lim(11/n^4)} \lim \frac{1}{n} \\ &= \frac{0}{2} \lim \frac{1}{n} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim \gamma_n &= \frac{2 + 4/n - 7/n^2 + 3/n^3}{1 - 5/n + 12/n^2} \cdot \frac{n^3}{n^2} \\ &= \frac{2 + \lim(4/n) - \lim(7/n^2) + \lim(3/n^3)}{1 - \lim(5/n) + \lim(12/n^2)} \lim n \\ &= \frac{2}{1} \lim n = +\infty\end{aligned}$$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 21)

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}, \qquad \beta_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Λύση

Για την ακολουθία (α_n), παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι μια φραγμένη παράσταση, ενώ ο παρονομαστής τείνει στο $+\infty$. Επομένως, εκτιμάμε ότι το όριό της θα είναι το 0 και θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της παρεμβολής για να το αποδείξουμε. Πράγματι, είναι

$$|\alpha_n| = \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \to 0,$$

επομένως, $\alpha_n \to 0$.

Λύση (συνέχεια)

Για την (β_n), εκτελούμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
\Leftrightarrow &1 = A(2n+1) + B(2n-1)
\end{aligned}$$

οπότε, θέτοντας στην τελευταία σχέση $n = 1/2$ βρίσκουμε ότι $A = 1/2$ και στη συνέχεια, θέτοντας $n = -1/2$ βρίσκουμε ότι $B = -1/2$.

Λύση (συνέχεια)

Κατόπιν τούτου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1/2}{2k-1} - \frac{1/2}{2k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1/2}{2k-1} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{2n+1} \to \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ασκήσεις - Όριο ακολουθίας

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 30)

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών (α_n) και (β_n), με

$$\alpha_n = \sqrt[n]{4n^3 + 3n^2 + 5n + 3}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n}.$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά όρια $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{a} = 1$, όπου $a > 0$, καθώς επίσης και το κριτήριο παρεμβολής. Είναι

$$\begin{aligned} 1 \leftarrow \sqrt[n]{3} \leq \alpha_n = \sqrt[n]{4n^3 + 3n^2 + 5n + 3} &\leq \sqrt[n]{4n^3 + 3n^3 + 5n^3 + 3n^3} \\ &= \sqrt[n]{15n^3} = \sqrt[n]{15}(\sqrt[n]{n})^3 \to 1, \end{aligned}$$

άρα $\lim \alpha_n = 1$.

Ομοίως, $7 = \sqrt[n]{7^n} \leq \beta_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{7^n + 7^n} = 7\sqrt[n]{2} \to 7$,
άρα $\lim \beta_n = 7$.

ΑΣΚΗΣΗ Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιηθεί η ανισότητα Cauchy:

$$\boxed{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n > 0}$$

για $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-2} = 1$ και $a_{n-1} = a_n = \sqrt{n}$, η οποία

δίνει ότι $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{n-2} \sqrt{n}\sqrt{n}} \le \frac{n-2-2\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \to 1$

Επιπλέον, $\sqrt[n]{n} \ge 1$ (διότι $n \in \mathbb{N}^*$), άρα $\sqrt[n]{n} \to 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \overset{k=j-1}{\underset{j=k+1}{=}} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{2(j-1)+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{2j-1} \overset{k=j}{=} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k-1}$$

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \le \sqrt[n]{n^{100} + 2^n} \overset{n \ge n_0}{\le} \sqrt[n]{2^n + 2^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2\sqrt[n]{2} \to 2$$

$\boxed{n^{100} \le 2^n \ ?}$ Έστω $a_n = \frac{n^{100}}{2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^{100}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} \to \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$

Άρα $a_n \to 0$. Επομένως, για $\varepsilon = 1$ (και γενικά $\forall \varepsilon > 0$)

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $n \ge n_0$ $|a_n| < \varepsilon = 1$

Άρα $\frac{n^{100}}{2^n} < 1$ για $n \ge n_0$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 26)

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_n), με

$$\alpha_n = \frac{9\alpha^n - 5\beta^{n+1}}{3\alpha^n + \beta^n}, \qquad \alpha, \beta \neq 0.$$

Λύση

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $|\alpha| < |\beta|$, τότε $\lim \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$, οπότε

$$\alpha_n = \frac{9(\alpha/\beta)^n - 5\beta}{3(\alpha/\beta)^n + 1} \to \frac{0 - 5\beta}{0 + 1} = -5\beta.$$

$$|a| < 1 \Rightarrow a^n \to 0$$

$$\frac{2^n + 5^n}{3^n + 6^n} = \frac{(2/5)^n + 1}{(3/6)^n + 1} \frac{5^n}{6^n} \to \frac{0+1}{0+1} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{7^n + 5^n}{3^n + 7^n} = \frac{1 + (5/7)^n}{(3/7)^n + 1} \frac{7^n}{7^n} \to \frac{1+0}{0+1} = 1$$

(a_n) απολύτως φραγμένη $\Leftrightarrow$ (a_n) φραγμένη

Απόδειξη.

Ευθύ "$\Rightarrow$": $|a_n| \leq M \Leftrightarrow -M \leq a_n \leq M$

Αντίστροφο "$\Leftarrow$": $m \leq a_n \leq M \Rightarrow -|m| \leq m \leq a_n \leq M \leq |M| \Rightarrow -k \leq a_n \leq k$

όπου $k = \max\{|m|, |M|\}$ $\Rightarrow |a_n| \leq k$

Λύση (συνέχεια)

Αν $|\alpha| > |\beta|$, τότε $\lim \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$, οπότε

$$\alpha_n = \frac{9\alpha^n - 5\beta^{n+1}}{3\alpha^n + \beta^n} = \frac{9 - 5\beta(\beta/\alpha)^n}{3 + (\beta/\alpha)^n} \to \frac{9-0}{3+0} = 3.$$

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha_n = \frac{9 - 5\beta}{4}$.

Αν $\alpha = -\beta$, τότε $\alpha_n = \frac{9 - 5\beta(-1)^n}{3 + (-1)^n}$ και το όριο δεν υπάρχει, διότι έχει 2 υπακολουθίες με διαφορετικά όρια, τις

$$\alpha_{2n} = \frac{9 - 5\beta}{3 + 1} \qquad \text{και} \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{9 + 5\beta}{3 - 1},$$

εκτός αν $\beta = -3/5$, οπότε είναι $\alpha_n = 3$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 11.1)

Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο με την ακολουθία αυτή.

Απόδειξη.

Έστω ακολουθία (a_n), με $\lim a_n = a$. Βάσει του ορισμού της σύγκλισης, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Αν (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n), τότε η (k_n) είναι εξ ορισμού μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, οπότε είναι $k_n \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$n \geq n_0 \Rightarrow k_n \geq k_{n_0} \geq n_0 \Rightarrow |a_{k_n} - a| < \varepsilon,$$

δηλαδή η (a_{k_n}) ικανοποιεί τον ορισμό της σύγκλισης, οπότε $\lim a_{k_n} = a$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 6)

Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες:

$$\alpha_n = \frac{2n}{n^2+1}\cos(n+1), \quad \beta_n = n2^{-n}, \quad \gamma_n = (-1)^n \frac{n^2 \sin n + 2n}{2n^2+3}.$$

Λύση

Θα χρησιμοποιηθούν οι γνωστές ανισότητες

$$|\cos x| \leq 1, \qquad |\sin x| \leq 1, \qquad \frac{2x}{1+x^2} \leq 1, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η τελευταία προκύπτει ως εξής:

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq 1.$$

Βάσει των παραπάνω, είναι

Λύση (συνέχεια)

$$|\alpha_n| = \frac{2n}{n^2+1}|\cos(n+1)| \leq \frac{2n}{n^2+1} \leq 1 \qquad \text{και}$$

$$|\gamma_n| = \frac{|n^2 \sin n + 2n|}{2n^2+3} \leq \frac{n^2|\sin n| + 2n}{2n^2+3} \leq \frac{n^2+2n}{2n^2+3} \leq \frac{n^2+2n^2}{2n^2} = \frac{3}{2},$$

άρα οι (α_n), (γ_n) είναι φραγμένες. Για την (β_n), είναι

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \leq \frac{n+n}{2n} = 1,$$

άρα η (β_n) είναι φθίνουσα, οπότε $0 < b_n \leq b_1 = 1/2$, δηλαδή είναι φραγμένη. Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα (αλλά με μεγαλύτερο άνω φράγμα) ως εξής:

$$|\beta_n| = \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{(1+1/2)^n} \leq \frac{n}{1+n/2} \leq \frac{n}{n/2} = 2.$$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 11.2)

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

Έστω ακολουθία (a_n), με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Τότε, για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $|a_n - a| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα:

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

προκύπτει ότι $|a_n| - |a| \leq ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < 1$,
άρα $|a_n| < 1 + |a|$, για κάθε $n \geq n_0$.
Αν ληφθεί $M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$,
(το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο, άρα έχει μέγιστο) τότε είναι $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή η (a_n) είναι φραγμένη. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 17)

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (a_n), με

$$a_1 = 1 \qquad \text{και} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{5}{2a_n}, \quad \text{για } n \in \mathbb{N}^*,$$

συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Λύση

Αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας, δηλαδή αν $\lim a_n = x \in \mathbb{R}$, τότε θα είναι $x = \lim a_{n+1} = \lim \dfrac{a_n^2 + 5}{2a_n} = \dfrac{x^2 + 5}{2x}$, δηλαδή θα πρέπει να είναι $x^2 = 5$, οπότε $x = \sqrt{5}$.
(Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται διότι $a_n > 0$.)
Παρατηρούμε ότι $a_1 = 1 < a_2 = 3 > a_3 = 14/6 > \cdots$.
Εικάζουμε λοιπόν ότι, για $n \geq 2$, η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το $x = \sqrt{5}$, και στη συνέχεια το αποδεικνύουμε.

Λύση (συνέχεια)

Πράγματι,

$$a_{n+1} - x = \frac{a_n^2 + 5}{2a_n} - x = \frac{a_n^2 + x^2 - 2xa_n}{2a_n} = \frac{(a_n - x)^2}{2a_n} \geq 0, \quad n \geq 1,$$

άρα η (a_{n+1}) είναι κάτω φραγμένη (από το x), καθώς επίσης και

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n^2 + 5}{2a_n} - a_n = \frac{a_n^2 + x^2 - 2a_n^2}{2a_n} = -\frac{a_n^2 - x^2}{2a_n} \\ &= -\frac{(a_n - x)(a_n + x)}{2a_n} \leq 0, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

άρα η (a_{n+1}) είναι φθίνουσα.
Κατόπιν τούτων, η (a_{n+1}) είναι συγκλίνουσα, οπότε το όριό της είναι αναγκαστικά το $x = \sqrt{5}$, σύμφωνα με τα προηγούμενα, δηλαδή $\lim a_n = \lim a_{n+1} = \sqrt{5}$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 18)

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (a_n), με

$$a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}, \quad \text{πλήθος ριζικών } n, \quad a > 0,$$

συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Λύση

Ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι ο εξής:

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}, \qquad a_1 = \sqrt{a}.$$

Η ακολουθία προφανώς αποτελείται από θετικούς όρους. Αν υπάρχει το όριο, δηλαδή αν $\lim a_n = x \in \mathbb{R}$, τότε θα πρέπει να είναι

$$x = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{a + a_n} = \sqrt{a + \lim a_n} = \sqrt{a + x}.$$

$$a_n = \sqrt{a + \underbrace{\sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}_{n-1 \text{ ριζικά}}}$$

$$a_n = \sqrt{a + a_{n-1}} \qquad a_1 = \sqrt{a}$$

$$a_2 = \sqrt{a + a_1} = \sqrt{a + \sqrt{a}}$$

$$a_3 = \sqrt{a + a_2} = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$$

$\lfloor x \rfloor$: ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\lfloor 2.5 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2.5 \rfloor = -3$$

$$-3 \leq -2.5 < 2$$

$$\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a - 1 < \lfloor 2a \rfloor \leq 2a \\ 3a - 1 < \lfloor 3a \rfloor \leq 3a \end{array}\right\} \quad 5a - 2 < \lfloor 2a \rfloor + \lfloor 3a \rfloor \leq 2a + 3a$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Ασκήσεις - όριο φραγμένης και μονότονης ακολουθίας

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, $x^2 - x - a = 0$, οπότε $x \overset{*}{=} \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Η αρνητική ρίζα $y = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ απορρίπτεται διότι $a_n > 0$.

Παρατηρούμε ότι $a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a+\sqrt{a}} < \cdots$,

οπότε εικάζουμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το x και στη συνέχεια το αποδεικνύουμε με επαγωγή.

Προφανώς, $a_1 < x$. Έστω ότι η σχέση $a_n < x$ ισχύει για κάποιο $n \geq 1$. Τότε,

$* \; x^2 = x + a$

$$x - a_{n+1} = x - \sqrt{a+a_n} = \frac{x^2 - a - a_n}{x + \sqrt{a+a_n}} \overset{*}{=} \frac{x - a_n}{x+\sqrt{a+a_n}} > 0.$$

Επομένως, $a_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή (a_n) άνω φραγμένη.

Λύση (συνέχεια)

Επιπλέον,

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a + a_n} - a_n = \frac{a + a_n - a_n^2}{\sqrt{a + a_n} + a_n} = \frac{-(a_n - x)(a_n - y)}{\sqrt{a + a_n} + a_n} > 0,$$

άρα η (a_n) είναι και (γνησίως) αύξουσα.
Για την τελευταία ισότητα, υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, όταν $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, έχει 2 πραγματικές ρίζες, τις $\rho_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, και τότε ισχύει ότι

$$ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2).$$

Επομένως, η παράσταση $a + a_n - a_n^2$ του αριθμητή παραγοντοποιείται ως

$$a + a_n - a_n^2 = -(a_n^2 - a_n - 2) = -(a_n - x)(a_n - y).$$

Κατόπιν τούτων, η ακολουθία είναι συγκλίνουσα, οπότε $\lim a_n = x$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 34)

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών: 0X1

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \beta_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n, \qquad \gamma_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n.$$

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί το βασικό όριο $\lim e_n = e$, όπου

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

οπότε $\dfrac{1}{e_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \dfrac{1}{e}$.

$$\alpha_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{e_{n-1}} \frac{n-1}{n} \to \frac{1}{e} \cdot 1 = e^{-1}$$

Ασκήσεις - όριο ακολουθίας

Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\beta_n &= \left(\frac{n-3}{n}\right)^n \\
&= \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^n \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{n-3} \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^3 \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{n-1}{n} \\
&= \frac{1}{e_{n-3}} \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^3 \frac{1}{e_{n-2}} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 \frac{1}{e_{n-1}} \frac{n-1}{n} \\
&\to \frac{1}{e} \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{e} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e^3}.
\end{aligned}
$$

Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\gamma_n = \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^n &= \left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^n \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{3n} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{3n}} \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{3n-2} \left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{2} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{3n-1} \frac{3n-1}{3n}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{1}{e_{3n-2}} \left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{2} \frac{1}{e_{3n-1}} \frac{3n-1}{3n}} \\
&\to \sqrt[3]{e^{-1} \cdot 1 \cdot e^{-1} \cdot 1} = e^{-2/3}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 41)

Να βρεθούν τα σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας:

$$a_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}^*, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, & n = 3k+1, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n+1}{2n}, & n = 3k+2, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

και στη συνέχεια να βρεθούν τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$.

Λύση

Επειδή κάθε υπακολουθία μιας ακολουθίας έχει το ίδιο όριο με την ακολουθία αυτή, έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[3k]{3k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

Λύση (συνέχεια)

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{3k+1}\right)^{3k+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = \lim_{k\to\infty}\frac{3k+3}{2(3k+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Τέλος, αφού δεν υπάρχουν άλλα σημεία συσσωρεύσεως, διότι οι 3 αυτές υπακολουθίες διαμερίζουν την (a_n), έπεται ότι

$$\limsup a_n = \max\{1, e, 1/2\} = e$$

και

$$\liminf a_n = \min\{1, e, 1/2\} = 1/2.$$

Ασκήσεις - Κριτήρια σύγκλισης

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 47)

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdot \cdots n$

$$\alpha_n = \frac{4^n}{n!}, \qquad \beta_n = (-1)^n \frac{n^3}{2^n}, \qquad \gamma_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο μηδενικής ακολουθίας:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \lambda < 1 \Rightarrow a_n \to 0.$$

Για την (α_n), είναι

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{4^n} = \frac{4}{n+1} \to 0 < 1,$$

επομένως $\alpha_n \to 0$.

$(n+1)! = n!\,(n+1)$

Λύση (συνέχεια)

Για την (β_n), με $\beta_n = (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$, είναι

$$\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{2} < 1,$$

επομένως $\beta_n \to 0$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$$

Για την (γ_n), με $\gamma_n = \frac{n!}{n^n}$, είναι

$$\left|\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1,$$

επομένως $\gamma_n \to 0$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 48)

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}}.$$

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της ρίζας: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \lambda \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \to \lambda$.

Θέτουμε $c_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Είναι

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \to e,$$

οπότε $\alpha_n = \sqrt[n]{|c_n|} \to e$.

Λύση (συνέχεια)

Θέτουμε $d_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}$. Είναι

$$\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)(3n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}$$
$$= \frac{2n+1}{3n+2} \to \frac{2}{3}$$

οπότε $\beta_n = \sqrt[n]{|d_n|} \to 2/3$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 50)

Αν (x_n) είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών η οποία συγκλίνει στο x, να αποδειχθεί ότι

$$\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = x.$$

Λύση

Θέτουμε $a_n = x_1 x_2 \cdots x_n > 0$. Είναι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}}{x_1 x_2 \cdots x_n} = x_{n+1} \to x,$$

επομένως $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = x.$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 52)

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί η πρόταση Stolz:
Αν (b_n) γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη, τότε

$$\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=x \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n}=x.$$

Θέτοντας $a_n=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}$ και $b_n=n$, έχουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n+1-n}=\sqrt[n+1]{n+1}\to 1,$$

επομένως $a_n/b_n \to 1$.

Ασκήσεις - Κριτήρια σύγκλισης

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 53)

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}=1.$$

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί η πρόταση Stolz.
Θέτοντας $a_n = 1+2^2+3^3+\cdots+n^n$ και $b_n = n^n$, έχουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}-n^n} = \frac{1}{1-\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \to 1,$$

διότι

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0\cdot\frac{1}{e} = 0,$$

επομένως $a_n/b_n \to 1$.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$