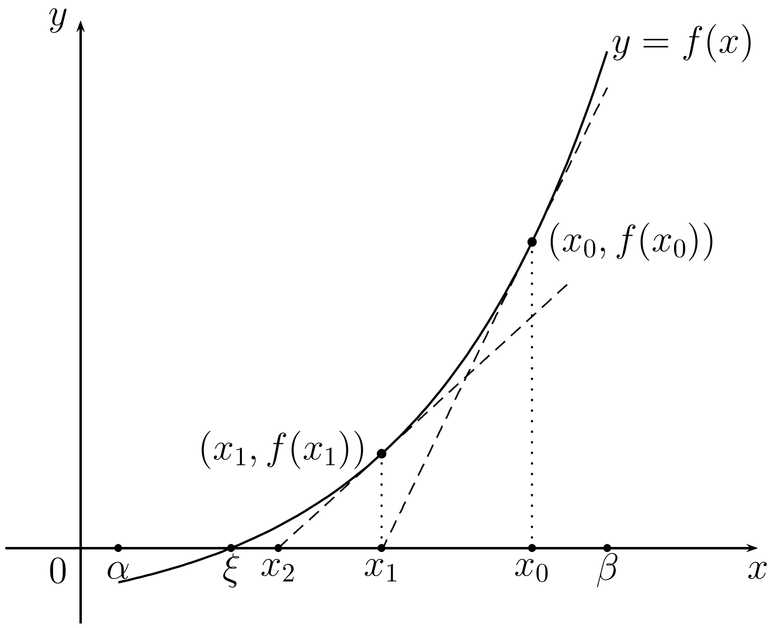
2.7.3 Η μέθοδος Newton-Raphson

Πολλές φορές, είναι αδύνατο να υπολογίσουμε επακριβώς τη λύση μιας εξίσωσης $f(x) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν προσεγγιστικές μέθοδοι για την προσέγγιση μιας ρίζας ξ της εξίσωσης. Η πιο γνωστή και διαδεδομένη μέθοδος είναι η μέθοδος Newton-Raphson (N-R), η οποία εφαρμόζεται όταν η f είναι παραγωγίσιμη.

Η μέθοδος ξεκινά με μια αρχική τιμή x_0 και παράγει διαδοχικά την ακολουθία τιμών $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, βάσει της σχέσης

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, η ακολουθία αυτή συγκλίνει σε κάποια ρίζα ξ της εξίσωσης (γράφουμε $x_n \to \xi$).



Η μέθοδος, δοθέντος της τιμής x_n, χρησιμοποιεί την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_n, f(x_n))$ για να προσδιορίσει την επόμενη τιμή x_{n+1}. Πράγματι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι η

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Θέτοντας $y = 0$, βρίσκουμε το σημείο τομής $(x, 0)$ της εφαπτομένης με τον άξονα x:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \Rightarrow x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

και θέτουμε $x_{n+1} = x$.

Η ύπαρξη ρίζας $\xi \in (a, b)$ για την εξίσωση $f(x) = 0$, όταν η $f/[a, b]$ είναι συνεχής, μπορεί να εξασφαλιστεί από την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.1 (Bolzano). *Αν $f/[a, b]$ συνεχής και $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.*

Η επόμενη πρόταση δίδει ικανές συνθήκες ώστε η μέθοδος N-R να συγκλίνει.

Πρόταση 2.2. *Έστω συνάρτηση $f/[a,b]$ με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $\xi \in (a,b)$, με $f(\xi)=0$. Αν $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a,b]$, η f'' δεν αλλάζει πρόσημο στο $[a,b]$ και*

$$\left|\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}\right| \leq b-a, \quad \textit{όπου} \quad \gamma = \begin{cases} a, & |f'(a)| \leq |f'(b)| \\ b, & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε η ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_0 \in [a,b]$$

συγκλίνει στο ξ.

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο σύγκλισης της μεθόδου για επιλεγμένα a, b, x_0.

Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί αντίστροφα για τον προσδιορισμό των κατάλληλων a, b, x_0 ώστε η μέθοδος να συγκλίνει στη ρίζα ξ.

Πράγματι, αν για παράδειγμα είναι f', f'' θετικές, τότε $|f'(a)| \leq |f'(b)|$, οπότε $\gamma = a$. Αν γνωρίζουμε μια εκτίμηση της ρίζας ξ (δηλαδή ένα αρχικό διάστημα στο οποίο ανήκει), τότε μπορούμε να επιλέξουμε

$$a < \min\{x_0, \xi\} \qquad \text{και} \qquad b > \max\{x_0, \xi, \frac{|f(a)|}{|f'(a)|} + a\}$$

οπότε οι προϋποθέσεις της πρότασης θα ικανοποιούνται και η μέθοδος θα συγκλίνει για τη συγκεκριμένη αρχική τιμή x_0 αλλά και για κάθε άλλη αρχική τιμή στο $[a,b]$.

Άσκηση. Δίδεται η εξίσωση $x^2 - 6x + 3 = 0$.

i) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια ρίζα ξ στο διάστημα $(0,1)$ και να αποδειχθεί ότι η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει προς αυτή για κάθε $x_0 \in [0,1]$.

ii) Να υπολογισθεί μια προσέγγιση x_n της ρίζας ξ με $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-5}$, όταν $x_0 = 0.3$.

Λύση. (i) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 3/[0,1]$, έχουμε ότι

$$f(0)f(1) = 3 \cdot (-2) = -6 < 0,$$

άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

Επειδή $f'(x) = 2x - 6 < 0$, έπεται ότι f γνησίως φθίνουσα, άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.

Επιπλέον

$$f''(x) = 2 > 0, |f'(1)| = 4 < 6 = |f'(0)| \text{ και } \frac{|f(1)|}{|f'(1)|} = \frac{2}{4} < 1 = 1 - 0,$$

άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 2.2, οπότε η ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 6x_n + 3}{2x_n - 6} = \frac{x_n^2 - 3}{2x_n - 6}$$

που ορίζει η μέθοδος N-R συγκλίνει στο ξ για κάθε $x_0 \in [0,1]$.

(ii)

```python
import numpy as np

xnext = lambda x: (x**2-3)/(2*x-6)

x0 = 0.3
x1 = xnext(x0)
err = 0.00001
n = 1
while np.abs(x0-x1) >=err:
    x0 = x1
    x1 = xnext(x0)
    n = n+1

print("x(n) = %s, n = %d"%(x1, n))
print("x(n-1) = %s, absolute error = %s"%(x0, np.abs(x0-x1)))
```

Output:

```
x(n) = 0.5505102572168219, n = 4
x(n-1) = 0.5505102570631494, absolute error = 1.536725191542132e-10
```

□

Άσκηση. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\theta > 0$ η μέθοδος N-R για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - \theta$ συγκλίνει στο $\sqrt{\theta}$ για κάθε $x_0 > 0$.

Λύση. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \theta/[0, +\infty)$. Είναι $f'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f''(x) = 2 > 0$. Προφανώς, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$ την $\xi = \sqrt{\theta}$. Επιπλέον, για κάθε a, b με $0 < a < b$ είναι $|f'(a)| < |f'(b)|$ (διότι $|f'|$ γν. αύξουσα.) Επομένως, αν επιλεχθούν

$$a < \min\{x_0, \sqrt{\theta}\} \qquad \text{και} \qquad b > \max\{x_0, \sqrt{\theta}, \frac{|f(a)|}{|f'(a)|} + a\}$$

τότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 1.6, οπότε $x_n \to \sqrt{\theta}$ για κάθε $x_0 > 0$. Η ακολουθία που παράγει η μέθοδος είναι η

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \theta}{2x_n} = \frac{x_n^2 + \theta}{2x_n} \qquad \square$$

Ασκήσεις

1. Να ευρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 = 5$ κοντά στο 5 με σφάλμα μικρότερο του 10^{-5}.

```
# sage.numerical.optimize.find_root(f, a, b, xtol=1e-12, rtol
   =8.881784197001252e-16, maxiter=100, full_output=False)
find_root(x**2 - 5, 1, 3, full_output = True)
Output: 2.23606797749979
```

2. Να ευρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 4x - 7 = 0$ κοντά στο 5 με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4}.

3. Να ευρεθεί μια προσέγγιση της μέγιστης τιμής της συνάρτησης $f(x) = e^x - 3x^2 + 5/[-2, 2]$.

4. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $f'(x_n) \approx \dfrac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$, ο αναδρομικός τύπος της μεθόδου N-R μπορεί να αντικατασταθεί από τον

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)h}{f(x_n + h) - f(x_n)},$$

ο οποίος δεν απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου. Να γίνει προσέγγιση της τιμής $\sqrt{2}$ χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, για διάφορες τιμές του h και $x_0 = 1$. Πώς επηρεάζει η επιλογή του h την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου;

2.7.4 Η μέθοδος του Euler

Πολλά φαινόμενα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ), δηλαδή εξισώσεις που περιέχουν μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(t)$ και κάποιες παραγώγους της. Για παράδειγμα η ποσότητα $y(t)$ ενός ραδιενεργού υλικού φθίνει συναρτήσει του χρόνου t, σύμφωνα με την εξίσωση

$$y'(t) = -cy(t) \tag{2.4}$$

όπου $c > 0$ κάποια σταθερά. Αν η αρχική ποσότητα είναι ίση με $y(0)$, ποια ποσότητα θα έχει απομείνει μετά από χρόνο t;

Διαφορικές εξισώσεις, όπως η παραπάνω ονομάζονται πρώτης τάξης, γιατί περιλαμβάνουν μόνο την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης. Η γενική μορφή μιας ΔΕ πρώτης τάξης είναι η

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{2.5}$$

όπου $f(x, y)$ κάποια γνωστή συνάρτηση δύο μεταβλητών. Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι $f(x, y) = -cy$.

Συχνά, δεν μπορούμε να επιλύσουμε τη ΔΕ και να προσδιορίσουμε επακριβώς την άγνωστη συνάρτηση y, οπότε καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους. Η πιο βασική από αυτές είναι η μέθοδος Euler, η οποία βασίζεται στον προσεγγιστικό τύπο

$$y(t + h) \approx y(t) + y'(t)h.$$

Αντικαθιστώντας τον όρο $y'(t)$ με το δεξί μέλος της ΔΕ $f(t, y)$, παίρνουμε τον τύπο

$$y(t + h) \approx y(t) + f(t, y(t))h. \tag{2.6}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε την f και μια αρχική τιμή $y(t_0)$, μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή $y(t_0 + h)$.

Στη συνέχεια, μπορούμε ομοίως να χρησιμοποιήσουμε την $y(t_0 + h)$, προκειμένου να προσεγγίσουμε την $y(t_0 + 2h)$, κ.ο.κ. Προφανώς, όσο επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία, το σφάλμα της προσέγγισης αυξάνεται.

Η ΔΕ (2.4) έχει απλή λύση: Για $y \neq 0$ είναι

$$\begin{aligned} y'(t) = -cy(t) &\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -c \Rightarrow (\ln|y(t)|)' = (-cx)' \\ &\Rightarrow \ln|y(t)| = k - cx, k \in \mathbb{R} \Rightarrow |y(t)| = e^{k-cx} \Rightarrow y(t) = \pm e^k e^{-cx} \end{aligned}$$

και τελικά

$$y(t) = y(0)e^{-cx},$$

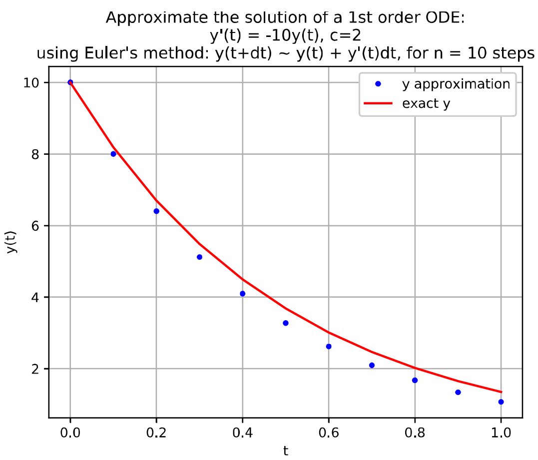
δηλαδή, η αρχική τιμή $y(0)$ και η σταθερά c καθορίζουν πλήρως τη συνάρτηση $y(t)$.

Ο κώδικας που ακολουθεί, προσεγγίζει την τιμή $y(1)$, όταν $c = 2$ και $y(0) = 10$, σε $n = 10$ βήματα, οπότε $h = (1 - 0)/n = 0.1$. Προφανώς, αύξηση του n σημαίνει μικρότερο h και μεγαλύτερη ακρίβεια.

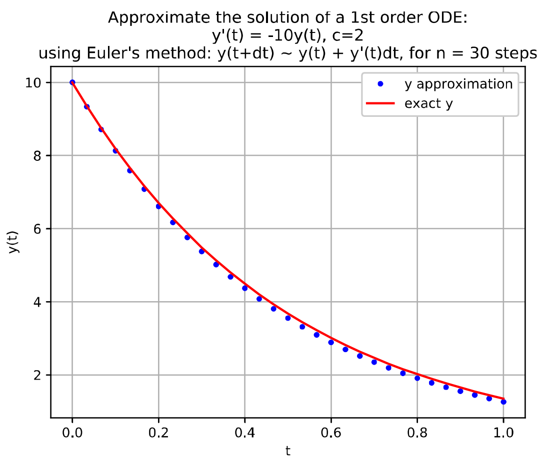
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#solve the ODE: y' = -c*y   (1)
#using Euler's method
```

```python
t0, y0 = 0, 10  #initial values
tfinal = 1    #target: y(tfinal)
n = 10       #number of steps
c = 2

rhs = lambda t, y: -c*y  #right hand side of ODE: y' = rhs

def euler(rhs, y0, t0, tfinal, n):
    h = (1.0*(tfinal-t0))/n
    t=np.zeros((n+1,1))
    y=np.zeros((n+1,1))
    t[0], y[0] = t0, y0
    for i in range(n):
        y[i+1] = y[i] + h*rhs(t[i], y[i])
        t[i+1] = t[i] + h
    return (t,y)

t,y = euler(rhs, y0, t0, tfinal, n)
yreal = 10*np.exp(-c*t) #exact solution is y(t) = y(0)*exp(-c*t)

#plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t,y, 'b.', label = 'y approximation')
ax.plot(t,yreal, 'r', label = 'exact y')
#ax.axis('equal') #x/y ratio = 1
plt.grid(True)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y(t)')
str = "Approximate the solution of a 1st order ODE:\n"
str += "y'(t) = -%dy(t), c=%d"%(y0,c)
str += "\nusing Euler's method: y(t+dt) ~ y(t) + y'(t)dt"
str += ", for n = %d steps"%n
plt.title(str)
plt.legend()
plt.show()
```

Όπως φαίνεται, στο επόμενο σχήμα, η προσεγγιστικές τιμές αποκλίνουν από τις πραγματικές, καθώς αυξάνει το t. Η προσέγγιση μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά, αν αυξήσουμε το πλήθος βημάτων n.



$i)\ n = 10$



$ii)\ n = 30$

Αποδεικνύεται ότι το απόλυτο σφάλμα $|y(t) - \hat{y}(t)|$ μεταξύ της πραγματικής και της προσεγγιστικής τιμής είναι γραμμικά ανάλογο του h.

Ασκήσεις

1. Η ταχύτητα $s(t)$ ενός σώματος σε ελεύθερη πρώση ικανοποιεί την ΔΕ $s'(t) = g - ks(t)$, όπου $g = 9.81 m/s^2$ η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας και $k > 0$ μια σταθερά.

   Αν $s(0) = 0$ και $k = 0.1$, προσεγγίστε την ταχύτητά του $s(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 5$, υλοποιώντας τη μέθοδο Euler για διάφορες τιμές του n

   (Η ακριβής λύση της ΔΕ είναι η $s(t) = g/k(1 - e^{-kt})$.)

2. Να προσεγγισθεί, εφαρμόζοντας 2 βήματα της μεθόδου Euler, η τιμή $y(2)$, όταν $y'(t) = \frac{1}{t} - y^2(t)$ και $y(1) = 2$.

3. Η συνάρτηση $y(t) = e^{t^2}$ ικανοποιεί την εξίσωση $y'(t) = e^{t^2} 2t = 2ty(t)$. Προσεγγίστε τον αριθμό $y(2) = e^4$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler για την $y(t)$ με αρχική τιμή $y(0) = 1$.