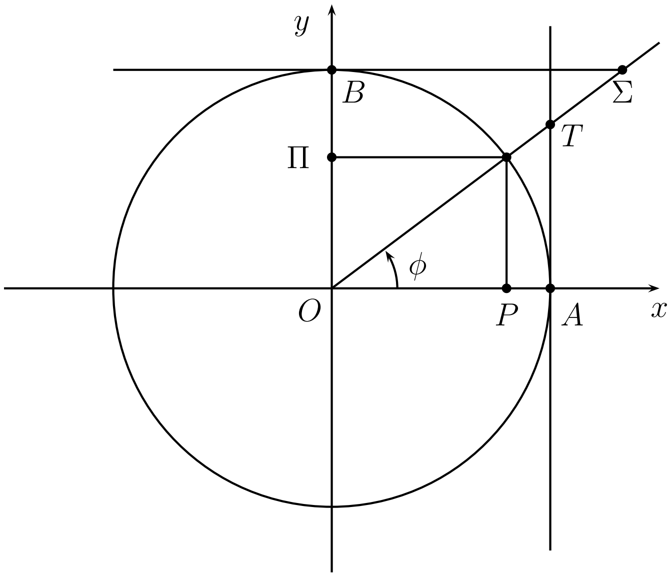
Βασική τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Έστω ο τριγωνομετρικός κύκλος, δηλαδή ο κύκλος ακτίνας 1, με κέντρο την αρχή των ορθογώνιων αξόνων (βλ. επόμενο σχήμα)



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας (ή τόξου) ϕ ορίζονται ως εξής:

- **Ημίτονο:** $\sin\phi = O\Pi$
- **Συνημίτονο:** $\cos\phi = OP$
- **Εφαπτομένη:** $\operatorname{tg}\phi = AT$
- **Συνεφαπτομένη:** $\operatorname{ctg}\phi = B\Sigma$

Βασικοί τύποι

- $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$
- $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}, \quad \operatorname{ctg}\phi = \dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}, \quad \operatorname{tg}\phi\cdot\operatorname{ctg}\phi = 1$
- $1 + \operatorname{tg}^2\phi = \dfrac{1}{\cos^2\phi}$
- $\cos(-\phi) = \cos\phi, \quad \sin(-\phi) = -\sin\phi$
- $\sin(\pi-\phi) = \sin\phi, \quad \cos(\pi-\phi) = -\cos\phi$
- $\sin(\pi+\phi) = -\sin\phi, \quad \cos(\pi+\phi) = -\cos\phi$
- $\sin(\frac{\pi}{2}-\phi) = \cos\phi, \quad \cos(\frac{\pi}{2}-\phi) = \sin\phi$
- $\sin(\frac{\pi}{2}+\phi) = \cos\phi, \quad \cos(\frac{\pi}{2}+\phi) = -\sin\phi$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\phi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\phi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\mathrm{ctg}\,\phi$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος

1. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
2. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
3. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
4. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
5. $\mathrm{tg}(a+b) = \dfrac{\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b}{1 - \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b}$
6. $\mathrm{tg}(a-b) = \dfrac{\mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b}{1 + \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b}$
7. $\mathrm{ctg}(a+b) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,a\,\mathrm{ctg}\,b - 1}{\mathrm{ctg}\,a + \mathrm{ctg}\,b}$
8. $\mathrm{ctg}(a-b) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,a\,\mathrm{ctg}\,b + 1}{\mathrm{ctg}\,a - \mathrm{ctg}\,b}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιου τόξου

1. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
2. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
3. $\mathrm{tg}(2a) = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,a}{1 - \mathrm{tg}^2 a}$
4. $\mathrm{ctg}(2a) = \dfrac{\mathrm{ctg}^2 a - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,a}$

Έκφραση ημιτόνου και συνημιτόνου συναρτήσει της εφαπτομένης του μισού τόξου

1. $\sin\phi = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}$

2. $\cos\phi = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}$

Αθροίσματα και γινόμενα τριγωνομετρικών αριθμών

1. $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
2. $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$
3. $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
4. $\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$
5. $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$
6. $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
7. $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$