1η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΗΤΡΕΣ

- **Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί**
- **Ισότητα μητρών**
- **Μορφές μητρών**
- **Τετραγωνικές μήτρες**

Έστω F ένα μη κενό σύνολο. (Υπενθύμιση $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$).

Μήτρα (ή **πίνακας**) **τύπου m $\times$ n**, ή **m $\times$ n μήτρα, με στοιχεία από το** F, ονομάζεται κάθε απεικόνιση

$$A : [m] \times [n] \to F.$$

Η εικόνα του $(i, j) \in [m] \times [n]$ μέσω της απεικόνισης A συμβολίζεται με $\mathbf{a_{ij}}$ αντί για $A(i, j)$ και ονομάζεται **στοιχείο** της μήτρας A.

Παράδειγμα: Η απεικόνιση $A : [2] \times [3] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} a_{11} &= A(1,1) = 2 \\ a_{12} &= A(1,2) = 5 \\ a_{13} &= A(1,3) = 1 \\ a_{21} &= A(2,1) = 3 \\ a_{22} &= A(2,2) = 3 \\ a_{23} &= A(2,3) = 5 \end{aligned}$$

είναι μια 2×3 μήτρα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Μια $m \times n$ μήτρα A με στοιχεία $a_{ij} \in F$, (όπου $i \in [m], j \in [n]$), **παριστάνεται** διατάσσοντας τα στοιχεία a_{ij} σε m **γραμμές** και n **στήλες** ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα Η μήτρα $A : [2] \times [3] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{matrix} a_{11} = 2 & a_{12} = 5 & a_{13} = 1 \\ a_{21} = 3 & a_{22} = 3 & a_{23} = 5 \end{matrix}$$

παριστάνεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Στα επόμενα θα ταυτίζουμε μια μήτρα με την αναπαράστασή της.

Το σύνολο όλων των $m \times n$ μητρών με στοιχεία από το F θα το συμβολίζεται με $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Η διατεταγμένη n-άδα

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in})$$

ονομάζεται ***i*-γραμμή της μήτρας** A και συμβολίζεται με $\mathbf{R_i}$. Το i θα λέγεται **δείκτης** της γραμμής.

Η διατεταγμένη n-άδα

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj})$$

ονομάζεται ***j*-στήλη της μήτρας** A και συμβολίζεται με $\mathbf{C_j}$. Το j θα λέγεται **δείκτης** της στήλης.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Στο στοιχείο a_{ij} της μήτρας A, ο πρώτος δείκτης i είναι ο δείκτης της γραμμής R_i στην οποία ανήκει το στοιχείο, ενώ ο δεύτερος δείκτης j είναι δείκτης της στήλης C_j στην οποία ανήκει το στοιχείο.

Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ θα λέμε ότι ο **τύπος** της μήτρας A είναι $m \times n$. Στα επόμενα, θα θεωρούμε $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και θα γράφουμε απλά $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
Επίσης, για λόγους συντομίας θα χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς

$$A = [a_{ij}]_{i\in[m],j\in[n]}, \text{ ή } A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

ή απλά

$$A = [a_{ij}]$$

όταν ο τύπος της μήτρας είναι γνωστός.

Μια γραμμή ή στήλη μιας μήτρας λέγεται **μηδενική** αν όλα τα στοιχεία της είναι ίσα με 0.

Παράδειγμα: Η παρακάτω μήτρα έχει δύο μηδενικές γραμμές (την R_2 και την R_5) και μια μηδενική στήλη (την C_2).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ισότητα μητρών

Δύο μήτρες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ είναι **ίσες** αν

- έχουν τον ίδιο τύπο $m \times n$ και ισχύει
- $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Μορφές μητρών

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

- Η A λέγεται **μήτρα γραμμή** αν $m = 1$.
  Παράδειγμα:
  $$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$
- Η A λέγεται **μήτρα στήλη** αν $n = 1$. **Παράδειγμα:**
  $$A = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$
- Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **μηδενική μήτρα** και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{m\times n}$ αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.
  Παράδειγμα:
  $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{2\times 3}.$$
  Αν $m = n$ γράφουμε $\mathbb{O}_n$.

- Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **ανάστροφη μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και συμβολίζεται με A^t ή A^T, αν $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και

$$b_{ij} = a_{ji}$$

για κάθε $i \in [n]$ και $j \in [m]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 4},$$

τότε

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 2}.$$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι

$$(A^t)^t = A,$$

δηλαδή η ανάστροφη της ανάστροφης μήτρας της A ισούται με τη μήτρα A.

- Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **αντίθετη μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και συμβολίζεται με $-A$, αν $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και

$$b_{ij} = -a_{ij}$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

τότε

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

- Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **συζυγής μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ και συμβολίζεται με $\overline{A}$ αν $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ και

$$b_{ij} = \overline{a}_{ij}$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 3+3i \\ 6 & -i & 5-4i \end{bmatrix}$$

τότε

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+i & 3-3i \\ 6 & i & 5+4i \end{bmatrix}.$$

Σημείωση: Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, αποτελείται από τους αριθμούς της μορφής $a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και i είναι η φανταστική μονάδα, για την οποία ισχύει ότι $i^2 = -1$.

Συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ ονομάζεται ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = a - bi$.

Τετραγωνικές μήτρες

Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ ονομάζεται **τετραγωνική μήτρα** αν $m = n$.
Στην περίπτωση αυτή, αντί για $\mathcal{M}_{n\times n}$ γράφουμε $\mathcal{M}_n$.
Για τις τετραγωνικές μήτρες μόνο έχουμε και τους παρακάτω ορισμούς:

- Η **κύρια διαγώνιος** της A αποτελείται από τα στοιχεία a_{ii}, $i \in [n]$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

  Η **δευτερεύουσα διαγώνιος** της A αποτελείται από τα στοιχεία $a_{i,n-i+1}$, $i \in [n]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & \mathbf{a_{n-1\ 2}} & \cdots & a_{n-1\ n} \\ \mathbf{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Ίχνος της** $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της και συμβολίζεται με $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, δηλαδή

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Παράδειγμα: Αν

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 7 \\ \sqrt{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + (-8) + 1 = -6.$$

- Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **διαγώνια μήτρα** αν
$$a_{ij} = 0, \text{ για κάθε } i \neq j.$$

Παράδειγμα:
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε και
$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$
Έτσι στο συγκεκριμένο παράδειγμα
$$A = \mathrm{diag}(-3, 4, 0).$$
Όμοια,
$$\mathrm{diag}(1, 2, 0, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Παρατήρηση Το σύνολο των διαγώνιων μητρών τύπου $n \times n$ συνήθως συμβολίζεται με $\mathcal{D}_n$.

- Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **μοναδιαία** (ή **ταυτοτική**) **μήτρα** αν είναι διαγώνια μήτρα με $a_{ii} = 1$ για κάθε $i \in [n]$ και συμβολίζεται με I_n.

  Παραδείγματα:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **τριγωνική κάτω** αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i < j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **τριγωνική πάνω** αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i > j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **συμμετρική μήτρα** αν

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A^t = A.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \\ 2 & -4 & 10 & 1 \end{bmatrix} = A^t.$$

- Η A λέγεται **στρεβλά συμμετρική** αν

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A = -A^t.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A^t.$$

- Η $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ερμιτιανή** αν

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A = \overline{A^t}.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix} = \overline{A^t}.$$

- Η $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **στρεβλά ερμιτιανή** αν

$$A = -\overline{A^t}.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 7i & -1-i & -2+3i \\ 1-i & 0 & i \\ 2+3i & i & -3i \end{bmatrix} = -\overline{A^t}.$$

- Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **στοχαστική** αν

$$a_{ij} \geq 0, \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \text{ για κάθε } i \in [n],$$

δηλαδή, το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με 1.

Παράδειγμα Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

είναι στοχαστική.

2η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΗΤΡΕΣ

- **Πράξεις μητρών**
- **Αντίστροφη μήτρας**
- **Ειδικές μήτρες**

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την πράξη $+$ ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ ορίζουμε

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.
Η μήτρα $A + B$ ονομάζεται **άθροισμα** των A και B.

Παράδειγμα:
Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A + B = \begin{bmatrix} -2+1 & 0+4 & 3-5 \\ 1+2 & 4-1 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1

Αν $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}$ *τότε*

1. $A + B = B + A.$
2. $(A + B) + C = A + (B + C).$
3. $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B.$

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την πράξη $-$ ως εξής: Για κάθε $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ ορίζουμε
$$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]$$
για κάθε $i\in[m]$ και $j\in[n]$, ή ισοδύναμα
$$A-B=A+(-B).$$
Η μήτρα $A-B$ ονομάζεται **διαφορά** των A και B.

Παράδειγμα:

Αν
$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & 4 & 7\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 4 & -5\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$
τότε
$$A-B=\begin{bmatrix}-2-1 & 0-4 & 3+5\\ 1-2 & 4+1 & 7-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 8\\ -1 & 5 & 7\end{bmatrix}.$$

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την (εξωτερική) πράξη $\cdot$ (με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$) ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = [\lambda a_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 4\lambda & -5\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -15 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πράξεις μητρών

Πρόταση 2

Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.
4. $1A = A$.

Έστω

$$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n} \text{ και } B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times k}.$$

Ονομάζουμε **γινόμενο** της A επί B, και γράφουμε AB, τη μήτρα $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times k}$, όπου

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\sigma=1}^{n} a_{i\sigma}b_{\sigma j}.$$

- Από τον ορισμό του γινομένου μητρών είναι προφανές ότι το γινόμενο AB ορίζεται μόνο αν η μήτρα A έχει τόσες στήλες όσες είναι οι γραμμές της μήτρας B.
- Το στοιχείο c_{ij} που δίνεται στην προηγούμενη ισότητα είναι το άθροισμα των n γινομένων $a_{i1}b_{1j}, a_{i2}b_{2j}, \ldots, a_{in}b_{nj}$ των στοιχείων της i γραμμής της A με τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης της B.

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}$, τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA και ισχύει ότι $AB \in \mathcal{M}_{1\times 1}$ και $BA \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ με

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ (-5) \cdot 1 & (-5) \cdot 2 & (-5) \cdot 3 \\ 6 \cdot 1 & 6 \cdot 2 & 6 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -5 & -10 & -15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}.$$

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ και $B = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$, τότε ορίζεται το γινόμενο AB, (αλλά όχι το γινόμενο BA), και ισχύει ότι
$AB \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ με

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot(-5)+2\cdot 0 & 1\cdot 6+2\cdot 1 & 1\cdot(-7)+2\cdot 2 \\ 3\cdot(-5)+4\cdot 0 & 3\cdot 6+4\cdot 1 & 3\cdot(-7)+4\cdot 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5 & 8 & -3 \\ -15 & 22 & -13 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Αν $A \in \mathcal{M}_n$, ορίζουμε τη **δύναμη** A^m, $m \in \mathbb{N}^*$ ως εξής:

$$A^0 = I_n$$

και

$$A^m = A^{m-1}A = AA^{m-1}$$

για κάθε $m \geq 1$.

Πράξεις μητρών

Πρόταση 3

Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{M}_n$*,* $n, m, k \in \mathbb{N}^*$*, ισχύουν οι εξής ιδιότητες, (εφόσον φυσικά οι τύποι των μητρών είναι τέτοιοι ώστε να ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις):*

1. $AI_n = A = I_nA$.
2. $(AB)C = A(BC)$.
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
4. $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB)$.
5. $A(B + C) = AB + AC$.
6. $(A + B)C = AC + BC$.
7. $A^m A^k = A^{m+k}$.
8. $(A^m)^k = A^{mk}$.

Πράξεις μητρών

Πρόταση 4

Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_n$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
3. $(AB)^t = B^t A^t$.

Πράξεις μητρών

Προσοχή! Στον πολλαπλασιασμό μητρών παρατηρούμε τα εξής:

Δεν ισχύει πάντα $AB = BA$.

Παράδειγμα:

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

ενώ

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Πράξεις μητρών

Προσοχή! Στον πολλαπλασιασμό μητρών παρατηρούμε τα εξής:

Αν η AB είναι μηδενική δεν συνεπάγεται ότι η A ή/και η B είναι μηδενική.

Παράδειγμα: Ενώ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ έχουμε

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πράξεις μητρών

Προσοχή! Στον πολλαπλασιασμό μητρών παρατηρούμε τα εξής:

Αν $A^k = \mathbb{O}$ δεν συνεπάγεται ότι $A = \mathbb{O}_n$.

Παραδείγματα:

Ενώ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$, ισχύει ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και ενώ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ ισχύει ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πράξεις μητρών

Προσοχή! Στον πολλαπλασιασμό μητρών παρατηρούμε τα εξής:

Αν $AB = AC$ δεν συνεπάγεται $B = C$.

Παράδειγμα: Για $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ έχουμε ότι

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

και

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix} = AB$$

ενώ $B \neq C$.

Αντιστροφή μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η μήτρα $B \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **αντίστροφη** της μήτρας A, ανν

$$AB = BA = I_n.$$

Παράδειγμα Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

τότε είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Δηλαδή

$$AB = BA = I_2,$$

και επομένως, η μήτρα B είναι αντίστροφη της μήτρας A.

Φυσικά, και η μήτρα A είναι αντίστροφη της μήτρας B.

Αν μια μήτρα έχει αντίστροφη μήτρα, τότε λέμε ότι **αντιστρέφεται**, ή ότι είναι **αντιστρέψιμη**, ή **ομαλή**.

Παράδειγμα:

Να εξετασθεί αν η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

αντιστρέφεται.

Απάντηση: Αν η μήτρα A αντιστρέφεται, τότε υπάρχει

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

τέτοια ώστε

$$AB = BA = I_2.$$

Έχουμε λοιπόν,

Αντιστροφή μήτρας

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3b_{11} + 4b_{21} & 3b_{12} + 4b_{22} \\ 5b_{11} + 6b_{21} & 5b_{12} + 6b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 0 \\ 5b_{11} + 6b_{21} = 0 \\ 5b_{12} + 6b_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3} b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5} b_{21} \\ 5b_{12} + 6b_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-\frac{6}{5} b_{21}) + 4b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3} b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5} b_{21} \\ 5(-\frac{4}{3} b_{22}) + 6b_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3} b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5} b_{21} \\ -\frac{2}{3} b_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{21} = \frac{5}{2} \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} = (-\frac{4}{3})(-\frac{3}{2}) = 2 \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} = (-\frac{6}{5})\frac{5}{2} = -3 \\ b_{22} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Πράγματι, είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-3) + 4 \cdot \frac{5}{2} & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-\frac{3}{2}) \\ 5 \cdot (-3) + 6 \cdot \frac{5}{2} & 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-\frac{3}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 5 & (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ \frac{5}{2} \cdot 3 + (-\frac{3}{2}) \cdot 5 & \frac{5}{2} \cdot 4 + (-\frac{3}{2}) \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Άρα, η B είναι αντίστροφη μήτρα της A και επομένως, η A αντιστρέφεται.

Παρατήρηση

Υπάρχουν μήτρες που δεν αντιστρέφονται.

Παράδειγμα:

Έστω ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται. Τότε, υπάρχει $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ ώστε

$$AB = BA = I_2.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} AB = I_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Αντιστροφή μήτρας

Παράδειγμα: Όμοια, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται. (Άσκηση.)

Αντιστροφή μήτρας

Πρόταση 5

Η αντίστροφη μιας μήτρας, αν υπάρχει, είναι μοναδική.

Απόδειξη.

Πράγματι, έστω ότι η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ έχει δύο αντίστροφες τις $B, C \in \mathcal{M}_n$. Τότε,

$$AB = BA = I_n$$

και

$$AC = CA = I_n.$$

΄Αρα

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B,$$

άτοπο, διότι $B \neq C$. □

Η αντίστροφη της μήτρας A, αν υπάρχει, συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$.

Αντιστροφή μήτρας

Παρατήρηση:

- Προφανώς, $I_n^{-1} = I_n$.

Πρόταση 6

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$, *με*

$$AB = I_n.$$

Τότε και $BA = I_n$.
Άρα, αν $AB = I_n$, *τότε* $B = A^{-1}$.

Παρατήρηση:
Για να δειχθεί λοιπόν (για τετραγωνική μήτρα) ότι $B = A^{-1}$ δεν χρειάζεται να δειχθεί και $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Αρκεί ένα από τα δύο.

Αντιστροφή μήτρας

Πρόταση 7

Αν η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ *αντιστρέφεται τότε για κάθε* $B, C \in \mathcal{M}_{n\times k}$ *ισχύει ότι*

$$AB = AC \Rightarrow B = C.$$

Απόδειξη.

Αφού η A αντιστρέφεται υπάρχει η αντίστροφή της A^{-1}, οπότε

$$\begin{aligned} AB = AC &\Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ &\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\Rightarrow I_n B = I_n C \\ &\Rightarrow B = C. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση:

- Αντίστοιχα, για την αντιστρέψιμη μήτρα $A \in \mathcal{M}_k$ ισχύει και η ιδιότητα

$$BA = CA \Rightarrow B = C.$$

Αντιστροφή μήτρας

Πρόταση 8

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.

1. *Αν οι* A, B *είναι αντιστρέψιμες, τότε και η μήτρα* AB *είναι αντιστρέψιμη, και είναι*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Γενικότερα, αν οι μήτρες $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n$ *είναι αντιστρέψιμες, τότε και η μήτρα* $A_1A_2 \cdots A_k$ *είναι αντιστρέψιμη, και είναι*

$$(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

2. *Η* A *είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνο αν η* A^t *είναι αντιστρέψιμη, και είναι*

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

Αντιστροφή μήτρας

Πρόταση 8 (συνέχεια)

1. *Αν η A είναι αντιστρέψιμη και $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε και η λA είναι αντιστρέψιμη, και είναι*
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$
2. *Αν η A είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A^m, όπου $m \in \mathbb{N}^*$, είναι αντιστρέψιμη, και είναι*
$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$

Παρατήρηση: Αντί για $(A^m)^{-1}$ ή $(A^{-1})^m$ γράφουμε συνήθως $\mathbf{A^{-m}}$.

Ορθογώνιες μήτρες

Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **ορθογώνια**, αν και μόνο αν $AA^t = A^tA = I_n$, δηλαδή αν έχει ως αντίστροφη την ανάστροφή της, (δηλαδή αν $A^{-1} = A^t$).

Παράδειγμα: Οι μήτρες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιες.

$$\begin{aligned} AA^t &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 & (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Ορθογώνιες μήτρες

$$\begin{aligned} BB^t &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Το σύνολο των ορθογώνιων μητρών τύπου $n \times n$ συμβολίζεται με $\mathcal{O}_n$.

Αδύναμες μήτρες

Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **αδύναμη** ή **αυτοδύναμη** αν $A^2 = A$.

Παράδειγμα Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

είναι αδύναμη.

Πράγματι,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = A.$$

Παρατήρηση: Αν η μήτρα A είναι αδύναμη, τότε ισχύει ότι $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Αντιστροφή μήτρας

Ερωτήσεις

Πότε μια μήτρα είναι αντιστρέψιμη;

Πως μπορούμε να βρούμε την αντίστροφη;

3η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΜΗΤΡΕΣ

- **Κλιμακωτές μήτρες**
- **Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών**
- **Ο αλγόριθμος του Gauss**
- **Στοιχειώδεις μήτρες**
- **Αντιστροφή μήτρας**
- **Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας**

Κλιμακωτές μήτρες

Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, αν υπάρχει, ονομάζεται **κύριο στοιχείο της γραμμής**.

Παράδειγμα: Τα κύρια στοιχεία της παρακάτω μήτρας φαίνονται μέσα σε κύκλους.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακωτές μήτρες

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
Η A λέγεται **κλιμακωτή μήτρα** αν

1. Ο δείκτης κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι **μικρότερος** από το δείκτη κάθε μηδενικής γραμμής.
2. Σε κάθε δύο μη μηδενικές γραμμές ο δείκτης στήλης του κύριου στοιχείου της κατώτερης γραμμής είναι μεγαλύτερος από το δείκτη στήλης του κύριου στοιχείου της ανώτερης γραμμής, (δηλαδή το κύριο στοιχείο της κατώτερης γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το κύριο στοιχείο της ανώτερης γραμμής).

Κλιμακωτές μήτρες

Οι επόμενες μήτρες είναι κλιμακωτές

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ενώ οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτές.

(Υποβαθμισμένες) Κλιμακωτές μήτρες

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
Η A λέγεται **υποβαθμισμένη (ή ανηγμένη) κλιμακωτή μήτρα** αν η A είναι κλιμακωτή και επιπλέον ισχύουν οι ιδιότητες.

1. Αν μια γραμμή έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο, τότε το κύριο στοιχείο της γραμμής ισούται με 1.
2. Κάθε στήλη που περιέχει κύριο στοιχείο μιας γραμμής έχει όλα τα άλλα στοιχεία μηδενικά.

(Υποβαθμισμένες) Κλιμακωτές μήτρες

Παραδείγματα: Οι επόμενες μήτρες είναι υποβαθμισμένες κλιμακωτές

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ενώ οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

δεν είναι υποβαθμισμένες κλιμακωτές.

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (στηλών)

Έστω η απεικόνιση $\theta : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα λέμε ότι η θ είναι ένας **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (στηλών)** αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ η μήτρα $\theta(A)$ είναι:

1. Η μήτρα που προκύπτει από την A με εναλλαγή δύο, οποιωνδήποτε, γραμμών (στηλών) της A, ή
2. Η μήτρα που προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (στήλης) της A επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ή
3. Η μήτρα που προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (στήλης) της A επί $\lambda \in \mathbb{R}$ και πρόσθεση αυτής σε μια άλλη γραμμή (στήλη).

Παρατήρηση Κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών ονομάζεται και **γραμμοπράξη**.

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (στηλών)

Έστω $R_1, R_2, \ldots, R_m$ οι γραμμές και $C_1, C_2, \ldots, C_n$ οι στήλες της μήτρας $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Θα συμβολίζουμε με

1. $R_i \leftrightarrow R_j$ την εναλλαγή των i και j γραμμών της μήτρας A, όπου $i, j \in [m]$, $i \neq j$.
2. $R_i \to \lambda R_i$ τον πολλαπλασιασμό της R_i επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$, όπου $i \in [m]$.
3. $R_i \to R_i + \lambda R_j$ την πρόσθεση στην R_i της λR_j, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $i, j \in [m]$, $i \neq j$.

Αντίστοιχα για τις στήλες (με C_i, C_j αντί για R_i, R_j).

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (στηλών)

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, τότε:

- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \leftrightarrow R_3$ στην A δημιουργεί την μήτρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \rightarrow 3R_2$ στην A δημιουργεί την μήτρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3$ στην A δημιουργεί την μήτρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις

1. Η απεικόνιση θ είναι αμφιμονοσήμαντη. Άρα, ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός θ^{-1} με

$$\theta(A) = B \Leftrightarrow \theta^{-1}(B) = A.$$

2. Έστω θ ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (στηλών), $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και θ^{-1} ο αντίστροφος στοιχειώδης μετασχηματισμός του θ.
   1. Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} A$.
   2. Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \to \lambda R_i}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{Ri \to \frac{1}{\lambda} R_i}{\sim} A$.
   3. Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \to R_i + \lambda R_j}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{R_i \to R_i - \lambda R_j}{\sim} A$.

R-ισοδύναμες μήτρες

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα λέμε ότι η μήτρα B είναι **R-ισοδύναμη** (αντ. **C-ισοδύναμη**) με την μήτρα A και θα γράφουμε

$$\mathbf{A} \overset{\mathbf{R}}{\sim} \mathbf{B} \text{ (αντ. } \mathbf{A} \overset{\mathbf{C}}{\sim} \mathbf{B})$$

αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία μητρών $A_0, A_1, \ldots, A_k$ έτσι ώστε $A_0 = A$, $A_k = B$ και η μήτρα A_{i+1} προκύπτει από την A_i από κάποιο στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών (αντ. στηλών), για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Παρατήρηση Προφανώς, από τον ορισμό της R- (αντ. C)-ισοδυναμίας προκύπτει ότι ότι αν $A \overset{R}{\sim} B$ (αντ. $A \overset{C}{\sim} B$) τότε υπάρχουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (αντ. στηλών) $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k-1}, \theta_k$ τέτοιοι ώστε

$$B = (\theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = \theta_k(\theta_{k-1}(\cdots \theta_2(\theta_1(A))\cdots)).$$

Πρόταση 9

Οι σχέσεις $\overset{R}{\sim}$ και $\overset{C}{\sim}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Πρόταση 10

Κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_4 \to R_4 - 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_4 \to R_4 + 4R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 11

Κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ είναι R-ισοδύναμη με μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \to -R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \to R_1 + 17R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 5R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R-ισοδύναμες μήτρες

Πρόταση 12

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα.
Αν η μήτρα A δεν έχει μηδενική γραμμή, τότε $A = I_n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος του Gauss

Παρακάτω, περιγράφεται αναλυτικά βήμα προς βήμα η διαδικασία που ακολουθείται στα προηγούμενα παραδείγματα, και της οποίας η εφαρμογή μας οδηγεί στη μετατροπή μιας μήτρας σε **υποβαθμισμένη κλιμακωτή μορφή**. Η διαδικασία μετατροπής μιας μήτρας σε **υποβαθμισμένη κλιμακωτή** είναι γνωστή ως **απαλοιφή των Gauss-Jordan**, ενώ η διαδικασία μετατροπής μιας μήτρας απλά σε **κλιμακωτή** είναι γνωστή ως **απαλοιφή του Gauss**.

Αλγόριθμος του Gauss

Έστω $n \times m$ μήτρα $A = [a_{ij}]$. Η απαλοιφή του Gauss για τη μετατροπή της A σε απλή κλιμακωτή μορφή αποτελείται από τα εξής βήματα:

Βήμα 1 Εντοπίζουμε το αριστερότερο και υψηλότερο μη μηδενικό στοιχείο στην μήτρα, δηλαδή ένα στοιχείο $a_{ij} \neq 0$, τέτοιο ώστε τα i, j να είναι όσο το δυνατόν μικρότερα. (Πάντα υπάρχει τέτοιο στοιχείο εκτός αν $A = \mathbb{O}$.) Εναλλάσσουμε τη γραμμή i με την πρώτη γραμμή του πίνακα. ($R_1 \leftrightarrow R_i$)

Βήμα 2 Αν μετά το βήμα 1, το πρώτο στοιχείο της νέας πρώτης γραμμής είναι a, τότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $1/a$, δηλαδή δημιουργούμε κύριο στοιχείο (pivot) 1. ($R_1 \to \frac{1}{a}R_1$)

Βήμα 3 Προσθέτουμε πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής στις άλλες γραμμές έτσι ώστε να προκύψουν μηδενικά στοιχεία κάτω από το κύριο στοιχείο 1. ($R_i \to R_i - a_{i1}R_1$, για κάθε i με $a_{i1} \neq 0$)

Βήμα 4 Αγνοούμε την πρώτη γραμμή και εφαρμόζουμε τα βήματα 1-3 στην υπομήτρα που προκύπτει, μέχρις ότου εξαντληθούν οι γραμμές.

Αλγόριθμος του Gauss

Η μήτρα A' που προκύπτει είναι κλιμακωτή.
Εκτελώντας, την ίδια διαδικασία στην A' μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία πάνω από κάθε κύριο στοιχείο 1 και έτσι καταλήγουμε σε μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα.
Υπολογιστικά είναι αποδοτικότερο να εφαρμόσουμε την δεύτερη διαδικασία με αντίστροφη φορά, δηλαδή από το τελευταίο στοιχείο της τελευταίας γραμμής και με φορά προς τα πάνω και αριστερά.

Η διαδικασία που περιλαμβάνει και τις δύο παραπάνω φάσεις ονομάζεται απαλοιφή των Gauss-Jordan.

Πρόταση 13 (Μοναδικότητα υποβαθμισμένης κλιμακωτής μορφής.)

Κάθε μήτρα είναι R-ισοδύναμη με μια **μοναδική** *υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα.*

Παρατήρηση: Αυτό δεν συμβαίνει στην κλιμακωτή μορφή, όπου αλλαγή της ακολουθίας των στοιχειωδών πράξεων μπορεί να οδηγήσει σε **διαφορετική κλιμακωτή μήτρα**.

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss να βρεθεί μια R-ισοδύναμη κλιμακωτή μήτρα για την μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \to \tfrac{1}{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 1R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to (-1) R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \to -\tfrac{1}{9} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{R}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Στοιχειώδεις μήτρες

Κάθε μήτρα που προκύπτει από την μοναδιαία μήτρα I_n με εφαρμογή **μιας μόνο** στοιχειώδους πράξης γραμμών επί του I_n λέγεται **στοιχειώδης μήτρα**.

Για παράδειγμα, από τη μοναδιαία μήτρα $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ προκύπτουν οι στοιχειώδεις μήτρες

$$I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 \overset{R_2 \longleftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_3 \overset{R_3 \to R_3 + 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στοιχειώδεις μήτρες

Πρόταση 14

Αν η στοιχειώδης μήτρα E προκύπτει από την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης στοιχειώδους πράξης θ στην μοναδιαία μήτρα I_m, και A είναι μια $m \times n$ μήτρα, τότε το γινόμενο EA είναι η μήτρα που προκύπτει όταν η θ εφαρμοσθεί επί της A, δηλαδή $\theta(A) = \theta(I_m)A = EA$.

Στοιχειώδεις μήτρες

Παράδειγμα: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και θ ο μετασχηματισμός $R_3 \to R_3 + 3R_1$.
Αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \theta(I_3),$$

τότε, πράγματι

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

που είναι ίδια με τη μήτρα που προκύπτει αν στην A προστεθεί στην τρίτη γραμμή το τριπλάσιο της πρώτης.
Άρα, $\theta(A) = \theta(I_3)A = EA.$

Στοιχειώδεις μήτρες

Παρατήρηση: Με επαγωγή μπορεί να δειχθεί η γενίκευση της προηγούμενης πρότασης:

Πρόταση 15

Αν $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών, $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και $E_i = \theta_i(I_n)$, $i \in [k]$, τότε

$$(\theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

Πρόταση 16

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$, $A \neq \mathbb{O}_n$ και $A \overset{R}{\sim} B$, όπου $B \in \mathcal{M}_n$ μια κλιμακωτή μήτρα.
Η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν καμία γραμμή της B είναι μηδενική.

Παράδειγμα: Η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

είναι μη αντιστρέψιμη αφού (όπως είδαμε νωρίτερα) είναι R-ισοδύναμη με την κλιμακωτή μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αντιστροφή μήτρας

Πρόταση 17

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. *Η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη.*
2. *Η μήτρα A είναι R-ισοδύναμη με την μήτρα I_n.*
3. *Η μήτρα A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μητρών.*

Παράδειγμα 1: Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη, διότι είναι R-ισοδύναμη με τη μήτρα I_n. Πράγματι,

$$A \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to \frac{1}{3} R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_1 \to R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Επίσης, αφού όπως μόλις δείξαμε, η A είναι αντιστρέψιμη, θα είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μητρών.

Αντιστροφή μήτρας

Πράγματι, ισχύει ότι (Άσκηση):

$$A = E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$$

όπου οι μήτρες E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι οι παρακάτω στοιχειώδεις μήτρες:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ \left(I_3 \overset{R_2 \to R_2 + R_1}{\sim} E_1\right),$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \left(I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} E_2\right), \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \left(I_3 \overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} E_3\right),$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \left(I_3 \overset{R_3 \to R_3 + R_2}{\sim} E_4\right), \qquad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \left(I_3 \overset{R_3 \to R_1 + R_3}{\sim} E_5\right),$$

Παράδειγμα 2: Έστω οι στοιχειώδεις μήτρες

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (I_3 \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} E_1),$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (I_3 \overset{R_2 \to \frac{1}{3} R_2}{\sim} E_2),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 + 2R_2}{\sim} E_3).$$

Αντιστροφή μήτρας

Τότε η μήτρα

$$
\begin{aligned}
A &= E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

είναι αντιστρέψιμη.

Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ μια αντιστρέψιμη μήτρα. Τότε $A \overset{R}{\sim} I_n$.
Άρα υπάρχουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ με

$$(\theta_k \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = I_n,$$

ή, ισοδύναμα (λόγω της Πρότασης 15) υπάρχουν στοιχειώδεις μήτρες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ με

$$(E_k \cdots E_2 E_1)A = I_n.$$

Δηλαδή η μήτρα $\left(E_k \cdots E_2 E_1\right)$ είναι η αντίστροφη της A.
Άρα,

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = E_k \cdots E_2 E_1 I_n.$$

Άρα, εφαρμόζοντας και πάλι την Πρόταση 15 για τη μήτρα I_n, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = (\theta_k \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(I_n).$$

Δηλαδή, **οι μετασχηματισμοί** $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ **που μετασχηματίζουν την** A **στην** I_n**, μετασχηματίζουν και την** I_n **στην** A^{-1}.

Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας

Έτσι,

Για να βρούμε την αντίστροφη μιας τετραγωνικής μήτρας A (αν η A είναι αντιστρέψιμη), ή για να αποδείξουμε ότι η A δεν είναι αντιστρέψιμη, γράφουμε τις μήτρες A και I_n, τη μια δίπλα στην άλλη και με κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, που **εκτελούμε ταυτόχρονα και στις δύο μήτρες** A και I_n, μετασχηματίζουμε την A σε μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα B και την I_n σε μια μήτρα C.

- Αν $B = I_n$, τότε η A είναι αντιστρέψιμη και $A^{-1} = C$.
- Αν $B \neq I_n$, τότε η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παρατήρηση: Αν στην προσπάθεια μετασχηματισμού της A σε υποβαθμισμένη κλιμακωτή φτάσουμε σε κλιμακωτή μήτρα με μηδενική γραμμή, δεν χρειάζεται να συνεχίσουμε αφού, βάσει της Πρότασης 16, γνωρίζουμε ότι η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας

Παράδειγμα: Για να δειχθεί ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμη, και να βρεθεί η αντίστροφή της εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to (-1)R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3}}{\sim}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας

Παράδειγμα: Για τη μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 7R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to -\frac{1}{6}R_3}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Αφού η κλιμακωτή μήτρα, που δημιουργήθηκε ως R-ισοδύναμη της A, είναι η $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, η οποία έχει μηδενική γραμμή, η A δεν είναι αντιστρέψιμη.