

Μήτρες

Εφαρμοσμένη Άλγεβρα

2023–2024

Άσκηση 1

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$. Να βρεθούν οι μήτρες:
 $-2A$, $A + B$, B^t , AB^t και B^tA .

Λύση

$$-2A = -2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$$

$$\begin{aligned}
 AB^t &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 20 & 36 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^t A &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 & 4 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) & 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 14 \\ 3 & 2 & 17 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Αν

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι πίνακες $(AB)^{-1}$ και $(A^{-1}B^{-1})^t$.

Λύση

$$\text{ισχύει ότι } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{ισχύει ότι } (A^{-1}B^{-1})^t = (B^{-1})^t(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3

Να αποδειχθεί ότι $A^2 = A$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο $B = 2A^5 - 3A^2 + A$.

Λύση

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \dots = A$$

Πράγματι,

```
import sympy as sp
A = sp.Matrix([[2, -2, -4], [-1, 3, 4], [1, -2, -3]])
print("A**2:", A**2)
```

Output:

```
A**2: Matrix([[2, -2, -4], [-1, 3, 4], [1, -2, -3]])
```

Επομένως,

$$B = 2A^5 - 3A^2 + A = 2A^5 - 3A + A = 2A^5 - 2A$$

Όμως, $A^5 = A^2A^2A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A$.

Άρα,

$$B = 2A^5 - 2A = 2A - 2A = O$$

Παρατήρηση. Η μήτρα A ονομάζεται **αδύναμη** (δεν έχει δύναμη).

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι μήτρες C^n , όπου $n \in \mathbb{N}^*$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$i) C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$ii) C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

i) Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε τον τύπο της μήτρας C_1^n υπολογίζοντας μερικές από τις δυνάμεις της.

```
1 import sympy as sp
2 n = sp.symbols('n')
3 C1 = sp.Matrix([[2,1],[0,3]])
4 print((C1**n).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
1 [2**n, -2**n + 3**n]
2 [ 0,      3**n]
```


Εικασία: $C_1^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$

Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n .

Για $n = 1$ έχουμε ότι $C_1^1 = \begin{bmatrix} 2^1 & 3^1 - 2^1 \\ 0 & 3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = C_1$, άρα ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $C_1^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$.

Θα δειχθεί ότι ισχύει και για $n = k + 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned} C_1^{k+1} &= C_1 \cdot C_1^k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^k & 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k + 3^k \\ 0 & 3 \cdot 3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3^{k+1} - 2^{k+1} \\ 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε τον τύπο της μήτρας C_2^n υπολογίζοντας μερικές από τις δυνάμεις της.

```
1 import sympy as sp
2 C2 = sp.Matrix([[1, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 1]])
3 for i in range(1,5):
4     print("C2**", i, "=")
5     print((C2**i).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
1 C2** 1 =
2 [1, 0, 1]
3 [0, 1, 0]
4 [1, 0, 1]
5 C2** 2 =
6 [2, 0, 2]
7 [0, 1, 0]
8 [2, 0, 2]
9 C2** 3 =
10 [4, 0, 4]
11 [0, 1, 0]
12 [4, 0, 4]
13 C2** 4 =
14 [8, 0, 8]
15 [0, 1, 0]
16 [8, 0, 8]
```

Εικάasia: $C_2^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$.

Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n .

$$\text{Για } n = 1 \text{ έχουμε ότι } C_2^1 = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_2, \text{ άρα ο}$$

τύπος ισχύει για $n = 1$.

$$\text{Έστω ότι ο τύπος ισχύει για } n = k, \text{ δηλαδή } C_2^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Θα δειχθεί ότι ισχύει και για $n = k + 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned} C_2^{k+1} &= C_2 \cdot C_2^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί ο τύπος της ακολουθίας a_n όπου

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

και $a_0 = a_1 = 1$.

Λύση

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \\ a_{n-1} = 1a_{n-1} + 0a_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$n = 2$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$n = 4$

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γενικότερα για $n \geq 2$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
import sympy as sp
n = sp.symbols('n')
A = sp.Matrix([[5, -6], [1, 0]])
print((A**n).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
[-2*2**n + 3*3**n, 6*2**n - 6*3**n]
[-2**n + 3**n, 3*2**n - 2*3**n]
```

Επομένως, μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι,

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} & 6 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} \\ -2^{n-1} + 3^{n-1} & 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$a_n = -2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-1} = 2^{n+1} - 3^n.$$

Άσκηση 6

Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

- i) Ναδειχθεί ότι $AB = 7I_2$.
ii) Να υπολογισθεί η μήτρα $(BA)^n$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$

Λύση

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7I_2$$

$$\begin{aligned}
(BA)^n &= \underbrace{(BA)(BA)(BA)\cdots(BA)}_{n \text{ φορές}} \\
&= B \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{n-1 \text{ φορές}} A \\
&= B(AB)^{n-1}A \\
&= B(7I_2)^{n-1}A \\
&= B7^{n-1}I_2^{n-1}A = 7^{n-1}BA \\
&= 7^{n-1} \begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 7

Να βρεθούν όλες οι μήτρες $B \in \mathcal{M}_2$ οι οποίες αντιμετατίθενται με την μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση

Έστω $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Θέλουμε να ισχύει:

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b & 0 \\ c + 2d & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, ισοδύναμα

$$\begin{cases} a = a + 2b \\ b = 0 \\ 2a = c + 2d \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a = c + 2d \end{cases}$$

Άρα, οι μήτρες B που αντιμετατίθενται με την A είναι της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2(a-d) & d \end{bmatrix}, \text{ όπου } a, d \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 8

Έστω $A \in M_n$. Ναδειχθεί ότι αν η μήτρα A^5 είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A είναι επίσης αντιστρέψιμη.

Λύση

Για να δείξουμε ότι μια μήτρα A είναι αντιστρέψιμη πρέπει να βρούμε μια άλλη μήτρα C ώστε $AC = I_n$.

Επειδή A^5 είναι αντιστρέψιμη υπάρχει μήτρα B ώστε

$$A^5 B = I_n \Leftrightarrow AA^4 B = I_n$$

οπότε η μήτρα $A^4 B$ είναι η αντίστροφη της A , δηλαδή η A είναι αντιστρέψιμη.

Άσκηση 9

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφες των παρακάτω μητρών:

$$i) A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$ii) A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Λύση

- i) Η μήτρα A_1 αντιστρέφεται αν είναι R -ισοδύναμη με την I_3 . Για τον υπολογισμό της αντίστροφής της, χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών και μετασχηματίζουμε τη μήτρα A_1 στη μήτρα I_3 (ταυτόχρονα μετασχηματίζουμε τη μήτρα I_3 , εφαρμόζοντας τους ίδιους μετασχηματισμούς, και προκύπτει η αντίστροφη της A_1).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 - 6R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + \frac{5}{2}R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα, } A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι σωστό πολλαπλασιάζοντας τις δύο μήτρες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-\frac{9}{4}) + 1 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot \frac{5}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ (-2) \cdot 6 + (-6) \cdot (-\frac{9}{4}) + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) & (-2) \cdot 1 + (-6) \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot 0 & (-2) \cdot (-3) + (-6) \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-\frac{9}{4}) + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν η μήτρα δεν αντιστρέφεται αυτό θα προκύψει κατά τη διαδικασία μετατροπής της σε ανηγμένη κλιμακωτή, όπου θα εμφανισθούν μηδενικές γραμμές.

ii) Η εύρεση της αντίστροφης της μήτρας A_2 παρουσιάζει τη δυσκολία ότι δεν γνωρίζουμε ποιες είναι οι τιμές των a, b .

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & b + 2a & a + 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν $b + 2a \neq 0$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $R_2 \rightarrow \frac{1}{b+2a}R_2$ χωρίς να πάρουμε περιπτώσεις. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα όμως μπορούμε να εναλλάξουμε τις γραμμές 2 και 3 και να συνεχίσουμε τη διαδικασία χωρίς περιπτώσεις:

$$\begin{array}{l}
 R_2 \leftrightarrow R_3 \\
 \sim
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & a & 3 \\
 0 & 1 & 2 \\
 0 & b+2a & a+6
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 R_1 \rightarrow R_1 - aR_2 \\
 R_3 \rightarrow R_3 - (b+2a)R_2 \\
 \sim
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 2 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 3-2a \\
 0 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 6-2b-3a
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & -a \\
 0 & 0 & 1 \\
 2 & 1 & -b-2a
 \end{bmatrix}$$

Τώρα, προκειμένου να συνεχίσουμε πρέπει οπωσδήποτε να διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $6 - 2b - 3a = 0$, ή ισοδύναμα $b = 3 - \frac{3}{2}a$ τότε η μήτρα A_2 δεν αντιστρέφεται, αφού είναι R -ισοδύναμη με τη μήτρα

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 3-2a \\
 0 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

η οποία περιέχει μηδενική γραμμή.

Αν $6 - 2b - 3a \neq 0$ τότε έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2b-3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{bmatrix} \quad R_3 \rightarrow \frac{1}{6-2b-3a} R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - (3-2a)R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a-2b}{6-2b-3a} & -\frac{3-2a}{6-2b-3a} & -\frac{a^2-3b}{6-2b-3a} \\ -\frac{4}{6-2b-3a} & -\frac{2}{6-2b-3a} & \frac{a+6}{6-2b-3a} \\ \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a} \end{bmatrix}.$$

Άρα, αν $6 - 2b - 3a \neq 0$ τότε

$$A_2^{-1} = \frac{1}{6-2b-3a} \begin{bmatrix} a-2b & 2a-3 & 3b-a^2 \\ -4 & -2 & a+6 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 10

Να λυθεί το σύστημα

$$x + y + z = 3$$

$$2x - y + 3z = 4$$

$$x + 2y - 2z = 1$$

Λύση

Αν τεθεί

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση μητρών

$$AX = B.$$

Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 2 \cdot x + (-1) \cdot y + 3 \cdot z \\ 1 \cdot x + 2 \cdot x + (-2) \cdot z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x - y + 3z \\ x + 2y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Από την τελευταία ισότητα μητρών προκύπτει το αρχικό σύστημα των τριών εξισώσεων.

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση $AX = B$ από τα αριστερά με τη μήτρα

$$C = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι

$$-\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, $x = y = z = 1$.

Άσκηση 11

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Ναδειχθεί ότι οι μήτρες AA^t και A^tA είναι συμμετρικές.

Λύση.

Πράγματι

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

και

$$(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$$



Άσκηση 12

Ναδειχθεί ότι αν οι $n \times n$ μήτρες A, B είναι ορθογώνιες, τότε και η μήτρα AB είναι ορθογώνια.

Λύση

Επειδή οι A, B είναι ορθογώνιες έπεται ότι $AA^t = BB^t = I_n$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(AB)(AB)^t = I_n$$

Πράγματι,

$$(AB)(AB)^t = (AB)(B^t A^t) = A(BB^t)A^t = A I_n A^t = AA^t = I_n$$

Άσκηση 13

Να βρεθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών (και των προσθέσεων) που απαιτούνται για τον υπολογισμό του γινομένου $C = A \cdot B$, όταν οι μήτρες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ έχουν τύπο

i) $A: 1 \times n$ και $B: n \times 1$.

ii) $A: m \times n$ και $B: n \times k$.

i) $A: 1 \times n$ και $B: n \times 1$.

Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο AB είναι μια μήτρα $C = [c_{ij}]$ τύπου 1×1 και

$$c_{11} = \sum_{p=1}^n a_{1p} b_{p1}$$

οπότε απαιτούνται n πολλαπλασιασμοί (και $n - 1$ προσθέσεις).

ii) $A: m \times n$ και $B: n \times k$.

Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο AB είναι μια μήτρα $C = [c_{ij}]$ τύπου $m \times k$, άρα έχει $m \cdot k$ στοιχεία.

Ο υπολογισμός κάθε στοιχείου c_{ij} της C γίνεται βάση του τύπου

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj}$$

άρα, για κάθε στοιχείο απαιτούνται $n - 1$ προσθέσεις και n πολλαπλασιασμοί.

Επομένως, για να βρούμε όλα τα στοιχεία της μήτρας C απαιτούνται $m \cdot n \cdot k$ πολλαπλασιασμοί (και $m \cdot (n - 1) \cdot k$ προσθέσεις).

Παραδείγματα:

- Αν η A έχει διαστάσεις 5×7 και B έχει διαστάσεις 7×2 , τότε η μήτρα AB έχει διαστάσεις 5×2 και για τον υπολογισμό του AB απαιτούνται: $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$ πολλαπλασιασμοί.
- Αν η A έχει διαστάσεις 10×30 και B έχει διαστάσεις 30×20 , τότε η μήτρα AB έχει διαστάσεις 10×20 και για τον υπολογισμό του AB απαιτούνται: $10 \cdot 30 \cdot 20 = 6000$ πολλαπλασιασμοί.

- Αν η A έχει διαστάσεις 10×5 , η B έχει διαστάσεις 5×3 και η C έχει διαστάσεις 3×9 . Τότε η μήτρα ABC θα έχει διαστάσεις 10×9 . Πόσοι πολλαπλασιασμοί χρειάζονται για να την υπολογίσω?

Υπάρχουν δύο τρόποι να υπολογισθεί το γινόμενο ABC .

- 1ος τρόπος: $(AB)C$

Το (AB) έχει διαστάσεις 10×3 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 5 \cdot 3 = 150$ πολλαπλασιασμοί.

Το $(AB)C$ έχει διαστάσεις 10×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 3 \cdot 9 = 270$ πολλαπλασιασμοί.

Συνολικά, με αυτό τον τρόπο απαιτούνται $150 + 270 = 420$ πολλαπλασιασμοί.

- 2ος τρόπος: $A(BC)$.

Το (BC) έχει διαστάσεις 5×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $5 \cdot 3 \cdot 9 = 135$ πολλαπλασιασμοί.

Το $A(BC)$ έχει διαστάσεις 10×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 5 \cdot 9 = 450$ πολλαπλασιασμοί.

Συνολικά, με αυτό τον τρόπο απαιτούνται $135 + 450 = 585$ πολλαπλασιασμοί.

Άσκηση 14

Να βρεθεί ο βέλτιστος τρόπος υπολογισθεί το γινόμενο $A \cdot B \cdot C \cdot D$ των μητρών A, B, C, D με τύπους

$$A: 10 \times 4$$

$$B: 4 \times 12$$

$$C: 12 \times 8$$

$$D: 8 \times 20$$

Λύση

Ο πολλαπλασιασμός μητρών είναι προσεταιριστικός, δηλαδή δεν εξαρτάται από την σειρά που θα γίνουν (ανά δύο) οι πολλαπλασιασμοί.

Υπάρχουν 5 τρόποι να υπολογίσουμε το γινόμενο $A \cdot B \cdot C \cdot D$

- 1ος τρόπος: $((AB)C)D$.
 AB έχει διαστάσεις 10×12 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ πολλαπλασιασμούς.
 $(AB)C$ έχει διαστάσεις 10×8 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 12 \cdot 8 = 960$ πολλαπλασιασμούς.
 $((AB)C)D$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 8 \cdot 20 = 1600$ πολλαπλασιασμούς.
Συνολικά, 3040 πολλαπλασιασμοί.

- 2ος τρόπος: $(AB)(CD)$.

AB έχει διαστάσεις 10×12 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ πολλαπλασιασμούς.

CD έχει διαστάσεις 12×20 και χρειαζόμαστε $12 \cdot 8 \cdot 20 = 1920$ πολλαπλασιασμούς.

$(AB)(CD)$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 12 \cdot 20 = 2400$ πολλαπλασιασμούς.

Συνολικά, 4800 πολλαπλασιασμοί.

- 3ος τρόπος: $(A(BC))D$.
 BC έχει διαστάσεις 4×8 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ πολλαπλασιασμούς.
 $A(BC)$ έχει διαστάσεις 10×8 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 8 = 320$ πολλαπλασιασμούς.
 $(A(BC))D$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 8 \cdot 20 = 1600$ πολλαπλασιασμούς.
Συνολικά, 2304 πολλαπλασιασμοί.

- 4ος τρόπος: $A((BC)D)$.
 BC έχει διαστάσεις 4×8 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ πολλαπλασιασμούς.
 $(BC)D$ έχει διαστάσεις 4×20 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 8 \cdot 20 = 640$ πολλαπλασιασμούς.
 $A((BC)D)$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$ πολλαπλασιασμούς.
Συνολικά, 1824 πολλαπλασιασμοί.

- 5ος τρόπος: $A(B(CD))$.

CD έχει διαστάσεις 12×20 και χρειαζόμαστε $12 \cdot 8 \cdot 20 = 1920$ πολλαπλασιασμούς.

$B(CD)$ έχει διαστάσεις 4×20 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 20 = 960$ πολλαπλασιασμούς.

$A(B(CD))$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$ πολλαπλασιασμούς.

Συνολικά, 3680 πολλαπλασιασμοί.

Άρα, ο αποδοτικότερος τρόπος υπολογισμού του γινομένου $ABCD$ είναι $A((BC)D)$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να διαπιστώσουμε και πειραματικά την απόδοση των διαφορετικών τρόπων υπολογισμού του γινομένου $ABCD$. (Προκειμένου να γίνουν εμφανέστερες οι διαφορές θα χρησιμοποιήσουμε μήτρες A, B, C, D των οποίων οι διαστάσεις είναι πολλαπλασιασμένες επί 20).


```

import sympy as sp
import datetime
A = sp.ones(200,80) #200 x 80 matrix where every element equals to 1
B = sp.ones(80,240)
C = sp.ones(240,160)
D = sp.ones(160,400)
start = datetime.datetime.now()

R0 = A@B@C@D #default? ((A@B)@C)@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia0 = finish - start
print("A@B@C@D", diarkeia0)

#1os tropos
start = datetime.datetime.now()
R1 = ((A@B)@C)@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia1 = finish - start
print("((A@B)@C)@D", diarkeia1)

#2os tropos
start = datetime.datetime.now()
R2 = (A@B)@(C@D)
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia2 = finish - start
print("(A@B)@(C@D)", diarkeia2)

#3os tropos
start = datetime.datetime.now()
R3 = (A@(B@C))@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia3 = finish - start
print("(A@(B@C))@D", diarkeia3)

```

```
#4os tropos
```

```
start = datetime.datetime.now()  
R4 = A@((B@C)@D)  
finish = datetime.datetime.now()  
diarkeia4 = finish - start  
print("A@((B@C)@D)", diarkeia4)
```

```
#5os tropos
```

```
start = datetime.datetime.now()  
R5 = A@(B@(C@D))  
finish = datetime.datetime.now()  
diarkeia5 = finish - start  
print("A@(B@(C@D))", diarkeia5)
```

Output:

```
A@B@C@D 0:00:29.513232  
((A@B)@C)@D 0:00:33.169644  
(A@B)@(C@D) 0:00:47.781566  
(A@(B@C))@D 0:00:24.835258  
A@((B@C)@D) 0:00:18.673987  
A@(B@(C@D)) 0:00:35.918524
```

Άσκηση 15

Μια $n \times n$ μήτρα A ονομάζεται **στοχαστική** αν τα στοιχεία της είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμής της A είναι ίσο με 1.

- i) Ναδειχθεί ότι μια $n \times n$ μήτρα A με στοιχεία μη αρνητικούς αριθμούς είναι στοχαστική αν και μόνο αν $AX = X$ όπου X είναι η μήτρα στήλη $n \times 1$ της οποίας όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 1.
- ii) Ναδειχθεί ότι το γινόμενο δύο στοχαστικών $n \times n$ μητρών A, B είναι επίσης στοχαστική μήτρα.

i) Έστω $A = [a_{ij}]$ και $X = [x_{i1}]$ όπου $x_{i1} = 1$ για κάθε $i \in [n]$. Η μήτρα $C = AX$ έχει διαστάσεις $n \times 1$ δηλαδή είναι μήτρα στήλη. Το στοιχείο c_{i1} της C ισούται με

$$c_{i1} = \sum_{p=1}^n a_{ip}x_{p1} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot 1 = \sum_{p=1}^n a_{ip}$$

δηλαδή το στοιχείο c_{i1} ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της i -οστής γραμμής της A .

- Αν η μήτρα A είναι στοχαστική (δηλαδή τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής της αθροίζουν στο 1) τότε $c_{i1} = 1$ για κάθε $i \in [n]$, άρα $C = X$.
- Αν η μήτρα A δεν είναι στοχαστική (δηλαδή υπάρχει γραμμή με άθροισμα στοιχείων διάφορο του 1) τότε υπάρχει στοιχείο $c_{i1} \neq 1$ για κάποιο $i \in [n]$, άρα $C \neq X$.

ii) Επειδή ο τύπος υπολογισμού οποιουδήποτε στοιχείου του γινομένου δύο μητρών A, B χρησιμοποιεί μόνο πρόσθεση και πολλαπλασιασμό και επειδή οι μήτρες A, B έχουν μη αρνητικά στοιχεία, έπεται ότι και η μήτρα AB έχει επίσης μη αρνητικά στοιχεία.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η μήτρα AB είναι στοχαστική αρκεί να δείξουμε ότι $(AB)X = X$.

Πράγματι, $ABX = A(BX) = AX = X$.

Άρα, η μήτρα AB είναι επίσης στοχαστική μήτρα.

Παρατήρηση. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια τυχαία στοχαστική μήτρα S από μια τυχαία μήτρα μη αρνητικών αριθμών R διαιρώντας κάθε στοιχείο της R με το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής στο οποίο ανήκει.

```
import sympy as sp

S = sp.randMatrix(7,7,0,10)
print("A random nonnegative", S.rows, "x", S.cols, " matrix:")
print(S.table(sp.StrPrinter()))
for i in range(S.rows):
    rowsum = 0
    for j in range(S.cols):
        rowsum += S[i,j]
    for j in range(S.cols):
        S[i,j] /= rowsum
print("A random stochastic", S.rows, "x", S.cols, " matrix:")
print(S.table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

A random nonnegative 7×7 matrix:

```
[3, 4, 0, 8, 10, 1, 7]
[2, 0, 8, 0, 4, 7, 4]
[8, 2, 4, 0, 7, 8, 1]
[6, 10, 0, 9, 6, 6, 7]
[2, 7, 6, 3, 5, 9, 10]
[8, 10, 5, 3, 8, 0, 1]
[4, 3, 6, 3, 8, 5, 6]
```

A random stochastic 7×7 matrix:

```
[1/11, 4/33, 0, 8/33, 10/33, 1/33, 7/33]
[2/25, 0, 8/25, 0, 4/25, 7/25, 4/25]
[4/15, 1/15, 2/15, 0, 7/30, 4/15, 1/30]
[3/22, 5/22, 0, 9/44, 3/22, 3/22, 7/44]
[1/21, 1/6, 1/7, 1/14, 5/42, 3/14, 5/21]
[8/35, 2/7, 1/7, 3/35, 8/35, 0, 1/35]
[4/35, 3/35, 6/35, 3/35, 8/35, 1/7, 6/35]
```