1η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

- **Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί**
- **Υπομήτρα μήτρας**
- **Ανάπτυγμα ορίζουσας**
- **Ιδιότητες των οριζουσών**
- **Ορίζουσα τριγωνικής μήτρας**

Ορίζουσες

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

Ορίζουσα της μήτρας A λέγεται το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

και συμβολίζεται με $\det(A)$ ή $D(A)$ ή $|A|$, όπου $\operatorname{sgn}(\sigma)$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης σ.

Έτσι, η ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με

$$\det(A), \text{ ή } D(A), \text{ ή } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Αν $A \in \mathcal{M}_n$, η $\det(A)$ λέγεται **ορίζουσα τάξης** n.
Προφανώς, στην περίπτωση όπου $n = 1$ και $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ ορίζουμε $\det(A) = a$.

Το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

έχει $n!$ προσθετέους, όσες και οι μεταθέσεις του S_n.
Κάθε προσθετέος είναι γινόμενο n στοιχείων της μήτρας, που κάθε ένα είναι στοιχείο μιας μόνο γραμμής και μιας μόνο στήλης.
Το $\operatorname{sgn}(\sigma)$ (ή ε_σ) καθορίζει το πρόσημο κάθε προσθετέου, αφού

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι άρτια.} \\ -1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι περιττή.} \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι μια μετάθεση λέγεται **άρτια** (αντ. **περιττή**) αν γράφεται ως γινόμενο άρτιου (αντ. περιττού) πλήθος αντιμεταθέσεων. (Η ταυτοτική μετάθεση θεωρείται άρτια.)
Ισοδύναμα, μια μετάθεση λέγεται άρτια (αντ. περιττή) αν έχει άρτιο (αντ. περιττό) αριθμό παραβάσεων.

Παραδείγματα:

1. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$
Τότε
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}.$$
Αλλά, $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ όπου
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Η (ταυτοτική) μετάθεση σ_1 είναι άρτια, ενώ η $\sigma_2 = (12)$ είναι περιττή. Επομένως, $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = 1$ και $\mathrm{sgn}(\sigma_2) = -1$. Άρα,
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \mathrm{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$
Τότε
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$
Αλλά, $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ όπου

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ (ταυτοτική)} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23),$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12), \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (13)(12),$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (12)(13), \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13),$$
και
$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = \operatorname{sgn}(\sigma_4) = \operatorname{sgn}(\sigma_5) = 1,$$
$$\operatorname{sgn}(\sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_3) = \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1.$$

Άρα,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Παρατήρηση:
Σύμφωνα με τον ορισμό της ορίζουσας, η εύρεση της $\det(A)$ απαιτεί τον προσδιορισμό όλων των μεταθέσεων του συνόλου S_n, την εύρεση του $\mathrm{sgn}(\sigma)$ για κάθε $\sigma \in S_n$, την εύρεση των $n!$ γινομένων $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ και τέλος την εύρεση του αθροίσματος αυτών!
Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε μια επιπλέον μέθοδο εύρεσης της ορίζουσας, λιγότερο περίπλοκη και λιγότερο χρονοβόρα.
Με τη μέθοδο αυτή, η εύρεση της ορίζουσας n τάξης, ανάγεται στην εύρεση οριζουσών $n-1$ τάξης.

Υπομήτρα μήτρας

Έστω η μήτρα $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, δηλαδή η απεικόνιση $A : [m] \times [n] \to F$, όπου $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Θα λέμε **υπομήτρα** της μήτρας A κάθε περιορισμό της απεικόνισης A στο $L \times K$, όπου $\emptyset \neq L \subseteq [m]$ και $\emptyset \neq K \subseteq [n]$.

Η παράσταση μιας υπομήτρας της μήτρας A προκύπτει με την διαγραφή κάποιων γραμμών ή/και στηλών, από τις γραμμές ή/και τις στήλες της A.

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}$$

τότε η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

που προκύπτει με διαγραφή της γραμμής R_3 και των στηλών C_2, C_4, C_5 είναι υπομήτρα της A και συμβολίζεται με $A^{1,3}_{1,2}$. Εδώ $L = \{1, 2\} \subset [3]$ και $K = \{1, 3\} \subset [5]$.

Προφανώς, τα L και K δείχνουν τις γραμμές και στήλες της A που δεν διαγράφονται (αν και τελικά, συνήθως, χάνουν κάποια στοιχεία τους λόγω της διαγραφής άλλων στηλών και γραμμών).

Ονομάζουμε **υποορίζουσα** της $\det(A)$ οποιαδήποτε ορίζουσα μιας (προφανώς τετραγωνικής) υπομήτρας της A.

Ανάπτυγμα ορίζουσας

Έστω $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n$, $n \geq 2$.
Έστω M_{ij} η $(n-1) \times (n-1)$ υπομήτρα της A που προκύπτει με διαγραφή της i γραμμής και j στήλης.

Η $\det(M_{ij})$ λέγεται **ελάσσων ορίζουσα** του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με D_{ij}.

Αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{ij} του στοιχείου a_{ij} ονομάζεται το γινόμενο

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Παράδειγμα: Έστω η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_5.$$

Τότε

$$M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4,$$

$$D_{13} = \det(M_{13})$$

και

$$A_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} = D_{13}.$$

Όμοια

$$M_{34} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4,$$

$$D_{34} = \det(M_{34})$$

και

$$A_{34} = (-1)^{3+4} D_{34} = -D_{34}.$$

Πρόταση 1 (Ανάπτυγμα ορίζουσας)

Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$. *Τότε, για κάθε* $i, j \in [n]$ *ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{i1}(-1)^{i+1}D_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}D_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}D_{in}\end{aligned}$$

καθώς επίσης και

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= a_{1j}(-1)^{1+j}D_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}D_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}D_{nj}\end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της** i **γραμμής**, ενώ η δεύτερη λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της** j **στήλης**.

Παραδείγματα:

1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4.$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1.$
3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 0.$

4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (0-4) - 1 \cdot (-4+2) + 3 \cdot (8-0) = 18.$$

(Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4(-1-6) - 2(4+1) = 18.$$

(Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-4+2) - 2(4-12) = 18.$$

(Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.)

5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35)$$

$$= -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

(Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.)

6.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -2 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad - 2 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + 3 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2) \cdot (3 \cdot 7 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4)) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 5) \\ &\qquad + 3 \cdot (2 \cdot (-4) - 2 \cdot 0) \\ &= -2 \cdot 10 - 2(-8) + 3(-8) = -20 + 16 - 24 = -28. \end{aligned}$$

(Ανάπτυγμα της αρχικής 4×4 ορίζουσας κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής και μετά, ανάπτυγμα των τριών 3×3 οριζουσών κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, της πρώτης στήλης και της πρώτης στήλης αντίστοιχα.)

Πρόταση 2

Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$, $p, q \in [n]$ *και* $p \neq q$. *Τότε*

$$a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \cdots + a_{pn}A_{qn} = 0,$$

και

$$a_{1p}A_{1q} + a_{2p}A_{2q} + \cdots + a_{np}A_{np} = 0.$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται σε αποδείξεις άλλων προτάσεων.

Κανόνας του Sarrus

Για τον υπολογισμό των **3 × 3 οριζουσών**, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο παρακάτω πρακτικός τρόπος: Αντιγράφουμε τις δύο πρώτες στήλες μετά την ορίζουσα, και παίρνουμε τα γινόμενα όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + & & \\
a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\
- & - & - & &
\end{array}
\quad
\begin{aligned}
&= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\
&\quad - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1,
\end{aligned}
$$

το οποίο **είναι** το ανάπτυγμα της 3 × 3 ορίζουσας.

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} \color{red}{+} & \color{red}{+} & \color{red}{+} & & \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -2 \\ \color{blue}{-} & \color{blue}{-} & \color{blue}{-} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)(-2) \\ &\quad - 5 \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 \cdot 2 - (-3)(-1) \cdot 3 \\ &= -12 + 60 + 2 - 10 + 16 - 9 = 47. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Τονίζουμε ότι ο παραπάνω πρακτικός τρόπος, που ονομάζεται **κανόνας του Sarrus**, μπορεί να εφαρμοστεί **μόνο για 3 $\times$ 3 ορίζουσες**.

Ιδιότητες των οριζουσών

Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$. Ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.

1. $\det(I_n) = 1$.

   Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

2. $\det(A) = \det(A^t)$.

   Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$

3. Αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε
$$\det(A') = -\det(A).$$
Προφανής συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με p διαδοχικές εναλλαγές γραμμών, τότε
$$\det(A') = (-1)^p \det(A).$$
Παραδείγματα:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-8) = 8.$$
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 8 = 8.$$
4. Αν δύο γραμμες μιας μήτρας A είναι ίσες, τότε $\det(A) = 0$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

5. Αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής της A επί $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\det(A') = \lambda \det(A).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 = 24.$

6. Αν η μήτρα A έχει μηδενική γραμμή, τότε $\det(A) = 0$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

7. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 8 = 64.$$

8. Έστω A' η μήτρα που προκύπτει από την A αν σε μια γραμμή της A προσθέσουμε μια άλλη γραμμή της A πολλαπλασιασμένη επί $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\det(A') = \det(A).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8$, αφού η R_2 της πρώτης ορίζουσας ισούται με $R_2 + 2R_1$ της δεύτερης.

9. Αν μια γραμμή της μήτρας A είναι γραμμικός συνδυασμός k άλλων γραμμών, $(k < n)$, τότε $\det(A) = 0$.
Προφανής συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι αν R_i, R_j δύο γραμμές της μήτρας A και $R_i = \lambda R_j$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\det(A) = 0$.
Παραδείγματα:
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, αφού $R_2 = 2R_1 + 3R_3$.
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, αφού $R_2 = 2R_1$.

10. Αν

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & & \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{ij} + c_{ij} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ & \cdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & & \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ & \cdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & & \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ & \cdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

τότε

$$\det(A) = \det(A_1) + \det(A_2).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8.$

Παρατηρήσεις:

- Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτουν οι εξής κανόνες: Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ και θ στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών με $\theta(A) = A'$. Τότε,
  1. Αν $A \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = -\det(A)$.
  2. Αν $A \overset{R_i \to kR_i}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = k\det(A)$.
  3. Αν $A \overset{R_i \to R_i + kR_j}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = \det(A)$.
- Λόγω της ιδιότητας 2, είναι προφανές ότι όλες οι ιδιότητες, που αναφέρονται σε γραμμές εξακολουθούν να ισχύουν αν αναφερθούν αντίστοιχα σε στήλες.

Ορίζουσα τριγωνικής μήτρας

Πρόταση 3 (Τύπος ορίζουσας τριγωνικής μήτρας)

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ με $A = [a_{ij}]$. Αν η A είναι άνω ή κάτω τριγωνική τότε

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(-2)3 = -12.$

Πόρισμα 4

Αν η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ είναι διαγώνια τότε $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Παρατήρηση: Η παραπάνω πρόταση σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ιδιότητες μας δίνει άλλη μια μέθοδο υπολογισμού της ορίζουσας μιας τετραγωνικής μήτρας χωρίς την χρήση του ορισμού ή του αναπτύγματος.

Παραδείγματα:

1. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det(A) \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-2) = 8.$$

2

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 + 2R_2}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότ. } 5}{=} -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_4 \to R_4 - 4R_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -9.$$

3. Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = 0$, όπου a, b είναι παράμετροι.

Αν D η ορίζουσα τότε

$$D \overset{R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 2x+a+b & 2x+a+b & 2x+a+b & 2x+a+b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότ. } 5}{=} (2x + a + b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 - C_1}}{=}$$

$$= (2x + a + b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a - x & b - x & 0 \\ x & b - x & a - x & 0 \\ b & x - b & x - b & a - b \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2x+a+b)(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x \\ x & b-x & a-x \end{vmatrix} \\
&= (2x+a+b)(a-b)\begin{vmatrix} a-x & b-x \\ b-x & a-x \end{vmatrix} \\
&= (2x+a+b)(a-b)((a-x)^2-(b-x)^2) \\
&= (2x+a+b)(a-b)(a-x+b-x)(a-x-b+x) \\
&= (2x+a+b)(a-b)(a+b-2x)(a-b) \\
&= (a-b)^2(a+b+2x)(a+b-2x).
\end{aligned}
$$

Άρα,

- Αν $a=b$, τότε

$$D = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Αν $a \neq b$, τότε

$$D = 0 \Leftrightarrow (a+b+2x)(a+b-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2}, & \text{ή} \\ x = -\frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

2η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

- **Ορίζουσα γινομένου**
- **Κριτήριο αντιστρεψιμότητας**
- **Συμπληρωματική μήτρα**
- **Rank μήτρας**

Ορίζουσα γινομένου

Πρόταση 5

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Τότε $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Κριτήριο αντιστρεψιμότητας

Πρόταση 6 (Κριτήριο αντιστρεψιμότητας)

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η A είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$.

Παραδείγματα:

1. Η μήτρα
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
είναι αντιστρέψιμη διότι $\det(A) = 18 \neq 0$.

2. Η μήτρα
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$
δεν είναι αντιστρέψιμη διότι $\det(B) = 0$.

Συμπληρωματική μήτρα

Έστω $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n$ και A_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} της μήτρας A. Τότε, η μήτρα

$$\left[A_{ij}\right]^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & \cdots & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

λέγεται **συμπληρωματική** της μήτρας A και συμβολίζεται με $\mathrm{adj}\mathrm{A}$.

Παραδείγματα:

1. Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, τότε
$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2,$
$A_{12} = (-1)^{1+2}(-1) = (-1)(-1) = 1,$
$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4,$
$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3.$
'Αρα,

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, τότε

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,$ κ.ο.κ.

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{adj}A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -13 & 10 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & -1 & 10 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Πρόταση 7 (Τύπος αντιστροφής μήτρας)

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Τότε,

1. $A \cdot \mathrm{adj}A = \mathrm{adj}A \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.
2. *Αν* $\det(A) \neq 0$, *τότε* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A$.

Παραδείγματα:

1. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί, (αν υπάρχει), η μήτρα A^{-1}.

   Είναι $\det(A) = -4 - 6 = -10 \neq 0$.
   Επομένως υπάρχει η A^{-1} και ισχύει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adjA}.$$

   Είναι

$$\mathrm{adjA} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

   και άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση: Από την Πρόταση 7.(2) προκύπτει ότι μπορούμε να βρίσκουμε απ' ευθείας την αντίστροφη μιας 2×2 αντιστρέψιμης μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(χωρίς να κάνουμε κάθε φορά τη διαδικασία του παραπάνω Παραδείγματος), αφού

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

2. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Να βρεθεί, (αν υπάρχει), η μήτρα A^{-1}.

Είναι $\det(A) = -4 \neq 0$, επομένως υπάρχει η A^{-1} και ισχύει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj} A$$

Είναι

$$\mathrm{adj} A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -8 \\ -3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rank μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και B μια κλιμακωτή μήτρα που είναι R-ισοδύναμη με την A. Ορίζουμε ως $\mathrm{rank(A)}$ τον αριθμό p των μη μηδενικών γραμμών της B.

Παραδείγματα:

1. Για την μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_4 \to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   είναι $\mathrm{rank(A)} = 3$, διότι είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα με 3 μη μηδενικές γραμμές.

Παρατήρηση: Ο αρχικός (ισοδύναμος) ορισμός του rank μιας μήτρας, χρησιμοποιεί έννοιες από τους διανυσματικούς χώρους που θα δούμε αργότερα.

2. Έστω
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 4 & 2\end{bmatrix}.$$
Είναι $\mathrm{rank(A)}=2$. Πράγματι,
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 4 & 2\end{bmatrix}\overset{R_3\to R_3-2R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
οπότε η A είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα με 2 μη μηδενικές γραμμές.

3. Έστω

$$A=\begin{bmatrix}0&0&5&35&-24&1\\0&2&1&-1&1&0\\0&3&2&2&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&5&3&1&0&1\end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A\overset{R_2\to\frac{1}{2}R_2}{\sim}\begin{bmatrix}0&0&5&35&-24&1\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&3&2&2&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&5&3&1&0&1\end{bmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim}\begin{bmatrix}0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&5&35&-24&1\\0&3&2&2&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&5&3&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3\to R_3-3R_1\\R_5\to R_5-5R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&5&35&-24&1\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}&1\end{bmatrix}\overset{R_4\leftrightarrow R_5}{\sim}\begin{bmatrix}0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&5&35&-24&1\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}&1\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4 \to R_4 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3 \to R_3 - \frac{1}{10} R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, η A είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα με 3 μη μηδενικές γραμμές, άρα $\mathrm{rank(A)} = 3$.

4. Έστω
$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&-2\\2&3&0&1\\1&2&1&4\\1&3&-1&0\end{bmatrix}.$$

Τότε
$$A \underset{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\R_3\to R_3-R_1\\R_4\to R_4-R_1}}{\sim} \begin{bmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&5\\0&0&2&6\\0&1&0&2\end{bmatrix} \underset{R_4\to R_4+R_2}{\sim} \begin{bmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&5\\0&0&2&6\\0&0&2&7\end{bmatrix}$$

$$\underset{R_4\to R_4-R_3}{\sim} \begin{bmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&5\\0&0&2&6\\0&0&0&1\end{bmatrix}=B.$$

Επομένως, η A είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα με 4 μη μηδενικές γραμμές, άρα $\mathrm{rank}(\mathrm{A})=4$.

Πρόταση 8

Για το rank μιας μήτρας ισχύουν τα εξής:

1. *Αν* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, *τότε*
$$\mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}.$$
2. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Τότε* $\mathrm{rank}(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}_{m\times n}$.
3. *Αν* $A \overset{R}{\sim} B$, *ή* $A \overset{C}{\sim} B$ *(δηλαδή ο* B *προκύπτει από τον* A *μετά από πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών ή στηλών), τότε* $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.
4. $\mathrm{rank}(A) = p$ *όπου* p *είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός για τον οποίο υπάρχει κάποια τετραγωνική υπομήτρα* B *της* A *με τάξη* p, *τέτοια ώστε* $\det(B) \neq 0$.

Πρόταση 8 (συνέχεια)

5. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_n$. *Τότε*
   1. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank(A)} < \mathrm{n}$.
   2. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank(A)} = \mathrm{n}$.
6. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *και* $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$. *Τότε*
$$\mathrm{rank(AB)} \leq \min\{\mathrm{rank(A)}, \mathrm{rank(B)}\}.$$
7. *Έστω* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Τότε*
$$\mathrm{rank(A+B)} \leq \mathrm{rank(A)} + \mathrm{rank(B)}.$$
8. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}^*$. *Τότε*
$$\mathrm{rank}(\lambda \mathrm{A}) = \mathrm{rank(A)}.$$
9. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Τότε*
$$\mathrm{rank(A^t)} = \mathrm{rank(A)}.$$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 8 (5)i), είναι $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) < 3$, διότι

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Πρόταση 9 (Μήτρες με rank 1)

Μια $m \times n$ *μήτρα* $A = [a_{ij}]$ *έχει rank 1 αν και μόνο αν* $a_{ij} = x_i y_j$ *όπου* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

και $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$*, δηλαδή*

$$A = XY = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & x_m y_2 & \cdots & x_m y_n \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ έχει rank 1 αφού

$$A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ έχει rank 1 αφού

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση:

Άρα, μια $m \times n$ μήτρα A έχει rank 1 αν και μόνο αν γράφεται ως γινόμενο μιας μήτρας στήλης $m \times 1$ επί μιας μήτρας γραμμής $1 \times n$.

Παρατήρηση:

Μια μήτρα A έχει rank 1 αν και μόνο αν όλες οι γραμμές της (αντ. όλες οι στήλες της) είναι πολλαπλάσια κάποιας γραμμής της (αντ. στήλης της).

Πρόταση 10 (Ανάλυση μήτρας σε άθροισμα μητρών με rank 1)

Το rank μια μήτρας A ισούται με τον ελάχιστο αριθμό μητρών με rank 1 που το άθροισμά τους δίνει την A.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

άρα, είναι $\mathrm{rank(A)} = 2$. Επομένως, η A γράφεται ως άθροισμα δύο μητρών με rank 1. Πράγματι,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Σε προηγούμενο παράδειγμα (διαφάνεια 48) είδαμε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ έχει $\mathrm{rank(A)} = 4$ οπότε απαιτούνται 4 μήτρες με rank 1 για να εκφράσουν την A ως άθροισμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση:

Η ανάλυση μιας μήτρας με rank > 1 ως άθροισμα μητρών με rank 1 δεν είναι μονοσήμαντη (δηλαδή μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους).

Παράδειγμα: Για την μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ με $\mathrm{rank(A)} = 2$ έχουμε

αφενός

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και αφετέρου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 11 (Υπολογισμός rank μέσω οριζουσών)

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Αν υπάρχει υπομήτρα $B \in \mathcal{M}_p$ της μήτρας A με $\det(B) \neq 0$, ενώ για κάθε υπομήτρα $C \in \mathcal{M}_{p+1}$ της A που έχει ως υπομήτρα την B είναι $\det(C) = 0$, τότε $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{p}$.

Παρατήρηση: Από την Πρόταση 11 προκύπτει ότι για να βρούμε το rank μιας μήτρας μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:
Βρίσκουμε μια τετραγωνική υπομήτρα B μικρής τάξης (συνήθως 2) της A με $\det(B) \neq 0$.
Αν η μήτρα B είναι τύπου $p \times p$, υπολογίζουμε τις ορίζουσες εκείνων **μόνο** των υπομητρών της A τύπου $(p+1) \times (p+1)$ που έχουν ως υπομήτρα την B. Αν οι ορίζουσες όλων αυτών των μητρών είναι 0, τότε θα είναι $\mathrm{rank}(A) = p$.
Αν βρούμε τουλάχιστον μια μήτρα με ορίζουσα μη μηδενική, αρχίζουμε την ίδια διαδικασία από την αρχή για τη μήτρα αυτή που βρήκαμε.

Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το rank της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Είναι

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Θεωρούμε τώρα **μόνο** τις υπομήτρες 3×3 της A που περιέχουν την υπομήτρα $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Μεταξύ αυτών, έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Επειδή, αυτή η ορίζουσα είναι μη μηδενική, αρχίζουμε ξανά από την αρχή, και θεωρούμε **μόνο** τις υπομήτρες 4×4 της A που περιέχουν την υπομήτρα $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Υπάρχουν μόνο δύο τέτοιες μήτρες:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Και οι δύο αυτές μήτρες έχουν μηδενικές ορίζουσες. Άρα, $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = 3$.

Παρατήρηση: Με τον τρόπο αυτό χρειάστηκε να υπολογίσουμε μόνο δύο ``μεγάλες'' ορίζουσες της A (τάξης 4) από τις 5 που περιέχει, (και τις οποίες θα έπρεπε να υπολογίσουμε αν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό του rank).