# 1η ΔΙΑΛΕΞΗ
# ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- **Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί**
- **Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων**
  - **Λύση με αντίστροφη μήτρα**
  - **Λύση με τη μέθοδο οριζουσών (μέθοδος Cramer)**
  - **Λύση με τη μέθοδο Gauss**

# Γραμμικά συστήματα

Έστω ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με $m$ **εξισώσεις** και $n$ **αγνώστους**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε τις μήτρες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

όπου $A$ είναι τύπου $m \times n$, $X$ είναι τύπου $n \times 1$ και $B$ είναι τύπου $m \times 1$, τότε το σύστημα γράφεται

$$AX = B$$

όπου $A$ είναι η **μήτρα των συντελεστών**, $B$ είναι η **μήτρα των σταθερών όρων** και $X$ είναι η **μήτρα των αγνώστων**.

**Παράδειγμα:** Το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 4y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$AX = B$$

όπου $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ η μήτρα των συντελεστών, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ η μήτρα των αγνώστων, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ η μήτρα των σταθερών όρων.

Επίσης, χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$E \;(\text{ή } \left[A \mid B\right]) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Η μήτρα $E$ (ή $\left[A \mid B\right]$) ονομάζεται **επαυξημένη μήτρα** του συστήματος $AX = B$.
**Παράδειγμα:** Η μήτρα

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

είναι η επαυξημένη μήτρα του προηγούμενου παραδείγματος:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 4y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

**Λύση** του συστήματος ονομάζεται κάθε μήτρα $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ η οποία επαληθεύει την εξίσωση $AX = B$.

Αποδεικνύεται ότι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων,

- είτε δεν έχει καμιά λύση (οπότε λέγεται **αδύνατο**),
- είτε έχει ακριβώς μια λύση,
- είτε έχει άπειρες λύσεις (οπότε λέγεται **αόριστο**).

Αν ένα σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση, (δηλαδή δεν είναι αδύνατο), τότε λέγεται **συμβιβαστό**.

Αν $B = \mathbb{O}_{m\times 1}$ το σύστημα λέγεται **ομογενές**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

# Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων

## Λύση με αντίστροφη μήτρα

Έστω $AX = B$, όπου $A$ μια αντιστρέψιμη τετραγωνική μήτρα. Τότε

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

## Άσκηση

*Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 4y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

**Λύση** Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$AX = B.$$

Ισχύει ότι

$$\det(A) = -4 \neq 0.$$

Επομένως, υπάρχει η αντίστροφη μήτρα $A^{-1}$ με

$$A^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

ή,

$$(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4} \right).$$

## Λύση με τη μέθοδο οριζουσών (μέθοδος Cramer)

Έστω το σύστημα

$$AX = B, \text{ με } A \in \mathcal{M}_n.$$

1. Αν $D(A) \neq 0$, τότε

$$x_i = \frac{D_i(A)}{D(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

   όπου $D_i(A)$ (ή $D_{x_i}(A)$) είναι η ορίζουσα της μήτρας που προκύπτει από την $A$, αν αντικαταστήσουμε την $i$ στήλη της με τη στήλη $B$.
2. Αν $D(A) = 0$ και υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $D_i(A) \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
3. Αν $D(A) = 0$ και $D_i(A) = 0$ για κάθε $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.
   Σε αυτή την περίπτωση προχωράμε με τη μέθοδο Gauss, ή διερευνούμε με χρήση rank, (όπως θα δούμε στη συνέχεια).

**Παραδείγματα:**

1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7w &= 6 \\ 3x - 2y + 5w &= 5 \\ 4x + 3y - 9w &= 8. \end{aligned}$$

**Λύση**. Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 28 \neq 0,$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 5 & -2 & 5 \\ 8 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 56,\ D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 84,\ D_w = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 28.$$

Άρα

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{56}{28} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{84}{28} = 3, \quad w = \frac{D_w}{D} = \frac{28}{28} = 1.$$

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7w &= 6 \\ 3x - 2y + 5w &= 5 \\ 7x + 4y - 9w &= 18. \end{aligned}$$

Είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

ενώ

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 5 & -2 & 5 \\ 18 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 785 \neq 0.$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

# Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων

## Λύση με τη μέθοδο Gauss

Έστω $AX = B$ ένα $m \times n$ γραμμικό σύστημα (Σ).
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gauss στην επαυξημένη μήτρα $E$, μέχρι η $A$ να δώσει μια ισοδύναμη **υποβαθμισμένη** κλιμακωτή μήτρα

$$E' = \left[A' \mid B'\right].$$

Έστω

$$B' = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & \vdots & b'_m \end{bmatrix}^t.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν κατά τη διάρκεια της παραπάνω διαδικασίας εμφανισθεί κάποια γραμμή της μορφής $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & K \end{bmatrix}$, όπου $K \neq 0$, τότε το (Σ) **είναι αδύνατο**, αφού προφανώς αυτή η γραμμή της επαυξημένης μήτρας θα αντιστοιχεί σε μια εξίσωση της μορφής:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = K \neq 0,$$

## Λύση με τη μέθοδο Gauss (συνέχεια)

2. Αν οι μη μηδενικές γραμμές τις $A'$ σχηματίζουν την $I_n$, τότε έχουμε τη **(μοναδική) λύση** $X = B'$, δηλαδή $x_i = b_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
3. Αν η $A'$ έχει $m'$ μη μηδενικές γραμμές ($m' < n$), τότε γράφουμε το σύστημα εξισώσεων που αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$A'X = B'.$$

Λύνουμε κάθε εξίσωση ως προς εκείνο το $x_i$ (**κύριος άγνωστος**) που αντιστοιχεί σε στήλη της $A'$ που περιέχει κύριο στοιχείο, (οι υπόλοιποι άγνωστοι είναι οι **ελεύθεροι άγνωστοι**), παίρνοντας έτσι τις **(άπειρες) λύσεις** του **αόριστου** συστήματος (Σ).

## Παραδείγματα:

1. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$
Εδώ
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα
$$E = \left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -7 & 7 & 4 \end{array}\right].$$
Τότε
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -7 & 7 & 4 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2 \to R_2 - 4R_1}{R_3 \to R_3 - 2R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -13 & 11 & -13 \\ 0 & -13 & 11 & -6 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -13 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$
Επειδή, στην διάρκεια της διαδικασίας εμφανίστηκε η γραμμή $0\ 0\ 0 \mid 7$, προκύπτει ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3w &= 1 \\ x + y + 2w &= 9 \\ 3x + 6y - 5w &= 0. \end{aligned}$$

Εδώ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα

$$E = \left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right].$$

Τότε

$$E \overset{R_2 \leftrightarrow R_1}{\sim} \cdots \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}}{\sim} \cdots \overset{R_2 \to \frac{1}{2} R_2}{\sim} \cdots \overset{\substack{R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2}}{\sim} \cdots$$

$$\overset{R_3 \to -2R_3}{\sim} \cdots \overset{\substack{R_1 \to R_1 - \frac{11}{2} R_3 \\ R_2 \to R_2 + \frac{7}{2} R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right],$$

δηλαδή $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3, B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση, την $x = 1$, $y = 2$, $w = 3$, δηλαδή $(x, y, w) = (1, 2, 3)$.

3. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 4. \end{aligned}$$

Εδώ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα

$$E = \left[A \mid B\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \text{-1} & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & \text{-2} & 6 & 3 & 6 \\ \text{-1} & \text{-2} & 1 & \text{-1} & 3 & 4 \end{array}\right] \end{array}.$$

Τότε

$$E \sim (\text{γραμμοπράξεις - άσκηση}) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}.$$

Επομένως, έχουμε:

- Κύριοι άγνωστοι: $x_1, x_4, x_5$.
- Ελεύθεροι άγνωστοι: $x_2, x_3$.

Επομένως, το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_4 &= -1 \\ x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Λύνουμε ως προς τους κύριους άγνωστους $x_1, x_4, x_5$ και προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 &= -1 \\ x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3 - 2x_2 + x_3, x_2, x_3, -1, 2),$$

όπου $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,
ή, ισοδύναμα,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3 - 2a + b, a, b, -1, 2),$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

## 2η ΔΙΑΛΕΞΗ
## ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- **Ύπαρξη λύσεων (διερεύνηση με rank)**
- **Ύπαρξη λύσεων ομογενούς συστήματος**

# Ύπαρξη λύσεων (διερεύνηση με rank)

## Ύπαρξη λύσεων (διερεύνηση με rank)

Έστω (Σ) ένα σύστημα $AX = B$ όπου $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $E = \left[A \mid B\right]$ η επαυξημένη μήτρα του συστήματος.

1. Αν $\mathrm{rank(A)} \neq \mathrm{rank(E)}$, τότε το (Σ) είναι αδύνατο.
2. Αν $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{rank(E)} = \mathrm{n}$, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση.
3. Αν $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{rank(E)} < \mathrm{n}$, τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις (με $n - \mathrm{rank(A)}$ ελεύθερους άγνωστους).

**Παρατηρήσεις:**

1. Αν $m < n$, έχουμε
   ή $\mathrm{rank(A)} \neq \mathrm{rank(E)}$ (περίπτωση 1, άρα αδύνατο),
   ή $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{rank(E)} \leq \mathrm{m} < \mathrm{n}$, (περίπτωση 3, άρα αόριστο).
   ΄Αρα, αν $m < n$, αποκλείεται η περίπτωση της μοναδικής λύσης.
2. Η διερεύνηση μάς δίνει απλά το πλήθος των λύσεων, αλλά δεν βρίσκει τις λύσεις (αν υπάρχουν).

**Παράδειγμα:** Το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y - 2z &= 2 \\ 2x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

είναι αδύνατο, διότι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

και

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

με

$$\mathrm{rank(A)} = 2 \neq 3 = \mathrm{rank(E)}.$$

Πράγματι, $\mathrm{rank(A)} = 2$, αφού $D(A) = 0$, ενώ η $A$ έχει την $2 \times 2$ μήτρα $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ με $D(A_1) = -1 \neq 0$.

Εξάλλου, $\mathrm{rank(E)} = 3$ αφού η $E$ έχει την $3 \times 3$ υπομήτρα $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ με $D(E_1) = 2 \neq 0$.

Ειδικά για τα συστήματα με $n+1$ εξισώσεις και $n$ αγνώστους, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

## Πρόταση 1

*Έστω το σύστημα $n+1$ γραμμικών εξισώσεων με $n$ αγνώστους*

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n+1}x_1 & + & a_{n+1}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1\ n}x_n & = & b_{n+1} \end{array}\right.$$

*και* $A=[a_{ij}]$, $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$.

*Το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν*

$$\det(A|B)=0.$$

**Παραδείγματα:**

1. Το $4 \times 3$ σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

είναι συμβιβαστό, αφού

$$D([A|B]) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \cdots = 0.$$

(Πράγματι, το παραπάνω σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3)$ - Άσκηση.)

2. Το $4 \times 3$ σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

είναι αδύνατο, αφού

$$D([A|B]) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

# Ύπαρξη λύσεων ομογενούς συστήματος

Έστω ένα ομογενές σύστημα (Σ)

$$AX = \mathbb{O}_{n\times 1}$$

με $A \in \mathcal{M}_n$.
Το (Σ) έχει πάντα τουλάχιστον μια λύση:
Τη (μηδενική) λύση $X = \mathbb{O}_{n\times 1}$.
Άρα, **ποτέ** δεν είναι αδύνατο.
Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι:

1. Αν $D(A) \neq 0$, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση, (τη μηδενική).
2. Αν $D(A) = 0$, τότε έχει άπειρες λύσεις, (οπότε μπορούμε να προχωρήσουμε με Gauss).

# Ανακεφαλαίωση τρόπων επίλυσης γραμμικών συστημάτων

**Μέθοδος αντικατάστασης**:
Μόνο για πολύ απλά συστήματα.

**Μέθοδος αντίστροφης μήτρας**:
Μόνο για τετραγωνικές μήτρες $A$. Δεν απαντά στην περίπτωση όπου η $A$ δεν είναι αντιστρέψιμη.

**Μέθοδος Cramer**:
Μόνο για τετραγωνικές μήτρες $A$. Δεν απαντά στη περίπτωση όπου $D(A) = D_i(A) = 0$, για κάθε $i \in [n]$.

**Μέθοδος Gauss**:
Όχι μονο για τετραγωνικές μήτρες $A$. Γενική μέθοδος. Δίνει **πάντοτε** απάντηση.

**´Ασκηση:** Να λυθεί το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= 4 \\
x + 3y + z &= 11 \\
2x + 5y - 4z &= 13.
\end{aligned}
$$

**Λύση**. **1ος τρόπος** (μέθοδος αντίστροφης μήτρας).
Αφού $D(A) = -2 \neq 0$, προκύπτει ότι η $A$ είναι αντιστρέψιμη, με $A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\mathrm{adjA}$.

$$\mathrm{adjA} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -7 & 11 \\ 6 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -17 & -7 & 11 \\ 6 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ -3 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

οπότε

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ -3 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

δηλαδή $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

**2ος τρόπος** (μέθοδος Cramer).

$$D = D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Άρα, μοναδική λύση.

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 11 & 1 \\ 2 & 13 & -4 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 11 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -2,$$

οπότε

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, y = \frac{D_y}{D} = 3, z = \frac{D_z}{D} = 1,$$

δηλαδή $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

**3ος τρόπος** (μέθοδος Gauss).

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \overset{\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \overset{R_3 \to -\frac{1}{2} R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{R_1 \to R_1 + 11R_3 \\ R_2 \to R_2 - 4R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Άρα, το σύστημα έχει τη (μοναδική) λύση

$$(x, y, z) = (1, 3, 1).$$

**΄Ασκηση:** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2z &= -7 \\ 2x - 7y + 3z &= 7 \\ -y + z &= 3. \end{aligned}$$

**Λύση**. Το σύστημα έχει

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

με

$$D(A) = 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

΄Αρα,

$$\mathrm{rank(A)} = 2.$$

Επίσης, έχουμε

$$E = \left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 2 & -7 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right], \text{ με}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -7 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Άρα,

$$\mathrm{rank}(\mathrm{E}) = 2.$$

Επομένως,

$$\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = \mathrm{rank}(\mathrm{E}) = 2 < 3 (= \mathrm{n} \text{ αγνωστοι})$$

οπότε το σύστημα (Σ) είναι αόριστο με

$$n - \mathrm{rank}(\mathrm{A}) = 3 - 2 = 1$$

ελεύθερους άγνωστους.

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο Gauss

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 2 & -7 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα

$$\begin{aligned} x - 2z &= -7 \\ y - z &= -3, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x &= 2z - 7 \\ y &= z - 3. \end{aligned}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι

$$(x, y, z) = (2z - 7, z - 3, z)$$

όπου $z \in \mathbb{R}$.

**Άσκηση:** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y - w &= 1 \\ 2x + 3y + 2w &= 3 \\ x + 2y + 3w &= 2. \end{aligned}$$

**Λύση**. Ισχύει ότι

$$\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = \mathrm{rank}(\left[A \mid B\right]) = 2 < 3(= \mathrm{n})$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, με $n - \mathrm{rank}(\mathrm{A}) = 3 - 2 = 1$ ελεύθερους άγνωστους.
Εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε μια παραλλαγή της μεθόδου Cramer, (φυσικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Gauss):
Γράφουμε το σύστημα στη μορφή

$$\begin{aligned} x + y &= 1 + w \\ 2x + 3y &= 3 - 2w \\ x + 2y + 3w &= 2 \end{aligned}$$

και επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Crammer για το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x + y &= 1 + w \\
2x + 3y &= 3 - 2w.
\end{aligned}
$$

Είναι

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1+w & 1 \\ 3-2w & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3+3w-3+2w}{3-2} = 5w,$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+w \\ 2 & 3-2w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3-2w-2-2w}{3-2} = 1-4w.$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι

$$(x, y, w) = (5w, 1-4w, w)$$

όπου $w \in \mathbb{R}$.

**Άσκηση:** Να λυθεί το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x - 2y + z &= 3\\
2x + 3y - 2z &= 5\\
3x + y - z &= 6.
\end{aligned}
$$

**Λύση**.

**1ος τρόπος** (μέθοδος αντίστροφης μήτρας).

Η μήτρα $A$ δεν είναι αντιστρέψιμη αφού $\det(A) = 0$. Άρα, η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί εδώ.

**2ος τρόπος** (μέθοδος Cramer)

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.
$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

**3ος τρόπος** (μέθοδος Gauss)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

**4ος τρόπος** (μέθοδος rank)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D(A) = 0, \text{ ενώ } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Άρα, $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = 2$.

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

με

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Άρα, $\mathrm{rank}(\mathrm{E}) = 3 \neq 2 = \mathrm{rank}(\mathrm{A})$. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

**Άσκηση:** Δίδεται το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda x + y - \lambda z &= 0 \\ 5\lambda x - 5\lambda y + 2z &= 0 \\ x + 8y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

όπου $\lambda$: θετική παράμετρος.

1. Να βρεθεί το $\lambda$, ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.
2. Αν $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος αυτού, να δειχθεί ότι:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (z_1 - z_2)^2.$$

**Λύση.**

1. Πρέπει

$$D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -\lambda \\ 5\lambda & -5\lambda & 2 \\ 1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{C_1 \to C_1 + C_3}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda \\ 5\lambda+2 & -5\lambda & 2 \\ -6 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\begin{vmatrix} 5\lambda+2 & 2 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 5\lambda+2 & -5\lambda \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -10\lambda^2 + 19\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} -\frac{1}{10} < 0 \text{ (απορρίπτεται)} \\ 2. \end{cases}$$

2. Για $\lambda = 2$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 0 \\ 10x - 10y + 2z &= 0 \\ x + 8y - 7z &= 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας σύμφωνα με την μέθοδο Gauss έχουμε ότι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 10 & -10 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & -7 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{R_2 \to \frac{1}{2} R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{R_2 \leftrightarrow R_2 - 5R_1}{R_3 \to R_3 - 2R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 0 & -45 & 36 & 0 \\ 0 & -15 & 12 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2 \to -\frac{1}{45} R_2}{R_3 \to \frac{1}{3} R_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1 \to R_1 - 8R_2}{R_3 \to R_3 + 5R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Άρα, το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{cases} x - \frac{3}{5}z & = 0 \\ y - \frac{4}{5}z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}z \\ y = \frac{4}{5}z. \end{cases}$$

Άρα $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}z, \frac{4}{5}z, z\right)$, $z \in \mathbb{R}$.

Αν λοιπόν

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{3}{5}z_1, \frac{4}{5}z_1, z_1\right)$$

και

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{3}{5}z_2, \frac{4}{5}z_2, z_2\right),$$

τότε:

$$\begin{aligned} &(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= \left(\frac{3}{5}z_1 - \frac{3}{5}z_2\right)^2 + \left(\frac{4}{5}z_1 - \frac{4}{5}z_2\right)^2 \\ &= \frac{9}{25}(z_1 - z_2)^2 + \frac{16}{25}(z_1 - z_2)^2 = \frac{25}{25}(z_1 - z_2)^2 \\ &= (z_1 - z_2)^2. \end{aligned}$$

**Άσκηση:** Να λυθεί (και να διερευνηθεί) το σύστημα

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= k \\ x + y + kz &= k^2 \end{aligned}$$

όπου $k$: πραγματική παράμετρος.

**Λύση**. Με ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} &= k(k^2 - 1) - (k - 1) + (1 - k) \\ &= k(k + 1)(k - 1) - 2(k - 1) = (k - 1)(k^2 + k - 2) \\ &= (k - 1)(k - 1)(k + 2) = (k - 1)^2(k + 2). \end{aligned}$$

Άρα:

- Αν $k \neq -2, 1$ (οπότε $D \neq 0$) τότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ k^2-1 & 1 & k \end{vmatrix}$$
$$= (k^2-1)(1-k) = -(k-1)^2(k+1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k & 1 \\ k^2 & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & k^2 \end{vmatrix}$$
$$= k\left(k^2-k^2\right) - (k-1) + k^2 - k = -k+1+k^2-k = k^2-2k+1 = (k-1)^2.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix} \overset{C_3 \to C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k^2-1 \end{vmatrix}$$
$$= (k^2-1)(k^2-1) = (k-1)^2(k+1)^2.$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+2)} = -\frac{k+1}{k+2},\\
y &= \frac{D_y}{D} = \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2},\\
z &= \frac{D_z}{D} = \frac{(k-1)^2(k+1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k+2}.
\end{aligned}
$$

- Αν $k = 1$, τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - y - z.$$

  Ώστε $(x, y, z) = (1 - y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

- Αν $k = -2$, τότε

$$D_x = -(-3)^2(-1) = 9 \neq 0,$$

  οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.