## 1η ΔΙΑΛΕΞΗ
## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

- **Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί**
- **Γραμμικός συνδυασμός**
- **Γραμμική θήκη**
- **Γραμμική ανεξαρτησία**

# Τί είναι διάνυσμα;

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$
$\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, -5)$
$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (3, 2, 4, -1)$
$2\mathbf{v}_1 = (2, 4, 6, 8).$

# Τί είναι διάνυσμα;

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$
$\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, -5)$
$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (3, 2, 4, -1)$
$2\mathbf{v}_1 = (2, 4, 6, 8)$.

---

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

---

# Τί είναι διάνυσμα;

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$
$\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, -5)$
$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (3, 2, 4, -1)$
$2\mathbf{v}_1 = (2, 4, 6, 8)$.

---

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$
$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$
$$2A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

---

$p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
$p_2(x) = 2x^3 + x - 5 = 2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 5$
$p_1(x) + p_2(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1$
$2p_1(x) = 2x^3 + 4x^2 + 6x + 8$

---

# Τί είναι διάνυσμα;

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$
$\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, -5)$
$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (3, 2, 4, -1)$
$2\mathbf{v}_1 = (2, 4, 6, 8)$.

---

$f(x) = \cos x + 2\sin x + 3e^x + 4e^{2x}$
$g(x) = 2\cos x + e^x - 5e^{2x} = 2 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x + 1 \cdot e^x - 5 \cdot e^{2x}$
$f(x) + g(x) = 3\cos x + 2\sin x + 4e^x - 1 \cdot e^{2x}$
$2f(x) = 2\cos x + 4\sin x + 6e^x + 8e^{2x}$

# Διανυσματικοί χώροι

Έστω ένα μη κενό σύνολο $V$ στο οποίο έχουμε ορίσει μια συνάρτηση $+ : V \times V \to V$ την οποία ονομάζουμε **πρόσθεση** $+$ και μια συνάρτηση $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ την οποία ονομάζουμε **πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό (από τα αριστερά)** $\cdot$. Το σύνολο $V$ μαζί με τις δύο αυτές πράξεις ονομάζεται (προς τα αριστερά) **πραγματικός διανυσματικός χώρος** (ή **γραμμικός χώρος**) αν και μόνο αν

1. Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ ισχύουν:
   - $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (προσεταίριση).
   - $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (αντιμετάθεση).
   - Υπάρχει στοιχείο του $V$ το οποίο συμβολίζεται με $\mathbf{0}$ ώστε $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (ουδέτερο στοιχείο).
   - Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ υπάρχει $\mathbf{x}' \in V$ ώστε $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (συμμετρικό στοιχείο).
2. Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύουν:
   (i) $\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}$ (επιμέριση).
   (ii) $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}$ (επιμέριση).
   (iii) $(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x})$ (προσεταίριση).
   (iv) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (κανονικότητα).

# Διανυσματικοί χώροι

1. Το σύνολο $V$ μαζί με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι ένα παράδειγμα **αλγεβρικής δομής** και θα συμβολίζεται και ως $(V, +, \cdot)$.
2. Τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{R}$ ονομάζονται **τελεστές** και σημειώνονται με ελληνικά γράμματα (συνήθως τα $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu$), ενώ τα στοιχεία του $V$ ονομάζονται **διανύσματα** και σημειώνονται με λατινικά γράμματα (συνήθως τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$). Για να μην υπάρχει σύγχυση, τα διανύσματα θα δίδονται με έντονη γραφή (όπως φαίνεται και στον ορισμό του διανυσματικού χώρου).
3. Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος επί πραγματικό αριθμό ονομάζεται **βαθμωτός** (ή αριθμητικός) πολλαπλασιασμός. Στα επόμενα, θα παραλείπεται το σύμβολο $\cdot$ του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, δηλαδή για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in V$, θα γράφουμε $\lambda\mathbf{x}$ αντί $\lambda \cdot \mathbf{x}$.
4. Μπορούμε να ορίσουμε ανάλογο πολλαπλασιασμό επί πραγματικό αριθμό και προς τα δεξιά.

**Παράδειγμα 1: Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^2$**

Η δομή $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ όπου για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

και

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

### Παράδειγμα 2: Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Γενικότερα, η δομή $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ όπου για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

και

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος με μηδενικό στοιχείο το $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Πράγματι, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ και $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
&= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n) \\
&= \mathbf{y} + \mathbf{x} \text{ (Αντιμετάθεση)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + \mathbf{z} \\
&= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \text{ (Προσεταίριση)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{0} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0)\\ &= (x_1+0, x_2+0, \ldots, x_n+0)\\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x} \text{ (Ουδέτερο στοιχείο)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)\\ &= (x_1-x_1, x_2-x_2, \ldots, x_n-x_n)\\ &= (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0} \text{ (Συμμετρικό στοιχείο)}\end{aligned}$$

Οπότε, το $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ είναι το αντίθετο του $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

# Διανυσματικοί χώροι

Επιπλέον, αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι

$$
\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \\
&= (\lambda(x_1+y_1), \lambda(x_2+y_2), \ldots, \lambda(x_n+y_n)) \\
&= (\lambda x_1+\lambda y_1, \lambda x_2+\lambda y_2, \ldots, \lambda x_n+\lambda y_n) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n) \\
&= \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y} \text{ (Επιμέριση)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\mathbf{x} &= ((\lambda+\mu)x_1, (\lambda+\mu)x_2, \ldots, (\lambda+\mu)x_n) \\
&= (\lambda x_1+\mu x_1, \lambda x_2+\mu x_2, \ldots, \lambda x_n+\mu x_n) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n) \\
&= \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x} \text{ (Επιμέριση)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(\lambda\mu)\mathbf{x} &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, \ldots, (\lambda\mu)x_n) \\ &= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \ldots, \lambda(\mu x_n)) \\ &= \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n) \\ &= \lambda(\mu\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$1\mathbf{x} = (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$$

Άρα, η δομή $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

### Παράδειγμα 3: Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{M}_2$

Στο σύνολο $\mathcal{M}_2$ όλων των $2 \times 2$ μητρών με στοιχεία στο $\mathbb{R}$, δηλαδή της μορφής $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, ορίζονται οι παρακάτω δύο πράξεις

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{bmatrix}.$$

Η δομή $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με μηδενικό στοιχείο την μήτρα $O_2$.

# Διανυσματικοί χώροι

Πράγματι, για την πράξη $+$ του $\mathcal{M}_2$ είναι

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2\\ \gamma_1+\gamma_2 & \delta_1+\delta_2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\alpha_2+\alpha_1 & \beta_2+\beta_1\\ \gamma_2+\gamma_1 & \delta_2+\delta_1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

οπότε η πράξη είναι αντιμεταθετική.

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{bmatrix} \right) \\
&\quad = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 & \beta_2 + \beta_3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 & \delta_2 + \delta_3 \end{bmatrix} \\
&\quad = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 & \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \end{bmatrix} \\
&\quad = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{bmatrix} \\
&\quad = \left( \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

οπότε η πράξη $+$ είναι προσεταιριστική.

Επιπλέον,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

οπότε η μήτρα $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{M}_2$ ως προς την πράξη $+$.

Επιπρόσθετα, επειδή

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \alpha' & \beta + \beta' \\ \gamma + \gamma' & \delta + \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = -\alpha \\ \beta' = -\beta \\ \gamma' = -\gamma \\ \delta' = -\delta \end{cases}$$

έπεται ότι κάθε $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ έχει αντίθετο στοιχείο το $\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{bmatrix}$.

# Διανυσματικοί χώροι

Επιπλέον, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι

$$\lambda\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix}\right)=\lambda\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2\\ \gamma_1+\gamma_2 & \delta_1+\delta_2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\lambda(\alpha_1+\alpha_2) & \lambda(\beta_1+\beta_2)\\ \lambda(\gamma_1+\gamma_2) & \lambda(\delta_1+\delta_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2 & \lambda\beta_1+\lambda\beta_2\\ \lambda\gamma_1+\lambda\gamma_2 & \lambda\delta_1+\lambda\delta_2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1\\ \lambda\gamma_1 & \lambda\delta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda\alpha_2 & \lambda\beta_2\\ \lambda\gamma_2 & \lambda\delta_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix},$$

$$(\lambda+\mu)\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda+\mu)\alpha & (\lambda+\mu)\beta\\ (\lambda+\mu)\gamma & (\lambda+\mu)\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\alpha+\mu\alpha & \lambda\beta+\mu\beta\\ \lambda\gamma+\mu\gamma & \lambda\delta+\mu\delta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\lambda\alpha & \lambda\beta\\ \lambda\gamma & \lambda\delta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mu\alpha & \mu\beta\\ \mu\gamma & \mu\delta\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix},$$

# Διανυσματικοί χώροι

$$\lambda\left(\mu\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\right)=\lambda\begin{bmatrix}\mu\alpha & \mu\beta\\ \mu\gamma & \mu\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda(\mu\alpha) & \lambda(\mu\beta)\\ \lambda(\mu\gamma) & \lambda(\mu\delta)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}(\lambda\mu)\alpha & (\lambda\mu)\beta\\ (\lambda\mu)\gamma & (\lambda\mu)\delta\end{bmatrix}=(\lambda\mu)\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

και

$$1\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\alpha & 1\beta\\ 1\gamma & 1\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}.$$

Άρα, η δομή $(\mathcal{M}_2,+,\cdot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

# Διανυσματικοί χώροι

**Παράδειγμα 4: Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{M}_{m\times n}$**

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι το σύνολο όλων πραγματικών των $m \times n$ μητρών, $n, m \in \mathbb{N}^*$, εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού μητρών, είναι ένας διανυσματικός χώρος.

## Παράδειγμα 5: Ο διανυσματικός χώρος $P_n$

Έστω $P_n$ το σύνολο των πολυωνύμων, με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού μικρότερου ή ίσου με $n$. Το σύνολο $P_n$, εφοδιασμένο με τις ακόλουθες πράξεις ορίζει πραγματικό διανυσματικό χώρο: Έστω $p(x), q(x) \in P_n$, με

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

και

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Τότε, οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$(p+q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

$$(\lambda p)(x) = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0, \lambda \in \mathbb{R}$$

# Διανυσματικοί χώροι

**Παράδειγμα 6: Ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων**

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι διανυσμάτικός χώρος.
Το ίδιο ισχύει και για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τις κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις, τις συναρτήσεις εκθετικής τάξης $a$, τις δυναμοσειρές, τις περιοδικές συναρτήσεις, τις φραγμένες συναρτήσεις, κ.ο.κ.

## Παράδειγμα 7: Ο διανυσματικός χώρος των λύσεων ενός ομογενούς συστήματος

Κάθε ομογενές $m \times n$ γραμμικό σύστημα $AX = \mathbb{O}_{m\times 1}$ έχει τουλάχιστον μια λύση (την μηδενική).
Το σύνολο των λύσεων του συστήματος, αποδεικνύεται, ότι είναι διανυσματικός χώρος.
Αν $X_1, X_2$ είναι δύο λύσεις, τότε $X_1 + X_2$ είναι επίσης λύση:

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}.$$

και $\lambda X_1$ είναι επίσης λύση:

$$A(\lambda X_1) = \lambda AX_1 = \lambda\mathbb{O} = \mathbb{O}$$

**Παράδειγμα 8: Ο διανυσματικός χώρος των διανυσμάτων $\mod k$**

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο όλων των $n$-άδων με φυσικούς αριθμούς από το 1 έως το $k-1$ εφοδιασμένο με τις ακόλουθες πράξεις ορίζει (μη πραγματικό) διανυσματικό χώρο: Έστω

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

όπου $x_i, y_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ με

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = ((x_1 + y_1) \mod k, (x_2 + y_2) \mod k, \ldots, (x_n + y_n) \mod k)$$

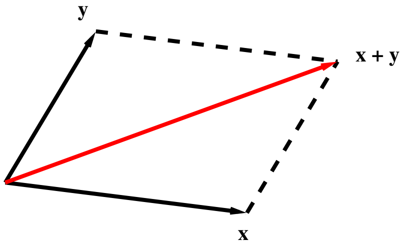
$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1 \mod k, \lambda x_2 \mod k, \ldots, \lambda x_n \mod k), \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{Z}$$

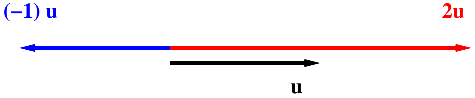
# Ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Τότε, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0} \in V$.
2. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, όπου $0 \in \mathbb{R}$
3. Αν $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε $\lambda = 0$ ή $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
4. $\lambda(-\mathbf{x}) = -(\lambda\mathbf{x})$.
5. $(-\lambda)\mathbf{x} = -(\lambda\mathbf{x})$.
6. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.
7. $(-\lambda)(-\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.
8. Αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε $\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$. (Νόμος διαγραφής για τους τελεστές.)
9. Αν $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, τότε $\lambda\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \mu$. (Νόμος διαγραφής για τα διανύσματα.)
10. $\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$.
11. $(\lambda - \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}$.

# Γεωμετρική αναπαράσταση πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού:



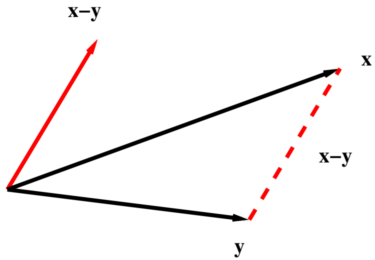




**Παράδειγμα** Αν $\mathbf{x} = (1, -3, 5)$ και $\mathbf{y} = (7, 3, 2)$ τότε $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (8, 0, 7)$ και $2 \cdot \mathbf{x} = (2, -6, 10)$.

# Γεωμετρική αναπαράσταση διαφοράς διανυσμάτων

Η **διαφορά** $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ δύο διανυσμάτων ορίζεται ως το άθροισμα του $\mathbf{x}+(-1)\mathbf{y}$.

**Παράδειγμα** Έστω $\mathbf{x}=(1,-3,5)$ και $\mathbf{z}=(8,0,7)$ να βρεθεί διάνυσμα $\mathbf{y}$ ώστε $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{z}$.
Το ζητούμενο $\mathbf{y}$ ισούται με την διαφορά
$\mathbf{y}=\mathbf{z}-\mathbf{x}=(8,0,7)-(1,-3,5)=(7,3,2)$.
Η γεωμετρική αναπαράσταση της διαφοράς $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ είναι το διάνυσμα με αρχή το τέλος του $\mathbf{y}$ και τέλος το τέλος του $\mathbf{x}$.



# Γραμμικός συνδυασμός

Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$.
Κάθε στοιχείο $\mathbf{x} \in V$ που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.
Οι τελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ονομάζονται **συντελεστές** του γραμμικού συνδυασμού.

Προφανώς, κάθε γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι στοιχείο του $V$.

# Γραμμικός συνδυασμός

**Παράδειγμα**

Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.
Να εξετασθεί αν το διάνυσμα $\mathbf{x} = (10, -5, 5) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\mathbf{x}_1 = (3, -1, 2), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0, 4), \quad \mathbf{x}_3 = (-1, 1, 1).$$

# Γραμμικός συνδυασμός

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, με $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$. Είναι

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 \\
\Leftrightarrow & (10, -5, 5) = \lambda_1 (3, -1, 2) + \lambda_2 (1, 0, 4) + \lambda_3 (-1, 1, 1) \\
\Leftrightarrow & (10, -5, 5) = (3\lambda_1, -\lambda_1, 2\lambda_1) + (\lambda_2, 0, 4\lambda_2) + (-\lambda_3, \lambda_3, \lambda_3) \\
\Leftrightarrow & (10, -5, 5) = (3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3) \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 10 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = -5 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, προκύπτει ότι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = -3$, οπότε

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_3$$

και επομένως το $\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

# Γραμμική θήκη συνόλου

Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος και έστω $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $V$.
Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ονομάζεται **γραμμική θήκη** (ή απλά **θήκη**) του $S$ και συμβολίζεται με $< S >$ ή $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$, δηλαδή

$$< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >= \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n : \lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $U =< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$, τότε λέμε ότι το σύνολο $U$ **παράγεται** ή **γεννάται** από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ (ή από το σύνολο $S$). Μια άλλη ισοδύναμη έκφραση είναι ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ (ή το σύνολο $S$) **παράγουν** ή **γεννούν** το σύνολο $U$.

# Γραμμική θήκη συνόλου

**Παράδειγμα: Γραμμική θήκη στον $\mathbb{R}^n$**

Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ αν

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0), \qquad i \in [n],$$

τότε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

Πράγματι αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, \dots, 0, 1)\\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Άρα, ισχύει ότι $\mathbb{R}^n = < \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n >$.

# Γραμμική ανεξαρτησία

Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος.
Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** όταν κάποιο από αυτά, για παράδειγμα το $\mathbf{x}_1$, είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\mathbf{x}_1 = \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n.$$

Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή κανένα από αυτά δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα**.

Ισοδύναμα, τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν και μόνο αν, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

# Γραμμική ανεξαρτησία

## Παράδειγμα 1

Τα διανύσματα

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0), \qquad i \in [n],$$

του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πράγματι, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \lambda_1(1, 0, 0, \dots, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + \lambda_n(0, \dots, 0, 1) = (0, 0, \dots, 0) \\
&\Leftrightarrow (\lambda_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, \lambda_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0) \\
&\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0) \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.
\end{aligned}$$

# Γραμμική ανεξαρτησία

## Παράδειγμα 2

Τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (-5, 2, 2), \quad \mathbf{x}_3 = (-1, 0, 2)$$

του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Πράγματι, ισχύει ότι

$$-2\mathbf{x}_1 - 1\mathbf{x}_2 + 1\mathbf{x}_3 = 0$$

οπότε το $\mathbf{x}_1$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

# Γραμμική ανεξαρτησία

## Παράδειγμα 3

Τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 3, 1), \quad \mathbf{x}_3 = (-1, 0, 2)$$

του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πράγματι, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\lambda_1(2, -1, 0) + \lambda_2(1, 3, 1) + \lambda_3(-1, 0, 2) = (0, 0, 0) \\
\Leftrightarrow &(2\lambda_1, -\lambda_1, 0) + (\lambda_2, 3\lambda_2, \lambda_2) + (-\lambda_3, 0, 2\lambda_3) = (0, 0, 0) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

## Παράδειγμα 4

Τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = (2, 4, -1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 1, 1) \quad \mathbf{x}_3 = (6, 12, -3)$$

του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Πράγματι, ισχύει ότι

$$-3\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + 1\mathbf{x}_3 = 0$$

οπότε το $\mathbf{x}_1$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

# Ιδιότητες γραμμικής ανεξαρτησίας

**Παρατηρήσεις**:

- Αν κάποιο από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι ίσο με $\mathbf{0}$, τότε αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Πράγματι, αν για παράδειγμα $\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, τότε είναι

$$0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \cdots + 1\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

και επειδή υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής (στην περίπτωση αυτή, το 1) κάποιου από τα $\mathbf{x}_i$ (στην περίπτωση αυτή, του $\mathbf{x}_n$), προκύπτει ότι τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

# Ιδιότητες γραμμικής ανεξαρτησίας

- Αν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε οποιαδήποτε $m$ (με $m \leq n$) από αυτά θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m + 0\mathbf{x}_{m+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0.
\end{aligned}$$

# Ιδιότητες γραμμικής ανεξαρτησίας

- Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από αυτά ανήκει στην γραμμική θήκη που παράγουν τα υπόλοιπα.

Πράγματι, αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, θα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, όχι όλοι 0, ώστε

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Αν για παράδειγμα $\lambda_i \neq 0$, όπου $i \in [n]$, τότε ισχύουν οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$\begin{gathered}
\lambda_i \mathbf{x}_i = -\lambda_1 \mathbf{x}_1 - \lambda_2 \mathbf{x}_2 - \cdots - \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} - \lambda_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} - \cdots - \lambda_n \mathbf{x}_n \\
\mathbf{x}_i = (-\lambda_i^{-1} \lambda_1) \mathbf{x}_1 + (-\lambda_i^{-1} \lambda_2) \mathbf{x}_2 + \cdots (-\lambda_i^{-1} \lambda_{i-1}) \mathbf{x}_{i-1} \\
+ (-\lambda_i^{-1} \lambda_{i+1}) \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + (-\lambda_i^{-1} \lambda_n) \mathbf{x}_n
\end{gathered}$$

Οπότε $\mathbf{x}_i \in < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n >$.

# Ιδιότητες γραμμικής ανεξαρτησίας

Αντίστροφα, αν

$$\mathbf{x}_i \in < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n >,$$

για κάποιο $i \in [n]$, τότε υπάρχουν

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

με

$$\mathbf{x}_i = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n,$$

οπότε

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} + (-1)\mathbf{x}_i + \lambda_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Από την προηγούμενη ισότητα, αφού οι συντελεστές των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ δεν είναι όλοι ίσοι με $\mathbf{0}$, προκύπτει ότι τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

# Ιδιότητες γραμμικής ανεξαρτησίας

Ποια είναι η ‘‘σημασία’’ της γραμμικής ανεξαρτησίας;

**Πρόταση 1 (Βασική ιδιότητα γραμμικής ανεξαρτησίας)**

*Έστω* $(V, +, \cdot)$ *πραγματικός διανυσματικός χώρος και* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n \in V$.

- *Αν τα διανύσματα* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και*

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n,$$

  *τότε τα* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *είναι μοναδικά.*

- *Ενώ, αν τα διανύσματα* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *είναι γραμμικώς εξαρτημένα και*

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n,$$

  *τότε τα* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ***δεν*** *είναι μοναδικά.*

# Ιδιότητες γραμμικής ανεξαρτησίας

Πράγματι,

- Έστω ότι
$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$
και
$$\mathbf{v} = \kappa_1 \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n \mathbf{v}_n$$
Τότε $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \kappa_1 \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n \mathbf{v}_n$
ή, ισοδύναμα,
$$(\lambda_1 - \kappa_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \kappa_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_n - \kappa_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$
Επειδή τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι
$$\lambda_1 - \kappa_1 = \lambda_2 - \kappa_2 = \cdots = \lambda_n - \kappa_n = 0.$$
Άρα, $\lambda_1 = \kappa_1, \lambda_2 = \kappa_2, \ldots, \lambda_n = \kappa_n$, δηλαδή η έκφραση του $\mathbf{v}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι μοναδική.

# Ιδιότητες γραμμικής ανεξαρτησίας

- Έστω ότι
$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n.$$
Αφού τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$, όχι όλα 0, ώστε
$$\kappa_1\mathbf{v}_1 + \kappa_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$
Επομένως, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι
$$a(\kappa_1\mathbf{v}_1 + \kappa_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}.$$
Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι
$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{0} \\ &= \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n + a(\kappa_1\mathbf{v}_1 + \kappa_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n\mathbf{v}_n) \\ &= (\lambda_1 + a\kappa_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 + a\kappa_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_n + a\kappa_n)\mathbf{v}_n, \ \forall a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
Δηλαδή, το $\mathbf{v}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ με συντελεστές κάθε $n$-άδα της μορφής $(\lambda_1 + a\kappa_1$, $\lambda_2 + a\kappa_2$, ..., $\lambda_n + a\kappa_n)$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
Συμπέρασμα: Υπάρχουν άπειροι τρόποι να εκφράσουμε το $\mathbf{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

## Άσκηση 1

*Να εξεταστεί αν τα διανύσματα* $\mathbf{x}_1 = (0,1,-3)$, $\mathbf{x}_2 = (-2,1,2)$, $\mathbf{x}_3 = (4,1,0)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\lambda_1(0,1,-3) + \lambda_2(-2,1,2) + \lambda_3(4,1,0) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &(0,\lambda_1,-3\lambda_1) + (-2\lambda_2,\lambda_2,2\lambda_2) + (4\lambda_3,\lambda_3,0) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &(-2\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Άρα τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

## Άσκηση 2

*Να εξεταστεί αν τα διανύσματα* $\mathbf{x}_1 = (2, 1, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{x}_3 = (4, 7, 3)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\lambda_1(2, 1, -1) + \lambda_2(-1, 2, 3) + \lambda_3(4, 7, 3) = (0, 0, 0) \\
\Leftrightarrow &(2\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1) + (-\lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2) + (4\lambda_3, 7\lambda_3, 3\lambda_3) = (0, 0, 0) \\
\Leftrightarrow &(2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3, -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases}
$$

Αν τεθεί, $\lambda_3 = 1$, τότε $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, οπότε ισχύει ότι

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

Επειδή οι συντελεστές των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ δεν είναι όλοι 0, προκύπτει ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

## Άσκηση 3

*Να εξετασθεί αν τα διανύσματα* $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,2)$ *και* $\mathbf{v}_3 = (4,1,2)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(4,1,2) = (0,0,0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\lambda_1 + 4\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) = (0,0,0),$$

απ᾽ όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = -4\lambda_3$ στη δεύτερη εξίσωση, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = -4\lambda_3$ και $\lambda_2 = 7\lambda_3$ στην τρίτη εξίσωση, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, επομένως τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

## Άσκηση 4

*Να εξετασθεί αν τα διανύσματα* $\mathbf{w}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{w}_2 = (0,1,2)$ *και* $\mathbf{w}_3 = (5,3,1)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \lambda_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(5,3,1) = (0,0,0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\lambda_1 + 5\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0),$$

απ᾽ όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = -5\lambda_3$ στη δεύτερη εξίσωση, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = -5\lambda_3$ και $\lambda_2 = 7\lambda_3$ στην τρίτη εξίσωση, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα είναι αόριστο και οι λύσεις του είναι όλες οι τριάδες $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-5\lambda_3, 7\lambda_3, \lambda_3)$, όπου $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.
Επομένως, αν για παράδειγμα $\lambda_3 = 1$, έχουμε ότι

$$-5\mathbf{w}_1 + 7\mathbf{w}_2 + 1\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

επομένως, τα διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

## Άσκηση 5

*Να βρεθεί το* $a \in \mathbb{R}$, *ώστε το* $\mathbf{x} = (-1, 0, 5, a)$ *να είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\mathbf{x}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, -1, 3)$, $\mathbf{x}_3 = (0, -1, 1, 1)$.

Είναι

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 \\
\Leftrightarrow &(-1, 0, 5, a) = \lambda_1(1, 2, -1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1, 3) + \lambda_3(0, -1, 1, 1) \\
\Leftrightarrow &(-1, 0, 5, a) = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_2 + \lambda_3) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = a \end{cases}
\end{aligned}
$$

Επιλύοντας το σύστημα των τριών πρώτων από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει ότι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 4$. Οπότε είναι $a = 3\lambda_2 + \lambda_3 = -5$.

## 2η ΔΙΑΛΕΞΗ
## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

- **Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου**

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Έστω $(V, +, \cdot)$ πραγματικός διανυσματικός χώρος.
Ένα υποσύνολο $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ του $V$ ονομάζεται **βάση** του $V$ αν και μόνο αν

- το $S$ παράγει τον $V$, δηλαδή $V = < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$, και
- τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Κατά συνέπεια, κάθε διάνυσμα του $V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

**Παράδειγμα 1: Βάση του $\mathbb{R}^n$**

Το σύνολο $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ με

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0), \qquad i \in [n],$$

είναι μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.
Η βάση αυτή ονομάζεται **κανονική βάση** του $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

**Παράδειγμα 2: Βάση του $P_n$**

Το σύνολο $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ είναι μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(P_n, +, \cdot)$ όλων των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του $n$ με πραγματικούς συντελεστές.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

## Παράδειγμα 3: Βάση του $\mathcal{M}_2$

Το σύνολο

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$, όλων των $2 \times 2$ μητρών με πραγματικά στοιχεία.

**Παρατηρήσεις**:

- Δεχόμαστε ότι ο μηδενικός χώρος, δηλαδή ο χώρος με φορέα το $V = \{\mathbf{0}\}$ έχει ως βάση το κενό σύνολο.
- Ένας διανυσματικός χώρος που έχει μια βάση $S$, θα έχει και άλλες βάσεις.
  Για παράδειγμα, αν $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ και $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, τότε το σύνολο $S_1 = \{\lambda\mathbf{x}_1, \lambda\mathbf{x}_2, \ldots, \lambda\mathbf{x}_n\}$ θα είναι μια άλλη βάση του διανυσματικού χώρου.
- Αν $(V, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος και $S = \{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n\}$ μια βάση του $V$, τότε λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ κάθε διάνυσμα $x \in V$ γράφεται **κατά μοναδικό τρόπο** ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_n$.
  Κατόπιν τούτων, αν $\mathbf{x} \in V$ με $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n$, οι τελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές του x ως προς τη βάση** $S$.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

**Πρόταση 2 (Συρρίκνωση σε βάση)**

*Έστω $(V, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Αν για τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in V$ ισχύει ότι*

$$V = < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m >,$$

*τότε υπάρχει μια βάση του χώρου αυτού, η οποία αποτελείται από κάποια από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.*

Ένας διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$ ονομάζεται **πεπερασμένης διάστασης**, όταν παράγεται από πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων.

Προφανώς, από την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει ότι κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης έχει μια τουλάχιστον βάση.

Επιπλέον, ισχύουν οι επόμενες προτάσεις.

**Πρόταση 3 (Επέκταση σε βάση)**

*Αν $(V, +, \cdot)$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε υπάρχει βάση του $V$ που περιέχει τα διανύσματα αυτά.*

**Πρόταση 4 (Αριθμός γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων)**

*Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος, ο οποίος έχει μια βάση με $n$ στοιχεία. Αν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε $m \leq n$.*

Από την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει ότι

- Δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Πράγματι, αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ και $S_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ δύο βάσεις του διανυσματικού χώρου, τότε θεωρώντας το $S$ ως βάση (με $n$ στοιχεία) και επειδή τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ως στοιχεία της βάσης $S_1$), προκύπτει ότι $m \leq n$. Από την άλλη, θεωρώντας το $S_1$ ως βάση (με $m$ στοιχεία) και επειδή τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ως στοιχεία της βάσης $S$), προκύπτει ότι $n \leq m$. Οπότε τελικά $m = n$.

Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου $(V, +, \cdot)$ ονομάζεται **διάσταση** του διανυσματικού χώρου και συμβολίζεται με $\dim V$.

Προφανώς είναι $\dim V = 0$ αν και μόνο αν $V = \{\mathbf{0}\}$ (μηδενικός διανυσματικός χώρος).

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

**Παράδειγμα 1: Βάση και διάσταση του $\mathbb{R}^n$**

Για τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ισχύει ότι $\dim \mathbb{R}^n = n$, αφού η κανονική του βάση έχει $n$ στοιχεία.

**Παράδειγμα 2: Βάση και διάσταση του $P_n$**

Για τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(P_n, +, \cdot)$, όλων των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $n$, ισχύει ότι $\dim P_n = n + 1$, αφού το σύνολο

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

είναι μια βάση του.

**Παράδειγμα 3: Βάση και διάσταση του $\mathcal{M}_2$**

Για τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$, όλων των $2 \times 2$ μητρών, ισχύει ότι $\dim \mathcal{M}_2 = 4$, αφού το σύνολο

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Από τις προηγούμενες προτάσεις, προκύπτουν οι επόμενες παρατηρήσεις:

### Διάσταση, Γραμμική ανεξαρτησία και Παραγωγή

Για έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο $(V, +, \cdot)$, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

i) $\dim V = n$.

ii) Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $V$ είναι $n$.

iii) Το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων που παράγουν το $V$ είναι $n$.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

**Πρόταση 5 (Κατασκευή βάσης διανυσματικού χώρου διάστασης $n$)**

*Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος, με* $\dim V = n$.

- *Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, τότε το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του $(V, +, \cdot)$.*
- *Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ παράγουν τον $(V, +, \cdot)$, τότε το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του $(V, +, \cdot)$.*

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

**Εφαρμογή 1**

Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{x} = (2, 1, -3), \quad \mathbf{y} = (3, 2, -3), \quad \mathbf{z} = (1, -1, 1)$$

αποτελούν βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, αρκεί να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{z} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow&\lambda_1(2,1,-3) + \lambda_2(3,2,-3) + \lambda_3(1,-1,1) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow&(2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow&\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow&\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν βάση του χώρου.

**Εφαρμογή 2**

Να βρεθεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ που περιέχει τα διανύσματα

$$\mathbf{x} = (-1, 1, 0, 0), \qquad \mathbf{y} = (0, 0, 2, 1).$$

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Επειδή $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, αρκεί να βρεθούν δύο διανύσματα $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$, τέτοια ώστε το σύνολο $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}\}$ να είναι βάση του χώρου. Τα διανύσματα $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ θα αναζητηθούν μεταξύ των στοιχείων της κανονικής βάσης.
Αρχικά, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1$.
Είναι

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\
\Rightarrow &\lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,1) + \lambda_3(1,0,0,0) = (0,0,0,0) \\
\Rightarrow &(-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0,0) \\
\Rightarrow &\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Άρα, τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Στη συνέχεια, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Είναι

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_4\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \\
\Rightarrow &\lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(0,0,2,1)+\lambda_3(1,0,0,0)+\lambda_4(0,1,0,0)=(0,0,0,0) \\
\Rightarrow &(-\lambda_1+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_4, 2\lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0,0) \\
\Rightarrow &\begin{cases} -\lambda_1+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_1, \lambda_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες μη μηδενικές λύσεις, προκύπτει ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Κατόπιν τούτου, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$. Είναι

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_4\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}\\
\Rightarrow &\lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(0,0,2,1)+\lambda_3(1,0,0,0)+\lambda_4(0,0,1,0)=(0,0,0,0)\\
\Rightarrow &(-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_2 + \lambda_4, \lambda_2) = (0,0,0,0)\\
\Rightarrow &\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του χώρου.

## 3η ΔΙΑΛΕΞΗ
## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

- **Υπόχωροι**
- **Πράξεις γραμμών και υπόχωροι**

# Διανυσματικοί υπόχωροι

**(Η έννοια της κλειστότητας στους διανυσματικούς χώρους)**

Αν $(V, +, \cdot)$ είναι ένας (πραγματικός) διανυσματικός χώρος και $W$ ένα μη κενό υποσύνολο του $V$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W \text{ για κάθε } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$$

και

$$\lambda \cdot \mathbf{x} \in W \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

τότε η δομή $(W, +, \cdot)$ ονομάζεται **διανυσματικός** (ή **γραμμικός**) **υπόχωρος** (ή απλά **υπόχωρος**) του $(V, +, \cdot)$.

# Διανυσματικοί υπόχωροι

- Κάθε διανυσματικός χώρος μπορεί να θεωρηθεί ως υπόχωρος του εαυτού του.
- Η δομή $(\{\mathbf{0}\}, +, \cdot)$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ και ονομάζεται **μηδενικός υπόχωρος**.
- Κάθε φορέας υποχώρου $(W, +, \cdot)$ περιέχει το $\mathbf{0}$, αφού για $\mathbf{x} \in W$ είναι $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} \in W$.
- Στα επόμενα, για λόγους απλότητας, θα ταυτίζουμε τον φορέα ενός υπόχωρου με τον υπόχωρο, δηλαδή θα γράφουμε $W$ υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ αντί $W$ φορέας υποχώρου του $(V, +, \cdot)$.

# Διανυσματικοί υπόχωροι

### Πρόταση 6

*Έστω* $(V,+,\cdot)$ *διανυσματικός χώρος επί του και* $W$ *ένα μη κενό υποσύνολο του* $V$*. Τότε, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *το* $W$ *είναι υπόχωρος του* $(V,+,\cdot)$.
2. $\lambda\mathbf{x}\in W$, *και* $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in W$, *για κάθε* $\lambda\in\mathbb{R}$ *και* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$.
3. $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\in W$, *για κάθε* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *και* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$.
4. $\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}\in W$, *για κάθε* $\lambda\in\mathbb{R}$ *και* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$.

### Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και τα σύνολα

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5\}$$

και

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0\}.$$

Θα μελετήσουμε ποια από τα παραπάνω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

# Διανυσματικοί υπόχωροι

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5\}$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το μηδενικό στοιχείο $(0, 0, 0)$ του $(\mathbb{R}^3, +)$ δεν ανήκει στο $W_1$, αφού $2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \neq 5$, οπότε το $W_1$ δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

# Διανυσματικοί υπόχωροι

Αντίθετα, $(0,0,0) \in W_2$, οπότε $W_2 \neq \emptyset$. Επιπλέον, αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_2$, με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, τότε

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \qquad \text{και} \qquad 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω δύο ισότητες με $\lambda$ και $\mu$ αντίστοιχα και προσθέτοντας τις ισότητες που προκύπτουν, έπεται ότι

$$\lambda(3x_1 + 2x_2 - 4x_3) + \mu(3y_1 + 2y_2 - 4y_3) = 0,$$

οπότε

$$3(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) - 4(\lambda x_3 + \mu y_3) = 0$$

και επομένως,

$$\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \in W_2,$$

άρα, βάσει της Πρότασης 6, το $W_2$ είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

### Παράδειγμα 2

Έστω $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των $2 \times 2$ μητρών με πραγματικά στοιχεία και

$$W_1 = \{\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ 2\gamma & 1 \end{bmatrix}\}, \;\; W_2 = \{\begin{bmatrix} 4\alpha & 3\beta \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}\}, \;\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Θα μελετήσουμε ποιά από τα παραπάνω σύνολα είναι υπόχωροι του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$.

Παρατηρούμε ότι το μηδενικό στοιχείο $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν ανήκει στο $W_1$, οπότε το $W_1$ δεν είναι υπόχωρος του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$.

Αντίθετα, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_2$, οπότε $W_2 \neq \emptyset$.

Επιπλέον, αν $\begin{bmatrix} 4\alpha_1 & 3\beta_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\alpha_2 & 3\beta_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \in W_2$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , τότε είναι

$$\begin{aligned} \lambda \begin{bmatrix} 4\alpha_1 & 3\beta_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 4\alpha_2 & 3\beta_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4\lambda\alpha_1 & 3\lambda\beta_1 \\ -\lambda\gamma_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\mu\alpha_2 & 3\mu\beta_2 \\ -\mu\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2) & 3(\lambda\beta_1 + \mu\beta_2) \\ -(\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) & 0 \end{bmatrix} \in W_2. \end{aligned}$$

Άρα, βάσει της Πρότασης 6, το $W_2$ είναι υπόχωρος του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$.

# Γραμμική θήκη συνόλου

**Βασικές ιδιότητες**

- Το σύνολο $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$, αφού για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n,$$
$$\mathbf{y} = \mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_n \mathbf{x}_n,$$

  το στοιχείο

$$\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = (\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\mathbf{x}_1 + (\lambda\lambda_2 + \mu\mu_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (\lambda\lambda_n + \mu\mu_n)\mathbf{x}_n$$

  ανήκει στο $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$.
- Επιπλέον $\mathbf{x}_i \in < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$, για κάθε $i \in [n]$, αφού

$$\mathbf{x}_i = 0\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\mathbf{x}_{i-1} + 1\mathbf{x}_i + 0\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n.$$

- Τέλος, αν $W$ υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$, με $\mathbf{x}_i \in W$, για κάθε $i \in [n]$, τότε $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n > \subseteq W$, αφού κάθε γραμμικός συνδυασμός από στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου (του $W$) είναι στοιχείο του.

Από τα προηγούμενα προκύπτει η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 7**

*Η γραμμική θήκη* $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$ *είναι ο μικρότερος διανυσματικός χώρος που περιέχει τα* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

**Παρατήρηση**: Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι αν τα διανύσματα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, τότε ισχύει ότι

$$< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n > = < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n > .$$

## Άσκηση 6

*Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του* $\mathbf{R}^2$ *είναι υπόχωροι του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*:*

1. $W_1 = \{(0,0)\}$.
2. $W_2 = \{(1,1)\}$.
3. $W_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.
4. $W_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 1\}$.
5. $W_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.
6. $W_6 = \{\lambda(1,2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
7. $W_7 = \{a(1,2) + b(2,1) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
8. $W_8 = \{a(1,2) + (2,1) : a \in \mathbb{R}\}$
9. $W_9 = \{a(1,2) + (2,4) : a \in \mathbb{R}\}$
10. $W_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 10\}$.

Σε όλα τα παρακάτω, είναι χρήσιμη η παρατήρηση ότι το μηδενικό διάνυσμα **πρέπει** να ανήκει σε κάθε κάθε υπόχωρο ενός διανυσματικού χώρου. Εδώ το μηδενικό διάνυσμα είναι το ζεύγος $(0,0)$.

1. Το $W_1$ είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.
2. Επειδή $(0,0) \notin W_2$ έπεται ότι $W_2$ δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.
3. Προφανώς, $W_3 \neq \emptyset$ αφού $(0,0) \in W_3$ (διότι $0 = 2 \cdot 0$).
   Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_3$ με $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$. Τότε ισχύει $y_1 = 2x_1$ και $y_2 = 2x_2$.
   Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2).$$

   Για να είναι $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in W_3$ πρέπει $ay_1 + by_2 = 2(ax_1 + bx_2)$.
   Πράγματι, από τις σχέσεις $y_1 = 2x_1$ και $y_2 = 2x_2$ προκύπτει ότι

$$ay_1 = 2ax_1 \text{ και } by_2 = 2bx_2.$$

   Προσθέτωντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$ay_1 + by_2 = 2(ax_1 + bx_2).$$

   Άρα, $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in W_3$, δηλαδή το $W_3$ είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

4. Επειδή $(0,0) \notin W_4$, αφού $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$, έπεται ότι $W_4$ δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2), +, \cdot)$.
5. Προφανώς, $W_5 \neq \emptyset$, αφού $(0,0) \in W_5$. Όμως το $W_5$ δεν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$. Πράγματι, ενώ $(1,1) \in W_5$ ισχύει $(-1) \cdot (1,1) = (-1,-1) \notin W_5$. Άρα το $W_5$ δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.
6. Προφανώς, $W_6 \neq \emptyset$, αφού $(1,2) \in W_6$.
   Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_6$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{v}_1 = \lambda_1(1,2)$ και $\mathbf{v}_2 = \lambda_2(1,2)$.
   Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = a\lambda_1(1,2) + b\lambda_2(1,2) = (a\lambda_1 + b\lambda_2)(1,2) \in W_6.$$

   Άρα, το $W_6$ είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

7. Προφανώς, $W_7 \neq \emptyset$, αφού $(1,2) \in W_7$.
Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_7$. Τότε υπάρχουν $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$ ώστε
$\mathbf{v}_1 = a_1(1,2) + b_1(2,1)$, και $\mathbf{v}_2 = a_2(1,2) + b_2(2,1)$.
Για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\kappa\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 &= \kappa(a_1(1,2) + b_1(2,1)) \\
&= \lambda(a_2(1,2) + b_2(2,1)) \\
&= (\kappa a_1 + \lambda a_2)(1,2) + (\kappa b_1 + \lambda b_2)(2,1) \in W_7.
\end{aligned}$$

Άρα, το $W_7$ είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

8. Ισχύει ότι $(0,0) \notin W_8$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$a(1,2) + (2,1) = (0,0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(a+2, 2a+1) = (0,0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
a + 2 &= 0 \\
2a + 1 &= 0,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο. Άρα το $W_8$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

9. Ισχύει ότι $a(1,2)+(2,4)=a(1,2)+2(1,2)=(a+2)(1,2)$. Επομένως, εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (6), εύκολα προκύπτει ότι το $W_9$ είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.
10. Το σύνολο $W_{10}$ δεν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$. Προφανώς, $(1,1)\in W_{10}$ αφού $|1|+|1|\leq 10$, αλλά $6\cdot(1,1)=(6,6)\notin W_{10}$, αφού $|6|+|6|>10$. Άρα, το $W_{10}$ δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbf{R}^2,+,\cdot)$.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι οι μόνοι γνήσιοι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ είναι η αρχή των αξόνων, καθώς και όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

## Άσκηση 7

*Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*:*

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Το μηδενικό στοιχείο $(0,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$ ανήκει στα $W_1, W_2$, αφού

$$0^2 + 0^2 + 0^2 \leq 1 \quad \text{και} \quad 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0,$$

άρα τα σύνολα $W_1, W_2$ είναι μη κενά.
Παρατηρούμε ότι $(0,0,1) \in W_1$, αφού $0^2 + 0^2 + 1^2 \leq 1$, ενώ $2(0,0,1) = (0,0,2) \notin W_1$, διότι $0^2 + 0^2 + 2^2 = 4 > 1$. Άρα, το σύνολο $W_1$ δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$ και επομένως δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^3$ και $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in W_2$. Τότε, είναι

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{και} \quad 4y_1 - 2y_2 + y_3 = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο αυτές ισότητες με $\lambda$ και $\mu$ αντίστοιχα, και προσθέτοντας τις ισότητες που προκύπτουν, έπεται ότι

$$\lambda(4x_1 - 2x_2 + x_3) + \mu(4y_1 - 2y_2 + y_3) = 0,$$

οπότε

$$4(\lambda x_1 + \mu y_1) - 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) = 0,$$

και επομένως

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \in W_2.$$

Άρα, βάσει της Πρότασης 6, το $W_2$ είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

## Άσκηση 8

*Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος* $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$, *όπου* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το* $\mathbb{R}$ *στο* $\mathbb{R}$ *και οι πράξεις* $+, \cdot$ *ορίζονται ως εξής:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{και} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

*για κάθε* $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του* $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$:

$$W_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ παραγωγίσιμη}, \}$$
$$W_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ περιττή}\},$$
$$W_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(1) + 2f(2) + \cdots + 9f(9) = 10\}.$$

Επειδή, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ισχύει

$$\begin{aligned} & f, g \text{ παραγωγίσιμες (αντ. περιττές)} \\ \Rightarrow\ & \lambda f + \mu g \text{ παραγωγίσιμη (αντ. περιττή)}, \end{aligned}$$

έπεται ότι τα σύνολα $W_1, W_2$ είναι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$.
Αντίθετα, το $W_3$ δεν είναι υπόχωρος, διότι η μηδενική συνάρτηση δεν ανήκει σε αυτό.

# Πράξεις γραμμών

Έστω $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_m$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και $W =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m >$ ο χώρος όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_m$.
Παρατηρήστε ότι

- αν εναλλάξουμε τα $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ δεν αλλάζει ο χώρος $W$.
- αν πολλαπλασιάσουμε το $\mathbf{v}_j$ επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$ δεν αλλάζει ο χώρος $W$.
- αν προσθέσουμε στο $\mathbf{v}_i$ το $\lambda \mathbf{v}_j$ δεν αλλάζει ο χώρος $W$.

Με άλλα λόγια, **οι πράξεις γραμμών δεν αλλάζουν τον χώρο $W$ που παράγουν τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_m$.**

# Πράξεις γραμμών

Έστω $A$ η $m \times n$ μήτρα με γραμμές τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$.

- Κάθε μήτρα $B$ που είναι $R$-ισοδύναμη με την $A$ δηλαδή $A \overset{R}{\sim} B$ περιέχει επίσης γραμμές που παράγουν τον χώρο $W$.
- Οι μη μηδενικές γραμμές μιας (υποβαθμισμένης) κλιμακωτής μήτρας είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Αν $A \overset{R}{\sim} B$ όπου $B$ είναι (υποβαθμισμένη) κλιμακωτή μήτρα, τότε οι μη μηδενικές γραμμές της $B$ είναι βάση του $W$.
- Η διάσταση του χώρου που παράγουν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών της $R$-ισοδύναμης κλιμακωτής μήτρας $B$ (δηλαδή είναι ίση με το $\mathrm{rank}$ της $A$).

## 4η ΔΙΑΛΕΞΗ
## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

- **Τομή διανυσματικών χώρων**
- **Άθροισμα διανυσματικών χώρων**
- **Γινόμενο διανυσματικών χώρων**
- **Θεμελιώδεις υπόχωροι μιας μήτρας**

# Τομή διανυσματικών υποχώρων

Η τομή δύο ή περισσότερων υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου είναι υπόχωρος.
Συγκεκριμένα, αν $V_1$, $V_2$ είναι υπόχωροι του $(V, +, \cdot)$, τότε $V_1 \cap V_2$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.

Πράγματι, επειδή $\mathbf{0} \in V_1$ και $\mathbf{0} \in V_2$, έπεται ότι $\mathbf{0} \in V_1 \cap V_2$, οπότε $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.
Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \cap V_2$, τότε επειδή τα $V_1$, $V_2$ είναι υπόχωροι και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2$, έπεται ότι

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in V_1 \quad \text{και} \quad \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in V_2.$$

Οπότε, $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in V_1 \cap V_2$ και σύμφωνα με την Πρόταση 6, έπεται ότι $V_1 \cap V_2$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.

# Ένωση διανυσματικών υποχώρων

Η ένωση δύο ή περισσότερων υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι εν γένει υπόχωρος.
Συγκεκριμένα, αν $V_1, V_2$ είναι υπόχωροι του $(V, +, \cdot)$, τότε $V_1 \cup V_2$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ αν και μόνο αν $V_1 \subseteq V_2$ ή $V_2 \subseteq V_1$.

Πράγματι, αν $V_1 \cup V_2$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ και $V_1 \nsubseteq V_2$, θα αποδειχθεί ότι $V_2 \subseteq V_1$. Έστω, $\mathbf{x} \in V_2$. Επειδή $V_1 \nsubseteq V_2$, θα υπάρχει $\mathbf{y} \in V_1$, με $\mathbf{y} \notin V_2$. Επειδή $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \cup V_2$, έπεται ότι $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1 \cup V_2$, οπότε $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$ ή $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_2$. Αν $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_2$, τότε επειδή $-\mathbf{x} \in V_2$ (αφού $\mathbf{x} \in V_2$), έπεται ότι $\mathbf{y} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in V_2$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \notin V_2$, οπότε $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$ και επειδή $-\mathbf{y} \in V_1$ (αφού $\mathbf{y} \in V_1$), έπεται ότι $\mathbf{x} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + (-\mathbf{y}) \in V_1$. Άρα, $V_2 \subseteq V_1$.

# Άθροισμα διανυσματικών υποχώρων

Το άθροισμα δύο ή περισσότερων υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου είναι υπόχωρος.
Συγκεκριμένα, αν $V_1$, $V_2$ είναι υπόχωροι του $(V, +, \cdot)$, τότε το σύνολο
$$V_1 + V_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_1 \in V_1, \mathbf{x}_2 \in V_2\}$$
ονομάζεται **άθροισμα** των υποχώρων $V_1$, $V_2$ και είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.

Πράγματι, επειδή $\mathbf{0} \in V_1$ και $\mathbf{0} \in V_2$, έπεται ότι $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in V_1 + V_2$, οπότε $V_1 + V_2 \neq \emptyset$. Επιπλέον, αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 + V_2$, τότε $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ και $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, όπου $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in V_1$ και $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in V_2$. Επειδή οι $V_1$, $V_2$ είναι υπόχωροι, έπεται ότι

$$\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{y}_1 \in V_1 \qquad \text{και} \qquad \lambda\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{y}_2 \in V_2.$$

Τότε όμως, επειδή

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mu(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{y}_1) + (\lambda\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{y}_2) \in V_1 + V_2$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 6, έπεται ότι $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος.

# Άθροισμα διανυσματικών υποχώρων

Σημειώνουμε ότι $V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 + V_2$.

Πράγματι, επειδή για κάθε $\mathbf{x} \in V_1$ ισχύει ότι $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} \in V_1 + V_2$, έπεται ότι $V_1 \subseteq V_1 + V_2$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι $V_2 \subseteq V_1 + V_2$, οπότε τελικά $V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 + V_2$.

### Πρόταση

Αν $(V, +, \cdot)$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης μη μηδενικός πραγματικός διανυσματικός χώρος και $V_1$, $V_2$ δύο υπόχωροί του, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \dim V_1 \leq \dim V_2$.
Επιπλέον, αν $V_1 \subseteq V_2$, τότε $\dim V_1 = \dim V_2$ αν και μόνο αν $V_1 = V_2$.

(ii) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

## Εφαρμογή 3

Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι $V_1, V_2$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, με

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}.$$

Να βρεθούν οι διαστάσεις των υποχώρων

$$V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$$

και να αποδειχθεί ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Αν $\mathbf{v} = (x, y, z) \in V_1$, τότε είναι

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z,$$

οπότε

$$\mathbf{v} = (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Άρα, $V_1 =< (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) >$.
Επιπλέον, τα $(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} &\lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ \Rightarrow &(-\lambda - \mu, \lambda, \mu) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0. \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, -1)\}$ αποτελεί μια βάση του $V_1$ και συνεπώς $\dim V_1 = 2$.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Για τον υπόχωρο $V_2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = (x, y, z) \in V_2 &\Leftrightarrow \mathbf{v} = (x, x, z)\\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1).\end{aligned}$$

άρα, $V_2 =< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >$.
Επιπλέον, τα $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1) = (0, 0, 0) &\Rightarrow (\lambda, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)\\ &\Rightarrow \lambda = \mu = 0.\end{aligned}$$

Άρα το σύνολο $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ αποτελεί μια βάση του $V_2$ και συνεπώς $\dim V_2 = 2$.

# Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Για τον υπόχωρο $V_1 \cap V_2$, αν $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ισχύει ότι

$$\mathbf{v} \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) \in V_1 \\ (x, y, z) \in V_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - y \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{v} = (y, y, -2y) \Leftrightarrow \mathbf{v} = y(1, 1, -2)$$

Άρα, $V_1 \cap V_2 =< (1, 1, -2) >$ και επομένως το σύνολο $\{(1, 1, -2)\}$ αποτελεί μια βάση του $V_1 \cap V_2$. Άρα, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

Επιπλέον, από την προηγούμενη Πρόταση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\dim(V_1 + V_2) &= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)\\ &= 2 + 2 - 1 = 3.\end{aligned}$$

Τέλος, επειδή ο $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

από την προηγούμενη Πρόταση προκύπτει ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$.

# Γινόμενο διανυσματικών χώρων

Αν $(V_1, +, \cdot)$, $(V_2, +, \cdot)$, …, $(V_n, +, \cdot)$, $\quad n \geq 2$, είναι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι, τότε στο σύνολο $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$, ορίζονται οι πράξεις

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) + (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n)$$

και

$$\lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = (\lambda\mathbf{x}_1, \lambda\mathbf{x}_2, \ldots, \lambda\mathbf{x}_n),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in V_i$, για κάθε $i \in [n]$.
Αποδεικνύεται ότι η δομή $(V, +, \cdot)$ είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος, ο οποίος ονομάζεται **διανυσματικός χώρος γινόμενο** των διανυσματικών χώρων $(V_i, +, \cdot)$, $i \in [n]$.

# Γινόμενο διανυσματικών χώρων

### Πρόταση 8

*Για τον διανυσματικό χώρο γινόμενο* $(V \times W, +, \cdot)$, *δύο διανυσματικών χώρων* $(V, +, \cdot)$ *και* $(W, +, \cdot)$ *πεπερασμένης διάστασης, ισχύει ο τύπος*

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

# Γινόμενο διανυσματικών χώρων

Πράγματι, αν

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \text{ και } \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$$

είναι βάσεις των χώρων $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ αντίστοιχα, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο

$$S = \{(\mathbf{x}_1, 0), (\mathbf{x}_2, 0), \ldots, (\mathbf{x}_n, 0), (0, \mathbf{y}_1), (0, \mathbf{y}_2), \ldots, (0, \mathbf{y}_m)\}$$

είναι βάση του $(V \times W, +, \cdot)$, οπότε

$$\dim(V \times W) = |S| = n + m = \dim V + \dim W.$$

Γενικότερα, αποδεικνύεται επαγωγικά ο τύπος

$$\dim(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_n.$$

# Θεμελιώδεις υπόχωροι μιας μήτρας

Σε κάθε $m \times n$ μήτρα $A$ ορίζονται οι παρακάτω 4 θεμελιώδεις διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$.

- **Χώρος των γραμμών της** $A$: $\mathrm{row}(A)$ ή $r(A)$.
  Είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των γραμμών $R_1$, $R_2$, …, $R_m$ της $A$.

  $$\mathrm{row}(A) = < R_1, R_2, \ldots, R_m > \subseteq \mathbb{R}^n$$

  Είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
- **Χώρος των στηλών της** $A$: $\mathrm{col}(A)$ ή $c(A)$.
  Είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών $C_1$, $C_2$, …, $C_n$ της $A$.

  $$\mathrm{col}(A) = < C_1, C_2, \ldots, C_n > \subseteq \mathbb{R}^m$$

  Είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

# Θεμελιώδεις υπόχωροι μιας μήτρας

- **Μηδενοχώρος ή πυρήνας της** $A$: $\mathrm{null}(A)$ ή $\ker(A)$.
  Είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $X \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n\times 1}$ για τα οποία
  $$\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{X}_{n\times 1} = \underbrace{\mathbb{O}}_{m\times 1}$$
  Αν $X, Y \in \mathrm{null}(A)$ τότε $kX + \lambda Y \in \mathrm{null}(A)$ αφού
  $$A(kX + \lambda Y) = kAX + \lambda AY = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}.$$
  Είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
- **Αριστερός μηδενοχώρος ή πυρήνας της** $A$: $\mathrm{leftnull}(A)$.
  Είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $X \in \mathbb{R}^m \simeq \mathcal{M}_{1\times m}$ για τα οποία
  $$\underbrace{X}_{1\times m}\underbrace{A}_{m\times n} = \underbrace{\mathbb{O}}_{1\times n}$$
  Είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

# Θεμελιώδεις υπόχωροι μιας μήτρας

Οι 4 θεμελιώδεις χώροι της μήτρας $A$ συνδέονται με πολλούς τρόπους. Γι αυτούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- Οι πράξεις γραμμών δεν μεταβάλλουν τον χώρο που παράγουν οι γραμμές μιας $m \times n$ μήτρας $A$. Άρα, αν $A \overset{R}{\sim} B$, τότε $row(A) = row(B)$.
- Οι διαστάσεις των χώρων των γραμμών και στηλών της μήτρας $A$ είναι ίσες.

$$\dim \mathrm{row}(A) = \dim \mathrm{col}(A) = \mathrm{rank}(A) \ (\leq \min\{m, n\})$$

- (**Θεμελιώδες Θεώρημα Γραμμικής Άλγεβρας**) Αν η $A$ έχει διαστάσεις $m \times n$ τότε

$$\underbrace{\dim \mathrm{row}(A)}_{rank} + \underbrace{\dim \mathrm{null}(A)}_{n-rank} = n$$

$$\underbrace{\dim \mathrm{col}(A)}_{rank} + \underbrace{\dim \mathrm{leftnull}(A)}_{m-rank} = m$$

# Θεμελιώδεις υπόχωροι μιας μήτρας

Οι 4 θεμελιώδεις χώροι της μήτρας $A$ συνδέονται με πολλούς τρόπους. Γι αυτούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- Αν $m = n$ τότε

$$\begin{matrix}\text{Γραμμές και Στήλες}\\ \text{Γραμμικώς Ανεξάρτητες}\end{matrix} \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

- Αν $m \neq n$ τότε
  οι γραμμές ή οι στήλες είναι σίγουρα γραμμικώς εξαρτημένες (ανάλογα με το αν $m < n$ ή $m > n$).