Ασκήσεις στα Χαρακτηριστικά Μεγέθη

A $n \times n$ $X : n \times 1$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Το σύστημα $AX = \lambda X$ ονομάζεται χαρακτηριστικό σύστημα της μήτρας A

Η ορίζουσα $|A - \lambda I_n|$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A

Χαρακτηριστική εξίσωση: $|A - \lambda I_n| = 0$

Οι ρίζες λ της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται ιδιοτιμές (eigenvalues) της A

Για κάθε ιδιοτιμή λ της A, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $AX = \lambda X$ ονομάζονται ιδιοδιανύσματα της A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ. (eigenvectors)

Το σύνολο ~~αυτών~~ των ιδιοδιανυσμάτων είναι διανυσματικός χώρος (ιδιόχωρος - eigenspace)

Εφαρμοσμένη άλγεβρα -2- Σάββατο 16.5.2020

Ιδιότητες

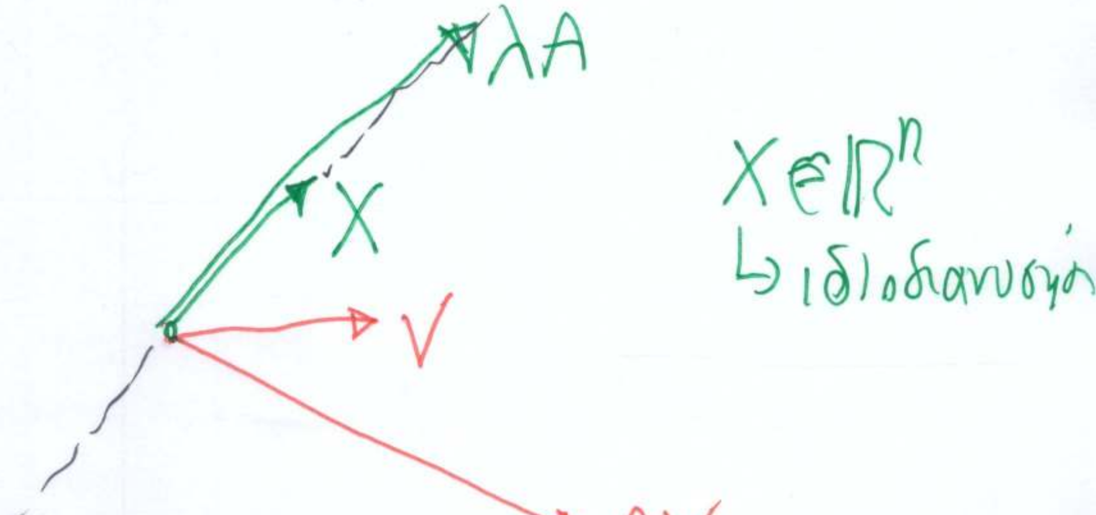
(επιτρέπονται επαναλήψεις)

① $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές της A

$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

② Για κάθε ιδιοτιμή λ της A και για κάθε ιδιοδιάνυσμα X που αντιστοιχεί στην λ ισχύει ότι

$$AX = \lambda X$$



$$A^2X = AAX = A\lambda X = \lambda AX$$
$$= \lambda \cdot \lambda X = \lambda^2 X$$

Γενικότερα: $A^k X = \lambda^k X \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

(3) Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχουν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γρ. ανεξαρτητα.

(4) Η μήτρα Α ικανοποιει την χαρακτηριστική της εξίσωση (Θεώρημα Cayley-Hamilton)

Άσκηση 1

Δίδεται η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A-\lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2+2\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$(\lambda+1)$ κοινός παράγοντας από την 3η γραμμή

$$(\lambda+1)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \overset{C_2 \to C_2 + 2C_3}{\Leftrightarrow}$$

$$(\lambda+1)\begin{vmatrix} {}^{+}3-\lambda & 10 & 4 \\ {}^{-}2 & 4-\lambda & 2 \\ {}^{+}0 & {}^{-}0 & {}^{+}-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{\text{αναπτυγμα}}{\underset{\text{ως προς 3η γραμμή}}{\Longleftrightarrow}}$$

$$(\lambda+1)(-1)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(\lambda+1)\Big((3-\lambda)(4-\lambda)-20\Big)=0 \iff$$

$$\boxed{(\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8)=0} \iff$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A

$$(\lambda+1)^2(\lambda-8)=0$$

Άρα οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι

$\lambda_1 = 8$ και $\lambda_2=\lambda_3=-1$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 8$ το χαρακτηριστικό σύστημα γίνεται

$$\boxed{(A-\lambda I_3)X = \mathbb{O}_{3\times1} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{cases} (3-\lambda)x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - \lambda y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} -5x + 2y + 4z = 0 \\ \cancel{2}x - \cancel{8}^{4}y + \cancel{2}z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases} \underset{R_3 \to R_3 + R_2 + R_1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -5x + 2y + 4z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \underset{}{\overset{R_1 \to R_1 + 5R_2}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\begin{cases} 0x - 18y + 9z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{matrix} z = 2y \\ x = 2y \end{matrix}$$

Άρα

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα της A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\boxed{\lambda_1 = 8}$ έχουν την μορφή

$$X^t = (x, y, z) = (2y, y, 2y)$$
$$= y(2, 1, 2) \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

δηλαδή $\quad \boxed{X = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$

Για τις ιδιοτιμές $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ το χαρακτηριστικό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \iff$$

$$2x + y + 2z = 0 \iff$$

$$y = -2x - 2z$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα της A που αντιστοιχουν στις ιδιοτιμες $\lambda_2=\lambda_3=-1$ εχουν την μορφη

$$x^t=(x,y,z)=(x,-2x-2z,z)$$

$$=(x,-2x,0)+(0,-2z,z)$$

$$=x(1,-2,0)+z(0,-2,1)$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχουν στις $\boxed{\lambda_2=\lambda_3=-1}$ παράγονται απο τα

$$\boxed{\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}}$$

β) Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας της μήτρας A.

$$\det(A) = 8\cdot(-1)\cdot(-1) = 8$$

γ) Να βρεθεί η μήτρα A^{-1}

Η μήτρα ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(\lambda+1)(\lambda^2-\cancel{7}\lambda-8)=0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-7\lambda-8+\lambda^3-7\lambda^2-8\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda^3-6\lambda^2-15\lambda-8=0}$$

δηλαδή

$$\boxed{A^3-6A^2-15A-8I_3=0} \xrightarrow{\cdot A^{-1}}$$

$$A^2-6A-15I_3-8A^{-1}=0 \Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\left(A^2-6A-15I_3\right)$$

δ) Να βρεθούν οι μήτρες A^3, A^4

$$A^3 = 6A^2 + 15A + 8I_3$$

$$A^4 = ;$$

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3 \cdot A \\ &= (6A^2 + 15A + 8I_3)A \\ &= 6A^3 + 15A^2 + 8A \\ &= 6(6A^2 + 15A + 8I_3) + 15A^2 + 8A \\ &= 51A^2 + 98A + 48I_3 \end{aligned}$$

Μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά ότι υπάρχουν ακολουθίες α_n, b_n και c_n έτσι ώστε

$$\boxed{A^n = \alpha_n \cdot A^2 + b_n \cdot A + c_n I_3}$$

ε) Να βρεθεί η μήτρα A^n $n \geq 1$

Θα εφαρμόσουμε την διαδικασία της διαγωνοποίησης:
Θα βρούμε* μια διαγώνια μήτρα D και μια αντιστρέψιμη μήτρα P ώστε

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Πρόταση Μια $\boxed{n \times n}$ μήτρα A είναι διαγωνιοποιήσιμη $\boxed{\text{ανν}}$ η A έχει $\boxed{n}$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Εδώ η μήτρα A έχει 3 γρ. ανεξ. ιδιο~~δια~~ιδιοδιανύσματα.

$\lambda_1 = 8$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Είναι γρ. ανεξ. επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές

Οπότε η μήτρα P ισουται με

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_1=8 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=-1 \end{array}$$

και η διαγωνια D ισουται με

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Η P^{-1} υπολογιζεται με Gauss

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

οποτε

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

$$A^2 = A\cdot A = (PD\underline{P^{-1})(P}DP^{-1}) = PD\cdot D\cdot P^{-1} = P\cdot D^2\cdot P^{-1}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = (P\cdot D^2\cdot P^{-1})PDP^{-1} = PD^3\cdot P^{-1}$$

$$A^n = P\cdot D^n\cdot P^{-1}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{B^n \simeq A^n}$

$$B^n = P\cdot\begin{bmatrix} 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}P\begin{bmatrix} 8^n\cdot 2 & 8^n\cdot 1 & 8^n\cdot 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In[6]:=
```
A[n_] :=
 {{2, 1, 0}, {1, -2, -2}, {2, 0, 1}}.{{8^n, 0, 0}, {0, (-1)^n, 0}, {0, 0, (-1)^n}}.
  {{2, 1, 2}, {5, -2, -4}, {-4, -2, 5}} / 9
```

Out[20]=

$$\begin{pmatrix} 4.77219\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} & 4.77219\times10^{8} \\ 2.38609\times10^{8} & 1.19305\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} \\ 4.77219\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} & 4.77219\times10^{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.77219\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} & 4.77219\times10^{8} \\ 2.38609\times10^{8} & 1.19305\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} \\ 4.77219\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} & 4.77219\times10^{8} \end{pmatrix}$$

In[23]:=
```
MatrixForm[A[n]]
```

Out[23]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}\left(5\,(-1)^{n}+2^{2+3n}\right) & \frac{1}{9}\left(-2\,(-1)^{n}+2^{1+3n}\right) & \frac{1}{9}\left(-4\,(-1)^{n}+2^{2+3n}\right) \\ \frac{1}{9}\left(-2\,(-1)^{n}+2^{1+3n}\right) & \frac{1}{9}\left(8\,(-1)^{n}+8^{n}\right) & \frac{1}{9}\left(-2\,(-1)^{n}+2^{1+3n}\right) \\ \frac{1}{9}\left(-4\,(-1)^{n}+2^{2+3n}\right) & \frac{1}{9}\left(-2\,(-1)^{n}+2^{1+3n}\right) & \frac{1}{9}\left(5\,(-1)^{n}+2^{2+3n}\right) \end{pmatrix}$$

In[14]:=
```
B[n_] := {{2, 1, 0}, {1, -2, -2}, {2, 0, 1}}.
  {{8^n, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}.{{2, 1, 2}, {5, -2, -4}, {-4, -2, 5}} / 9
```

In[21]:=
```
MatrixForm[B[n]]
```

Out[21]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}\,2^{2+3n} & \frac{1}{9}\,2^{1+3n} & \frac{1}{9}\,2^{2+3n} \\ \frac{1}{9}\,2^{1+3n} & \frac{8^{n}}{9} & \frac{1}{9}\,2^{1+3n} \\ \frac{1}{9}\,2^{2+3n} & \frac{1}{9}\,2^{1+3n} & \frac{1}{9}\,2^{2+3n} \end{pmatrix}$$

In[41]:=
```
N[MatrixForm[A[3]]]
N[ MatrixForm[B[3]]]
```

Out[41]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 227. & 114. & 228. \\ 114. & 56. & 114. \\ 228. & 114. & 227. \end{pmatrix}$$

Out[42]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 227.556 & 113.778 & 227.556 \\ 113.778 & 56.8889 & 113.778 \\ 227.556 & 113.778 & 227.556 \end{pmatrix}$$

In[39]:=
```
N[MatrixForm[A[10]]]
N[ MatrixForm[B[10]]]
```

Out[39]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4.77219\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} & 4.77219\times10^{8} \\ 2.38609\times10^{8} & 1.19305\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} \\ 4.77219\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} & 4.77219\times10^{8} \end{pmatrix}$$

Out[40]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4.77219\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} & 4.77219\times10^{8} \\ 2.38609\times10^{8} & 1.19305\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} \\ 4.77219\times10^{8} & 2.38609\times10^{8} & 4.77219\times10^{8} \end{pmatrix}$$

In[38]:= `N[MatrixForm[A[10] - B[10]]]`

Out[38]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.555556 & -0.222222 & -0.444444 \\ -0.222222 & 0.888889 & -0.222222 \\ -0.444444 & -0.222222 & 0.555556 \end{pmatrix}$$

στ) Να βρεθεί το διάνυσμα

$$y_n = A^n X \quad \text{όπου} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$n \geq 1$

Γνωρίζουμε ότι για τα ιδιοδιανύσματα X της μήτρας A ισχύει η σχέση

$$\boxed{A^n X = \lambda^n X}$$

Όμως το $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της A. Από την άλλη η A έχει 3 γρ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 8$ $\quad \lambda_2 = -1$ $\quad \lambda_3 = -1$

Τα v_1, v_2, v_3 αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$

Άρα, το X γράφεται ως γρ. συνδυασμός των V_1, V_2, V_3

Πράγματι (λύνοντας ένα σύστημα) (*)

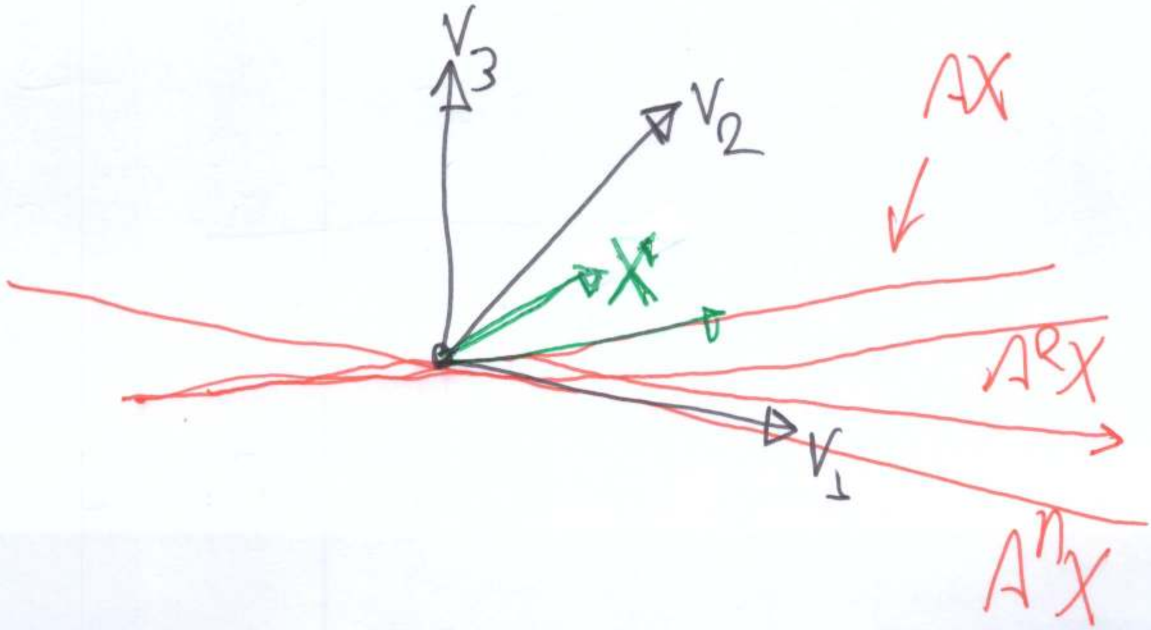
$$X = \frac{10}{9} v_1 + \frac{-11}{9} v_2 + \frac{7}{9} v_3 \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$A^n X = A^n \left(\frac{10}{9} v_1 + \frac{-11}{9} v_2 + \frac{7}{9} v_3 \right)$$

$$= \frac{10}{9} A^n v_1 + \frac{-11}{9} A^n v_2 + \frac{7}{9} A^n v_3$$

$$= \frac{10}{9} 8^n v_1 + \frac{-11}{9} (-1)^n v_2 + \frac{7}{9} (-1)^n v_3$$



Εφαρμοσμένη άλγεβρα -15'- Σάββατο 16.5.2020

(*)

$$\underset{X}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}} = c_1 \underset{v_1}{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}} + c_2 \underset{v_2}{\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}} + c_3 \underset{v_3}{\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}}$$

ζ) Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας των παρακάτω μητρών:

(A: Ιδιοτιμές : 8, (-1), (-1))

i) $B_1 = A^2 + 3A + 2I_3$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Το φάσμα της μήτρας B_1 είναι οι τιμές

$$p(8),\ p(-1),\ p(-1)$$

$$p(8) = 8^2 + 3 \cdot 8 + 2 = 90$$

$$p(-1) = (-1)^2 + 3(-1) + 2 = 0$$

Άρα, οι ιδιοτιμές B_1 : 90, 0, 0

Άρα $\det(B_1) = 0 = (90 \cdot 0 \cdot 0)$

ii) $B_2 = (A+2I)(A-5I)$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-5)$$

Ιδιοτιμές της B_2

$$p(8),\ p(-1),\ p(-1)$$

$$p(8) = (8+2)(8-5) = 30$$
$$p(-1) = (-1+2)(-1-6) = -6$$

Άρα, $\det(B_2) = 30\cdot(-6)\cdot(-6) = 30\cdot 36$

Φασματικό Θεώρημα

Αν η μήτρα B είναι πολυώνυμο της μήτρας A δηλ. $B = p(A)$ όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ τότε οι ιδιοτιμές της B είναι οι αριθμοί

$\det A$ = το γινόμενο των ιδιοτιμών της

$p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές της A