14.3.15

Εφαρμοσμένη Άλγεβρα Φροντιστήριο 1ο

I. Πράξεις στις μήτρες

A $m\times n$ μήτρα (m γραμμές, n στήλες)
B $\kappa\times\lambda$ μήτρα (κ γραμμές, λ στήλες)

α) Πρόσθεση

Πρέπει οι A, B να είναι ίδιου τύπου $\begin{pmatrix} m=\kappa \\ n=\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3+2 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ}$$

β) Πολλαπλασιασμός αριθμού με μήτρα.

$$(-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

γ) Πολλαπλασιασμός μητρών.

Για να ορίζεται το γινόμενο $A\cdot B$ πρέπει $n=\kappa$ (δηλαδή ο αριθμός των στηλών της A να ισούται με τον αριθμό των γραμμών της B). Το αποτέλεσμα είναι μια μήτρα C $m\times\lambda$ (m γραμμές και λ στήλες).

$$\underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}} \times \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}} = \text{ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ}$$

$$\underset{3\times 2\ A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}} \times \underset{2\times 4\ B}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 12 & 15 \\ 15 & 15 & 21 & 27 \\ 20 & 20 & 28 & 36 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = $ (1η γραμμή της A) $\times$ (1η στήλη της B) $= 1\cdot 1 + 4\cdot 2 = 9$

$a_{12} = 1\cdot 1 + 2\cdot 4 = 9$ = (1η γραμμή της A) $\times$ (2η στήλη της B).

$a_{13} = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 = 12$

$a_{14} = 1\cdot 3 + 2\cdot 6 = 15$

$a_{21} = 3\cdot 1 + 3\cdot 4 = 15$

$a_{22} = 3\cdot 1 + 3\cdot 4 = 15$

$a_{23} = 3\cdot 2 + 3\cdot 5 = 21$

$a_{24} = 3\cdot 3 + 3\cdot 6 = 27$

$a_{31} = 4\cdot 1 + 4\cdot 4 = 20$

$a_{32} = 4\cdot 1 + 4\cdot 4 = 20$

$a_{33} = 4\cdot 2 + 4\cdot 5 = 28$

$a_{34} = 4\cdot 3 + 4\cdot 6 = 36$

Άσκηση 1

Να βρεθούν όλες οι μήτρες B οι οποίες αντιμετατίθενται με τη μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Η B (αν υπάρχει) πρέπει να είναι τύπου 2×2.
Έστω

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Θέλουμε

$$AB = BA \iff$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & 0 \\ z+2w & 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = x \\ 2x = z + 2w \end{cases} \iff \begin{matrix} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ z = 2x - 2w \\ w \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Άρα
$$B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x-2w & w \end{bmatrix} \quad x, w \in \mathbb{R}$$ □

Παρατήρηση: Για $x = w = 1$ $B = I_2$

Άσκηση 2

Έστω A μια $n\times n$ μήτρα, $A \neq I_n$ και $A^2 = A$ (δηλαδή η A είναι αδύναμη). Να δειχθεί ότι η A δεν έχει αντίστροφη.

Έστω ότι υπάρχει η αντίστροφη της A και ας τη συμβολίσουμε με A^{-1}.

$$A^2 = A \xrightarrow[\text{με } A^{-1}]{\text{πολ/με}}$$

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Longrightarrow$$
$$(A^{-1}A)A = I_n \Longrightarrow$$
$$I_n \cdot A = I_n \Longrightarrow$$
$$A = I_n, \text{ άτοπο.}$$ □

Άσκηση 3

Έστω A $m\times n$ μήτρα. Να δειχθεί ότι η μήτρα AA^t είναι συμμετρική. (Μία μήτρα B λέγεται συμμετρική αν $B = B^t$, όπου B^t η ανάστροφη της B).

Για κάθε A, B ισχύει ότι $(AB)^t = B^t A^t$ όπου A, B έχουν κατάλληλους τύπους.
Θα δείξουμε ότι
$$(A \cdot A^t)^t = A \cdot A^t$$
Πράγματι
$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = A \cdot A^t,$$
Άρα, η AA^t είναι συμμετρική.

Άσκηση 4

Έστω A μήτρα τύπου $n \times n$ για την οποία ισχύει
$$A^3 - 5A - 3I_n = O_n$$
Να δειχθεί ότι η μήτρα A αντιστρέφεται.

Ισχύει ότι
$$A^3 - 5A - 3I_n = O_n \Leftrightarrow$$
$$A^3 - 5A = 3I_n \Leftrightarrow$$
$$A(A^2 - 5I_n) = 3I_n \Leftrightarrow$$
$$A\left(\tfrac{1}{3}(A^2 - 5I_n)\right) = I_n$$
Άρα, η μήτρα $B = \frac{1}{3}(A^2 - 5I_n)$ είναι η αντίστροφη της A. □

Άσκηση 5

a) Να δειχθεί ότι για κάθε $A, B \in M_{n \times n}$ ισχύει ότι
$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$
$$tr(AB) = tr(BA)$$

(Υπενθύμιση: $tr(A)$ trace of A = $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
ίχνος της A)

Έστω $C = AB$ και $D = BA$
με $C = [c_{ij}]$ και $D = [d_{ij}]$

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji}}$$

i γραμμή της A
i στήλη της B

$$tr(D) = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \boxed{\sum_{i=1}^{n} b_{ji} \cdot a_{ij}}$$

j γραμμή της B
j στήλη της A

Άρα, $tr(C) = tr(D) \Leftrightarrow tr(AB) = tr(BA)$

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση
$$AX - XA = I_n$$
όπου $A \in M_{n \times n}$ και X η άγνωστη μήτρα, είναι αδύνατη.

$AX-XA=I_n \Rightarrow tr(AX-XA)=tr(I_n) \Leftrightarrow tr(AX)-tr(XA)=tr(I_n) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0=n$, αδύνατο. □.

Άσκηση 6

Έστω $A, B \in M_n$.
α) Να δειχθεί ότι αν η A είναι ορθογώνια, τότε και η A^{-1} είναι ορθογώνια. (Υπενθύμιση A ορθογώνια $\Leftrightarrow A^{-1}=A^t$).

Αφού A ορθογώνια, ισχύει ότι $A \cdot A^t = I_n$
$(A^{-1})(A^{-1})^t = (A^t)(A^t)^t = A^t A = I_n$

β) Να δειχθεί ότι αν A, B είναι ορθογώνιες, τότε και η AB είναι επίσης ορθογώνια.

$(AB)(AB)^t = ABB^tA^t = AI_nA^t = AA^t = I_n$ □

Έστω $\sigma \in S(X)$.
Τότε ο ελάχιστος μη μηδενικός φυσικός αριθμός k ώστε $\sigma^k = I_X$ λέγεται **τάξη** της σ, $ord(\sigma)$ **order of σ.**

Πρόταση

Έστω X μη κενό πεπερασμένο σύνολο και $\sigma \in S(X)$.
(i) Αν $ord(\sigma)=k$, τότε για κάθε $m, n \in [k]$ με $m \neq n$ ισχύει ότι
$$\sigma^m \neq \sigma^n$$

(ii) Αν $ord(\sigma)=k$, τότε για κάθε $m \in [k]$ $ord(\sigma^m) \mid k$.

(iii) Αν σ είναι κύκλος μήκους k, τότε $ord(\sigma)=k$.

(iv) Αν σ είναι γινόμενο r ξένων κύκλων με μήκη $d_1, d_2, \ldots, d_r$ αντίστοιχα, τότε η τάξη της είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $d_1, d_2, \ldots, d_r$.

Άσκηση 7

Να βρεθούν οι τάξεις των παρακάτω μεταθέσεων
α) $\sigma_1 = (1376)(25894) \in S_9$

Οι σ είναι γινόμενο των ξένων κύκλων $(1376), (25894)$ με μήκη 4, 5.

Άρα $ord(\sigma_1) = \text{εκπ}(4,5) = 20$.

β) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 9 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$

Ισχύει

$\sigma_2 = (135)(24)(6978)$

Άρα $ord(\sigma_2) = \text{εκπ}(3,2,4) = 12$.

γ) $\sigma_3 = (138742)(25671) \in S_9$

Οι δυο κύκλοι της σ_3 δεν είναι ξένοι.
Θα γράψουμε τη σ_3 ως γινόμενο ξένων κύκλων.

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 8 & 2 & 6 & 4 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$\sigma_3 = (1)(2564)(387)(9)$

$ord(\sigma_3) = \text{εκπ}(1,4,3,1) = 12$

δ) $\sigma_4 = c_1 \circ c_2$ όπου c_1, c_2 ξένοι κύκλοι μήκους 240, 138 αντίστοιχα.

$ord(\sigma_4) = \text{εκπ}(240, 138)$

Υπενθύμιση:

Για κάθε $a, b \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$ab = \mu\kappa\delta(a,b)\cdot \varepsilon\kappa\pi(a,b)$

Θα βρούμε το μκδ (240, 138)

$240 = 1\cdot 138 + 102$

$138 = 1\cdot 102 + 36$

$102 = 2\cdot 36 + 30$

$36 = 1\cdot 30 + 6$

$30 = 5\cdot 6 + 0$

Άρα $\mu\kappa\delta(240,138) = 6$

Άρα $\varepsilon\kappa\pi(240,138) = \dfrac{240\cdot 138}{6} = 5520$

Άρα $ord(6_4) = 5520$.

Άσκηση 8 (Προσοχή!).

Να βρεθούν οι δυνατές τάξεις των μεταθέσεων του S_7.

$|S_7| = 7! = 5040$ μεταθέσεις.

Κάθε $\sigma\in S_7$ γράφεται ως γινόμενο ξένων κύκλων με συνολικό μήκος το 7.

Τρόποι έκφρασης του 7 ως άθροισμα ακεραίων (δεν μας ενδιαφέρει η σειρά).

7 ~ ord=7
6 1 ~ ord=6
5 2 ~ ord=10
5 1 1 ~ ord=5
4 3 ~ ord=12
4 2 1 ~ ord=4
4 1 1 1 ~ ord=4
3 3 1 ~ ord=3
3 2 2 ~ ord=6
3 2 1 1 → ord=3
3 1 1 1 1 → ord=3
2 2 2 1 ~ ord=2
2 2 1 1 1 ~ ord=2
2 1 1 1 1 1 ~ ord=2
1 1 1 1 1 1 1 ~ ord=1

Άρα, οι δυνατές τάξεις των στοιχείων του S_7 είναι
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12