No. Date 25.4.15

Εφαρμοσμένη άλγεβρα (Φροντιστήριο)

Σήμερα: Ορίζουσες
Διανυσματικοί χώροι.

Ορίζουσες (Επανάληψη)

1. Οι ορίζουσες ορίζονται μόνο για τετραγωνικές μήτρες.

2. $|A \cdot B| = |A||B|$

3. Η εναλλαγή δύο γραμμών της A αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας.

4. Αν πολλ/σουμε μία γραμμή ή στήλη της A με λ, τότε η ορίζουσα της A πολ/ζεται με λ.

5. Η πρόσθεση μιας γραμμής ή στήλης σε μία άλλη γραμμή ή στήλη δεν αλλάζει την τιμή της ορίζουσας.

6. Η ορίζουσα μιας άνω τριγωνικής ή κάτω τριγωνικής μήτρας ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου της.

Άσκηση 1

Να βρεθεί η τιμή των παρακάτω οριζουσών:
a) Αν $|A| = 2$, $|B| = -3$, $A, B \in M_4$

$|A \cdot B| = |A||B| = 2(-3) = -6$
$||A| \cdot B| = |2B| = 2^4 |B| = 2^4(-3)$
$|2 \cdot B^{100}| = 2^4 |B|^{100} = 2^4 (-3)^{100}$

$|A+B| =$ Δεν γνωρίζαμε με βάση τα παραπάνω στοιχεία.

β) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = I$

Θα χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα ως προς την τρίτη στήλη (γιατί έχει περισσότερα μηδενικά).

$$I = (-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{*}{=} (-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\,1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - (-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

Η ορίζουσα κάνει μηδέν.

$$= -2\,(1\cdot 3 - 3\cdot 4) + 1\,(4\cdot 3 - 3\cdot 4) =$$

$$= (-2)(-9) + 0 = 18$$

(*) Στην πρώτη ορίζουσα πρόσθεσα στην δεύτερη γραμμή την πρώτη, ενώ στην δεύτερη ορίζουσα στην πρώτη γραμμή προσθέτω την δεύτερη και στην τρίτη γραμμή προσθέτω την δεύτερη.

Υπενθύμιση: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

γ) $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8$$

Με τις αλλαγές γραμμών προκύπτει μία άνω τριγωνική μήτρα, που η ορίζουσά της ισούται με το γινόμενο της κύριας διαγωνίου.

Άσκηση 2

Να δειχθεί η ισότητα

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(c-a)$$

$$I \underset{\text{στήλη την δεύτερη}}{\overset{\text{αφαιρώ από την πρώτη}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{την τρίτη}}{\overset{\text{από την δεύτερη στήλη αφαιρώ}}{=}} \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad + & \quad - & \quad + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(b-c)\left(b+c-(a+b)\right) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Άσκηση 3

Έστω ότι ο x διαιρεί τους αριθμούς 204, 527 και 255. Να δειχθεί ότι ο x διαιρεί την ορίζουσα

$$I = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$I = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 100\cdot 2+4 \\ 5 & 2 & 100\cdot 5+27 \\ 2 & 5 & 100\cdot 2+55 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix}$$

Επειδή ο x διαιρεί όλους τους αριθμούς της τρίτης στήλης διαιρεί και την ορίζουσα.

Άσκηση 4

Έστω $A \in M_n$ αντιστρέψιμη.
Να δειχθεί ότι

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Απόδειξη

$A \cdot A^{-1} = I_n$

$|A \cdot A^{-1}| = |I_n|$

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Άσκηση 5

Να δειχθεί ότι αν μια μήτρα A είναι ορθογώνια τότε

$$|A| = \pm 1$$

A ορθογώνια $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$

$A \cdot A^t = I_n \Rightarrow$

$|A A^t| = |I_n| \Rightarrow$

$|A||A| = 1 \Rightarrow$

$|A|^2 = 1 \Rightarrow$

$|A| = \pm 1$.

Παρατήρηση: Επειδή γενικά $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \mathrm{adj}A$, αν η A είναι ορθογώνια και περιέχει μόνο ακέραιες τιμές τότε και η A^{-1} έχει μόνο ακέραιες τιμές.

Άσκηση 6

Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

- $W \neq \emptyset$ διότι $(1,2,3) \in W$
  $(0,0,0) \in W$

- Έστω $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ και $u, v \in W$
  Θα δείξουμε ότι
  $\alpha u + \lambda v \in W$

Έστω $u=(x_1, y_1, z_1)$ τότε $u=(x_1, y_1, x_1+y_1)$
$v=(x_2, y_2, z_2)$ τότε $v=(x_2, y_2, x_2+y_2)$

$$\kappa u+\lambda v=(\kappa x_1, \kappa y_1, \kappa x_1+\kappa y_1)+(\lambda x_1, \lambda y_2, \lambda x_2+\lambda y_2)=$$

$$=(\kappa x_1+\lambda x_2, \kappa y_1+\lambda y_2, \kappa(x_1+y_1)+\lambda(x_2+y_2))\in W$$

αφού $\underbrace{\kappa x_1+\lambda x_2}_{x}+\underbrace{\kappa y_1+\lambda y_2}_{y}-\underbrace{(\kappa(x_1+y_1)+\lambda(x_2+y_2))}_{z}=0$

Άρα W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 7

α) Να δειχθεί ότι το σύνολο
$W_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=1\}$
δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

- $W_1\neq\emptyset$, αφού $(1,1,1)\in W_1$

Όμως $0\cdot(1,1,1)=(0,0,0)\notin W_1$
άρα W_1 δεν είναι κλειστό ως προς πολλαπλασιασμό με αριθμό, άρα δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

β) Να δειχθεί ότι το σύνολο
$W_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y+z=0\}$
δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}$.

$W_2\neq\emptyset$ αφού $(0,0,0)\in W_2$
$(1,1,-2)\in W_2$

Όμως $2(1,1,-2)=(2,2,-4)\notin W_2$
αφού $2^2+2-4\neq 0$.

No. Date

Άσκηση 8

α) Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $(2,5,1)$, $(3,1,2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.

Έστω

$$\lambda_1(2,5,1)+\lambda_2(3,1,2)=(0,0,0)$$
$$(2\lambda_1, 5\lambda_1, \lambda_1)+(3\lambda_2, \lambda_2, 2\lambda_2)=(0,0,0)$$
$$(2\lambda_1+3\lambda_2,\ 5\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_1+2\lambda_2)=(0,0,0).$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1+3\lambda_2&=0\\ 5\lambda_1+\lambda_2&=0\\ \lambda_1+2\lambda_2&=0 \end{aligned} \xLeftrightarrow{\lambda_1=-2\lambda_2} \begin{aligned} -4\lambda_2+3\lambda_2&=0\\ -10\lambda_2+\lambda_2&=0\\ \lambda_1&=-2\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2=0\\ -8\lambda_2=0\\ \lambda_1=-2\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$$

Άρα $(2,5,1)$, $(3,1,2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

β) Να εξετασθεί αν τα διανύσματα $(2,5,1)$, $(3,1,2)$, $(0,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1(2,5,1)+\lambda_2(3,1,2)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0)$$
$$(2\lambda_1+3\lambda_2,\ 5\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1+3\lambda_2&=0\\ 5\lambda_1+\lambda_2&=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3&=0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε την ορίζουσα του συστήματος

$$I = \begin{vmatrix} 2^+ & 3^- & 0^+ \\ 5 & 1 & 0^- \\ 1 & 2 & 1^+ \end{vmatrix}$$

$$I = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 3 \cdot 5) = -13 \neq 0$$

Άρα, το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση, την $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Άρα, τα διανύσματα $(2,5,1), (3,1,2), (0,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Βάση + Διάσταση (Επανάληψη)

V δ.χ., $S \subseteq V$,

S βάση ανν

α) Τα στοιχεία του S παράγουν τον V

β) Τα στοιχεία του S είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα $\mathbb{R}^n$

Η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο
$\{(1,0,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,0,\dots,1)\}$

Βασικές Ιδιότητες

1. Υπάρχουν πολλές βάσεις για ένα δ.χ. V
2. Κάθε στοιχείο v του δ.χ. V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων μιας βάσης S του V.
3. Κάθε σύνολο W που παράγει τον V έχει ως υποσύνο-

λο μια βάση του V.
4. Κάθε σύνολο W που αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V.
5. Αν ο V έχει μία βάση με n στοιχεία και W αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τότε $|W| \leq n$
6. Κάθε βάση του V έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων το οποίο ονομάζεται διάσταση του χώρου V και συμβολίζεται με dimV (dimension of V).

Άσκηση 9

Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του χώρου
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$$

Έστω $v \in W$ με $v=(x,y,z)$
Τότε
$$v=(x,y,x+y)=(x,0,x)+(0,y,y)=$$
$$=x(1,0,1)+y(0,1,1)$$

Άρα, τα διανύσματα $(1,0,1)$ και $(0,1,1)$ παράγουν τον χώρο W.
Για να είναι βάση του W πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
$$\lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(0,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow$$
$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1+\lambda_2)=(0,0,0) \Rightarrow$$
$$\lambda_1=\lambda_2=0$$

Άρα $(1,0,1), (0,1,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα είναι βάση του W.

Υπάρχουν και άλλες βάσεις:

- $(2,0,2)$, $(0,1,1)$

$v = (x, y, z) = (z-y, y, z) = (z, 0, z) + (-y, y, 0) =$
$= z(1,0,1) + y(-1,1,0)$.

Τα $(1,0,1)$, $(-1,1,0)$ γραμμικώς ανεξάρτητα.
Άρα βάση του W.

Η διάσταση του W είναι ίση με 2
$\dim W = 2$

Άσκηση 10

Να βρεθεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία περιέχει τα γραμμικώς νεξάρτητα διανύσματα
$(1,0,1)$, $(2,1,0)$

Γνωρίζουμε ότι $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
Άρα για να βρούμε μία βάση του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα $(1,0,1)$, $(2,1,0)$ χρειαζόμαστε άλλο ένα διάνυσμα, το οποίο να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από αυτά.

Θα δοκιμάσουμε να βρούμε το 3 διάνυσμα μεταξύ των στοιχείων της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^3$
$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(2,1,0) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα $(1,0,1), (2,1,0), (1,0,0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Παρατήρηση

Από την αρχή γνωρίζαμε ότι ένα (τουλάχιστον) από τα $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $(1,0,1), (2,1,0)$, διότι $\dim\mathbb{R}^3=3$ και όχι 2.

Άσκηση 11

Να βρεθεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία αποτελείται από κάποια από τα διανύσματα $(2,0,2), (3,3,0), (0,1,1), (1,1,1), (2,0,3)$ τα οποία είναι γνωστό ότι παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.

Επειδή $\dim\mathbb{R}^3=3$ θα χρειαστούμε 3 διανύσματα από τα 5.
Πρέπει να βρούμε ποια μπορούν να παραχθούν από τα υπόλοιπα και να τα αφαιρέσουμε.

Έστω A μία $m\times n$ μήτρα
Με κάθε μήτρα σχετίζονται 4 υπόχωροι:
$\boxed{1}$ Row A = ο υπόχωρος που παράγουν οι γραμμές της A.
$\boxed{2}$ Col A = ο υπόχωρος που παράγουν οι στήλες της A.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}$$

$\text{Row}A = \langle (1,2,0,1), (2,1,0,2), (2,1,1,2) \rangle$
$\text{Col}A = \langle (1,2,2), (2,1,1), (0,1,1), (1,2,2) \rangle$
→ Δεν είναι απαραίτητα βάσεις.

Row A υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$

Col A υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Παρατηρούμε ότι οι πράξεις γραμμών (αντ. οι πράξεις στηλών) δεν αλλάζουν τους χώρους Row A (αντ. Col(A)).

Θεωρούμε τη μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$. Τότε $\text{Row} = \mathbb{R}^3$.

$$A \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 - R_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_5} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_4}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_5} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι 2 πρώτες γραμμές αφού μηδενίζονται είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, άρα τα διανύσματα $(2,0,2)$, $(3,3,0)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(2,0,3)$.

Άσκηση 12

Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το σύστημα (Σ) να έχει
(α) καμία λύση
(β) μία λύση
(γ) άπειρες λύσεις

$$(\Sigma) = \begin{cases} 2x + \lambda y = 2 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$$

Το (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} \lambda \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή, το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ερώτημα, αν το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \lambda \\ 6 \end{bmatrix}$

Δηλαδή το (Σ) έχει λύση αν

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle$$

No. Date

Γνωρίζουμε ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση αν

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 6 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$$

Για $\lambda = 3$ τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, άρα

$$<\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}> = <\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}>$$

Άρα για $\lambda = 3$ το (Σ) έχει λύση αν $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in <\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}>$.
Το οποίο δεν ισχύει, άρα το (Σ) δεν έχει λύση για $\boxed{\lambda = 3}$.

Για $\lambda \neq 3$ τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \\ 6 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Άρα, αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$.
Άρα κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των 2 δηλαδή το (Σ) έχει μοναδική λύση.

Άσκηση 13

Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $v \in <v_1, v_2, v_3, v_4>$ τότε υπάρχουν <u>μοναδικά</u> $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

Έστω ότι

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

και

$$v = \kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \kappa_3 v_3 + \kappa_4 v_4$$

Τότε

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4$

$(\lambda_1 - k_1)v_1 + (\lambda_2 - k_2)v_2 + (\lambda_3 - k_3)v_3 + (\lambda_4 - k_4)v_4 = 0$

Επειδή v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

$\lambda_1 - k_1 = \lambda_2 - k_2 = \lambda_3 - k_3 = \lambda_4 - k_4 = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = k_1, \ \lambda_2 = k_2, \ \lambda_3 = k_3, \ \lambda_4 = k_4$

Άρα οι τελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ είναι μοναδικοί.

Άσκηση 14

Να εξετασθεί αν τα παρακάτω σύνολα αποτελούν βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

a) $S_1 = \{(1,1,1), (1,2,3)\}$

$|S_1| = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Άρα, δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

b) $S_2 = \{(1,1,1), (1,2,3), (1,1,0), (2,4,2)\}$

$|S_2| = 4 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Άρα, δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 15

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα
$(1,1,1), (2,0,2), (3,1,4), (5,2,2)$
είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Τα διανύσματα αυτά ανήκουν στον $\mathbb{R}^3$.

Γνωρίζουμε ότι στον $\mathbb{R}^3$ ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων ισούται με 3. Άρα, είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Άσκηση 16

Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του δ.χ.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 : a = 2b + c \right\}$$

Έστω $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$

$$A = \begin{bmatrix} 2b+c & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} =$$

$$= b\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εύκολα προκύπτει ότι οι μήτρες $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι βάση του W.

Άρα, $\dim W = 3$