Εφαρμοσμένη Άλγεβρα 16.05.2015

SOS Άσκηση 1

Να λυθεί το σύστημα

$$x + ay + 2z = 1$$
$$x + (2a-1)y + 3z = 1$$
$$x + ay + (a-3)z = 2a-1$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$

Απάντηση

Θεωρούμε την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{vmatrix}$$

Υπενθύμιση

- Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

- Αν $D = 0$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο Gauss

$$D \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 \end{vmatrix} \overset{①}{=} (a-1)(a-5)$$

① Η ισότητα ισχύει διότι D είναι άνω τριγωνική

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $D \neq 0 \iff (a-1)(a-5) \neq 0 \iff a \neq 1, 5$

Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha-1 & 3 \\ 2\alpha-1 & \alpha & \alpha-3 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{vmatrix} 1^{+} & \alpha^{-} & 2^{+} \\ 0^{-} & \alpha-1^{+} & 1^{-} \\ 2\alpha-2^{+} & 0^{-} & \alpha-5^{+} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 \\ 0 & \alpha-5 \end{vmatrix} + 2(\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ \alpha-1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)(\alpha-5) + 2(\alpha-1)(\alpha-2\alpha+2$$

$$= (\alpha-1)(\alpha-5) - 2(\alpha-1)(\alpha-2)$$

Άρα $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(\alpha-1)(-\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha-5)} = \dfrac{\alpha+1}{5-\alpha}$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2\alpha-1 & \alpha-3 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0^{-} & 0 & 1 \\ 0^{+} & 2\alpha-2 & \alpha-5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha-2 & \alpha-5 \end{vmatrix}$$

$$= -2(\alpha-1)$$

Άρα $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-2(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha-5)} = \dfrac{2}{5-\alpha}$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha-1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2\alpha-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1)\,2(\alpha-1)$$

Άρα $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{2(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)(\alpha-5)} = \dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha-5}$

• $D=0 \iff \alpha=5$ ή $\alpha=1$

• $\alpha=5$, τότε $D_y = -2(5-1) = -8 \neq 0$

Άρα, για $\alpha=5$, το σύστημα είναι αδύνατο

• $\alpha=1$ τότε $D_x = D_y = D_z = 0$

Άρα για $\alpha=1$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Θα βρούμε τις λύσεις του στην περίπτωση όπου $\alpha=1$

Για $\alpha=1$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+y+3z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+2z=1 \\ z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ y=1-x \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τριάδες $(x,y,z) = (\kappa, 1-\kappa, 0)$

Άλλος τρόπος (με επαυξημένο πίνακα)

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \end{array} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=1-x \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(x,1-x,0)$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του επιπέδου η οποία διέρχεται από τα σημεία (2,1) και (3,7)

Η εξίσωση μιας ευθείας του επιπέδου είναι

$$C_1x + C_2y + C_3 = 0 \quad (L)$$

(1ος τρόπος λύσης)

Η ευθεία (L) διέρχεται από τα (2,1) και (3,7) άρα

$$\begin{cases} C_1 2 + C_2 \cdot 1 + C_3 = 0 \\ C_1 3 + C_2 \cdot 7 + C_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{2}{11}R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{12}{11} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & \end{matrix} \end{array}$$

Άρα $C_2 = \frac{1}{11}C_3$ $\qquad C_2 = \frac{1}{11}C_3$

$$\Rightarrow$$

$2C_1 = -\frac{12}{11}C_3$ $\qquad C_1 = -\frac{6}{11}C_3$

οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι

$$-C_3\frac{6}{11}x + C_3\frac{1}{11}y + C_3 = 0 \quad , C_3 \in \mathbb{R}$$

Για $C_3 = 11$ έχουμε την απλούστερη μορφή $\boxed{y - 6x + 11 = 0}$

(2ος τρόπος λύσης)

Για κάθε άλλο σημείο (x,y) από το οποίο διέρχεται η ευθεία ισχύει ότι

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x c_1 &+ y c_2 + c_3 = 0 \\ 2 c_1 &+ 1 c_2 + c_3 = 0 \\ 3 c_1 &+ 7 c_2 + c_3 = 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα είναι ομογενές (άρα δεν είναι αδύνατο)
Αν η ορίζουσα D του συστήματος είναι $\neq 0$, τότε έχει μοναδική λύση $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, η οποία δεν αντιστοιχεί στην ευθεία που θέλουμε

Άρα πρέπει υποχρεωτικά $D=0$ δηλαδή

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2-x & 1-y & 0 \\ 3-x & 7-y & 0 \end{vmatrix} = (2-x)(7-y) - (3-x)(1-y)$$

$$= 14 - 2y - 7x + xy - 3 + 3y + x - xy$$
$$= 11 - 6x + 4$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι $11 - 6x + y = 0$

Δηλαδή, βρήκαμε την εξίσωση της ευθείας χωρίς να λύσουμε σύστημα.

Εφαρμογή: Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(1,2)$ και $(3,4)$

Λύση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1-x & 2-y & 0 \\ 3-x & 4-y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\iff (1-x)(4-y) - (2-y)(3-x) = 0$

$\iff \boxed{-2x + 2y - 2 = 0}$

Άσκηση 2 (συμπλήρωμα)

Να δειχθεί ότι

α) Η εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) δίδεται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Υπενθύμιση: Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύκλου είναι $c_1(x^2+y^2) + c_2 x + c_3 y + c_4 = 0$

β) Η εξίσωση του επιπέδου το οποίο διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_1), (x_3, y_3, z_3) είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Υπενθύμιση: Η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου είναι $c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 = 0$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το rank της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση

(1ος τρόπος) Με αναγωγή σε κλιμακωτή μήτρα $rank(A) \le \min\{5,5\} = 5$

(2ος τρόπος) Με υποορίζουσες

(1ος τρόπος)

$$A \xrightarrow[R_5 \to R_5 - R_1]{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_5 \to R_5 + R_2]{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - 2R_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, $rank(A) = 2$ (διότι έχει ακριβώς 2 μη μηδενικές γραμμές στην ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή)

Παρατηρήσεις

Αφού η A έχει rank(A) = 2 έπεται ότι δύο γραμμές της παράγουν όλες τις υπόλοιπες γραμμές της

$$R_3 = 1R_1 + 1R_2, \quad R_4 = 1R_1 - 2R_2, \quad R_5 = 1R_1 - 1R_2$$

$$R_1 = 1R_1 + 0 \cdot R_2, \quad R_2 = 0R_1 + 1 \cdot R_2$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

συντελεστές των γραμμικών συνδυασμών

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{5\times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 5}$$

γραμμές που παράγουν τις υπόλοιπες

- Για να αποθηκεύσουμε την μήτρα A χρειαζόμαστε 25 θέσεις μνήμης. Στην δεύτερη μορφή όμως απαιτούνται $5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 20$

- Έστω ότι θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε την μήτρα A με μια μήτρα B τύπου 5×1000.

Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε μήτρες τύπου $m \times n$ και $n \times k$ απαιτούνται $m \cdot n \cdot k$ πολλαπλασιασμοί.

Άρα, $A \cdot B$ απαιτεί $5 \times 5 \cdot 1000 = 25.000$ πολλαπλασιασμοί

Όμως $A = A_1 A_2$ $\quad A_1 \quad 5\times 2$

$A_2 \quad 2 \times 5$

Αν επιλέξουμε την εξής σειρά για τους πολλαπλασιασμούς

$A_1 (A_2 B)$ $\quad A_2B: 2 \cdot 5 \cdot 1000 = 10000$

$A_2B \quad 2 \times 1000$

$A_1 (A_2 B) \quad 5 \cdot 2 \cdot 1000 = 10000$

$5\times 2 \quad 2 \times 1000$

Άρα, συνολικά απαιτούνται $10.000 + 10.000 = 20.000$

Ερώτημα: Έστω A μια $m \times n$ μήτρα (π.χ. A μια μήτρα μιας εικόνας που έχει διαστάσεις 1024×768 σε pixels)
Υπάρχει μήτρα B που να "μοιάζει" με την A και να έχει χαμηλό rank;

Άσκηση 4 (LU-Decomposition)

Να λυθεί το σύστημα

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2$$
$$-3x_1 - 3x_2 = 2$$
$$4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 3$$

Θεωρούμε τη μήτρα A των συντελεστών του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Μια παραγοντοποίηση μιας μήτρας A της μορφής

$$A = LU$$

όπου L κάτω τριγωνική και U πάνω τριγωνική ονομάζεται LU-διάσπαση (LU-παραγοντοποίηση ή LU-Decomposition) της A.

Για την A της άσκησης υπάρχει τέτοια παραγοντοποίηση και ισχύει ότι:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Έστω $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ το αποτέλεσμα αυτού του πολλαπλασιασμού

Τότε το σύστημα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$2y_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 1$

$-3 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 5$

$-11 + 7y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = 2$

Άρα $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x_3 = 2$

$x_2 + 6 = 5 \Rightarrow x_2 = -1$

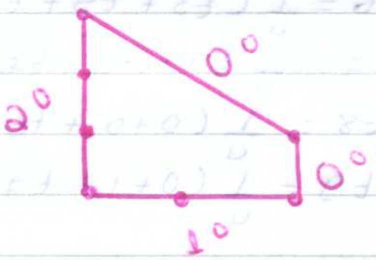
$x_1 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$

Άρα $\boxed{x_1 = 2, \ x_2 = -1, \ x_3 = 2}$

Πρόταση

Μια μήτρα A έχει LU-διάσπαση αν και μόνο αν μπορεί να μετασχηματισθεί σε κλιμακωτή μορφή χωρίς να έχει εναλλαγές γραμμών

Άσκηση 5 (μοντελοποίηση σημείων ισορροπίας θερμοκρασίας)

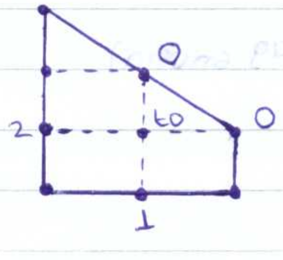


Ερώτημα: να βρεθεί η θερμοκρασία ενός σημείου (x,y) στο εσωτερικό αυτού του δωματίου

Παραδοχές:
1. Η θερμοκρασία στο εσωτερικό εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία στο σύνορο του δωματίου.
2. Για κάθε σημείο P στο εσωτερικό του δωματίου, η θερμοκρασία του ισούται με τον μέσο όρο της θερμοκρασίας των γειτόνων του (Αρχή της μέσης τιμής)

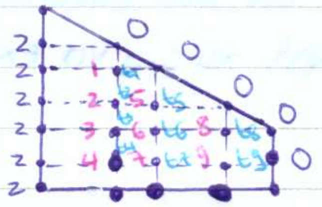
Θα προσπαθήσουμε να μοντελοποιήσουμε τα σημεία στο εσωτερικό του δωματίου χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα από σημεία. Όσο πιο πολλά σημεία έχει το πλέγμα, τόσο και καλύτερο το μοντέλο μας.

1η προσέγγιση (1 σημείο στο εσωτερικό



$$t_0 = \frac{1}{4}(1+2+0+0) = \frac{3}{4} = 0.75$$

2η προσέγγιση

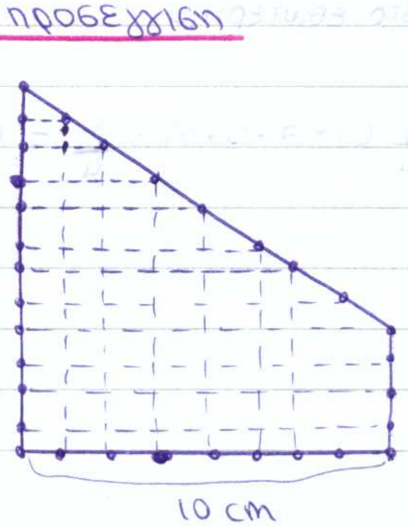


$$t_1 = \frac{1}{4}(0+2+0+t_2)$$
$$t_2 = \frac{1}{4}(2+t_1+t_5+t_3)$$
$$t_3 = \frac{1}{4}(2+t_2+t_4+t_6)$$
$$t_4 = \frac{1}{4}(2+1+t_3+t_7)$$
$$t_5 = \frac{1}{4}(0+0+t_2+t_6)$$
$$t_6 = \frac{1}{4}(t_3+t_5+t_8+t_7)$$
$$t_7 = \frac{1}{4}(1+t_4+t_6+t_9)$$
$$t_8 = \frac{1}{4}(0+0+t_6+t_9)$$
$$t_9 = \frac{1}{4}(0+1+t_7+t_8)$$

Οπότε προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 9x9 το οποίο έχει της εξής λύση

$$x = \begin{bmatrix} 0.78 \\ 1.13 \\ 0.47 \\ 1.29 \\ 0.74 \\ 0.32 \\ 1.29 \\ 0.90 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

3η προσέγγιση



(49 σημεία)

Άσκηση 6

Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα διανύσματα $v_1+2v_2-v_3$, $v_1+v_2+v_3$, $v_1+4v_2+3v_3$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λύση

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1(v_1+2v_2-v_3)+\lambda_2(v_1+v_2+v_3)+\lambda_3(v_1+4v_2+3v_3)=0 \iff$$

$$\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{k_1}v_1+\underbrace{(2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3)}_{k_2}v_2+\underbrace{(-\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3)}_{k_3}v_3=0$$

Επειδή v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα πρέπει

$$k_1=k_2=k_3=0$$

δηλαδή

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι ομογενές άρα έχει πάντα λύση $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

Για να είναι μοναδική λύση πρέπει η ορίζουσα του συστήματος να είναι $\neq$ του 0

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&4\\-1&1&3\end{vmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{vmatrix}1^{+}&1^{-}&1\\1&0^{+}&3\\-2&0^{-}&2\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&3\\-2&2\end{vmatrix}=(-1)(2+6)=-8\neq0$$

Άρα η λύση $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ είναι μοναδική.

Άρα, τα διανύσματα $v_1+2v_2-v_3$, $v_1+v_2+v_3$, $v_1+4v_2+3v_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 7

Να δειχθεί ότι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$AX=0$$

όπου A $n\times n$, X $n\times 1$ και 0 $n\times 1$ μήτρα είναι υπόχωρος του $M_{n\times n}$ ή ισοδύναμα του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη

Έστω V το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX=\mathbb{O}_{n\times 1}$

$V\neq\emptyset$ διότι $x=\mathbb{O}_{n\times 1}$ είναι λύση του συστήματος

$$A\,\mathbb{O}_{n\times 1}=\mathbb{O}_{n\times 1}$$

Έστω x_1,x_2 δύο λύσεις του συστήματος και $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ θα δείξουμε ότι $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ είναι επίσης λύση του συστήματος, άρα ανήκει στο V.

$$\begin{aligned}A(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)&=A\lambda_1 x_1+A\lambda_2 x_2\\&=\lambda_1 Ax_1+\lambda_2 Ax_2\\&=\lambda_1\mathbb{O}_{n\times 1}+\lambda_2\mathbb{O}_{n\times 1}\\&=\mathbb{O}_{n\times 1}\end{aligned}$$

Άρα $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\in V$ δηλαδή V υπόχωρος του $M_{n\times 1}$

Άσκηση 8

α) Να βρεθεί μια βάση του χώρου των λύσεων του συστήματος

$$x+y-3z=0$$
$$2x+3y+z=0$$
$$x+2y+3z=0$$

Λύση

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Gauss

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_3]{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Η μήτρα του συστήματος έχει rank(3) άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, z, y) = (0,0,0)$

Άρα, ο χώρος των λύσεων είναι ο μηδενικός χώρος.

β) Να βρεθεί μια βάση του χώρου των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to R_1 - R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + 3R_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

οπότε προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι όλες οι πεντάδες της μορφής

$$\left(2x_3 - \frac{3}{2}x_5, -3x_3, x_3, -\frac{1}{2}x_5, x_5\right) = (2x_3, -3x_3, x_3, 0, 0) +$$

$$\left(-\frac{3}{2}x_5, 0, 0, -\frac{1}{2}x_5, x_5\right) = x_3(2,-3,1,0,0) + x_5\left(-\frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Άρα η ζητούμενη βάση είναι τα διανύσματα

$$(2,-3,1,0,0), \left(-\frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)$$