Date 6.6.15

Εφαρμοσμένη Άλγεβρα (Φροντιστήριο)

Χαρακτηριστικά μεγέθη

A τετραγωνική $n \times n$ μήτρα
X $n \times 1$ μήτρα
$\lambda \in \mathbb{R}$

Αν το X είναι μη μηδενική λύση του συστήματος

$$AX = \lambda X$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$), τότε το X ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ

Οι ιδιοτιμές λ υπολογίζονται από την εξίσωση

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

και στην συνέχεια τα ιδιοδιανύσματα X που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ υπολογίζονται από το σύστημα (το σύστημα είναι ομογενές, δηλαδή πάντα έχει λύση)

$$(A - \lambda I_n) X = O_{n \times 1}$$

Άσκηση 1

a) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Απάντηση

Θεωρούμε την εξίσωση

No. Date

$$|A-\lambda I_3| = 0$$ (χαρακτηριστική εξίσωση)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{C_3 \to C_3+C_2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -\lambda \\ 2 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{R_2 \to R_2-R_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & 8-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda((1-\lambda)(8-\lambda)-8)=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-9\lambda+8-8)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-9\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-9)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ (διπλή ρίζα)}$$
$$\lambda=9$$

Άρα, οι ιδιοτιμές της A είναι $\lambda_1=\lambda_2=0$ και $\lambda_3=9$

Για τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων θεωρούμε το σύστημα

$$(A-\lambda I_3)X=0 \quad \text{όπου} \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

και λ είναι οι ιδιοτιμές της A.

$\boxed{\text{Για } \lambda=0}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$

No. Date

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 2x_2 - 2x_3} \quad x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}.$$

Άρα
$$X = \begin{bmatrix} 2x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα κάθε ιδιοδιάνυσμα X της μήτρας που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=0$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Για } \lambda = 9}$

$$\begin{bmatrix} 1-9 & -2 & 2 \\ -2 & 4-9 & -4 \\ 2 & -4 & 4-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \underset{R_1 \to \frac{1}{2}R_1}{\overset{R_2 \to R_2 + R_3}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} -4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -9x_2 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ -4x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = \frac{x_3}{2} \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα $X = \begin{bmatrix} x_3/2 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{x_3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Δηλαδή κάθε ιδιοδιάνυσμα X της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=9$ είναι γραμμικός συνδυασμός (πολλαπλάσιο) του διανύσματος $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

β) Να βρεθεί η μήτρα A^{100}

Απάντηση

Θα διαγωνιοποιήσουμε την μήτρα A.

Πρόταση: Μια μήτρα διαγωνοποιείται αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Η μήτρα $A \in M_3$ έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ άρα διαγωνοποιείται, δηλαδή υπάρχουν μήτρες P και D, ώστε

$$P^{-1}AP = D,$$

όπου D διαγώνια μήτρα.

Η μήτρα P έχει ως στήλες τα 3 αυτά ιδιοδιανύσματα (σε οποιαδήποτε σειρά).

Η μήτρα D έχει ως στοιχεία της κύριας διαγωνίου τις ιδιοτιμές της μήτρας A (αλλά με την σειρά που έχουμε χρησιμοποιήσει για τα ιδιοδιανύσματα στην P)

Άρα, από τα προηγούμενα

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Πρέπει να βρούμε την P^{-1}: Αλγόριθμος Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 \to -2R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 + 2R_3 \\ R_2 \to R_2 + 5/2\, R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Άρα $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Άρα $A^{100} = (PDP^{-1})^{100} = PD^{100}P^{-1}$

οπότε

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[P^{-1}AP = D \Leftrightarrow PP^{-1}AP = PD \Leftrightarrow PA = PD \Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \right]$$

γ) Να βρεθεί το διάνυσμα

$$Y = A^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Απάντηση

Τα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^3$, άρα κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών.

Στο παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Άρα $$A^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = A^{100} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{100} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + A^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Υπενθύμιση: Αν λ, X ιδιοτιμές ιδιοδιάνυσμα, τότε

$$AX = \lambda X$$

$$A^2X = AAX = A\lambda X = \lambda AX = \lambda^2 X$$

$$A^3X = AA^2X = A\lambda^2X = \lambda^2AX = \lambda^3X.$$

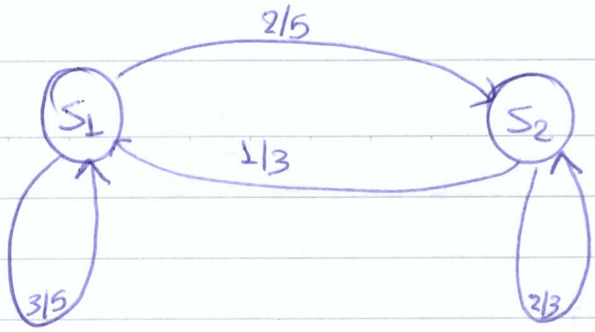
$$A^nX = \lambda^nX$$

Άρα $$A^{100} = 0^{100} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0^{100} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 9^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 9^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Ένα σύστημα S μπορεί να βρίσκεται σε μία από δύο καταστάσεις S_1, S_2. Σε κάθε χρονική στιγμή t το σύστημα αλλάζει κατάσταση με βάση τις παρακάτω πιθανότητες.



Τη χρονική στιγμή $t=0$, το σύστημα S βρίσκεται στην κατάσταση S_1. Να βρεθεί η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην S_1 την χρονική στιγμή $t=n$.
Επιπλέον, να βρεθεί η ίδια πιθανότητα καθώς $n \to +\infty$

Απάντηση

Έστω X_t το 2×1 διάνυσμα τα στοιχεία του οποίου είναι οι πιθανότητες το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση S_1, S_2 την χρονική στιγμή t.

Π.χ. • Αν $X_t = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}$ τότε το σύστημα την χρονική στιγμή t είναι στην κατάσταση S_1 με πιθανότητα $4/7$ και στην κατάσταση S_2 με πιθανότητα $3/7$.

• Αν $X_t = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ τότε αντίστοιχα η S_1 έχει πιθανότητα $2/3$ και η S_2 πιθανότητα $1/3$.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων του X_t είναι ίσο με 1.
Επομένως, στο παράδειγμά μας θα ισχύει ότι για κάθε χρονική στιγμή t, το X_t θα είναι της μορφής

No. Date

$$X_t = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \text{ όπου } 0 \le p \le 1$$

Επίσης, <u>παρατηρούμε ότι</u> αν $X_t = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$ τότε

το X_{t+1} έχει την εξής μορφή:

Η πιθανότητα να φτάσω στην S_1 την χρονική στιγμή t+1:

$$\frac{3}{5} \cdot p + \frac{1}{3}(1-p)$$

πιθανότητα να βρίσκομαι στην S_1 τη χρονική στιγμή t

πιθανότητα να βρίσκομαι στην S_2 τη χρονική στιγμή t

Επίσης, η πιθανότητα να φτάσω στην S_2 τη χρονική στιγμή t+1 είναι

$$\frac{2}{5}p + \frac{2}{3}(1-p)$$

πιθανότητα να βρίσκομαι στην S_1 τη χρονική στιγμή t

πιθανότητα να βρίσκομαι στην S_2 τη χρονική στιγμή t.

Άρα

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}p + \frac{1}{3}\cdot(1-p) \\ \frac{2}{5}p + \frac{2}{3}\cdot(1-p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X_{t+1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot X_t \quad (*)}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} X_0$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix} X_1 = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix}^2 X_0$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix} X_2 = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix}^3 X_0$$

$$\boxed{\text{Γενικά:} \quad X_n = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix}^n X_0}$$

Η μήτρα U όπου

$$U = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix}$$

αναφέρεται μήτρα μετάβασης του συστήματος (transition matrix).

- Ιδιοτιμές της U: $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \frac{4}{15}$
- Ιδιοδιανύσματα της U: $\begin{bmatrix} 5/6 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{6}{11}\begin{bmatrix} 5/6 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(-\frac{6}{11}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Άρα,

- $X_n = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix}^n X_0 = \frac{6}{11}\begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{11}\begin{bmatrix} 3/5 & 1/3 \\ 2/5 & 2/3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \boxed{X_n = \frac{6}{11} 1^n \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{11}\left(\frac{4}{15}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Επειδή $\frac{4}{15}<1$ καθώς $n\to\infty$ $\left(\frac{4}{15}\right)^n\to 0$

Άρα καθώς $n\to\infty$

$$X_n=\frac{6}{11}\begin{bmatrix}5/6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/11\\6/11\end{bmatrix}$$

Δηλαδή καθώς $n\to\infty$ το σύστημα βρίσκεται στην S_2 6 στις 11 φορές και στην S_1 5 στις 11 φορές.

Γενική Θεωρία.

Μια nxn μήτρα ονομάζεται στοχαστική ή μήτρα Markov αν τα στοιχεία της είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης ισούται με 1.

Πρόταση

Αν η M είναι στοχαστική, τότε έχει ιδιοτιμή το 1 και επιπλέον κάθε άλλη ιδιοτιμή της είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη του 1.
Επιπρόσθετα, κάθε διάνυσμα στήλη με μη αρνητικά στοιχεία που αθροίζουν στο 1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων της M.

Άσκηση 3

a) Να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγεται από τα διανύσματα

$x_1=(1,2,-1,2)$, $x_2=(2,2,2,1)$, $x_3=(-1,0,2,2)$

Απάντηση

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Gram-Schmidt

No. Date

$V_1 = \frac{1}{\|y_1\|} y_1$ όπου $y_1 = x_1$

$V_2 = \frac{1}{\|y_2\|} y_2$ όπου $y_2 = x_2 - \langle x_2, v_1 \rangle v_1$

$V_3 = \frac{1}{\|y_3\|} y_3$ όπου $y_3 = x_3 - \langle x_3, v_1 \rangle v_1 - \langle x_3, v_2 \rangle v_2$

$y_1 = x_1 = (1, 2, -1, 2)$

$\|y_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{10}$

$\rightarrow V_1 = \frac{1}{\|y_1\|} y_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 2, -1, 2)$

$y_2 = x_2 - \langle x_2, v_1 \rangle v_1 = (2, 2, 2, 1) - \left(\frac{1}{\sqrt{10}} (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) \right) \cdot$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 2, -1, 2) =$

$= (2, 2, 2, 1) - \frac{1}{10} \cdot 6 \cdot (1, 2, -1, 2) =$

$= (2, 2, 2, 1) - \frac{6}{10} (1, 2, -1, 2) =$

$= (2, 2, 2, 1) - \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5} \right) =$

$= \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{13}{5}, -\frac{1}{5} \right)$

$\|y_2\| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{49 + 16 + 169 + 1}}{5} = \frac{\sqrt{235}}{5} = \sqrt{\frac{47}{5}}$

$\rightarrow V_2 = \frac{5}{\sqrt{235}} \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{13}{5}, -\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{\sqrt{235}} (7, 4, 13, -1)$

$y_3 = x_3 - \langle x_3, v_1 \rangle v_1 - \langle x_3, v_2 \rangle v_2 =$

$= (-1, 0, 2, 2) - \left(\frac{1}{\sqrt{10}} (-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 2, -1, 2) -$

$- \left(\frac{1}{\sqrt{235}} ((-1) \cdot 7 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot (-1) \right) \frac{1}{\sqrt{235}} (7, 4, 13, -1) =$

No. Date

$$= (-1, 0, 2, 2) - \frac{1}{10} \cdot 1 \cdot (1, 2, -1, 2) - \frac{1}{235} \cdot 17 \cdot (7, 4, 13, -1) =$$

$$= (-1, 0, 2, 2) - \left(-\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right) - \left(\frac{119}{235}, \frac{68}{235}, \frac{221}{235}, -\frac{17}{235}\right) =$$

$$= \left(-\frac{470}{470}, 0, \frac{940}{470}, \frac{940}{470}\right) - \left(-\frac{47}{470}, \frac{94}{470}, -\frac{47}{470}, \frac{94}{470}\right) -$$

$$- \left(\frac{238}{470}, \frac{136}{470}, \frac{442}{470}, -\frac{34}{470}\right) =$$

$$= \left(-\frac{470}{470} + \frac{47}{470} - \frac{238}{470}, 0 - \frac{94}{470} - \frac{136}{470}, \frac{940}{470} + \frac{47}{470} - \frac{441}{470}, \frac{940}{470} - \frac{94}{470} + \frac{34}{470}\right)$$

$$= \left(\frac{-755}{470}, \frac{-230}{470}, \frac{545}{470}, \frac{880}{470}\right)$$

$$\rightarrow v_3 = \frac{1}{\|y_3\|} y_3$$

Άρα η ζητούμενη ορθοκανονική βάση αποτελείται από τα v_1, v_2, v_3.

Άσκηση 4

Να διαγωνιοποιηθούν ορθογωνίως (αν γίνεται) οι μήτρες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

και

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Απάντηση Η A_1 δεν διαγωνοποιείται ορθογωνίως, διότι δεν είναι συμμετρική.

$$|A_2 - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = \sqrt{23}, \ \lambda_3 = -\sqrt{23}$$

Επομένως, υπάρχουν 3 ιδιοδιανύσματα (1 για κάθε ιδιοτιμή) τα οποία είναι ανά δύο ορθογώνια.

$\boxed{\text{Για } \lambda = -2}$

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & 2 & 3 \\ 2 & -1-(-2) & 3 \\ 3 & 3 & -2-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$X = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Για } \lambda = \sqrt{23}}$

$$X = c_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(3+\sqrt{23}) \\ \frac{1}{6}(1+\sqrt{23}) \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Για } \lambda = -\sqrt{23}}$

$$X = c_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(3-\sqrt{23}) \\ \frac{1}{6}(1-\sqrt{23}) \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_3 \in \mathbb{R}$$

Για να βρούμε την ορθογώνια μήτρα P αρκεί να κανονικοποιήσουμε τα 3 ιδιοδιανύσματα

$$(-3)^2 + (3)^2 + 1^2 = 19$$

Άρα, η πρώτη στήλη είναι $\frac{1}{\sqrt{19}} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{19} \\ 3/\sqrt{19} \\ 1/\sqrt{19} \end{bmatrix}$

No. Date

$$\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{23})\right)^2+\left(\frac{1}{6}(1+\sqrt{23})\right)^2+1^2=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{23}+23+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}\sqrt{23}+23+1=$$

$$=47+\frac{10}{36}+\frac{10}{18}\sqrt{23}$$

Η δεύτερη στήλη είναι

$$\frac{1}{\sqrt{47+\frac{10}{36}+\frac{10}{18}\sqrt{23}}}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}(3+\sqrt{23})\\ \frac{1}{6}(1+\sqrt{23})\\ 1\end{bmatrix}$$

~~Και άρα η τρίτη στήλη είναι~~

Άρα, η τρίτη στήλη είναι

$$\frac{1}{\sqrt{47-\frac{10}{36}+\frac{10}{18}\sqrt{23}}}\begin{bmatrix}1/6\,(3-\sqrt{23})\\ 1/6\,(1-\sqrt{23})\\ 1\end{bmatrix}$$

Οπότε σωστή είναι η P
και η αντίστροφή της είναι η ανάστροφή της.
και $A_2 = P\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{23} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{23}\end{bmatrix}P^t$

No. Date