17-03-2018

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2° ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Άσκηση 1 (SOS)

Να διερευνηθεί και να λυθεί το σύστημα

$$x + y = 1$$
$$2x + z = a \qquad a, b \in \mathbb{R}$$
$$bx + y + z = 4$$

για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ένα 3x3 σύστημα

Θα χρησιμοποιήσουμε την ορίζουσα D των συντελεστών του συστήματος.

Υπενθ. : - Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. (Την βρίσκουμε με Gauss ή με τον τρόπο των οριζουσών : $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$

D_x, D_y, D_z είναι οι ορίζουσες που προκύπτουν αν στις στήλες των x, y, z βάλουμε την στήλη $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{bmatrix}$.

- Αν $D = 0$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις (Gauss).

Η τιμή της ορίζουσας δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή προσθέσουμε το πολλαπλάσιο μιας άλλης.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - bR_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1-b & 1 \end{vmatrix}$$

ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης.

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1-b & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 + (1-b) = \boxed{b-3}$$

- Αν $b \neq 3$ τότε $D \neq 0$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{b-3} = \ldots$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ b & 4 & 1 \end{vmatrix}}{b-3} = \dots$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ b & 1 & 4 \end{vmatrix}}{b-3} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - bR_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-2 \\ 0 & 1-b & 4-b \end{vmatrix}}{b-3} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & a-2 \\ 1-b & 4-b \end{vmatrix}}{b-3} =$$

$$= \frac{(-2)(4-b) - (1-b)(a-2)}{b-3}.$$

- Αν $b=3$, δηλ. $D=0$ έχουμε το σύστημα:

$$x+y=1$$
$$2x+z=a$$
$$3x+y+z=4$$

Η επαυξημένη μήτρα του συστήματος είναι η εξής:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & a-2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{bmatrix}$$

• Αν $a \neq 3$ τότε έχουμε την εξίσωση $0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 3-a$ η οποία είναι αδύνατη. άρα και το σύστημα είναι αδύνατο.

• Αν $A=3$, τότε το σύστημα έχει την μορφή

$$x+y=1 \Rightarrow x = 1-y$$
$$-2y+z=1 \quad\quad z = 1+2y$$
$$y \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$(x,y,z) = (1-y, y, 1+2y)$, $y \in \mathbb{R}$.

ΆΣΚΗΣΗ 2

Να δειχθούν οι ισότητες:

α)
$$D=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(b-c)(c-d).$$

$$D = a\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{R_2\to R_2-R_1,\ R_3\to R_3-R_1} a\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= a\cdot 1\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a\cdot(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3\to C_3-C_1]{C_2\to C_2-C_1}$$

$$= a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-a & c-b & c-b \\ b-a & c-b & d-b \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{γραμμή}]{\text{ανάπτυγμα ως προς 1η}} a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)\left[(c-b)(d-b)-(c-b)(c-b)\right] = a\cdot(b-a)(c-b)\left((d-b)-(c-b)\right) =$$
$$= a(b-a)(c-b)(d-c) = a(b-a)(b-c)(c-d).$$

β) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{1η στήλη}]{\text{ανάπτυγμα ως}} 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (5 \cdot 3) - (8 \cdot (-1)) = 1 \cdot 15 + 8 = 23.$

γ) $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 100 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{προς 2η στήλη}]{\text{ανάπτυγμα ως}} -7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-7)(4-32) = 7 \cdot 28$

δ) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

$D \xrightarrow[R_3 \to R_3 - a^2 R_1.]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = 1 \cdot (b-a)(c-a) \cdot (1 \cdot (c+a) - 1(b+a))$

$= (b-a)(c-a)((c+a)-(b+a)) =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

ε)
$$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(a-b)(b-c)(a-c).$$

$$D \xrightarrow[C_3\to C_3-C_1]{C_2\to C_2-C_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2(2a+2) \\ b^2 & 2b+1 & 2(2b+2) \\ c^2 & 2c+1 & 2(2c+2) \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3\to C_3-C_2]{\text{βγάζω το 2 κοινό παράγ.}}$$

$$2\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} 2\cdot\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2-a^2 & 2(b-a) & 0 \\ c^2-a^2 & 2(c-a) & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{προς τη 3η στήλη.}]{\text{ανάπτυγμα ως}}$$

$$2\cdot 1\begin{vmatrix} b^2-a^2 & 2(b-a) \\ c^2-a^2 & 2(c-a) \end{vmatrix} = 2\cdot 2(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & 1 \\ c+a & 1 \end{vmatrix} = 4(b-a)(c-a)(b-c)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Πολυωνυμική παρεμβολή με Gauss)

Να βρεθεί ένα πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού το οποίο διέρχεται από τα σημεία $(1,3)$, $(2,-2)$, $(3,-5)$, $(4,0)$

Υπενθ. Για οποιαδήποτε* $n+1$ σημεία του επιπέδου υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n το οποίο διέρχεται από $n+1$ σημεία.

* διαφορετικές συντεταγμένες του x.

Έστω $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ είναι το ζητούμενο πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού. Ψάχνουμε να βρούμε τα a,b,c,d ενώ γνωρίζουμε ότι $p(1)=3$ $p(2)=-2$, $p(3)=-5$, $p(4)=0$.

Έχουμε την επαυξημένη μήτρα του συστήματος:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & -5 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{Παραλλαγή του Gauss.} \\ R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \\ R_4\to R_4-R_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & -5 \\ 26 & 8 & 2 & 0 & -8 \\ 63 & 15 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1\to R_1-R_2 \\ R_3\to R_3-2R_2 \\ R_4\to R_4-3R_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 & 0 & 1 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & -5 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 42 & 6 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} R_3} \begin{bmatrix} -6 & -2 & 0 & 1 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & -5 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 42 & 6 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 3R_3 \\ R_4 \to R_4 - 6R_3}]{R_1 \to R_1 - 2R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ -11 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$6a + d = 10 \Rightarrow 6 + d = 10 \Rightarrow \boxed{d = 4}$

$-11a + c = -8 \Rightarrow -11 + c = -8 \Rightarrow \boxed{c = 3}$

$6a + b = 1 \Rightarrow 6 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -5}$

$6a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

Άρα $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Είναι γνωστό ότι το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n+3} 7k+5$ είναι πολυώνυμο του n βαθμού 2. Να βρεθεί τύπος για το άθροισμα.

Έστω $p(n) = a + nb + n^2 c$

Για $\boxed{n=0}$ $\sum_{k=0}^{3} 7k+5 = 5+12+19+26 = 62$. άρα $\boxed{p(0) = 62}$

Για $\boxed{n=1}$ $\sum_{k=0}^{4} (7k+5) = 62+33 = 95$ άρα $\boxed{p(1) = 95}$

Για $\boxed{n=2}$ $\sum_{k=0}^{5} (7k+5) = 95+40 = 135$ άρα $\boxed{p(2) = 135}$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 62 \\ 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & 2 & 4 & 135 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 62 \\ 0 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 2 & 4 & 73 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 62 \\ 0 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$a = 62$

$b + c = 33 \Rightarrow b + 7/2 = 33 \Rightarrow b = 59/2$

$2c = 7 \Rightarrow c = 7/2$

Άρα το άθροισμα ισούται με $p(n) = 62 + \frac{59}{2} n + \frac{7}{2} n^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρεθεί το rank της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπενθ. Το rank μιας μήτρας A που είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα B ισούται με τον αριθμό των ΜΗ-ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ γραμμών της B

$$A \xrightarrow[\substack{R_4 \to R_4 - R_1 \\ R_5 \to R_5 - R_1}]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4 \to R_4 - 2R_2 \\ R_5 \to R_5 + R_2}]{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπάρχουν 2 ΜΗ-ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ άρα το rank(A) = 2.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rank = ο ελάχιστος αριθμός από γραμμές για να φτιάξω τις άλλες

Άσκηση 6

Έστω 5×5 μήτρες A, B με ορίζουσες $|A| = 2$ και $|B| = 3$.
Να βρεθούν οι τιμές των οριζουσών των παρακάτω μητρών.

α) $A^2 \Rightarrow \det(A^2) = \det(A)^2 = 4.$ Το 7 πολλ/ται σε κάθε γραμμή της A..

β) $7 \cdot A \Rightarrow \det(7 \cdot A) = 7^{5} \cdot \det(A) = 7^5 \cdot 2$

γ) $A \cdot B \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 2 \cdot 3 = 6.$

δ) $\det(A) \cdot B \Rightarrow \det(\det(A) \cdot B) = \det(A)^5 \cdot \det(B) = 2^5 \cdot 3$

ε) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{2}$

στ) $\det(A^2 + A) \Rightarrow \ldots$

ζ) $\det(A+B)$ = ΔΕΝ ΕΠΑΡΚΟΥΝ ΟΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΠΟΥ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ.