ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

3° ΦΡΟΝΤ. 28/04/2018

ΣΗΜΕΡΑ : ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ Δ. Χ.

Άσκηση 1

Να εξεταστεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

σφαίρα στον 3d χώρο

α) $W = \{ (x,y,z) : \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

- Το $W \neq \emptyset$ διότι $(1,0,0) \in W$
- Όμως το W δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι το διάνυσμα $0 \cdot (1,0,0) = (0,0,0) \notin W$.

β) $W = \{ (x,y,z) : \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \}$

- Το $W \neq \emptyset$ διότι $(1,0,0) \in W$
- Όμως το W δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι $0 \cdot (1,0,0) = (0,0,0) \notin W$

γ) $W = \{ (x,y,z) : \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0 \}$

- Το $W \neq \emptyset$ διότι $(0,0,0) \in W$
- Έστω $v = (x,y,z)$, $u = (a,b,c) \in W$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

τότε θα δείξουμε ότι $\kappa v + \lambda u \in W$.

$\kappa v + \lambda u = (\kappa x + \lambda a, \kappa y + \lambda b, \kappa z + \lambda c)$

Για να $\kappa v + \lambda u \in W$ πρέπει

$(\kappa x + \lambda a) - 2(\kappa y + \lambda b) + 3(\kappa z + \lambda c) = 0$

$\kappa(x - 2y + 3z) + \lambda(a - 2b + 3c) = 0$

$\kappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = 0$ ισχύει.

δ) $W = \left\{ (x,y,z) : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \right\}$ είναι διανυσματικός χώρος

- $W \neq \emptyset$ διότι $(0,0,0) \in W$.
- Αν $u = (a,b,c)$, $v = (p,q,r) \in W$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\kappa u + \lambda v \in W$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ Ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν είναι το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος.

ΆΣΚΗΣΗ 2

Έστω W ο χώρος που παράγουν τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 3)$ και $v_2 = (5, -1, 2)$.
Να βρεθεί ένα ομογενές σύστημα (η εξίσωση) του οποίου οι λύσεις είναι τα στοιχεία του χώρου W.

Τα διανύσματα του W έχουν την μορφή
$$\kappa v_1 + \lambda v_2 = (\kappa + 5\lambda,\ 2\kappa - \lambda,\ 3\kappa + 2\lambda)$$

ΘΕΤΟΥΜΕ: $x = \kappa + 5\lambda$ Ο στόχος μας είναι να εκφράσουμε το z
$y = 2\kappa - \lambda$ συναρτήσει (με γραμμικό τρόπο) των x, y.
$z = 3\kappa + 2\lambda$

Θα λύσουμε τις 2 πρώτες: θα βρούμε τα λ, κ συναρτήσει των x, y
ΜΕΤΑ, θα αντικαταστήσουμε στη 3^{η} και θα βρούμε μια σχέση ανάμεσα στα x, y, z.

$$\begin{array}{l} x = \kappa + 5\lambda \\ y = 2\kappa - \lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -2x = -2\kappa - 10\lambda \\ y = 2\kappa - \lambda \end{array} \Rightarrow y - 2x = -11\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2x - y}{11}}$$

ΆΡΑ, $y = 2\kappa - \dfrac{2x - y}{11} \Rightarrow 2\kappa = \dfrac{2x - y}{11} + 11 \Rightarrow \boxed{\kappa = \dfrac{2x + 10y}{2 \cdot 11} = \dfrac{x + 5y}{11}}$

Άρα $z = 3 \cdot \kappa + 2\lambda = 3\,\dfrac{x + 5y}{11} + 2 \cdot \dfrac{2x - y}{11}$

$$11z = 3x + 15y + 4x - 2y \Rightarrow \boxed{7x + 13y - 11z = 0}$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΝΟΝΤΑΣ, τα στοιχεία του W είναι τα διανύσματα (x, y, z) που είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος $7x + 13y - 11z = 0$
(1 εξίσωση, 3 αγνώστους).

ΆΣΚΗΣΗ 3

Να βρεθούν οι βάσεις και οι διαστάσεις των παρακάτω διανυσματικών χώρων

α) $W = \{ x, y, z, w \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0 \}$

ΥΠΕΝΘ.: Βάση του W είναι ένα σύνολο διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots v_k$ τα οποία: - είναι γρ. ανεξάρτητα

- παράγουν τον W.

αντικατάσταση του z από την εξίσωση $x+y+z+w=0$

Έστω $v = (x, y, z, w) \in W$ τότε $v = (x, y, x+y+w, w)$

$= (x,0,x,0) + (0,y,y,0) + (0,0,w,w) =$

$= x(1,0,1,0) + y(0,1,1,0) + w(0,0,1,1)$

Άρα, τα διανύσματα $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,0,1,1)$ παράγουν τον χώρο W.

Για να είναι βάση πρέπει να είναι και γρ. ανεξάρτητα.

μηδενικό διάνυσμα

Θεωρούμε την εξίσωση: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ άρα, είναι γρ. ανεξ.

Άρα, τα v_1, v_2, v_3 είναι βάση του W.

Η διάσταση αυτού του χώρου είναι 3, δηλ. $\dim W = 3$.

β) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{bmatrix} : \begin{Bmatrix} a = y \\ p = c \\ x + b = r \\ x = z \end{Bmatrix} \right\}$

Έστω μια μήτρα $M \in W$. Τότε θα ισχύει ότι:

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & x \\ y & b & c \\ c & q & x+b \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$= x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} + y \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_3} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_4} + a \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_5}$$

- Οι M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 είναι γρ. ανεξ. άρα είναι βάση του W και η διάσταση του $W = 5$ δηλ. $\dim W = 5$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να βρεθεί 1 βάση του $\mathbb{R}^4$ που περιέχει τα γρ. ανεξάρτητα διανύσματα:

$v_1 = (1, 2, 1, 0)$ και $v_2 = (1, 1, -1, 1)$

Ο $\mathbb{R}^4$ έχει διάσταση 4, άρα όλες οι βάσεις του έχουν 4 διανύσματα.

- Αφού τα v_1, v_2 είναι γρ. ανεξ., γνωρίζουμε ότι πάντα μπορούμε να βρούμε άλλα επιπλέον $(4-2) = 2$ διανύσματα και να κατασκευάσουμε 1 βάση του $\mathbb{R}^4$.
- Επίσης, γνωρίζουμε ότι 4 γρ. ανεξ. διανύσματα στον $\mathbb{R}^4$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$ άρα, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε αν παράγουν τον χώρο αλλά μόνο αν είναι γρ. ανεξ.
- Τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^4$. Άρα μπορούμε να αναζητήσουμε τα 2 επιπλέον διανύσματα μεταξύ αυτών των 4.

ΛΥΣΗ

Θα δοκιμάσουμε να δούμε αν τα v_1, v_2, e_1 είναι γρ. ανεξάρτητα.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_1 = 0 \iff (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ 2\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_2) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ άρα v_1, v_2, e_1 γρ. ανεξάρτητα.

Θα δοκιμάσουμε να δούμε αν τα v_1, v_2, e_1, e_3 είναι γρ. ανεξ.

Υπενθ. $\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ e_1 \\ e_3 \end{vmatrix} \neq 0 \iff v_1, v_2, e_1, e_3$ γρ. ανεξ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Άρα, τα v_1, v_2, e_1, e_3 είναι γρ. ανεξάρτητα οπότε είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$ που περιέχει τα v_1, v_2

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίδονται τα διανύσματα $v_1 = (1, 7, -1, 2)$ $v_2 = (2, 1, 1, 5)$

Να βρεθούν τα παρακάτω:

α) $\langle v_1, v_2 \rangle = 1\cdot 2 + 7 \cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 2 \cdot 5 = 18$.

β) Το μήκος (norm) των v_1, v_2.

$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{55}$

$\|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{31}$.

γ) Να βρεθεί η γωνία $\theta \in [0, \pi]$ που σχηματίζουν τα v_1, v_2

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\|\,\|v_2\|} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}} = \frac{18}{\sqrt{55}\sqrt{31}} = \frac{18}{\sqrt{1705}}$$

$$\theta = \arccos \frac{18}{\sqrt{1705}} \simeq 1{,}11973$$

δ) Να βρεθεί η προβολή του v_1 πάνω στο v_2

$$P_{v_2}v_1 = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{18}{31}(2,1,1,5)$$

$$P_{v_1}v_2 = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|^2}(v_1) = \frac{18}{55}(1,7,-1,2)$$ ← προβολή του v_2 πάνω στο v_1.

ε) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ τους.

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

$$d(v_1,v_2) = \|v_1 - v_2\| = \sqrt{\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2\rangle} = \sqrt{(1-2)^2 + (7-1)^2 + (-1-1)^2 + (2-5)^2} =$$

$$= \sqrt{1^2 + 6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{50}.$$

στ) Να βρεθεί η απόσταση του v_1 από την προβολή του v_1 πάνω στο v_2.

$$d(v_1, P_{v_2}v_1) = \| v_1 - P_{v_2}v_1\| = \sqrt{\langle v_1 - P_{v_2}v_1, v_1 - P_{v_2}v_1\rangle} = \sqrt{\left\langle v_1 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2, v_1 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \right\rangle}$$

ΥΠΕΝΘ. $\langle ax+by, ax+by\rangle =$
$= a^2\langle x,x\rangle + 2ab\langle x,y\rangle + b^2\langle y,y\rangle$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 - 2\frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\langle v_1, v_2\rangle + \frac{\langle v_1, v_2\rangle^2}{(\|v_2\|^2)^{\cancel{2}}}\cancel{\|v_2\|^2}} =$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle^2}{\|v_2\|^2}} = \sqrt{55 - \frac{18^2}{31}} =$$

$$= \sqrt{\frac{55\cdot 31 - 18^2}{31}} = \frac{\sqrt{1381}}{\sqrt{31}}.$$

Γενικότερα, ισχύει μια γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

$$\|v_1 , P_{v_2}v_1\|^2 = \|v_1\|^2 - \|P_{v_2}v_1\|^2 = \|v_1\|^2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle^2}{\|v_2\|^2}.$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ C-S.

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\Pi = (a+b-2)^2 + (b-7)^2 + (3a+2b-6)^2.$$

Θέτουμε $v = (a+b-2,\ b-7,\ 3a+2b-6)$

Θα βρούμε διάνυσμα $u = (c_1, c_2, c_3)$ ώστε $\langle v, u\rangle$ να μην εξαρτάται από τα a, b.

$$\langle v,u\rangle = c_1(a+b-2) + c_2(b-7) + c_3(2b-6)$$

$$= (c_1+3c_3)a + (c_1+c_2+2c_3)b - 2c_1 - 7c_2 - 6c_3$$

Θέλουμε $c_1 + 3c_3 = 0$, $c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$ | Διαλέγουμε $\boxed{c_3 = 1}$ ← Μπορούμε να διαλέξουμε ό,τι θέλουμε.

$c_1 + 3\cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -3}$

$c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \Leftrightarrow -3 + c_2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{c_2 = 1}$

Άρα $u = (-3, 1, 1)$

Από την ανισότητα C-S έχουμε $\langle v,u\rangle^2 \leq \langle v,v\rangle\langle u,u\rangle$

$\langle v,u\rangle = -2c_1 - 7c_2 - 6c_3 = -2(-3) - 7\cdot 1 - 6\cdot 1 = -7.$

$\langle v,v\rangle = \Pi$

$\langle u,u\rangle = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = (-3)^2 + 1^2 + 1^2 = 11.$

Άρα $(-7)^2 \leq \Pi \cdot 11 \Leftrightarrow \boxed{\Pi \geq \frac{49}{11}}$ ελάχιστη τιμή

Η ισότητα ισχύει όταν τα v, u είναι γρ. εξαρτημένα.

δηλ. $v = \lambda \cdot u$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

$-7 = \langle v,u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \lambda\langle u,u\rangle = \lambda \cdot 11.$

Άρα $\lambda = \frac{-7}{11}.$

Οπότε $v = \frac{-7}{11}u = \frac{-7}{11}(-3, 1, 1).$

Άρα $a + b - 2 = \frac{-7}{11}(-3)$

$b - 7 = \frac{-7}{11}\cdot 1 \Rightarrow \boxed{b = 7 - \frac{7}{11} = 70/11}$

$3a + 2b - 6 = \frac{-7}{11}\cdot 1$

Οπότε $a + b - 2 = 21/11 \Rightarrow a + 70/11 - 22/11 = 21/11 \Leftrightarrow \boxed{a = -27/11}$

Οπότε η ελάχιστη τιμή της Π είναι $49/11$ και προκύπτει για $a = -27/11$ και $b = 70/11$.